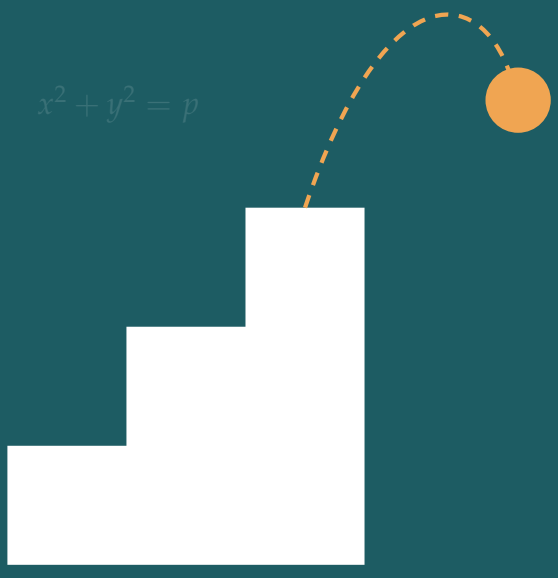
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2015 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2015 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2015 年詳細解答

2015 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 曲線描繪 純數學 . . . 3

第 2 題 三次方程的三角解法 純數學 . . . 7

第 3 題 坐標幾何中的可見性 純數學 . . . 11

第 4 題 參數曲線與面積 純數學 . . . 15

第 5 題 含參數的積分 純數學 . . . 18

第 6 題 幾何中的向量 純數學 . . . 22

第 7 題 區間上的最大值 純數學 . . . 25

第 8 題 冪和的整除性 純數學 . . . 28

第 9 題 拋體運動 力學 . . . 31

第 10 題 相對速度 力學 . . . 34

第 11 題 摩擦力與力矩 力學 . . . 38

第 12 題 雅可比分佈的稀疏化 概率與統計 . . . 42

第 13 題 條件概率 概率與統計 . . . 46

STEP II

第 1 題 不等式與級數 純數學 . . . 50

第 2 題 三角形幾何 純數學 . . . 53

第 3 題 計數與數學歸納法 純數學 . . . 56

第 4 題 反正切函數的分支 純數學 . . . 60

第 5 題 反正切級數 純數學 . . . 66

第 6 題 利用對稱性積分 純數學 . . . 70

第 7 題 相交圓 純數學 . . . 74

第 8 題 向量與相切圓 純數學 . . . 78

第 9 題 剛體轉動 力學 . . . 82

第 10 題 約束運動 力學 86
第 11 題 動量與能量 力學 89
第 12 題 硬幣序列遊戲 概率與統計 94
第 13 題 超數分佈的矩 概率與統計 98

STEP III

第 1 題 歸約公式與代換 純數學 102
第 2 題 分析學 純數學 106
第 3 題 極坐標曲線與面積 純數學 110
第 4 題 三次方程的根 純數學 114
第 5 題 以遞降法證明無理性 純數學 117
第 6 題 根的對稱函數 純數學 120
第 7 題 微分算子 純數學 124
第 8 題 極坐標微分方程 純數學 127
第 9 題 非線性彈性振動 力學 132
第 10 題 轉動的剛桿 力學 136
第 11 題 圓周運動 力學 140
第 12 題 概率生成函數 概率與統計 144
第 13 題 超勻分佈變量的函數 概率與統計 148

詳細解答

STEP I 2015，第 1 題

純數學 • 曲線描繪

STEP I 2015，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q1

關鍵思路

能因式分解（factorise）的都先因式分解。這個二次式可以分解，所以零點（zeros）一目了然；而導數（derivative）同樣是 e^x 乘以一個可分解的二次式，所以轉向點（turning points）也一目了然。草圖畫對之後，要數「曲線 $= k$」有多少個解，只需把一條水平線上下移動，看它與曲線相交多少次。至於第 (ii) 部分，留意新函數其實就是把舊函數在 x^2 處取值，所以幾乎所有結果都可以沿用。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x-1)(x-2)$。

*零點與正負號。*由於 $e^x > 0$，$f(x) = 0$ 當且僅當 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 2$。此外，f 在 $x < \frac{1}{2}$ 及 $x > 2$ 時為正，在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上為負。曲線與 y 軸相交於 $f(0) = 2$。

*轉向點。*由乘積法則（product rule），

$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x-3)(x+1).$$

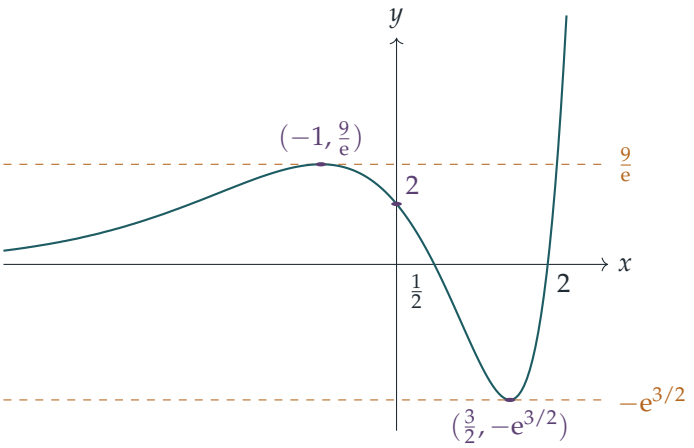
所以 $f'(x) = 0$ 於 $x = -1$ 及 $x = \frac{3}{2}$。f' 的正負號與 $(2x-3)(x+1)$ 相同：$x < -1$ 時為正，在 $(-1, \frac{3}{2})$ 上為負，$x > \frac{3}{2}$ 時為正。因此 f 先遞增，後遞減，再遞增，並且

$$f(-1) = e^{-1}(2 + 5 + 2) = \frac{9}{e} \approx 3.31 \qquad \text{（局部極大值，local maximum），}$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = e^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -e^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{（局部極小值，local minimum）.}$$

*兩端的走勢。*當 $x \to \infty$ 時，兩個因式都增大，所以 $f(x) \to \infty$。當 $x \to -\infty$ 時，由題

目給出的事實（取 $n = 2, 1, 0$）可知 $2x^2e^x$、$-5xe^x$ 及 $2e^x$ 各自趨於 0，所以 $f(x) \to 0$。由於 $f > 0$ 對 $x < \frac{1}{2}$ 成立，曲線從上方趨近負 x 軸：x 軸是一條漸近線（asymptote）。



數算 $f(x) = k$ 的解。解的數目就是水平線 $y = k$ 與曲線相交的次數。逐一考慮曲線的三段單調（monotonic）部分：

- 在 $(-\infty, -1]$ 上，f 嚴格遞增，取遍 $(0, \frac{9}{e}]$ 中每個值恰好一次（它永遠達不到 0）；
- 在 $[-1, \frac{3}{2}]$ 上，f 由 $\frac{9}{e}$ 嚴格遞減至 $-e^{3/2}$，取遍其間每個值恰好一次；
- 在 $[\frac{3}{2}, \infty)$ 上，f 由 $-e^{3/2}$ 嚴格遞增至 ∞，取遍每個值恰好一次。

把各段的貢獻加起來（並小心不要把 $x = -1$ 或 $x = \frac{3}{2}$ 重複計算）：

$k < -e^{3/2}$	無解
$k = -e^{3/2}$	一個解（$x = \frac{3}{2}$）
$-e^{3/2} < k \leq 0$	兩個解
$0 < k < \frac{9}{e}$	三個解
$k = \frac{9}{e}$	兩個解（$x = -1$ 及一個 $x > 2$ 的解）
$k > \frac{9}{e}$	一個解

想一想 為甚麼 $k = 0$ 時有兩個解，而不是三個？

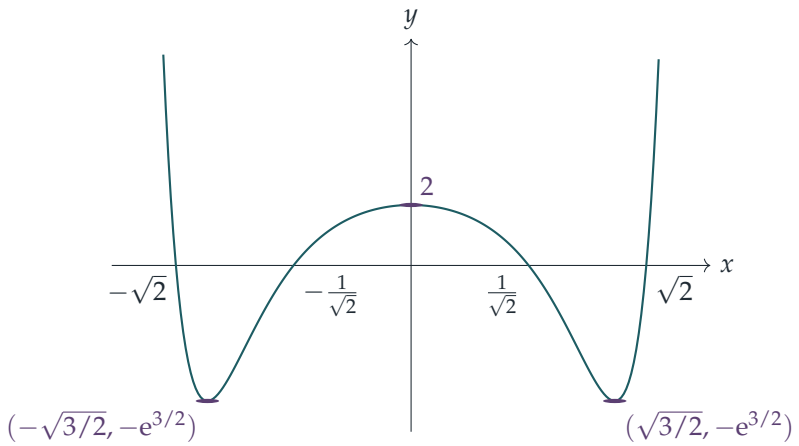
x 軸是左方的漸近線，而且對每個 $x < \frac{1}{2}$ 都有 $f(x) > 0$，所以最左邊的分支永遠不會真正到達 0。$f(x) = 0$ 的解只有 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = 2$。不過，對任何很小的 $k > 0$，左邊的分支確實能到達高度 k，所以解的數目會跳升至三個。

第 (ii) 部分

設 $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$。那麼 $g(x) = f(x^2)$，所以 g 是偶函數（even function），其圖像關於 y 軸對稱。當 x 取遍 $[0, \infty)$ 時，$u = x^2$ 遞增地取遍 $[0, \infty)$，所以對 $x \geq 0$，g 的圖像只是重走 f 的圖像中 $u \geq 0$ 的部分：

- $g(0) = f(0) = 2$；
- 零點在 $x^2 = \frac{1}{2}$ 或 $x^2 = 2$ 處，即 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $x = \pm\sqrt{2}$；
- 由鏈式法則（chain rule），$g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$，它只在 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{3/2}$ 處為零。（f 在 $u = -1$ 處的轉向點消失了，因為 $x^2 = -1$ 沒有實數解。）

當 $0 < x < \sqrt{3/2}$ 時，$g'(x) < 0$；當 $x > \sqrt{3/2}$ 時，$g'(x) > 0$。所以 $(0, 2)$ 是局部極大值點（由對稱性，在 0 的左邊附近 $g' > 0$），而 $x = \pm\sqrt{3/2}$ 是極小值點，極小值為 $f(\frac{3}{2}) = -\mathrm{e}^{3/2}$。最後，當 $x \to \pm\infty$ 時 $g(x) \to \infty$，而且由於因子 e^{x^2}，增長得非常快。曲線呈「W」形：



驗算

- $f(-1) = 9/\mathrm{e} \approx 3.311$ 及 $f(1.5) = -\mathrm{e}^{1.5} \approx -4.482$；在附近幾點計算 f 的值，可確認它們分別是極大值和極小值。
- 在 $x = 0$ 附近，$g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$，是一條開口向下的拋物線（parabola），確認了 $(0, 2)$ 是局部極大值點。
- 已用電腦對每個範圍內的樣本 k 值核實根的數目（例如 $k = 2$ 有三個根，$k = -1$ 有兩個根）。

- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$：正數，而且極小，與漸近線的預測一致。

常見錯誤

- 忘記曲線在左方只是趨近 x 軸，因而在 $k = 0$ 時數出三個解。
- 漏掉邊界情況 $k = \frac{9}{e}$ 及 $k = -e^{3/2}$；在這些情況下，水平線與曲線相切（tangent），兩個解合而為一。
- 在第 (ii) 部分，保留了對應 $x^2 = -1$ 的轉向點。

STEP 之外

上面的數解論證建基於介值定理（intermediate value theorem）加上嚴格單調性（strict monotonicity）：在區間上連續且嚴格遞增的函數，會取遍兩端值之間的每個值恰好一次。大學的數學分析課程會嚴謹地證明這些事實，以及題目容許你假設的極限 $x^n e^x \to 0$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本非常易讀的書，可以看看這些證明是怎樣做的。

詳細解答

STEP I 2015，第 2 題

純數學 • 三次方程的三角解法

> **STEP I 2015，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q2

關鍵思路

三次式（cubic）$4x^3 - 3x$ 正正就是三倍角公式（triple-angle formula）所給出的形式：$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$。因此，這種形式的三次方程可以透過猜一個餘弦值來求解。一旦知道其中一個根（root），便可以因式分解（factorise），再解餘下的二次方程（quadratic）。在最後一部分，代換 $y = 2x$ 把題目給出的三次方程化成這種形式，而第 (i) 部分則提供了我們所需的準確值。

解答

第 (i) 部分

把 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ 寫出，並使用複角公式（compound-angle formulae）：

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

此即所求。同樣地，

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

把分母有理化（rationalising the denominator）後，得到等價的形式

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

這兩個形式在第 (iii) 部分會更方便使用。

第 (ii) 部分

設 $c = \cos\alpha$ 及 $s = \sin\alpha$。展開 $\cos(2\alpha + \alpha)$，

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

所以 $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$：$x = \cos\alpha$ 是一個根。

至於其餘的根，把 $\cos 3\alpha$ 換成 $4c^3 - 3c$，然後因式分解：

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)\big(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3\big).\end{aligned}$$

? **想一想** 該如何化簡這個二次因式的判別式？

利用 $c^2 + s^2 = 1$，判別式（discriminant）為 $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$。它的平方根是 $4\sqrt{3}\,|s|$，但由於我們同時取 $\pm$ 兩個符號，所以可以略去絕對值。二次公式（quadratic formula）給出

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

因此另外兩個根是

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad \text{及} \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

它們就是 $\cos(\alpha - 120°)$ 和 $\cos(\alpha + 120°)$。這是合理的：$3(\alpha \pm 120°) = 3\alpha \pm 360°$，所以這兩個角的 $\cos 3\theta$ 與 α 的相同。

第 (iii) 部分

? **想一想** 題目給出的三次式是 $y^3 - 3y - \sqrt{2}$，而不是 $4x^3 - 3x - \cdots$。該如何把兩者配合起來？

我們希望三次項與一次項的係數（coefficient）之比為 4 比 3，與第 (ii) 部分一樣。設 $y = 2x$：

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

這正是第 (ii) 部分的方程，其中 $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$，所以可以取 $\alpha = 15°$。第 (ii) 部分於是給出三個根 x。它們互不相同（見下文），因此就是這個三次方程的全部根，而

由 $y = 2x$ 得

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

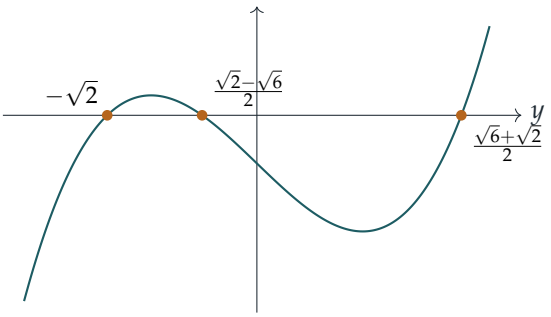
現在代入第 (i) 部分的值。

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$，化簡後得 $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$。

這裏用了 $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$。這三個值顯然互不相同。所以解為

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

以角度表示，它們分別是 $2\cos 15^\circ$、$2\cos 255^\circ$ 及 $2\cos 135^\circ$。



驗算

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ 的 y^2 係數為零，所以各根之和必為零。的確，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$。
- 各根之積應為 $\sqrt{2}$。由於 $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$，各根之積為 $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$。
- 根 $y = -\sqrt{2}$ 很容易直接驗證：$-2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$。以數值計算，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$，而 $(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$。
- 在第 (ii) 部分中，$\alpha = 0$ 給出方程 $4x^3 - 3x - 1 = 0$，即 $(x-1)(2x+1)^2 = 0$。公式給出的根為 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$，與預期相符。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分忘記作伸縮代換，結果解了 $4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$。這個方程需要 $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$，這是不可能的。
- 給出 x 的答案，而不是 $y = 2x$ 的答案。
- 寫出 $\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$，卻沒有指出 $\pm$ 號已照顧到 $\sin\alpha < 0$ 的情況。

STEP 之外

這是解有三個實根的三次方程的三角方法，歸功於韋達（Viète）。任何三次方程都可以經平移消去平方項，得到 $t^3 + pt + q = 0$。當 $p < 0$ 時，伸縮代換 $t = 2\sqrt{-p/3}\,x$ 把它化成 $4x^3 - 3x = k$。在這種情況下，卡爾達諾（Cardano）公式幫不上忙，因為即使三個根全是實數，它也要經過負數的平方根。弄明白為何會這樣，以及為何餘弦技巧能避開這個問題，便會自然地引向複數（complex numbers）和單位根（roots of unity）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對此給出了優美的幾何圖像。

詳細解答

STEP I 2015，第 3 題

純數學 • 坐標幾何中的可見性

STEP I 2015，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

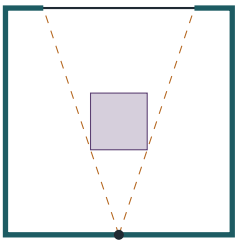
step.maths.org/questions/15-s1-q3

關鍵思路

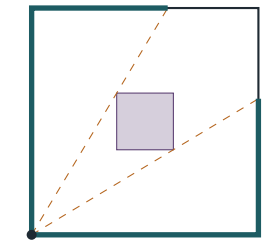
守衛的視線會被建築物擋住；由於建築物是一個凸（convex）正方形，剛好擦過建築物某個角的直線，就標示出牆上可見部分的終點。因此，對每個位置，我們畫出這些擦角線，找出它們與周界（perimeter）的交點，再把可見的長度加起來。所有工作都靠相似三角形（similar triangles）（或直線方程）完成。數值 $3a$ 的出現，是因為當 b 取這個值時，從牆中點出發的擦角線剛好到達庭院的一個角。

解答

把原點放在中心，於是周界牆是邊在 $x = \pm\frac{b}{2}$、$y = \pm\frac{b}{2}$ 上的正方形，而建築物是正方形 $|x| \leq \frac{a}{2}$、$|y| \leq \frac{a}{2}$，其中 $0 < a < b$。周界的總長度是 $4b$。守衛能看見牆上的點 Q，當且僅當由守衛到 Q 的線段不穿過建築物。



牆的中點（$b > 3a$）



角落

牆上加粗（青色）的部分是守衛能看見的部分；虛線擦過建築物的角。

守衛在牆的中點

設守衛在 $G = (0, -\frac{b}{2})$，即底牆的中點。整幅底牆都可見，因為建築物嚴格位於它的上方：長度為 b。由於圖形關於 y 軸對稱（symmetry），我們只需看右邊。

一條向右上方的視線不碰到建築物，當且僅當它從最接近它的角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ 的右邊經過。（這條直線先遇到 $y = -\frac{a}{2}$，而且它的 x 坐標隨高度上升而增加；所以如果它在高度 $-\frac{a}{2}$ 處位於建築物右邊，就會一直留在右邊；如果它在該處位於 K 的左邊，它便會進入建築物，因為在高度 $-\frac{a}{2}$ 處它的 x 坐標介乎 0 與 $\frac{a}{2}$ 之間。）因此 G 所見範圍的邊界是直線 GK，它在水平距離 $\frac{a}{2}$ 內上升 $\frac{b-a}{2}$，所以斜率（gradient）是 $\frac{b-a}{a}$。

這條直線在以下高度與右牆 $x = \frac{b}{2}$ 相交：

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

它到達該牆頂端（$y_1 \geq \frac{b}{2}$）當且僅當 $\frac{b-a}{a} \geq 2$，即 $b \geq 3a$。

> **想一想** 為甚麼 b 與 $3a$ 的比較會在這裡出現？

它決定擦角線 GK 撞上哪一幅牆：若 $b < 3a$，撞上右牆；若 $b > 3a$，則撞上遠端（頂部）的牆。兩種情況給出不同的可見長度公式。

情況 $b < 3a$。守衛看見右牆從底角至高度 y_1 的部分，長度為

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

此外便看不見其他部分（任何連向該牆更高點或頂牆的直線，都從 K 的左邊經過）。加上左邊對應的一段，總可見長度為

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

情況 $b > 3a$。這時整幅右牆（長度 b）都可見，而直線 GK 上升 b 後與頂牆 $y = \frac{b}{2}$ 相交，交點為

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

由於 $2a < b - a$，這個值小於 $\frac{b}{2}$。守衛看見頂牆由該點至角落的部分，長度為 $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$。把底牆、兩幅側牆和頂牆的兩段加起來：

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a) + b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

守衛在角落

設守衛在 $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$。經過 H 的兩幅牆完全可見：長度為 $2b$。圖形關於對角線 $y = x$ 對稱，所以只看右牆。按照與前面相同的論證，可見部分由經過 H 與角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$

的直線截斷，其斜率為

$$\frac{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}}=\frac{b-a}{b+a}.$$

在到達牆 $x=\frac{b}{2}$ 的水平距離 b 內，它上升 $\frac{b(b-a)}{a+b}$，這個值小於 b，所以無論 a 和 b 取甚麼值，這條直線總是撞上右牆。守衛看見右牆長度 $\frac{b(b-a)}{a+b}$ 的部分，頂牆亦看見同樣長度，兩幅牆的其餘部分都看不見。因此

$$C=2b+\frac{2b(b-a)}{a+b}=\frac{2b(a+b)+2b(b-a)}{a+b}=\frac{4b^2}{a+b}.$$

比較兩個位置

情況 $b<3a$。

$$C-M=\frac{4b^2}{a+b}-\frac{b^2}{a}=\frac{b^2\big(4a-(a+b)\big)}{a(a+b)}=\frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)}>0,$$

所以**角落**較佳。

情況 $b>3a$。

$$M-C=\frac{b(4b-6a)}{b-a}-\frac{4b^2}{a+b}=\frac{b\big[(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)\big]}{(b-a)(a+b)}=\frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)}>0,$$

因為 $(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)=4b^2-2ab-6a^2-4b^2+4ab=2ab-6a^2$。所以**牆的中點**較佳。

當 $b=3a$ 時，M 的兩條公式都給出 $9a$，而 $C=\frac{36a^2}{4a}=9a$ 亦然，所以兩個位置一樣好。

驗算

- 取 $a=1$、$b=2$：$M=4$，$C=\frac{16}{3}\approx 5.33$，所以角落勝出。取 $a=1$、$b=5$：$M=\frac{5\cdot 14}{4}=17.5$，$C=\frac{100}{6}\approx 16.67$，所以中點勝出。這些數值已由電腦驗算證實，該驗算測試了通往牆上數千個點的視線。
- 若 $b\to a$，建築物填滿整個庭院：$M\to a$（只有守衛所在的牆）而 $C\to 2a$（在角落相交的兩幅牆），正如預期。
- 當 $b\to\infty$ 時，建築物變得微不足道：$M=\frac{b(4b-6a)}{b-a}$ 與 $C=\frac{4b^2}{a+b}$ 都趨近整個周界 $4b$，而且都一直小於它。

常見錯誤

- 忘記當 $b>3a$ 時，在牆中點的守衛除了兩幅側牆，還能看見對面牆的一部分。

- 擦錯建築物的角：從下方看，起作用的是底部的兩個角 $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$。
- 總長度中漏掉守衛自己所在的牆（或兩幅牆）。

STEP 之外

關於從某點能看見區域哪些部分的問題，屬於計算幾何（computational geometry）的範疇：經典的「美術館定理」（art gallery theorem）指出，要監看一個有 n 幅牆的多邊形展覽館的每一點，$\lfloor n/3 \rfloor$ 名守衛總是足夠，而有時亦確實需要這麼多。像這裡那樣求出可見區域（visibility region），是這類問題的基本步驟；在電腦圖形學中亦然，隱藏面消除（hidden-surface removal）就是以同樣方式運作。如想做更多這類風格的題目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學高階問題》）是很好的下一步。

詳細解答

STEP I 2015，第 4 題

純數學 • 參數曲線與面積

> **STEP I 2015，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q4

關鍵思路

以曲線的斜率（gradient）作為參數。若中點處的切線（tangent）與 x 軸成角 θ，則該處的斜率為 $\tan\theta$，由此便確定了中點的位置。棒的每一端都沿單位向量（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向與中點相距 b。至於面積，半條棒 AP 正好落在 P 點的切線上，所以所求區域其實就是拋物線（parabola）與它的一條切線之間的空隙，而對應的被積函數（integrand）是一個完全平方（perfect square）。

解答

一端的軌跡

設中點為 P，並設棒與 x 軸正方向成角 θ。由於 $y = \frac{1}{4}x^2$ 有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$，而棒在 P 點與曲線相切，故

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{故} \qquad P = \left(2\tan\theta,\ \tan^2\theta\right).$$

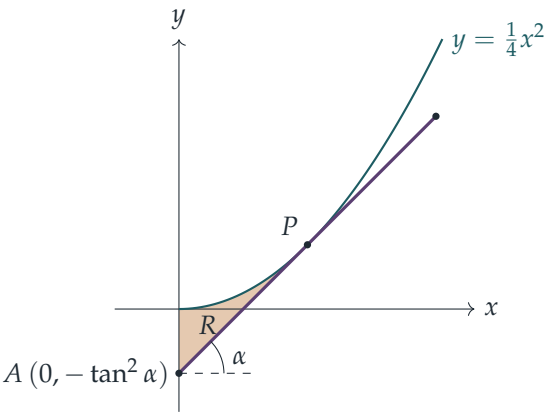
條件 $x \geq 0$ 給出 $\tan\theta \geq 0$，因此可取 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$。當 θ 在這個範圍內變動時，$2\tan\theta$ 取遍 $[0, \infty)$ 中的每一個值，所以中點的每一個位置都恰好對應一個 θ。

沿棒方向的單位向量是 $(\cos\theta, \sin\theta)$，而每一端與 P 相距 b，所以兩端位於 $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$。取負號（即較低、靠左的一端），得

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

正如所求。（另一端所描出的軌跡滿足相同的方程，只是把 $-b$ 換成 $+b$。）

R 的面積



到達 y 軸的是滿足 $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$ 的那一端：另一端的 $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$ 恆成立。所以當 $\theta = \alpha$ 時，

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A 的 y 坐標是 $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$，利用上一條方程可消去 b：

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{故} \qquad A = \big(0, -\tan^2\alpha\big).$$

想一想 A 相對於原點在甚麼位置？直線 AP 的方程是甚麼？

A 位於原點下方，而直線 AP 正是拋物線在 P 點的切線。記 $t = \tan\alpha$。在 $P = (2t, t^2)$ 的切線斜率為 t，所以其方程為

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

它確實經過 $A = (0, -t^2)$。拋物線位於這條切線上方，因為

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = \big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^2 \geq 0.$$

因此 R 是滿足 $0 \leq x \leq 2t$、並介乎直線 AP（下方）與曲線（上方）之間的點的集合，其左邊界是 y 軸上由 A 向上至 O 的線段。所以

$$\begin{aligned} \text{面積}R &= \int_0^{2t} \Big(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2t} \big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{2}x - t\big)^3\Big]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3. \end{aligned}$$

所以 R 的面積是 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$，正如所求。

留意 b 完全消失了：面積只取決於 P 點的切線與 y 軸相交的位置。當然，b 與 α 之間有關係式 $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$，所以 b 決定了 α。

驗算

- 取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（如圖所示）。由 $b\cos\alpha = 2$ 得 $b = 2\sqrt{2}$，此時 $P = (2,1)$，$A = (0,-1)$。面積為 $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$。
- 當 $b = 2$ 時，以數值方法解 $2\tan\alpha = 2\cos\alpha$ 得 $\alpha \approx 0.6662$，而用數值積分求得的面積是 0.32391，與 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ 吻合。
- 當 $b \to 0$ 時，$\alpha \to 0$，區域縮小至消失，與公式的預測一致。

常見錯誤

- 在 x 軸處把區域分開，卻忘記了 x 軸下方的三角形。在切線與曲線之間取單一個積分，便能一次過處理兩部分。
- 用錯了棒的一端：帶 $+b\cos\theta$ 的那一端永遠不會到達 y 軸。
- 答案中留下了 b，而沒有利用 $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$ 把它消去。

STEP 之外

中點描出拋物線，而每一端則描出一條沿切線方向保持固定距離 b 的曲線。由舊曲線的切線構造新曲線，是平面曲線微分幾何（differential geometry）的一個常見主題（漸伸線（involute）、包絡線（envelope）和曳物線（tractrix）都是經典例子），大學一年級課程中會與弧長（arc length）和曲率（curvature）一併學到。這個面積的簡潔答案令人想起阿基米德（Archimedes）對拋物線的求積：他證明了拋物線弓形的面積是某個內接三角形面積的 $\frac{4}{3}$ 倍。如想做更多同類題目，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP I 2015，第 5 題

純數學 • 含參數的積分

> **STEP I 2015，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q5

關鍵思路

兩個積分在把 x 視為固定參數（parameter）時，對 t 都有初等的原函數（antiderivative），所以題目中「通過計算積分」這句指示已經是全部提示：先求出關於 x 的閉式（closed form），再作其草圖。要小心的是細節。在 (i) 中，被積函數（integrand）在 $t = 1$ 處可能無界（unbounded）；在 (ii) 中，平方根計算出來是絕對值（*absolute values*），這使 g 成為一個分段函數（piecewise function），而其形狀出奇地簡單。

解答

第 (i) 部分

對固定的 $x > 0$，$(t-1)^{x-1}$ 的一個原函數是 $\frac{1}{x}(t-1)^x$。因此

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

當 $0 < x < 1$ 時，被積函數 $(t-1)^{x-1}$ 在 $t \to 1^+$ 時趨於無窮，所以這是一個反常積分（improper integral）；但由於 $x > 0$，當 $t \to 1^+$ 時 $(t-1)^x \to 0$，所以積分收斂（converges），上面的值仍然成立。

現在作 $y = 2^x/x$（$x > 0$）的草圖。

- 當 $x \to 0^+$ 時，$2^x \to 1$，所以 $f(x) \to +\infty$：y 軸是一條漸近線（asymptote）。
- 當 $x \to \infty$ 時，指數函數的增長勝過冪函數，所以 $f(x) \to \infty$（而且比任何直線都快）。

- 求導，利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$，

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2},$$

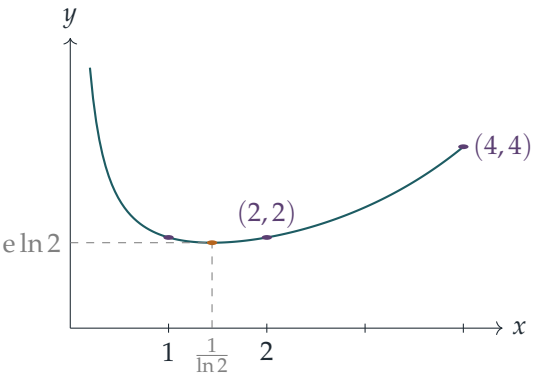
它在 $x < 1/\ln 2$ 時為負，在 $x > 1/\ln 2$ 時為正。所以只有一個駐點（stationary point），是一個極小點（minimum），位於 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$。

- 在該點，$2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$，所以極小值為

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e} \ln 2 \approx 1.88.$$

- 有用的點：$f(1) = f(2) = 2$，$f(4) = 4$。

這條曲線也是凸(convex)的：$\ln f(x) = x \ln 2 - \ln x$ 是凸函數(其二階導數為 $1/x^2 > 0$)，而凸函數的指數仍是凸函數。所以草圖是一條單一的 U 形曲線。



第 (ii) 部分

首先，被積函數是有意義的：對 $-1 \le t \le 1$，

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

等號只在 $|x| = 1$ 且 $t = \pm 1$（端點）時成立。這個情況我們稍後再處理。

當 $x = 0$ 時，被積函數為 1，所以 $g(0) = 2$。當 $x \ne 0$ 時，把 x 視為常數：由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$，一個原函數是 $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$。因此

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

? **想一想** 為甚麼不直接寫 $\sqrt{(1+x)^2} = 1 + x$ 和 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$？

因為 $\sqrt{u^2} = |u|$，而不是 u。粗心地這樣做會得出對所有 x 都有 $g(x) = 2$，這在 $|x|$ 很大時肯定是錯的，因為那時被積函數約為 $1/|x|$，所以 $g(x) \approx 2/|x|$。我們必須分情況討論。

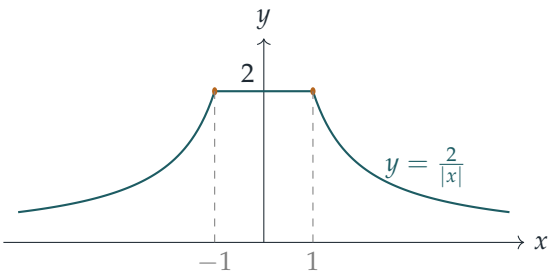
- $-1 \le x \le 1$，$x \neq 0$：$1+x$ 和 $1-x$ 都 ≥ 0，所以 $g(x) = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x} = 2$。這也與 $g(0) = 2$ 一致。
- $x > 1$：$|1+x| = 1+x$ 而 $|1-x| = x-1$，所以 $g(x) = \dfrac{2}{x}$。
- $x < -1$：$|1+x| = -1-x$ 而 $|1-x| = 1-x$，所以 $g(x) = \dfrac{-2}{x} = \dfrac{2}{|x|}$。

在 $x = \pm 1$ 時，被積函數在其中一個端點無界（當 $x = 1$ 時它是 $1/\sqrt{2-2t}$，在 $t \to 1$ 時趨於無窮），所以這是反常積分。原函數 $-\sqrt{2-2t}$ 直到 $t = 1$ 都是連續的，所以積分收斂，而公式仍然給出 $g(\pm 1) = 2$。

所以

$$g(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

這個函數是偶函數（even function）（這是必然的：把 t 換成 $-t$ 即可證明 $g(-x) = g(x)$）。它處處連續（continuous），在 $[-1, 1]$ 上為常數，並以 $2/|x|$ 的方式衰減，趨向漸近線 $y = 0$。在 $x = \pm 1$ 處有一個尖角：兩側的單側斜率分別為 0（內側）和 ∓ 2（外側），所以 g 在該處不可微（differentiable）。



驗算

- 第 (i) 部分取 $x = 1$：被積函數為 1，所以 $f(1) = 2$，與 $2^1/1$ 吻合。取 $x = 2$ 時積分為 $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$，與 $2^2/2$ 吻合。
- 第 (ii) 部分取 $x = 0$：被積函數為 1，而 $g(0) = 2$。當 $|x|$ 很大時，被積函數在長度為 2 的區間上接近 $1/|x|$，與 $2/|x|$ 吻合。

- 數值上，$\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$；(ii) 中的積分在 $x = 1.2$ 時算得 $1.6667 = 2/1.2$，在 $x = 0.8$ 時算得 2.0000。

常見錯誤

- 對所有 x 都寫 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$，從而得出 g 是常數的結論。
- 忘記 (i) 中的積分在 $0 < x < 1$ 時是反常積分，或忘記 $(t-1)^x$ 在 $t = 1$ 處為零只是因為 $x > 0$。
- 把 g 在 $x = \pm 1$ 處畫成光滑的：兩段曲線以不同的斜率相接。

STEP 之外

第 (ii) 部分其實是喬裝了的牛頓（Newton）殼層定理（shell theorem）。設 $t = \cos\theta$，則 $1/\sqrt{1-2xt+x^2}$ 是從距單位球面球心 x 的一點到球面上一點的距離的倒數，所以 g（相差一個常數）就是均勻球殼的引力勢（gravitational potential）：在殼內為常數，在殼外則等同一個點質量的引力勢。同一個式子也是勒讓德多項式（Legendre polynomials）的生成函數（generating function）$\sum_n P_n(t)x^n$，而 $|x| < 1$ 時 $g(x) = 2$ 反映了一個事實：每個 $n \geq 1$ 的 P_n 在 $[-1,1]$ 上的積分都是零。第 (i) 部分把 x 當作參數來積分 t^{x-1}，正是通往伽瑪函數（Gamma function）和貝塔函數（Beta function）的第一步。Mary Boas 的 *Mathematical Methods in the Physical Sciences*（《物理科學中的數學方法》）以恰到好處的程度介紹了勒讓德多項式和伽瑪函數。

詳細解答

STEP I 2015，第 6 題

純數學 • 幾何中的向量

STEP I 2015，第 6 題

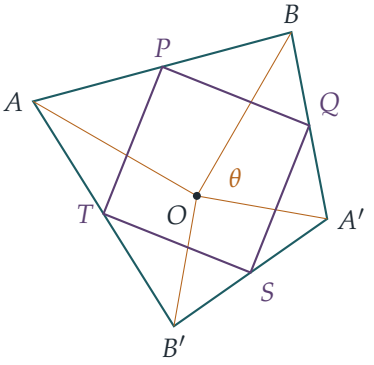
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q6

關鍵思路

以 O 為原點，條件 $OA = OB$ 及 $\angle AOB = 90°$ 表示 B 是 A 繞 O 旋轉（rotation）一個直角所得的點；同樣地，B' 是 A' 以相同方向旋轉所得的點。把這個四分之一轉記作 R。於是中點四邊形的每一條邊，原來都是前一條邊經 R 作用後的結果，而這正正就是構成正方形的條件。一旦以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 表示出邊長，面積就只是一道餘弦定理（cosine rule）的計算。

解答



中點構成正方形

取 O 為原點，並以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ 表示 A, B, A', B' 的位置向量（position vector）。設 R 為繞 O 順時針旋轉 90°。它是線性（linear）的，保持長度不變，並把每個非零向量轉過一個

直角。

由於頂點按順時針方向排列，而 O 位於四邊形內部，從 OA 到 OB 是順時針轉 90°。又因 $OA = OB$，得 $\mathbf{b} = R\mathbf{a}$。同理 $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$。

設 P, Q, S, T 分別為 AB、BA'、$A'B'$、$B'A$ 的中點：

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

現在逐一考慮四條邊。設 $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

這裏 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，因為 $A \neq A'$。所以 PQ 與 ST 大小相等、方向相反，故 $PQST$ 是平行四邊形（parallelogram）。它的鄰邊 QS 是把 $\mathbf{u}$ 轉過一個直角而長度不變所得。鄰邊相等且互相垂直的平行四邊形是正方形，因此 $PQST$ 是正方形，得證。

想一想 為甚麼把 A 轉到 B 的四分之一轉，必定與把 A' 轉到 B' 的是同一個？

兩對點在順時針標記中都是前後相連的，而 O 位於內部，所以兩種情況下由第一條射線轉到第二條射線都是順時針方向。若其中一個是順時針而另一個是逆時針，由 $\overrightarrow{QS}$ 得出 $R\mathbf{u}$ 的那一步便不成立，而一般來說所得圖形也不會是正方形。

求面積的最大值

設 $OA = OB = p$ 及 $OA' = OB' = q$，兩者皆固定，並設 $\theta = \angle BOA'$。O 處的四個角之和為 360°，其中兩個是直角，所以 $\angle B'OA = 180^\circ - \theta$。由於 O 位於內部，θ 和 $180^\circ - \theta$ 都嚴格介乎 0° 與 180° 之間，故 $0 < \theta < 180^\circ$。

正方形的邊長為 $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$，所以面積為 $\frac{1}{4}AA'^2$。由 OA 經 OB 轉到 OA'，$\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{a}'$ 之間的夾角為 $90^\circ + \theta$，而 $\cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta$。由餘弦定理（或展開 $|\mathbf{a}'-\mathbf{a}|^2$），

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90^\circ+\theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

所以

$$\text{面積} = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

在 p 和 q 固定的情況下，當 $\sin\theta$ 最大時此式最大。在 $0 < \theta < 180^\circ$ 上，這恰好發生於

$$\angle BOA' = \theta = 90^\circ,$$

而最大面積為 $\frac{1}{4}(p+q)^2$。此時 O 處的四個角全是直角，所以 A' 位於 AO 越過 O 的延長線上，而正方形的邊長為 $\frac{1}{2}(p+q)$。

驗算

- 取 $p = 2$、$q = 3$。面積公式給出 $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$，在 $\theta = 0$ 附近為 3.25，在 $\theta = 90°$ 時升至 $6.25 = \frac{1}{4} \cdot 5^2$，然後回落至接近 3.25。以電腦對 θ 作精細掃描，得出峯值位於 90.0°。
- 對稱情況 $p = q$、$\theta = 90°$：$ABA'B'$ 本身就是一個以 O 為中心、邊長為 $p\sqrt{2}$ 的正方形，而其中點正方形的邊長為 p，面積為 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$，與公式相符。
- 隨機選取 p、q 和 θ，經電腦驗證，各中點確實構成面積為 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$ 的正方形。

常見錯誤

- 把 OA 與 OA' 之間的夾角當作 θ，而不是 $90° + \theta$。這會得出面積 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$，並錯誤地推斷 θ 應趨近 180°。
- 只證明四條邊相等。這只能得出菱形（rhombus）。你還需要一個直角，而這裏由 $\overrightarrow{QS} = R\,\overrightarrow{PQ}$ 便可直接得到。

STEP 之外

旋轉一個直角是一個線性映射（linear map）$R(x, y) = (y, -x)$，在複平面（complex plane）上則是乘以 $-\mathrm{i}$。整個論證其實是一道關於線性映射的計算：$\mathbf{q} - \mathbf{p}$ 與 $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ 相差一個 R，因為 R 與減法可交換（commute）。同樣的思路可以迅速證明拿破崙定理（Napoleon's theorem）和 van Aubel 定理（van Aubel's theorem）等結果。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）正是以這種方式，透過複數乘法來發展幾何。

詳細解答

STEP I 2015，第 7 題

純數學 • 區間上的最大值

> **STEP I 2015，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q7

關鍵思路

光滑函數（smooth function）在閉區間（closed interval）上的最大值，必定在區間內部的駐點（stationary point）或在端點（endpoint）取得。這裏的駐點是 $x = 0$ 和 $x = \frac{a}{3}$，而後者會隨着 a 增大向右移動，最終離開區間。因此我們先列出所有候選值，再隨着 a 變化逐一比較：三個範圍正是來自比較結果轉換之處，以及 $\frac{a}{3}$ 越過 $x = 1$ 之處。

解答

候選值

求導，得

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

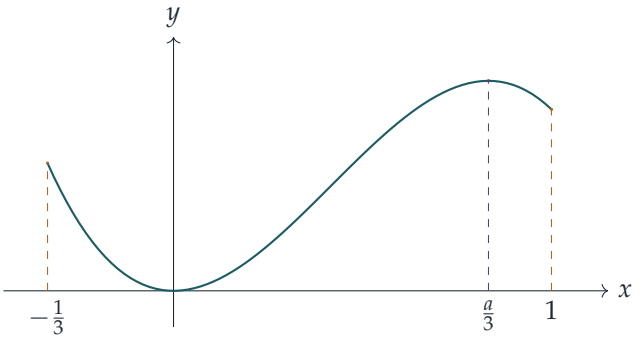
所以駐點是 $x = 0$ 和 $x = \frac{a}{3}$。當 $a \geq 0$ 時，f' 的正負號告訴我們函數的形狀：

- 當 $x < 0$ 時，$6x < 0$ 而 $a - 3x > 0$，所以 $f'(x) < 0$，f 遞減；
- 當 $0 < x < \frac{a}{3}$ 時，$f'(x) > 0$，f 遞增；
- 當 $x > \frac{a}{3}$ 時，$f'(x) < 0$，f 遞減。

所以 $x = 0$ 是局部極小值（local minimum）點，$x = \frac{a}{3}$ 是局部極大值（local maximum）點（當 $a = 0$ 時兩者重合，而 $f = -6x^3$ 處處遞減）。我們需要的函數值是

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9}, \qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{a^3}{9}, \qquad f(1) = 3a - 6.$$

由於 f 在 $[-\frac{1}{3}, 0]$ 上遞減，這一段上的最大值是 $f(-\frac{1}{3})$；而 $f(0) = 0$ 永遠不會是最大值。所以 $\mathrm{M}(a)$ 就是 $f(-\frac{1}{3})$ 與 f 在 $[0, 1]$ 上最大值兩者中較大的一個。



上圖顯示 $a = \frac{5}{2}$ 的情況：三個候選值是兩個端點（琥珀色）和局部極大值（紫紅色），在這裏勝出的是局部極大值。

情況 $0 \le a \le 3$

此時 $\frac{a}{3} \in [0,1]$，所以在 $[0,1]$ 上函數先上升至 $x = \frac{a}{3}$，然後下降。它在這一段上的最大值是 $f(\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{9}$，我們要把它與 $f(-\frac{1}{3})$ 比較：

$$\frac{a^3}{9} - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{a^3 - 3a - 2}{9} = \frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

? **想一想** 怎樣看出 $a^3 - 3a - 2$ 的因式分解（factorisation）？

試代入一些小整數：$a = -1$ 給出 $-1 + 3 - 2 = 0$，$a = 2$ 給出 $8 - 6 - 2 = 0$。三個根之和是 0（因為沒有 a^2 項），所以第三個根又是 -1，於是得到 $(a+1)^2(a-2)$。

由於當 $a \ge 0$ 時 $(a+1)^2 > 0$，差的正負號與 $a - 2$ 相同。因此

$$\mathrm{M}(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{當} 0 \le a \le 2, \qquad \mathrm{M}(a) = \frac{a^3}{9} \quad \text{當} 2 \le a \le 3,$$

而兩條公式在 $a = 2$ 時都給出 $\frac{8}{9}$。

情況 $a > 3$

此時 $\frac{a}{3} > 1$，所以 f 在整個 $[0,1]$ 上遞增，它在這一段上的最大值是 $f(1) = 3a - 6$。與左端點比較，

$$(3a - 6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a - 7),$$

由於 $a > 3 > \frac{7}{3}$，這個值是正數。所以當 $a \ge 3$ 時 $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$；在 $a = 3$ 時它等於 $3 = \frac{27}{9}$，與中間那條公式吻合。

結論

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \le a \le 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \le a \le 3, \\ 3a - 6, & a \ge 3. \end{cases}$$

換句話說：a 較小時左端點勝出，a 適中時局部極大值勝出，而一旦局部極大值離開了區間，就由右端點勝出。

驗算

- M 是連續（continuous）的：在 $a = 2$ 時兩邊都是 $\frac{8}{9}$，在 $a = 3$ 時兩邊都是 3。這是必然的，因為最大值隨 a 連續變化。
- $a = 0$：$f(x) = -6x^3$ 遞減，所以其最大值是 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$，與第一條公式一致。
- $a = \frac{5}{2}$：公式給出 $\frac{125}{72} \approx 1.736$，而兩個端點分別給出 $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$ 和 $f(1) = 1.5$，兩者都較小。以電腦在精細的 x 網格上搜尋，對 0 至 12 之間數百個 a 值進行驗算，結果與公式的誤差在 10^{-8} 以內。

常見錯誤

- 忘記了左端點 $x = -\frac{1}{3}$。由於 f 在 $x < 0$ 時遞減，這個端點有可能勝過局部極大值，而當 $a < 2$ 時確實如此。
- 在 $a > 3$ 時仍使用 $f(\frac{a}{3})$，但此時 $\frac{a}{3}$ 已在區間之外，因此不能採用。
- 以為局部極大值自然就是區間上的最大值。

STEP 之外

這裏的 $\mathrm{M}(a) = \max_{x \in [-1/3, 1]} f(x)$ 是透過對一族函數求最優值而定義的函數，這類函數通常是連續的，但只是分段光滑（piecewise smooth）：你可以驗證 M 在 $a = 2$ 處的左導數與右導數並不相等。至於閉有界區間上的連續函數必定能取得最大值，這就是極值定理（Extreme Value Theorem），會在第一門分析課中證明；參見 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP I 2015，第 8 題

純數學 • 冪和的整除性

> **STEP I 2015，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q8

關鍵思路

把和式寫兩次，一次順序、一次倒序，然後相加：這是第 (i) 部分所用的高斯（Gauss）技巧，而當各項是 k 次冪且 k 為奇數時，第 (ii) 部分正是為此而設的。把 r^k 與 $(n-r)^k$ 配對，可證 $2S$ 是 n 的倍數；把 r^k 與 $(n+1-r)^k$ 配對，可證 $2S$ 也是 $n+1$ 的倍數。由於 n 與 $n+1$ 沒有公因數，兩個結果合起來便得出能被 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除（divisible）。

解答

第 (i) 部分

設 $T = 1+2+\cdots+n$。把和式倒序寫出，

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

把各列相加，n 列中每一列之和都是 $n+1$，所以 $2T = n(n+1)$，即

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

第 (ii) 部分

在模 N 下考慮，有 $N-m \equiv -m$，所以

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

其中因為 k 是奇數，所以 $(-m)^k = -m^k$。因此 N 整除 $(N-m)^k + m^k$。

如果你想避免使用同餘（congruence）：當 k 為奇數時，有以下因式分解（factorisation）

$$a^k + b^k = (a+b)\left(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}\right),$$

（符號正負交替，括號內共有 k 項，所以最後一個符號是 $+$）。取 $a = N - m$、$b = m$，便得 $a + b = N$ 乘以一個整數。這裏完全不需要 $m \leq N$：若 $m > N$，則 $N - m$ 是負數，但它仍然是整數。

被 n 或 $\frac{1}{2}n$ 整除

設 $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$，其中 k 為奇數。我們仿照第 (i) 部分的技巧。由於 $0^k = 0$，可以寫成

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

第二種寫法就是同一個和式倒序排列。相加得

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \left[(n-r)^k + r^k\right].$$

由第 (ii) 部分（取 $N = n$、$m = r$），每個方括號都能被 n 整除，所以 n 整除 $2S$。設 $2S = nM$，其中 M 為整數。

- 若 n 為奇數，則 n 整除 $2S$ 且與 2 沒有公因數，所以 n 整除 S。
- 若 n 為偶數，則 $S = \frac{1}{2}n \cdot M$，而 $\frac{1}{2}n$ 是整數，所以 $\frac{1}{2}n$ 整除 S。

> ? **想一想** 當 n 為偶數時，為甚麼不能直接說「n 整除 S」？

因為由「$n \mid 2S$」推出「$n \mid S$」這一步，需要 n 與 2 互質（coprime）。事實上這一步可能不成立：取 $n = 2$、$k = 1$，得 $S = 3$，它不是 2 的倍數。對於偶數 n，我們只能說 n 的一半整除 S。

被 $1 + 2 + \cdots + n$ 整除

由第 (i) 部分，我們需要證明 $\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$。換一種方式配對：把 $1, 2, \ldots, n$ 倒序排列，會把 r 變成 $n + 1 - r$，所以

$$2S = \sum_{r=1}^{n} \left[(n+1-r)^k + r^k\right],$$

而由第 (ii) 部分（取 $N = n+1$、$m = r$），每個方括號都能被 $n+1$ 整除。所以 $n+1$ 整除 $2S$。

n 與 $n+1$ 是相鄰整數，所以除了 1 以外沒有其他公因數；於是 n 的任何因數與 $n+1$ 的任何因數也是如此。我們用到以下事實：若兩個互質的整數各自整除 S，則它們的積也整除 S。

- n 爲奇數。我們已證明 $n \mid S$。此外 $n+1$ 是偶數且 $n+1 \mid 2S$，所以寫成 $2S = (n+1)L$，得 $S = \frac{1}{2}(n+1)L$，即 $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$。由於 n 與 $\frac{1}{2}(n+1)$ 互質，它們的積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除 S。
- n 爲偶數。我們已證明 $\frac{1}{2}n \mid S$。此外 $n+1$ 是奇數且整除 $2S$，所以（由於它與 2 互質）它整除 S。由於 $\frac{1}{2}n$ 與 $n+1$ 互質，它們的積 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除 S。

兩種情況下，S 都能被 $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$ 整除，證畢。

想一想 為甚麼可以把兩個整除結果合而為一，把除數相乘？

若 $a \mid S$、$b \mid S$ 且 $\gcd(a,b) = 1$，寫 $S = aq$。那麼 $b \mid aq$，而 b 與 a 沒有公共質因數，所以整除 b 的每個質數冪都必定整除 q；因此 $b \mid q$，從而 $ab \mid S$。沒有互質這個條件，結論便不成立：$4 \mid 12$ 且 $6 \mid 12$，但 $24 \nmid 12$。正因如此，我們才小心地把 n 與 $\frac{1}{2}(n+1)$ 配對，或把 $\frac{1}{2}n$ 與 $n+1$ 配對，而不是在 n 為偶數時把 n 與 $n+1$ 配對。

驗算

試取 $k = 3$、$n = 4$：$S = 1+8+27+64 = 100$，而 $1+2+3+4 = 10$ 整除 100。事實上 $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$，所以 $k = 3$ 時結果是顯然的。取 $k = 5$、$n = 5$：$S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15 \times 295$。最終結果亦已用電腦驗證，對所有 $n \le 119$ 及所有奇數 $k \le 15$ 均成立。當 k 為偶數時，命題不成立：$1^2+2^2 = 5$ 不能被 3 整除，這說明 k 為奇數這個條件確實用上了。

常見錯誤

- 在 n 為偶數時，由 $n \mid 2S$ 推出 $n \mid S$。
- 把不互質的除數相乘，例如聲稱 $n(n+1) \mid 2S$，然後不加小心地除以 2。
- 把 r^k 與 $(n-r)^k$ 配對時忘記 $r = 0$（或 $r = n$）這一項：把 $0^k = 0$ 包括在內，每一項便能整齊地配對。

STEP 之外

冪和（power sum）$1^k+\cdots+n^k$ 是 n 的 $k+1$ 次多項式，可由 Faulhaber 公式以伯努利數（Bernoulli numbers）表示；當 k 為奇數時，它們甚至可以寫成 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 的多項式，這從另一角度解釋了本題的結果。這裏的論證讓你初嘗運用同餘與互質的滋味，而這些正是初等數論（elementary number theory）的基本功。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本很出色的入門書。

詳細解答

STEP I 2015，第 9 題

力學 • 拋體運動

> **STEP I 2015，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q9

關鍵思路

「最後落地」關乎的是*落地時間*（landing time），而不是發射時間：較遲以較低仰角發射的子彈，在空中停留的時間較短，因此可能比較早發射的子彈先落地。把落地時間寫成發射時間加上飛行時間（time of flight），再在整段發射期間內求其最大值。以角度 α 代替 t 作為變量，微積分會簡潔得多；而 k 所滿足的條件，決定了最大值出現在駐點（stationary point）還是端點。

解答

建立模型

把每顆子彈視為只受重力作用、沒有空氣阻力、從地面發射的質點。以仰角 α 發射的子彈，在發射後時間 s 的豎直位置為 $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$，所以它在經過

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

之後回到地面，而在這段時間內它的水平位移為

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

仰角為 α 的子彈在時間 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$ 發射；當 t 取遍 $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ 時，α 取遍 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$，每個值恰好取一次。因此這顆子彈的落地時間為

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \frac{1}{6}\pi \le \alpha \le \frac{1}{3}\pi.$$

最後落地的子彈，就是使 L 取最大值的那一顆。由於 $k = \dfrac{g}{2\lambda u}$，我們有 $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$，以及

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

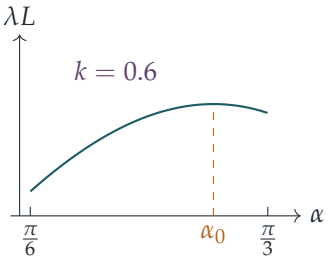
所以當 $\cos\alpha > k$ 時 L 遞增，當 $\cos\alpha < k$ 時遞減。在我們的區間上，$\cos\alpha$ 由 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$（在 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 處）遞減至 $\frac{1}{2}$（在 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 處）。

想一想 為甚麼 α 越大，代表發射時間越早？這一點為何會影響 L' 的正負號？

槍管正在下降，所以仰角較大的子彈先發射。把 α 稍為增大，發射時間每弧度提早 $1/\lambda$，但飛行時間每弧度增加 $\frac{2u}{g}\cos\alpha$。$L'(\alpha)$ 正是這兩種效應的此消彼長，其正負號告訴我們哪一方佔優。

情況 $\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$

此時 k 落在 $\cos\alpha$ 的值域之內，所以恰好有一個 $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 滿足 $\cos\alpha_0 = k$。由於 cos 在該區間上遞減，當 $\alpha < \alpha_0$ 時 $\cos\alpha > k$，當 $\alpha > \alpha_0$ 時 $\cos\alpha < k$。所以 L 在 α_0 之前遞增、之後遞減，以仰角 α_0 發射的子彈最後落地。（若 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，則 α_0 是端點，而 L 是單調的，但結論不變。）



（縱軸經過平移，好讓落地時間的變化清楚可見。）

利用 $\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$（取正值，因為 α_0 是銳角），這顆子彈的射程為

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

這就是所求的距離。

情況 $k < \frac{1}{2}$

此時對區間內每個 α 都有 $\cos\alpha \ge \frac{1}{2} > k$，所以 $L'(\alpha) > 0$ 處處成立，L 嚴格遞增。最大值出現在 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$：第一顆發射的子彈最後落地。它的射程為

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

所以當 $k < \frac{1}{2}$ 時，最後一顆落地的子彈落在距離槍 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ 之處。

（為求完整：若 $k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$，則 L 遞減，最後發射的子彈最後落地；由於 $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$，距離同樣是 $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$。）

驗算

- 連續性：在 $k = \frac{1}{2}$ 時，第一條公式給出 $\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}u^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$，與 $k < \frac{1}{2}$ 的答案一致；在 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 時，它亦給出相同的值。
- 取 $u^2/g = 1$ 及 $k = 0.6$，最後落地的子彈滿足 $\cos\alpha_0 = 0.6$，落在距離 $2(0.6)(0.8) = 0.96$ 之處。以電腦抽取兩萬個發射時間，並以數值方法逐步模擬該子彈的運動，結果吻合。
- 單位：k 是無量綱的（g 除以 λu，後者是速度每單位時間），而 u^2/g 是長度。

常見錯誤

- 只求射程或飛行時間的最大值，而不是落地時間 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 的最大值。
- 想當然地以為最後發射的子彈就是最後落地的。
- 忘記 t 隨 α 增大而減少，以致弄錯 L' 的正負號。

STEP 之外

在閉區間上求函數的最大值，就是把區間內部的駐點與端點互相比較；而在這裏，由一個參數決定哪一方勝出。這種「哪個約束生效」的切換，正是約束最優化（constrained optimisation）的起點，你會在大學一年級的數學方法課程中遇到。如想閱讀更多這類風格的力學內容，可參考 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP I 2015，第 10 題

力學 • 相對速度

> **STEP I 2015，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

關鍵思路

雨點打在一個表面上，是一種通量（flux）：單位時間內打中的雨量 =（單位體積內的雨點數目）×（面積）×（雨的速度垂直於該表面的分量）。巴士行駛時，改在巴士的參考系（frame of reference）中考慮，這樣只有雨速的水平分量會改變。然後，就整段行程而言，把速率乘以行程時間 D/u，再對 u 求最小值。絕對值（modulus）把問題分成兩種情況，視乎巴士比雨的水平運動慢還是快。

解答

雨打中巴士的速率

把雨模擬成均勻分佈於空氣中的雨點，每單位體積有 n 點，全部以相同速度運動。設巴士的闊度為 b，並取北方為水平正方向。雨從南方吹來，即向北移動，所以其速度為

$$\text{水平分量} v\cos\theta \text{（向北）}, \qquad \text{鉛直分量} v\sin\theta \text{（向下）}.$$

雨沒有東西方向的分量，所以巴士兩條長邊的側面保持乾爽。

$u = 0$ 的情況。在時間 δt 內，打中車頂的雨點，就是位於一個以車頂為底、鉛直高度為 $v\sin\theta\,\delta t$ 的斜稜柱（prism）之內的雨點，其體積為 $ab\,v\sin\theta\,\delta t$。打中車尾（南面，面積 hb）的雨點，則填滿車尾後方一個水平深度為 $v\cos\theta\,\delta t$ 的稜柱。面向北方的車頭則被遮擋。因此速率為

$$nb\left(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta\right).$$

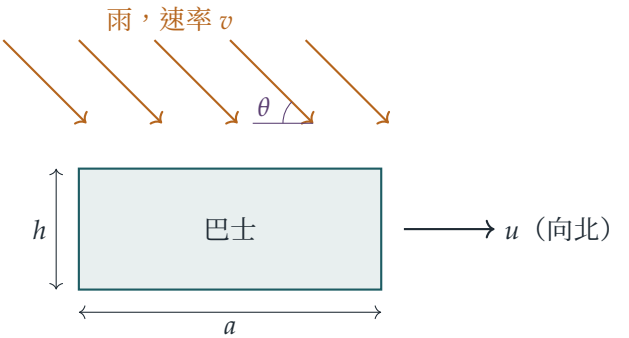
$u > 0$ 的情況。在以等速運動的巴士參考系中，雨的速度為

$$(v\cos\theta - u) \text{ 向北}, \qquad v\sin\theta \text{ 向下}.$$

巴士在這個參考系中靜止，所以上述論證同樣適用，只需把 $v\cos\theta$ 換成 $v\cos\theta - u$。鉛直分量不變，所以車頂收集雨水的速率仍是 $nab\,v\sin\theta$。若 $v\cos\theta > u$，雨仍會追過巴士，以速率 $nhb\,(v\cos\theta - u)$ 打中車尾。若 $v\cos\theta < u$，則巴士迎頭撞向雨，雨改為以速率 $nhb\,(u - v\cos\theta)$ 打中車頭。無論哪種情況，總速率均為

$$nb\Big(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\Big),$$

與 $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$ 成正比，正如所求。



選擇車速

設行程長度為 D，所需時間為 D/u，所以收集到的總雨量與下式成正比：

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\Big), \qquad 0 < u \le w.$$

記 $c = v\cos\theta$，並去掉絕對值符號。

若 $u \le c$：

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

分子為正，所以 R 在 $0 < u \le c$ 上嚴格遞減（strictly decreasing）。

若 $u \ge c$：

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

它是遞增還是遞減，只取決於 $a\sin\theta - h\cos\theta$ 的正負號。

想一想 為甚麼開得越快不一定越好？

開快一點會縮短行程，這對車頂總是有利：車頂所佔的份額是 $Dav\sin\theta/u$。可是一旦 $u > c$，巴士便迎頭撞向雨，而車頭所佔的份額 $Dh(u - c)/u$ 會隨 u 增大。$a\sin\theta - h\cos\theta$ 的正負號告訴我們哪個效應佔上風。

兩條公式在 $u = c$ 時相等，所以 R 是連續（continuous）的。現在：

- 若 $w < v\cos\theta$，則所有容許的車速都滿足 $u \le c$，而 R 在此遞減，所以最佳選擇是 $u = w$。
- 若 $a\sin\theta > h\cos\theta$，則 R 在 $u \le c$ 上遞減，在 $u \ge c$ 上亦遞減。所以 R 在整個 $(0, w]$ 上遞減，最佳選擇同樣是 $u = w$。

這就證明了第一個結論。

若 $w > v\cos\theta$ 且 $a\sin\theta < h\cos\theta$：$R$ 在 $(0, c]$ 上遞減，在 $[c, w]$ 上嚴格遞增。所以最小值出現在

$$u = v\cos\theta,$$

即剛好以雨的水平速率行駛。此時雨相對於巴士鉛直落下，只有車頂會淋濕，總量為 $R(c) = Da\tan\theta$（以我們的單位計）。

若 $a\sin\theta = h\cos\theta$：當 $u \ge c$ 時，$R(u) = Dh$，與 u 無關。若 $w \ge v\cos\theta$，則 $v\cos\theta$ 與 w 之間的任何車速都同樣好，而低於 $v\cos\theta$ 的車速都較差。（若 $w < v\cos\theta$，則適用第一種情況，取 $u = w$。）從物理角度看，超過 $u = c$ 之後，開快一點在車頂省下的雨量，剛好等於車頭多淋的雨量。這個條件即 $\tan\theta = h/a$：從路面看，雨沿着與巴士側面一條對角線平行的方向落下。

回程

現在巴士向南行駛，迎着雨前進。按我們以北為正的約定，其速度為 $-u$，所以雨的相對水平速度為 $v\cos\theta + u > 0$，雨總是打中車頭。總量與下式成正比：

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

它對 u 嚴格遞減。所以回程時，無論 a、h 和 θ 取甚麼值，司機都應盡量開快，即 $u = w$。

驗算

- 取 $a = 1.3$、$h = 0.8$、$v = 2$、$\theta = 0.6$ 及 $u = 0.7$，公式給出速率 2.229（以單位雨點密度及單位闊度計）。用電腦模擬隨機分佈的雨點穿過巴士截面，得出 2.232。在 $u = 0$、$u > v\cos\theta$ 以及 u 為負（回程）的情況下，吻合程度同樣良好。
- 取 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$（雨鉛直落下）。此時 $a\sin\theta > h\cos\theta$，所以應全速行駛。這很合理：只有車頂會淋濕，在雨中的時間越短，淋到的雨就越少。
- 在 $\tan\theta = h/a$ 的相等情況下，總量 Dh 在 $u = v\cos\theta$、$1.5v\cos\theta$ 及 $3v\cos\theta$ 時都相同，與預測一致。

常見錯誤

- 求速率的最小值，而不是總量的最小值：必須把速率乘以行程時間 D/u。
- 忘記當 $u > v\cos\theta$ 時，雨打中的是車頭而不是車尾。這正是需要絕對值的原因。
- 回程時再次使用 $|v\cos\theta - u|$；此時相對速率應為 $v\cos\theta + u$。

STEP 之外

「密度 × 面積 × 法向速度」這種計算，就是向量場（vector field）穿過一個曲面的通量。在向量微積分中，它成為曲面積分（surface integral）$\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$，這是流體力學和電磁學中守恆定律（conservation laws）的出發點。改用巴士的參考系，就是一次伽利略變換（Galilean transformation），它是相對論在經典力學中的先驅。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）同時討論了相對運動和這類通量論證。

詳細解答

STEP I 2015，第 11 題

力學 • 摩擦力與力矩

STEP I 2015，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q11

關鍵思路

圓柱體上的每一個法向反作用力（normal reaction）都沿半徑方向作用，因此必定通過圓心。所以，對每個圓心取力矩（moments），重力和所有法向反作用力都會消去，只剩下摩擦力（friction）；而這些摩擦力與圓心的距離全部相同。這樣第 (i) 部分幾乎不費吹灰之力便可得出。至於第 (ii) 部分，先對每個圓柱體沿斜面方向分解力，再在題目中兩條不等式所涉及的兩個接觸點應用摩擦定律。

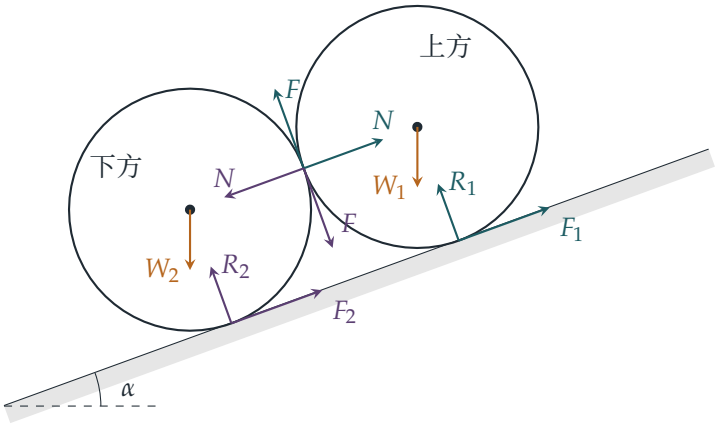
解答

我們把兩個圓柱體視為半徑同為 r 的均勻剛體（rigid body）圓柱，兩者都與斜面接觸，而上方的圓柱體位於斜面較高的位置。由於兩者半徑相等，連接兩圓心的直線與斜面平行，所以兩個圓柱體的接觸點位於斜面上方高度 r 處，與兩個圓心同高。兩圓柱體之間的法向力沿圓心連線（與斜面平行）作用，而它們之間的摩擦力則垂直於斜面。

取 x 方向為沿斜面向上，y 方向為垂直於斜面並指離斜面。設

- R_1、R_2 為斜面對上方及下方圓柱體的法向反作用力；
- F_1、F_2 為斜面對上方及下方圓柱體的摩擦力，以沿斜面向上為正（我們容許它們帶正負號，負值即表示沿斜面向下）；
- N 為下方圓柱體對上方圓柱體的法向力，方向沿斜面向上；
- F 為下方圓柱體對上方圓柱體的摩擦力，以指離斜面為正（同樣帶正負號）。

根據牛頓（Newton）第三定律，上方圓柱體對下方圓柱體施加沿斜面向下的力 N，以及指向斜面的力 F。



作用於上方圓柱體的力以藍綠色表示，作用於下方圓柱體的力則以紫紅色表示。

第 (i) 部分

對上方圓柱體的圓心取力矩。其重力作用於圓心，而 R_1 和 N 都沿半徑作用，所以這些力全都沒有力矩。剩下的只有兩個摩擦力，各自沿切線方向作用，與圓心的距離均為 r：

- F_1 在圓柱體最低點沿斜面向上作用，產生（按圖中方向）逆時針的力矩 rF_1；
- F 在接觸點指離斜面作用，而該接觸點位於圓心靠斜面下方的一側，產生順時針的力矩 rF。

要達至平衡（equilibrium），兩者必須互相抵消，所以 $rF_1 = rF$，即 $F_1 = F$。

想一想 為甚麼對圓心取力矩時可以不理會法向反作用力？

圓上的法向反作用力垂直於接觸點的切線，因此沿半徑方向，其作用線通過圓心，對圓心的力矩為零。正正因為這樣，在這裏對圓心取力矩才是正確的選擇。

同理，對下方圓柱體而言，只有 F_2（在其最低點沿斜面向上，產生逆時針力矩 rF_2）以及在接觸點指向斜面的摩擦力 F（該接觸點位於其圓心靠斜面上方的一側，產生順時針力矩 rF）有力矩。所以 $F_2 = F$。

因此作為帶正負號的量，$F = F_1 = F_2$；特別地，它們的大小相等，得證。

第 (ii) 部分

對每個圓柱體沿平行於斜面的方向分解力：

$$\begin{aligned} \text{上方：} \quad & F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{下方：} \quad & F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

兩式相加，並利用 $F_1 = F_2 = F$，得

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{所以} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

這亦說明每個摩擦力的方向都與我們圖中所畫的一致。代回原式，

$$N = W_1\sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

由於 $W_1 > W_2$ 且 $\alpha > 0$，這是正數，所以兩個圓柱體確實互相壓着。對上方圓柱體沿垂直於斜面的方向分解力，

$$R_1 + F = W_1\cos\alpha, \qquad \text{所以} \qquad R_1 = W_1\cos\alpha - F.$$

想一想 我們實際上需要哪些摩擦不等式？

在平衡狀態下，每個接觸點的摩擦力最多只能是摩擦系數（coefficient of friction）乘以該處的法向反作用力。第一個結果來自兩個圓柱體之間的接觸點，第二個結果則來自上方圓柱體與斜面之間的接觸點。（下方的接觸點會給出涉及 μ_2 的第三個條件，但題目沒有要求。）

*兩個圓柱體之間。*我們需要 $F \le \mu N$：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

除以正數 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

得證。

*上方圓柱體與斜面之間。*我們需要 $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1\cos\alpha - F)$，即

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1\cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1\cos\alpha.$$

斜面的傾角滿足 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos\alpha > 0$，而且 $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$。兩者同時除去，得

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

得證。（注意由於 $\mu_1 R_1 \ge F > 0$，這亦迫使 $R_1 > 0$，所以上方圓柱體會一直留在斜面上。）

驗算

- 取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$，我們需要 $\mu \ge 2$；若再取 $\mu_1 = 1$，則需要 $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$。把這類數值代入六條平衡方程（每個圓柱體兩條分解方程和一條力矩方程）並直接求解，所得的 F、N 和 R_1 與上面的結果相同。

- 當 $W_1 \to W_2$ 時，μ 的下界趨向無窮大。這是合理的：此時 $N \to 0$，兩個圓柱體幾乎沒有互相壓着，但它們之間的摩擦力仍然必須是 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$。
- 當 $\mu_1 \to \infty$ 時，該上界變成 $\tan\alpha \leq 2W_1/(W_1 + W_2)$，這正正就是條件 $R_1 \geq 0$：一旦上方圓柱體開始離開斜面，即使斜面完全粗糙也無補於事。

常見錯誤

- 以為兩個圓柱體之間的摩擦力沿斜面方向作用。其實它沿接觸點的公切線作用，而在這裏公切線垂直於斜面。
- 忘記力矩方程。單靠分解力只得出四條方程，卻有六個未知數；確定摩擦力的正是那兩條力矩方程。
- 計算法向反作用力 R_1 時漏掉 F。下方圓柱體的摩擦力把上方圓柱體推離斜面，所以 R_1 小於 $W_1\cos\alpha$。

STEP 之外

剛體處於平衡，當且僅當合力和合力矩同時為零；而巧妙地選擇取力矩的點，是剛體靜力學（rigid-body statics）的主要技巧。在這題中，方程的數目恰好等於未知數的數目；若未知數比方程多，問題便是超靜定（statically indeterminate）的，必須為物體如何變形建立模型才能完成求解。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對剛體靜力學和力矩有細緻的論述。

詳細解答

STEP I 2015，第 12 題

概率與統計 • 泊松分佈的稀疏化

STEP I 2015，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q12

關鍵思路

以到達人數作條件（conditioning），需要做手術的人數便成為一個二項（binomial）計數。然後對所有可能的到達人數求和（即全概率定律（law of total probability）），便得出需要做手術人數的分佈，而這個和式會化簡為一個指數級數（exponential series）。至於最後一部分，關鍵事實是：若兩個平均值相同的獨立（independent）泊松（Poisson）計數以其總和作條件，則兩者之間的分配服從二項分佈。

解答

設 X 為某一天到達的傷者人數，Y 為其中需要做手術的人數。

第 (i) 部分

已知 $X = n$，這 n 名傷者各自以概率 $\frac{1}{4}$ 需要做手術，且彼此獨立。所以在此條件下 $Y \sim \mathrm{B}(n, \frac{1}{4})$，而對於 $0 \le r \le n$，

$$\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{n-r} = \binom{n}{r}\frac{3^{n-r}}{4^n}.$$

（若 $r > n$，則概率為 0。）

第 (ii) 部分

固定 $r \geq 0$。由於 $Y = r$ 只可能在 $X \geq r$ 時發生，全概率定律給出

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = r \mid X = n) \\ &= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-8}8^n}{n!} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

$n!$ 互相抵消。接着把 $8^n = 8^r \cdot 8^{n-r}$ 拆開，使得 $8^r(\frac{1}{4})^r = 2^r$ 及 $8^{n-r}(\frac{3}{4})^{n-r} = 6^{n-r}$：

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = r) &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\,2^r}{r!} \sum_{n=r}^{\infty} \frac{6^{n-r}}{(n-r)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\,2^r}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!} \qquad (k = n - r) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-8}\,2^r}{r!}\,\mathrm{e}^6 = \frac{\mathrm{e}^{-2}\,2^r}{r!}. \end{aligned}$$

此式對每個 $r = 0, 1, 2, \ldots$ 都成立，所以每天需要做手術的人數服從平均值為 $8 \times \frac{1}{4} = 2$ 的泊松分佈（Poisson distribution）。

> **想一想** e^6 從何而來？

把所有只與 r 有關的部分移到和式之外後，剩下的就是 $\sum 6^k/k!$，即 e^6 的指數級數。把 8^n 拆成 $8^r \cdot 8^{n-r}$，正正是令餘下的和式只依賴於 $n - r$ 的關鍵。

第 (iii) 部分

設 M 和 T 分別為星期一和星期二需要做手術的人數。由第 (ii) 部分，兩者均為 $\mathrm{Po}(2)$。由於不同日子的到達人數互相獨立，而傷者是否需要做手術亦彼此獨立，所以 M 與 T 獨立。於是

$$\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) = \frac{\mathrm{P}(M = 8,\ T = 4)}{\mathrm{P}(M + T = 12)}.$$

由獨立性，分子為

$$\mathrm{P}(M = 8)\,\mathrm{P}(T = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-2}2^8}{8!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2}2^4}{4!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!}.$$

至於分母，獨立泊松隨機變量之和仍服從泊松分佈，其平均值相加，所以 $M + T \sim \mathrm{Po}(4)$。若不想直接引用這個結果，亦可直接推導：

$$\mathrm{P}(M + T = 12) = \sum_{m=0}^{12} \frac{\mathrm{e}^{-2}2^m}{m!} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2}2^{12-m}}{(12-m)!} = \frac{\mathrm{e}^{-4}2^{12}}{12!} \sum_{m=0}^{12} \binom{12}{m} = \frac{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}}{12!},$$

當中用了 $\sum_m \binom{12}{m} = 2^{12}$。兩者相除，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(M = 8 \mid M + T = 12) &= \frac{\mathrm{e}^{-4}\,2^{12}}{8!\,4!} \cdot \frac{12!}{\mathrm{e}^{-4}\,4^{12}} \\ &= \binom{12}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{495}{4096}.\end{aligned}$$

由於 $495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ 是奇數，而 $4096 = 2^{12}$，此分數已是最簡分數（lowest terms）。所以所求概率為 $\dfrac{495}{4096}$。

想一想 為甚麼答案看起來像一個二項概率？

已知總數為 12，由於兩天的平均值相同，這 12 宗手術個案中的每一宗來自星期一或星期二的可能性均等。所以星期一的人數服從 $\mathrm{B}(12, \frac{1}{2})$。留意原本的平均值 8 已完全消失。

驗算

- 第 (ii) 部分的平均值與 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Y \mid X)\big) = \mathrm{E}(X/4) = 2$ 一致。
- 對 $r = 0, \ldots, 14$ 以數值方法計算第 (ii) 部分的級數，結果在捨入誤差範圍內與 $\mathrm{e}^{-2}2^r/r!$ 相同。例如 $\mathrm{P}(Y = 0) = \sum_n \mathrm{e}^{-8}8^n(\frac{3}{4})^n/n! = \mathrm{e}^{-8}\mathrm{e}^6$。
- 對 $m = 0, \ldots, 12$，條件概率 $\binom{12}{m}/2^{12}$ 之和為 1，而 $495/4096 \approx 0.121$。以電腦模擬整個模型（泊松到達，然後每人各以概率 $\frac{1}{4}$ 需要做手術），所得數值與此相符。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分中由 $n = 0$ 而非 $n = r$ 開始求和：若到達人數少於 r，就不可能有 r 名傷者需要做手術。
- 在第 (iii) 部分中每天都用 $\mathrm{Po}(8)$。條件是針對手術個案，所以相關的平均值是 2。（在這裏平均值無論如何都會抵消，但推導過程仍應正確。）
- 題目要求最簡分數時，卻把答案寫成 $\binom{12}{8}/2^{12}$ 或 $1980/16384$。

STEP 之外

第 (ii) 部分稱為*稀疏化*（thinning）：若泊松過程（Poisson process）中的每一點各自獨立地以概率 p 保留，則被保留的點構成一個速率乘以 p 的泊松過程，而且，或許令人意外的是，它與被捨棄的點互相獨立。第 (iii) 部分則是其逆向：以總和作條件時，獨立的泊松計數按多項分佈（multinomial distribution）分配。這兩個事實是泊松過程理

論的基礎，你會在大學第一個概率課程中學到。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對兩者均有論述。

詳細解答

STEP I 2015，第 13 題

概率與統計 • 條件概率

STEP I 2015，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s1-q13

關鍵思路

以第一個 6 出現的時間作條件（conditioning）。若已知第一個 6 出現在第 n 次投擲，則之前的 $n-1$ 次投擲各自獨立，且每次同樣可能是 $1,\ldots,5$ 中任何一個；於是關於第一個 6 之前出現的 4 和 5 的問題，就變成普通的二項分佈（binomial distribution）問題。再對 n 求和，便得到幾何級數（geometric series）及其導數，而這正是提示中二項展開式（binomial expansion）派上用場之處。

解答

各次投擲互相獨立，每一面的概率均為 $\frac{1}{6}$。記第一個 6 出現在第 n 次投擲這事件為 A，並寫 $p_n = \mathrm{P}(A)$。

第 (i) 部分

第一個 6 出現在第 n 次投擲，當且僅當第 $1,\ldots,n-1$ 次投擲都不是 6，而第 n 次投擲是 6。由獨立性，

$$\mathrm{P}(A) = p_n = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

條件化的關鍵事實。 在 A 發生的條件下，對第 $1,\ldots,n-1$ 次投擲，我們只知道它們「不是 6」。由於骰子公平而各次投擲獨立，這 $n-1$ 次投擲互相獨立，且每次都在 $\{1,2,3,4,5\}$ 上均勻分佈。之後每一部分都會用到這一點，並配合全概率定律（law of total probability）$\mathrm{P}(X) = \sum_n \mathrm{P}(X \mid A)\, p_n$。

第 (ii) 部分

較容易的做法是求 $\mathrm{P}(B')$，即在第一個 6 之前沒有出現 5 的概率。在 A 的條件下，之前 $n-1$ 次投擲每次避開 5 的概率為 $\frac{4}{5}$，所以

$$\mathrm{P}(B') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

因此 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

由容斥原理（inclusion–exclusion principle）（以補集形式表示），

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(C') + \mathrm{P}(B' \cap C').$$

由 4 和 5 兩面之間的對稱性，$\mathrm{P}(C') = \mathrm{P}(B') = \frac{1}{2}$。至於 $B' \cap C'$，在 A 的條件下，之前每次投擲都必須同時避開 4 和 5，概率為 $\frac{3}{5}$：

$$\mathrm{P}(B' \cap C') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

所以 $\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$。

第 (iv) 部分

在 A 的條件下，之前 $n-1$ 次投擲中 5 的個數服從 $\mathrm{B}(n-1, \frac{1}{5})$，所以

$$\mathrm{P}(D \mid A) = (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

而當 $n = 1$ 時此概率為 0。因此

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6}.$$

抽出一個因子 $\frac{5}{6}$，其餘兩兩配對：$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 及 $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$。設 $m = n - 1$，

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{36} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\tfrac{2}{3}\right)^{m-1} = \tfrac{1}{36} \left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-2} = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4},$$

這裏用了題目所給、指數為 -2 的展開式：$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$。

? **想一想** 怎樣才能求得 $\mathrm{P}(D \cup E)$，而無須逐一列出其中一個或兩個事件同時發生的所有情況？

第 (v) 部分

利用 $\mathrm{P}(D\cup E)=\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)-\mathrm{P}(D\cap E)$，其中由 4 與 5 的對稱性得 $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(D)=\frac{1}{4}$。所以只需求 $\mathrm{P}(D\cap E)$。

在 A 的條件下，之前 $n-1$ 次投擲中恰有一個 4 和恰有一個 5，即要選定哪一次是 5、哪一次是 4（共 $(n-1)(n-2)$ 種有序選法），而其餘 $n-3$ 次投擲全部落在 $\{1,2,3\}$ 中：

$$\mathrm{P}(D\cap E\mid A)=(n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\qquad(n\geq 3).$$

於是

$$\mathrm{P}(D\cap E)=\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)\tfrac{1}{25}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}.$$

抽出 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$，得常數 $\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$，並有 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$。設 $k=n-3$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D\cap E)&=\tfrac{1}{216}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{2}{216}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)!}{k!\,2!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\\&=\tfrac{1}{108}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-3}=\tfrac{8}{108}=\tfrac{2}{27},\end{aligned}$$

這裏用了題目所給、指數為 -3 的展開式，其 x^k 項的係數為 $\frac{(k+2)!}{k!\,2!}$。因此

$$\mathrm{P}(D\cup E)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{27}=\tfrac{27-4}{54}=\tfrac{23}{54}.$$

驗算

有一個更巧妙的方法可以看出每一個答案，用來驗算再好不過。把所有擲出 1、2、3 的投擲（以及在 (ii) 和 (iv) 中連 4 也一併）忽略掉：它們從不影響這些事件。餘下的相關投擲組成一個序列，其中每個相關的面出現的機會均等。

- (ii)：第一次擲出 5 或 6 時，兩者機會均等，所以 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$。
- (iii)：在 4、5、6 三面之中，每一面同樣可能是最後一個首次出現的，而 $B\cap C$ 正是說 6 最後出現，所以概率為 $\frac{1}{3}$。
- (iv)：D 表示由 5 和 6 組成的序列以 5, 6 開始：概率為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。
- (v)：$D\cap E$ 表示由 4、5、6 組成的序列以 4,5,6 或 5,4,6 開始：概率為 $2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$。

全部五個答案亦已透過電腦模擬 3×10^5 個投擲序列加以確認，模擬得出 $\mathrm{P}(D\cup E)\approx 0.426$，而理論值為 $\frac{23}{54}\approx 0.4259$。

常見錯誤

- 把之前的投擲當作在全部六面上均勻分佈：在 A 的條件下，它們不可能是 6，所以每次是 5 的概率為 $\frac{1}{5}$，而非 $\frac{1}{6}$。
- 在 (v) 中漏了因子 $(n-1)(n-2)$，或者用了 $\binom{n-1}{2}$，後者沒有區分兩次投擲中哪一次是 4。
- 在 (v) 中直接把 $\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)$ 相加，卻沒有減去重疊部分。

STEP 之外

像本題這樣，以一個隨機停時 (stopping time) 作條件再求和，正是全概率定律最實用的形式；而你遇到的級數，則是負二項分佈（negative binomial distribution）的生成函數（generating function）。「忽略無關投擲」這個驗算方法，體現了一個威力強大的想法：只在有相關事情發生的時刻觀察一個過程，往往比原來的過程簡單得多。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩個想法都有深入發展。

詳細解答

STEP II 2015，第 1 題

純數學 • 不等式與級數

STEP II 2015，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q1

關鍵思路

每一條函數與對數（logarithm）之間的不等式，只要代入一個精心選取的 x 值，就會變成級數（series）中某一項與兩個對數之差之間的不等式。把這些差相加，幾乎所有項都會互相抵消（即該和式「伸縮相消」（telescopes）），只剩下一兩個對數。技巧在於選取適當的代換，使對數能拆成一個差。

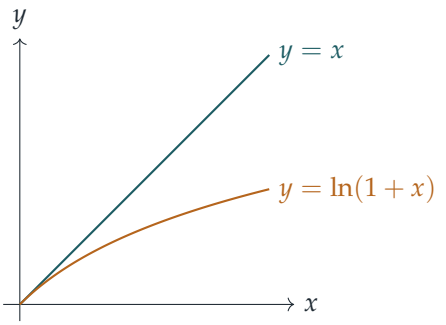
解答

第 (i) 部分

對 $x \geq 0$，設 $f(x) = x - \ln(1+x)$。那麼 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$，而且

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{對} x > 0.$$

所以 f 在 $[0, \infty)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），因此對每個 $x > 0$，都有 $f(x) > f(0) = 0$。即對所有正數 x，$x > \ln(1+x)$，正是所求。



現在對正整數 k 取 $x = \frac{1}{k}$：

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

把 $k = 1, 2, \ldots, n$ 的各式相加，右方便伸縮相消：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> \big(\ln 2 - \ln 1\big) + \big(\ln 3 - \ln 2\big) + \cdots + \big(\ln(n+1) - \ln n\big) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

這就是所求的結果。（附帶一提，由於 $\ln(n+1) \to \infty$，調和級數（harmonic series）發散（diverges）。）

第 (ii) 部分

對 $0 \le x < 1$，設 $g(x) = x + \ln(1-x)$。那麼 $g(0) = 0$，而且

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{對} 0 < x < 1,$$

因為在該區間內 $1 - x > 0$。所以 g 嚴格遞減，且對 $0 < x < 1$ 有 $g(x) < 0$；即

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

? **想一想** 應該代入哪個 x 值？為甚麼不能用 $k = 1$？

我們希望左方是 $\frac{1}{k^2}$，所以取 $x = \frac{1}{k^2}$。這要求 $x < 1$，故 $k \ge 2$；當 $k = 1$ 時，對數 $\ln(1-1)$ 沒有定義。這就是為甚麼要把 $\frac{1}{1} = 1$ 這一項另外處理，而它正是上界 $1 + \ln 2$ 中的那個 1。對 $k \ge 2$，關鍵在於 $1 - \frac{1}{k^2}$ 可以因式分解：

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

所以

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \big(\ln k - \ln(k-1)\big) - \big(\ln(k+1) - \ln k\big).$$

記 $a_k = \ln k - \ln(k-1)$，則右方為 $a_k - a_{k+1}$。由 $k = 2$ 加至 N，和式伸縮相消：

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

因為 $\ln\frac{N+1}{N} > 0$。

所以部分和（partial sums）$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$ 隨 N 遞增，而且全部小於 $1 + \ln 2$。上有界（bounded above）的遞增數列必定收斂（converges），因此這個無窮級數收斂，而其和至多為 $1 + \ln 2$。

要使不等式嚴格成立，須注意取極限只能保留 $\leq$，所以我們要預留一點空間。$k = 2$ 時的不等式 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$ 是嚴格的；設 $\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$。那麼對每個 $N \geq 2$，同樣的伸縮相消給出

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

所以取極限得 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \ln 2 - \delta < \ln 2$。加上 $k = 1$ 的一項，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

這就是所求的結果。

驗算

- 第 (i) 部分取 $n = 1$：$1 > \ln 2 \approx 0.693$。取 $n = 10$：$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx 2.929$，而 $\ln 11 \approx 2.398$。
- 第 (ii) 部分：真正的和是 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$，穩穩低於 $1 + \ln 2 \approx 1.6931$。事實上，我們的推導給出稍為更緊的上界 $1 + \ln 2 - \delta \approx 1.6555$，其中 $\delta \approx 0.0377$。
- $\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2}$ 的伸縮相消上界 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$，已用電腦對所有不超過 10^5 的 N 驗證。

常見錯誤

- 連 $k = 1$ 也代入 $x = \frac{1}{k^2}$：此時 $\ln(1 - x)$ 沒有定義；而忘記把第一項另外處理，就會漏掉 $1 + \ln 2$ 中的 1。
- 只證明 $f'(x) > 0$ 而沒有指出 $f(0) = 0$：一個函數可以是遞增的，但仍然是負數。
- 對嚴格不等式取極限，卻不加說明便聲稱極限仍是嚴格不等式；極限只能給出 $\leq$。

STEP 之外

把和式與對數（或積分）比較，正是積分判別法（integral test）的起點；而把第 (i) 部分加以精煉，可以證明 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ 收斂至歐拉常數（Euler's constant）$\gamma \approx 0.5772$。精確值 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 是歐拉（Euler）對巴塞爾問題（Basel problem）的解答，大學一年級課程常以傅里葉級數（Fourier series）推導出來。我們所用的單調收斂（monotone convergence）論證，即有界遞增數列必定收斂，是實分析（real analysis）的基石之一；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對此有細緻的闡述。

詳細解答

STEP II 2015，第 2 題

純數學 • 三角形幾何

STEP II 2015，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

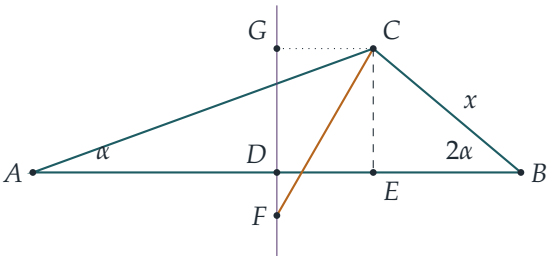
step.maths.org/questions/15-s2-q2

關鍵思路

第一個結果只需用正弦定理（sine rule）配合 $\sin 3\alpha$ 的三倍角公式（triple-angle formula）。至於 DE，就把所有長度都沿 AB 從其中一端量起：CE 兩側的直角三角形（right-angled triangle）直接給出 AE 和 BE。DE 的答案出奇地簡單，而正是這份簡單令三等分（trisection）得以成立：它告訴我們 C 與垂直平分線（perpendicular bisector）相距多遠，再與 $CF = x$ 比較，便能確定一個角。

解答

全文中，C 處的角為 $\angle ACB = \pi - 3\alpha$，又因 2α 是銳角（acute angle），故 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。



長度 AB

由正弦定理，並利用 $\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$，得

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

再用三倍角公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$，並除以 $\sin\alpha \neq 0$，得

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

此即所求。

長度 DE

A 和 B 處的角都是銳角，所以由 C 所作垂線的垂足（foot of the perpendicular）E 位於 A 與 B 之間。在直角三角形 CEB 中，

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

因此

$$AE = AB - BE = x\big(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)\big) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x\big(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha\big).$$

兩式相減，

$$AE - AD = x\big(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha\big) = \tfrac{1}{2}x.$$

此值為正，所以 E 位於 D 與 B 之間，且

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

與 α 無關。

三等分

設 G 為由 C 向 AB 的垂直平分線 DF 所作垂線的垂足。由於 CE 和 GD 都垂直於 AB，$CGDE$ 是一個矩形（rectangle），所以 $CG = DE = \frac{1}{2}x$，而且 CG 平行於 AB，即垂直於 CE。

想一想 怎樣把 $CF = x$ 轉化為一個角？

三角形 CGF 在 G 處為直角，斜邊（hypotenuse）$CF = x$，一邊 $CG = \frac{1}{2}x$。所以

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

垂直平分線上與 C 相距 x 的點有兩個，分別在 G 的兩側。從射線 CE（向下指向 AB）起，朝 A 的方向量度，射線 CG 所成的角為 $\frac{\pi}{2}$，所以兩條候選射線 CF 所成的角分別為 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$（$G$ 下方的點）和 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$（$G$ 上方的點）。

現在判斷哪一點與 B 位於 AC 的同一側。在直角三角形 ACE 中，$\angle ACE = \frac{\pi}{2} - \alpha$，所以射線 CA 在同一側與 CE 所成的角為 $\frac{\pi}{2} - \alpha$。由 C 出發、位於直線 AC 上 B 那一側的

射線，就是按這種量法角度小於 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的射線（或位於 CE 另一側、朝向 B 的射線）。由於 $\alpha<\frac{\pi}{4}$，

$$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{5\pi}{6},$$

所以 G 下方的點在 B 那一側，而 G 上方的點則不在。因此 F 是下方的點，$\angle ECF=\frac{\pi}{6}$，而射線 CF 位於角 ACE 之內，因而也在 $\angle ACB$ 之內。所以

$$\angle ACF=\angle ACE-\angle ECF=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\alpha=\frac{1}{3}(\pi-3\alpha)=\frac{1}{3}\angle ACB.$$

故此 CF 在靠近 CA 的一邊截出 $\angle ACB$ 的三分之一（而 $\angle FCB=\frac{2}{3}\angle ACB$）：直線 FC 三等分角 ACB。

驗算

- 取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，三角形的三個角為 30°、60°、90°，而 $AB=(3-1)x=2x$，正是熟悉的斜邊長度。於是 $AE=2x\cos^2 30^\circ=\frac{3}{2}x$，$AD=x$，所以 $DE=\frac{1}{2}x$。C 處的角為 90°，而 $\angle ACF=60^\circ-30^\circ=30^\circ$，正好是它的三分之一。
- 取 $\alpha=20^\circ$ 及 $x=1$，得 $AB\approx 2.532$ 及 $\angle ACB=120^\circ$；直接用坐標構作 F，得 $\angle ACF=40^\circ$。三個結果亦已用電腦對數以千計的隨機三角形逐一驗證。

常見錯誤

- 把 F 取在 G 上方。那一點與 C 的距離同樣是 x，但它位於 AC 的另一側，這正是題目要指明哪一側的原因。
- 在把 DE 寫成兩段長度之差以前，忘記檢查 E 是否位於 A 與 B 之間（以及位於 D 的哪一側）。

STEP 之外

用尺規（ruler and compasses）三等分一般的角是不可能的，這個事實可用域論（field theory）證明：三等分 60° 需要構作一個不可約三次多項式（irreducible cubic）的根，而可構作（constructible）的長度只會滿足一層層的二次方程。在本題中，三角形提供了額外資訊（B 處的角是 A 處的兩倍），正是這一點讓一個簡單的構作也能完成任務。想看更多優美的三角形幾何，可參閱考克斯特（Coxeter）與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何再探》）；至於不可能性的證明，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP II 2015，第 3 題

純數學 • 計數與數學歸納法

STEP II 2015，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q3

關鍵思路

按最長的棒把三角形分類。被 T_n 計入但不被 T_{n-1} 計入的三角形，正好是那些用上長度為 n 的棒的三角形，所以 $T_n - T_{n-1}$ 就是滿足 $a < b < n$ 及 $a + b \geq n$ 的數對個數。對中間那枝棒 b 的每個選擇，這都是一個簡單的計數，而這些計數構成一個等差數列（arithmetic progression）。把兩個相鄰的差相加便得到 $T_{2m} - T_{2m-2}$，這正是歸納步驟（inductive step）所需要的。

解答

計算最長棒為 c 的三角形

被 T_n 計入的三角形，其棒長為 $a < b < c \leq n$。當中 $c \leq n - 1$ 的，恰好就是被 T_{n-1} 計入的三角形，所以

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a + b \geq n\}.$$

固定中間的棒 b。我們需要 $n - b \leq a \leq b - 1$（由於 $b < n$，$a \geq 1$ 自動成立），所以當 $2b - n > 0$ 時有 $2b - n$ 個選擇，否則沒有。因此 b 由大於 $\frac{n}{2}$ 的最小整數取到 $n - 1$。

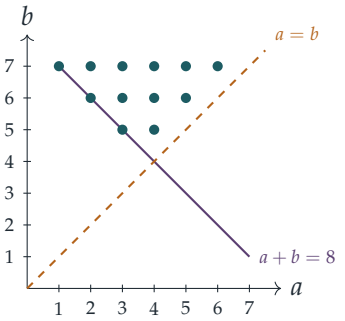
$n = 8$ 的情況

當 $c = 8$ 時，中間的棒可以是 $b = 5, 6, 7$，分別給出 a 的 2、4 及 6 個選擇：

$$b = 5 :\ a \in \{3,4\}, \qquad b = 6 :\ a \in \{2,3,4,5\}, \qquad b = 7 :\ a \in \{1,\ldots,6\}.$$

（$b = 4$ 需要 $4 \leq a \leq 3$，這是不可能的。）因此 $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$，正如所求。

下圖顯示這 12 個數對 (a,b)：它們是位於直線 $a+b=8$ 之上或其上方，並嚴格位於對角線 $a=b$ 上方的點。



至於 T_7-T_6，最長的棒是 7，中間的棒 $b=4,5,6$ 分別給出 $2b-7=1,3,5$ 個選擇，所以 $T_7-T_6=1+3+5=9$。因此

$$T_8-T_6=(T_8-T_7)+(T_7-T_6)=12+9=21.$$

一般的差

當 $n=2m$ 時，中間的棒取遍 $b=m+1,\ldots,2m-1$，對應有 $2b-2m=2,4,\ldots,2(m-1)$ 個選擇：

$$T_{2m}-T_{2m-1}=2+4+\cdots+2(m-1)=m(m-1).$$

當 $n=2m-1$ 時，中間的棒取遍 $b=m,\ldots,2m-2$，對應有 $2b-(2m-1)=1,3,\ldots,2m-3$ 個選擇，而首 $m-1$ 個奇數之和是 $(m-1)^2$。相加得

$$T_{2m}-T_{2m-2}=m(m-1)+(m-1)^2=(m-1)(2m-1).$$

（取 $m=4$，這兩條式分別給出 12 和 21，與上面的數值吻合。）只要較小的下標至少是 3，這些式子便成立，即第二條公式要求 $m\geq 3$。

歸納法

設 $f(m)=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$。我們用歸納法（induction）證明對所有 $m\geq 2$，$T_{2m}=f(m)$。

基本情況（base case），$m=2$。從棒 1,2,3,4 中選三枝，共有四種選法：$(1,2,3)$、$(1,2,4)$、$(1,3,4)$、$(2,3,4)$，除 $(1,2,4)$ 外全部滿足 $a+b\geq c$。所以 $T_4=3$，而 $f(2)=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 9=3$。

歸納步驟。假設對某個 $k\geq 3$，$T_{2k-2}=f(k-1)$。由差的公式，

$$T_{2k}=f(k-1)+(k-1)(2k-1),$$

所以只需證明 $f(k)-f(k-1)=(k-1)(2k-1)$。

想一想 怎樣才能整理 $f(k)-f(k-1)$，而不用把兩個三次式完全展開？

兩項都含有因子 $k-1$，所以先把它抽出來：

$$\begin{aligned} f(k)-f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1)-(k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k)-(4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6) = (k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

因此 $T_{2k}=f(k)$。由歸納法，對每個 $m\geq 2$，$T_{2m}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$。

奇數枝棒

利用 $T_{2m-1}=T_{2m}-m(m-1)$，

$$T_{2m-1}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)-m(m-1)=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5) \qquad (m\geq 2).$$

若改把棒的數目寫成 $2m+1$（以 $m+1$ 代替 m），則得

$$T_{2m+1}=\tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \qquad (m\geq 1).$$

例如 $T_3=\tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，即唯一的三角形 $(1,2,3)$。

驗算

- 由公式得 $T_6=\tfrac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 13=13$、$T_7=\tfrac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 11=22$ 及 $T_8=\tfrac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 17=34$，所以 $T_8-T_7=12$ 及 $T_8-T_6=21$，與直接計算的結果相同。
- 用電腦逐一數算 $\{1,\ldots,n\}$ 中所有三元組，對 3 至 79 的每個 n，結果都與兩條閉合形式（closed form）吻合。
- 設 $n=2m$，偶數情況的公式約為 $\tfrac{2}{3}m^3=\tfrac{n^3}{12}$，奇數情況的公式亦有相同表現。這是全部 $\binom{n}{3}\approx\tfrac{n^3}{6}$ 個可能三元組的一半，所以當 n 很大時，大約一半的三枝棒選法能組成三角形。

常見錯誤

- 忘記各枝棒長度互不相同，所以 $a<b$ 是嚴格的：容許 $a=b$ 會多算。
- 漏掉面積為零的（退化，degenerate）三角形：條件是 $a+b\geq c$，所以 $(1,2,3)$ 也要計算在內。
- 從 $m=1$ 開始歸納：T_2 沒有定義，因為我們需要 $n\geq 3$。

STEP 之外

像上圖那樣計算一個區域內的格點（lattice points），是分拆（partitions）理論和生成函數（generating functions）的起點：T_n 有一個有理生成函數，而 n 分為偶數和奇數兩種情況，反映了其分母中的因子 $1-x^2$。像這樣的結果，即計數是 n 的多項式、但該多項式取決於 n 的餘數（residue），稱為擬多項式（quasi-polynomial）。如欲進一步了解遞推關係（recurrence）和計數論證，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）。

詳細解答

STEP II 2015，第 4 題

純數學 • 反正切函數的分支

STEP II 2015，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q4

關鍵思路

知道 $\tan\theta$ 的值，只能把 θ 確定至相差 π 的整數倍，因此每條方程都有無窮多個解的分支（branch），彼此之間只是沿鉛直方向平移 π 的倍數。連續性（continuity）和 $x=0$ 處的值決定選取哪一個分支；而每當右方趨向 $\pm\infty$ 時，連續性亦迫使我們轉換分支：那正是角度經過 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇數倍的時刻。所以在每一部分，我們先描繪右方的圖像，然後連續地追蹤角度的變化。

全文中 arctan 指主值（principal value），即 $-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$。

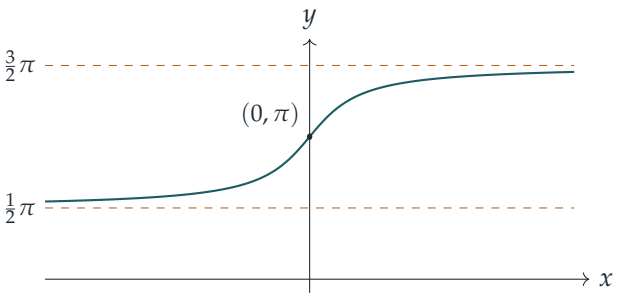
解答

第 (i) 部分

$\tan\theta = x$ 的每一個解都是 $\theta = \arctan x + n\pi$，其中 n 為整數。函數 $\arctan x$ 在整條實數線上連續，所以 $\mathrm{f}(x) - \arctan x$ 是一個只取 $\{n\pi\}$ 中的值的連續函數；連續函數不能在這些孤立的值之間跳躍，因此它是常數。由於 $\mathrm{f}(0) = \pi$ 而 $\arctan 0 = 0$，該常數為 π：

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

所以這條曲線就是一般的 arctan 曲線向上平移 π：它嚴格遞增，以斜率 1 通過 $(0,\pi)$（因為 $\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$），並有水平漸近線（asymptote）：當 $x \to -\infty$ 時為 $y = \frac{1}{2}\pi$，當 $x \to \infty$ 時為 $y = \frac{3}{2}\pi$。由於 $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$，它關於 $(0,\pi)$ 具有 2 階旋轉對稱（rotational symmetry）。



第 (ii) 部分

曲線 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$。記之為 $q(x)$。它是奇函數（odd function），只在 $x = 0$ 處為零，且與 x 同號。當 $x \to \pm\infty$ 時，$q(x) \approx 1/x \to 0$，所以 x 軸是一條漸近線，在右方從上方趨近，在左方從下方趨近。求導，得

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

所以駐點（stationary point）位於 $x = \pm 1$：極大點 $(1, \frac{1}{2})$ 和極小點 $(-1, -\frac{1}{2})$。（等價地，由算術—幾何平均不等式（AM–GM）得 $1 + x^2 \geq 2|x|$，故 $|q(x)| \leq \frac{1}{2}$。）在原點處的斜率為 1。

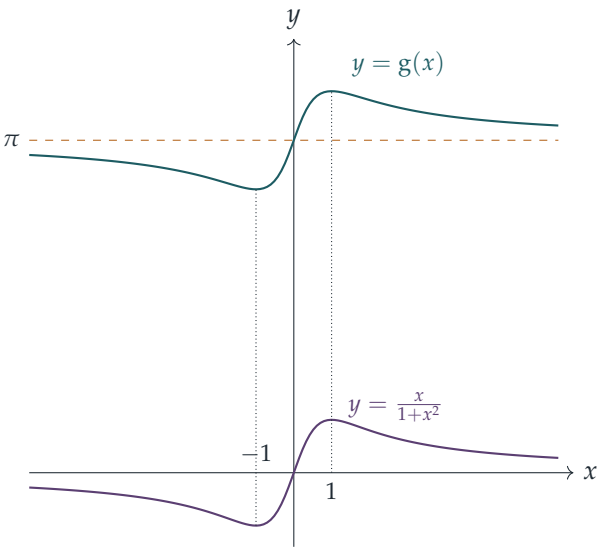
曲線 $y = \mathrm{g}(x)$。現在右方 $q(x)$ 連續且有界，所以與第 (i) 部分完全相同的論證給出

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan\frac{x}{1+x^2}.$$

由於 arctan 是遞增的，g 的升降位置與 q 完全相同。因此

- 當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{g}(x) \to \pi$（在右方從上方趨近，在左方從下方趨近）；
- g 在 $x = 1$ 處有極大值 $\pi + \arctan\frac{1}{2} \approx 3.61$，在 $x = -1$ 處有極小值 $\pi - \arctan\frac{1}{2} \approx 2.68$；
- 它以斜率 $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$ 通過 $(0, \pi)$。

它的形狀就是 q 的形狀稍為壓扁（因為當 $u > 0$ 時 $\arctan u < u$），再向上平移 π；它從不接近 $\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{3}{2}\pi$，所以從不需要轉換分支。



第 (iii) 部分

曲線 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$。記之為 $r(x)$。它是奇函數，只在 $x = 0$ 處為零，並在 $x = \pm 1$ 處有鉛直漸近線。當 $x \to \pm\infty$ 時，$r(x) \approx -1/x \to 0$。它的導數是

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

所以 r 在其有定義的三個區間上各自嚴格遞增。由 x 和 $1-x^2$ 的正負號可讀出：

- 在 $x < -1$ 上，r 由 0^+（當 $x \to -\infty$）上升至 $+\infty$（當 $x \to -1^-$）；
- 在 $-1 < x < 1$ 上，r 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，並以斜率 1 通過原點；
- 在 $x > 1$ 上，r 由 $-\infty$（當 $x \to 1^+$）上升至 0^-（當 $x \to \infty$）。

曲線 $y = \mathrm{h}(x)$。在每個區間上分別而言，r 是連續的，所以 $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$ 在該區間上是 π 的某個固定倍數，但在不同區間上這個倍數可以不同。我們逐個區間求出它。

在 $-1 < x < 1$ 上，條件 $\mathrm{h}(0) = \pi$ 給出 $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$。當 $x \to 1^-$ 時 $r \to +\infty$，所以 $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$；當 $x \to -1^+$ 時 $r \to -\infty$，而 $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$。在 $x = \pm 1$ 處的連續性迫使 $\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$ 及 $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$。

> ? **想一想** 在 $x = 1$ 的右邊緊貼處，$r(x)$ 是很大的負數，所以 $\arctan r(x)$ 接近 $-\frac{1}{2}\pi$。我們要加上 π 的哪一個倍數，才能使 h 在 $x = 1$ 處連續？

當 $x > 1$ 時有 $\mathrm{h}(x) = n\pi + \arctan r(x)$，而當 $x \to 1^+$ 時它趨向 $n\pi - \frac{1}{2}\pi$。要使它等於 $\frac{3}{2}\pi$，須有 $n = 2$。同理，當 $x < -1$ 時有 $\mathrm{h}(x) = m\pi + \arctan r(x) \to m\pi + \frac{1}{2}\pi$（當

$x \to -1^-$），要與 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合須有 $m = 0$。因此

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x < -1, \\ \pi + \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 2\pi + \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{h}(\pm 1) = \pi \pm \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以當 r 急升至 $+\infty$ 再從 $-\infty$ 重新出現時，角度 h 只是繼續遞增，越過 $\frac{3}{2}\pi$（在 $x = -1$ 處同樣越過 $\frac{1}{2}\pi$）。

現在看草圖的各項特徵。

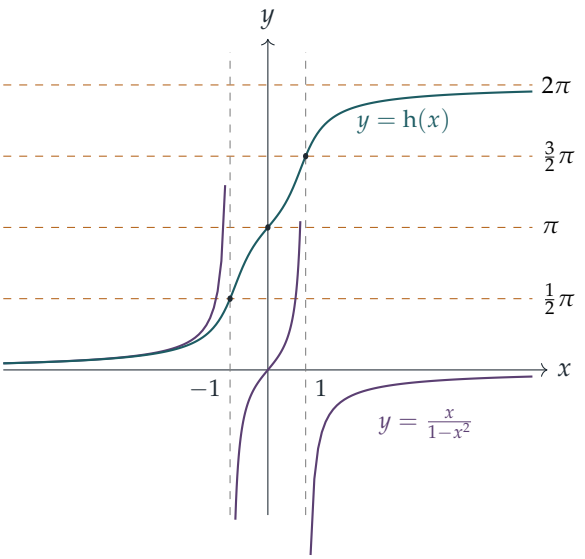
- 漸近線。當 $x \to -\infty$ 時，$r \to 0^+$，所以 $\mathrm{h}(x) \to 0$，從上方趨近；當 $x \to \infty$ 時，$r \to 0^-$，所以 $\mathrm{h}(x) \to 2\pi$，從下方趨近。
- 單調（*monotonic*）。在 ± 1 以外，由鏈式法則（chain rule），

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{r'(x)}{1 + r(x)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + x^2} = \frac{1+x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0.$$

  （分母等於 $(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$。）這個表達式在 $x = \pm 1$ 處完全沒有問題，其值為 2，所以 h 在該處是光滑的：曲線以斜率 2 通過 $(1, \frac{3}{2}\pi)$ 和 $(-1, \frac{1}{2}\pi)$，並沒有尖角。
- 關鍵點。$(0, \pi)$，斜率 1；$(\pm 1, \pi \pm \frac{1}{2}\pi)$，斜率 2。
- 對稱性。$\mathrm{h}(-x) = 2\pi - \mathrm{h}(x)$，所以曲線關於 $(0, \pi)$ 具有旋轉對稱。

所以 h 由 0 穩定地遞增至 2π，是一條與第 (i) 部分相似的 S 形曲線，但覆蓋的高度是其兩倍。在草圖中，r 的漸近線 $x = \pm 1$ 恰好對準 h 越過 $\frac{1}{2}\pi$ 和 $\frac{3}{2}\pi$ 的點。

有一個簡潔的方法可把三種情況一併寫出：$\mathrm{h}(x) - \pi$ 是點 $(1 - x^2, x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 內的極角（polar angle）。該點從不到達原點或負水平軸（當 $1 - x^2 \le 0$ 時有 $x \ne 0$），這正是角度連續變化的原因。



驗算

- 每條公式都滿足定義方程：例如 $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$，而且在 0 處的值全都是 π。
- 代入個別數值：$g(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$，以及 $h(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$，正如草圖所要求，它介乎 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ 與 $2\pi\approx 6.283$ 之間。
- h 的連續性：$h(0.999)\approx 4.710$ 及 $h(1.001)\approx 4.714$，分處 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ 兩側，與 $x=1$ 處斜率為 2 一致。以電腦在 $[-10,10]$ 上逐步檢查，確認 f、g、h 都沒有任何跳躍。

常見錯誤

- 對所有 x 都寫 $h(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$：這在 $x=1$ 處向下跳 π，在 $x=-1$ 處向上跳 π，所以並不連續。
- 只因 $\frac{x}{1-x^2}$ 在 $x=\pm1$ 處有鉛直漸近線，便在 $y=h(x)$ 的圖像中也畫上；角度本身保持有限，只是它的正切值趨向無窮。
- 在 $y=h(x)$ 的 $x=\pm1$ 處畫出尖角；該處左右兩側的斜率都是 2。

STEP 之外

我們所做的，是為一個多值反函數（many-valued inverse function）選取一個連續的分支；而「每當正切值經過無窮大便加上 π」這條規則，讓我們初嘗把路徑提升(lifting)到覆

疊空間（covering space）的滋味。同一想法應用於複對數（complex logarithm）和 arg z，正是複分析（complex analysis）中環繞數（winding number）和輻角原理（argument principle）的基礎。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以幾何方式發展這套理論，讀來趣味盎然。

詳細解答

STEP II 2015，第 5 題

純數學 • 反正切級數

STEP II 2015，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q5

關鍵思路

正切和角公式（tangent addition formula）能把若干個反正切（arctangent）之和化為單一分式，因此關於 $\tan S_n$ 的歸納法（induction）證明只需細心處理代數運算。微妙之處在於由 $\tan S_n$ 推出 S_n 本身這一步：知道一個角的正切值，只能確定該角至相差 π 的整數倍，所以我們必須確定 S_n 落在哪個區間。在第 (ii) 部分，角 α_n 原來正是第 (i) 部分中的那些反正切，而無窮級數（infinite sum）就是 S_n 的極限（limit）。

解答

第 (i) 部分

設 $\theta_m = \arctan\left(\frac{1}{2m^2}\right)$，於是 $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$，且 $\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$。

$\tan S_n$ 的公式。 當 $n = 1$ 時，$\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$，所以結果成立。

假設對某個 $n \geq 1$ 有 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$。由於 $S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$，和角公式給出

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

分母不為零，因為乘積 $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}$ 小於 1。將分子和分母同乘以 $2(n+1)^3$，得

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)\big(2n(n+1)+1\big)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

想一想 我們怎樣知道分母能夠漂亮地因式分解？

我們的目標是 $\frac{n+1}{n+2}$，所以分母理應是 $(n+2)(2n^2+2n+1)$。展開即可證實：$(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$。約去正因式 $2n^2+2n+1$，得

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

這正是 $n+1$ 時的結果。由歸納法，對所有 $n \geq 1$，$\tan S_n = \frac{n}{n+1}$。

S_n 的公式。 單憑 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$，我們只能說對某個整數 k，$S_n = \arctan\frac{n}{n+1} + k\pi$。為了證明 $k=0$，我們再次用歸納法證明

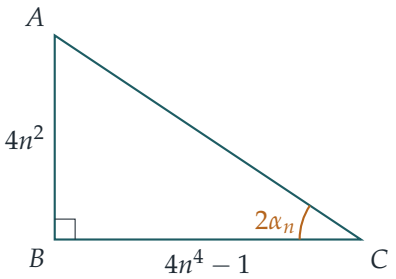
$$S_n = \arctan\frac{n}{n+1}.$$

當 $n=1$ 時，$S_1 = \arctan\frac{1}{2}$，符合要求。假設結果對某個 n 成立。由於 $0 < \frac{n}{n+1} < 1$，我們有 $0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$。又 $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$，所以 $0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$。相加得

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

因此 S_{n+1} 位於 $[0, \frac{1}{2}\pi)$，這恰好是 arctan 在非負數上的值域；而由第一個結果，$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$。由於 tan 在此區間上是一一對應的（one-to-one），故 $S_{n+1} = \arctan\frac{n+1}{n+2}$。歸納法至此完成。

第 (ii) 部分



由於 B 處的角是直角，角 C 的對邊是 AB，鄰邊是 BC（注意當 $n \geq 1$ 時 $4n^4-1 > 0$）。所以

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4-1}.$$

第 (i) 部分提示我們試試 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$。設 $t = \frac{1}{2n^2}$，倍角公式（double-angle formula）給出

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4-1},$$

兩者吻合。為了確保這是正確的那個值，而不僅僅是其中一個可能的值，設 $t = \tan\alpha_n$。方程 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$ 可整理為二次方程（quadratic equation）

$$4n^2t^2 + 2(4n^4 - 1)t - 4n^2 = 0,$$

其兩根之積為 -1。其中一根是 $\frac{1}{2n^2}$，所以另一根是 $-2n^2 < 0$。但 $2\alpha_n$ 是直角三角形中直角以外的一個角，所以 $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$，從而 $0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$，且 $t > 0$。因此 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$；又由於 α_n 位於 arctan 的值域內，

$$\alpha_n = \arctan\frac{1}{2n^2}.$$

想一想 這裏的無窮級數是甚麼意思？第 (i) 部分又怎樣幫上忙？

無窮級數就是其部分和（partial sums）的極限，而由第 (i) 部分，這些部分和是

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = S_N = \arctan\frac{N}{N+1}.$$

當 $N \to \infty$ 時，$\frac{N}{N+1} \to 1$；又由於 arctan 是連續（continuous）函數，$\arctan\frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

符合要求。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，第 (ii) 部分的三角形就是我們熟悉的 3–4–5 三角形，其中 $\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$。而 $\tan\alpha_1 = \frac{1}{2}$ 滿足 $\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$。
- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$，而 $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$，與公式的預測一致。
- 從數值上看，把首 2000 項相加得 $S_{2000} \approx 0.785148$，而 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$。兩者相差約 $\frac{1}{4000}$，這正合預期：由差角公式，恰有 $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$。

常見錯誤

- 由 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ 直接得出 $S_n = \arctan\frac{n}{n+1}$，而沒有證明 S_n 位於 $[0, \frac{1}{2}\pi)$。
- 憑僥倖猜中 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$，卻沒有排除二次方程的另一個根。
- 把無窮級數當作 S_∞，卻沒有說明它是 S_N 的極限。

STEP 之外

這其實是一個經過偽裝的伸縮級數（telescoping series）：由於 $\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$，每一項都等於 $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$，於是總和坍縮為 $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$，而這等於 $\arctan \frac{n}{n+1}$。把無窮級數定義為部分和的極限，並懂得何時可以讓極限穿過連續函數，正是大學第一門數學分析（analysis）課程的起點。想進一步閱讀，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是個好起點。

詳細解答

STEP II 2015，第 6 題

純數學 • 利用對稱性積分

> **STEP II 2015，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q6

關鍵思路

把 $\sin x$ 寫成 $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$，就能把 $1+\sin x$ 變成二倍角（double-angle）表達式，接着 $\sec^2$ 便可直接積分。代換（substitution）$y = \pi - x$ 把 $[0, \pi]$ 關於其中點作反射（reflection），而 $\sin x$ 對這個反射毫無反應。因此，$\mathrm{f}(\sin x)$ 前面的任何多項式（polynomial）因子，都可以換成它反射後的版本。在第 (iii) 部分，那個三次式（cubic）是特意挑選的，令這種交換一下子消去所有 x 的冪。

解答

第 (i) 部分

由於 $\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ 及 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$，取 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，得

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

取倒數再乘以 2，得 $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1+\sin x}$，此即所求。（兩邊在相同的點上都沒有定義，即 $\sin x = -1$ 之處。）

因此

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

因為根據連鎖法則（chain rule），對 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 求導會產生一個因子 $-\frac{1}{2}$。

第 (ii) 部分

設 $I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$。令 $y = \pi - x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$，上下限 $x = 0, \pi$ 變成 $y = \pi, 0$，而且 $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$。於是

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^\pi (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^\pi y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

因為 y 只是啞變數（dummy variable）。所以 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，即所求結果。

想一想 未知的積分 I 在等式兩邊都出現了。這是個問題嗎？

不是，這正是我們想要的。代換本身並沒有求出 I 的值，而是給出一條關於 I 的線性方程（linear equation），我們解這條方程便可。

現在取 $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$，它在 $t \in [0,1]$ 上連續（continuous），而這正是 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的取值範圍。由第 (i) 部分，

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^\pi = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

而且 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 在 $[0, \pi]$ 上連續，因為自變量一直留在 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 之內。因此

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

第 (iii) 部分

使用同樣的反射。設 $g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$。展開，

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

設 $J = \int_0^\pi \dfrac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$。完全仿照第 (ii) 部分作代換 $y = \pi - x$，得

$$J = \int_0^\pi \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{其中} K = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

所以 $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$。

想一想 為甚麼這個特定的三次式這麼好用？

以 $u = x - \frac{1}{2}\pi$（即與中點的距離）表示，$g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$。由於 $\sin x = \cos u$，函數 $1/(1+\sin x)^2$ 是 u 的偶函數（even function），所以奇次項 $2u^3$ 和 $-\frac{3}{2}\pi^2 u$ 在對稱區間上的積分為零。剩下的只有常數 $-\frac{1}{2}\pi^3$，正是我們得到的結果。第 (ii) 部分其實是同一回事，只是取 $x = u + \frac{1}{2}\pi$。

要求 K，把第 (i) 部分的恆等式平方：$\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$。代入 $u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，於是 $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$，而 $x = 0, \pi$ 變成 $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$。寫成 $\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$，其積分為 $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$，於是

$$\begin{aligned} K &= \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

驗算

- 對 $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 求導，得 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$。
- 正負號：第 (ii) 部分的被積函數為正，而 $\pi \approx 3.14$ 是合理的，因為由 $\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$ 可得上下界 $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$ 及 $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$。第 (iii) 部分中，$2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$ 在 $(0, \pi]$ 上成立，所以答案為負是對的。
- 數值積分（numerical quadrature）給出 $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$，而第 (iii) 部分的積分 ≈ -20.6709，分別與 $\frac{4}{3}$ 及 $-\frac{2}{3}\pi^3$ 吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分漏掉連鎖法則帶來的因子 $-\frac{1}{2}$，結果得出 $+2\tan(\dots)$ 或 $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$。
- 忘記對調上下限會抵消 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ 帶來的負號。
- 在第 (iii) 部分嘗試連續三次分部積分（integration by parts）。這樣做是可行的，但反射只需一行就能完成。

STEP 之外

第 (ii) 部分的技巧運用了對稱性（symmetry）。如果一個權函數（weight function）在某個反射下保持不變，那麼被積函數中只有關於反射中心為偶的部分才有貢獻。你會在

大學一年級數學中處處遇到這個想法：在傅里葉級數（Fourier series）中，奇函數沒有餘弦項；在概率中，關於 μ 對稱的分佈（distribution），其平均值（mean）就在 μ。對於任何 $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數（rational function），代換 $t = \tan \frac{1}{2}x$ 是一個有系統的替代方法。想找更多這類積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

詳細解答

STEP II 2015，第 7 題

純數學 • 相交圓

STEP II 2015，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q7

關鍵思路

當兩個圓相交於兩點時，通過這兩點的直線（即公共弦（common chord））垂直於連心線（line of centres）。圓 D 平分（bisects）C，當且僅當這條公共弦是 C 的直徑（diameter），即公共弦通過 C 的圓心。由兩個圓心及其中一個交點組成一個直角三角形，對它應用畢氏定理（Pythagoras' theorem），便可把「平分」化為一條方程：（圓心之間的距離）$^2 = r^2 - a^2$。

解答

第 (i) 部分

設 D 的圓心為 Q、半徑為 r，並設 O 為原點。

*一般條件。*假設 D 平分 C，與 C 相交於 P 及 $P' = -P$，其中 $|P| = a$。兩點都在 D 上，所以 $QP = QP' = r$。於是 Q 與 P、P' 等距，因此 Q 位於 PP' 的垂直平分線（perpendicular bisector）上，而這條垂直平分線通過 O（即 PP' 的中點）。因此 $OQ \perp OP$，對三角形 OQP 應用畢氏定理，得

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

反過來，若 D 是任何滿足 $OQ^2 = r^2 - a^2$ 及 $OQ > 0$ 的圓，在 C 上取一點 P 使 $OP \perp OQ$。那麼 $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$，對 $-P$ 亦同理，所以 D 通過 C 上兩個徑向相對（diametrically opposite）的點。兩個不同的圓最多相交於兩點，所以這兩點就是僅有的交點，因此 D 平分 C。

*當 $r > a$ 時的存在性。*把圓心放在 x 軸上，與 O 相距 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$：

$$\left(x - \sqrt{r^2 - a^2}\right)^2 + y^2 = r^2.$$

直接驗證：從這條方程減去 $x^2+y^2=a^2$，得 $-2x\sqrt{r^2-a^2}+(r^2-a^2)=r^2-a^2$，所以 $x=0$（因為 $r\neq a$），於是 $y=\pm a$。兩圓恰好相交於 $(0,a)$ 及 $(0,-a)$，而這兩點在 C 上徑向相對。所以這個半徑為 r 的圓平分 C。

*當 $r\leq a$ 時的不可能性。*若某個半徑為 r 的圓平分 C，則由 $(*)$ 得 $r^2=OQ^2+a^2\geq a^2$。所以 $r<a$ 是不可能的。若 $r=a$，則 $(*)$ 迫使 $OQ=0$，所以 D 就是 C 本身，它與 C 相交於無限多點，而不是恰好兩點。因此沒有半徑 $r\leq a$ 的圓能平分 C。

第 (ii) 部分

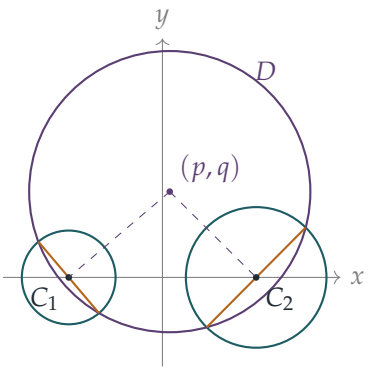
設 D 的圓心為 (p,q)。對每個圓應用 $(*)$（把原點平移至相應的圓心），

$$(p+d)^2+q^2=r^2-a_1^2,$$
$$(p-d)^2+q^2=r^2-a_2^2.$$

以第一式減去第二式，q^2 和 p^2 項互相抵消，剩下 $4pd=a_2^2-a_1^2$，所以

$$p=\frac{a_2^2-a_1^2}{4d},$$

即為所求。



在草圖中（$d=2$，$a_1=1$，$a_2=1.5$，$r=3$），每條公共弦（琥珀色）都是 C_1 或 C_2 的直徑，並垂直於連接圓心的虛線。

為求 q，把 p 代回第一條方程。首先，

$$p+d=\frac{4d^2+a_2^2-a_1^2}{4d},$$

所以

$$q^2=r^2-a_1^2-\frac{(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}=\frac{16d^2r^2-16d^2a_1^2-(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}.$$

分子中被減去的項展開為

$$\begin{aligned}16d^2a_1^2+(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2 &= 16d^4+8d^2(a_2^2-a_1^2)+16d^2a_1^2+(a_2^2-a_1^2)^2\\ &= 16d^4+8d^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2\\ &= \big(4d^2+(a_2-a_1)^2\big)\big(4d^2+(a_2+a_1)^2\big),\end{aligned}$$

最後一行成立，是因為 $(a_2-a_1)^2+(a_2+a_1)^2=2(a_1^2+a_2^2)$ 及 $(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2=(a_2^2-a_1^2)^2$。因此

$$q=\pm\frac{\sqrt{16r^2d^2-\big(4d^2+(a_2-a_1)^2\big)\big(4d^2+(a_2+a_1)^2\big)}}{4d}.$$

想一想 不等式（inequality）從何而來？到目前為止，似乎沒有任何東西像是不等式。

圓心 (p,q) 是實點，所以 $q^2\geq 0$。由於 $16d^2>0$，這表示

$$16r^2d^2\geq\big(4d^2+(a_2-a_1)^2\big)\big(4d^2+(a_2+a_1)^2\big),$$

這正是所要求關於 r 的條件。

我們還應檢查第 (i) 部分的要求 $r>a_1$（及 $r>a_2$）並不是額外的條件。由於 $d>a_1$，我們有 $4d^2+a_2^2-a_1^2>0$，所以 $p+d>0$；於是 $r^2-a_1^2=(p+d)^2+q^2>0$。同理，因為 $d>a_2$，所以 $d-p>0$，因此 $r^2-a_2^2=(p-d)^2+q^2>0$。所以求得的圓 D 確實同時平分 C_1 和 C_2。

驗算

- 對稱情況 $a_1=a_2=a$：此時 $p=0$，正如關於 y 軸的對稱性所要求的；條件變為 $16r^2d^2\geq 4d^2(4d^2+4a^2)$，即 $r^2\geq d^2+a^2$。這恰好是圓心在原點時的 $(*)$，而原點正是同時最接近 $(\pm d,0)$ 的可能圓心。
- 在草圖的例子中，$p=0.15625$，$q\approx 1.830$，而 D 與 C_1 的交點約為 $(-1.353,-0.762)$ 及 $(-2.647,0.762)$，其中點為 $(-2,0)$，即 C_1 的圓心。在該例中 r 的最小可能值約為 2.377。
- 對調 C_1 和 C_2（$a_1\leftrightarrow a_2$，$d\to -d$），p 的形式不變，不等式亦不變，理應如此。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記 $r=a$ 的情況：$(*)$ 容許 $OQ=0$，你必須說明為何 $D=C$ 不算數。

- 把條件寫成 $OQ^2 = r^2 + a^2$，這是把平分與直角相交（正交圓（orthogonal circles））混淆了。畫出那個三角形：直角位於 C 的圓心，所以斜邊（hypotenuse）是 D 的半徑 r。
- 只給出 $q = +\sqrt{\cdots}$：關於 x 軸反射會得到第二個圓。

STEP 之外

對於點 (p, q) 及圓心為 (x_0, y_0)、半徑為 r 的圓，量 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$ 稱為該點關於該圓的冪（power）；而關於兩個圓具有相等冪的點的集合是一條直線，稱為根軸（radical axis）；像我們那樣把兩條圓方程相減，便能求出它。在本題中，平分條件表示 C 的圓心關於 D 的冪等於 $-a^2$。這些概念，以及相關的圓反演（inversion），在 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）中有精彩的闡述；而許多 STEP 風格的應用可見於 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

詳細解答

STEP II 2015，第 8 題

純數學 • 向量與相切圓

STEP II 2015，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q8

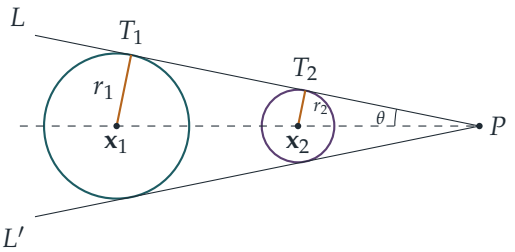
關鍵思路

每個圓心與兩條切線（tangent）的距離相同（即其自身的半徑），所以兩個圓心都位於平分 L 與 L' 之間夾角的直線上，即角平分線（angle bisector）上。沿着這條直線，與 P 的距離和半徑成正比，由此立即得出 (i) 的公式。至於 (ii)，把公式除以 $r_1 r_2$ 後會變得對稱得多：以 $\mathbf{x}_i / r_i$ 和 $1/r_i$ 表示時，三個焦點（focus）滿足一條係數之和為零的線性關係，而這正正就是共線（collinear）的意思。

解答

第 (i) 部分

設 θ 為 L 與 L' 在 P 處夾角的一半，取的是包含兩個圓的那個角。



圓的切線與圓心的垂直距離等於半徑。所以 $\mathbf{x}_1$ 與 L 和 L' 的距離都是 r_1，而與兩條相交直線等距的點，必位於 P 處兩條角平分線的其中一條上。由於兩個圓位於 L 的同一側，亦位於 L' 的同一側，兩個圓心都在 L 與 L' 分割出的四個角區域中的同一個區域內，所以它們位於從 P 出發的同一條半直線上：即該區域的角平分線。設 $\mathbf{u}$ 為沿這條半直線、

由 P 指向兩個圓的單位向量（unit vector）。

設 T_1 為 L 與 C_1 相切的點，則三角形 PT_1X_1（其中 X_1 為圓心）在 T_1 處為直角，所以 $r_1 = PX_1 \sin\theta$。同理 $r_2 = PX_2 \sin\theta$。因此

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

其中 $\mathbf{p}$ 為 P 的位置向量（position vector）。消去 $\mathbf{u}/\sin\theta$，得

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

兩個圓大小不同，所以 $r_1 \neq r_2$，可以相除：

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

即為所求。（若半徑相等，L 與 L' 便會平行，根本沒有焦點。）

第 (ii) 部分

> **想一想** $\mathbf{p}$ 的公式並不具有明顯的對稱性。能否把它改寫，使三個焦點的形式看起來一樣？

把 $(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$ 除以 r_1r_2。記 $s_i = 1/r_i$ 及 $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$，式子變成

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

把第 (i) 部分應用於另外兩對圓（這是容許的，因為 $r_3 \neq r_1$、$r_3 \neq r_2$，而且各圓互不重疊），並以 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{r}$ 表示 Q 和 R 的位置向量，得

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

右方滿足 $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$，所以

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

由於 $s_3 \neq s_1$，可寫成

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{其中} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

因為兩個係數 $\frac{s_2-s_1}{s_3-s_1}$ 與 $\frac{s_3-s_2}{s_3-s_1}$ 之和為 1。所以 $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$，這是經過 R 和 P 的直線上的一點。因此 P、Q 和 R 共線。（若 P 與 R 剛好重合，則同樣得出 $Q = P = R$，命題顯然成立。）

第 (iii) 部分

由第 (ii) 部分，$\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$。假設 $P \neq R$，則點 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ 是中點 $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$ 若且唯若 $\lambda = \frac{1}{2}$（不同的 λ 值對應直線上不同的點）。所以條件為

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

換言之，r_2 必須是 r_1 與 r_3 的調和平均數（harmonic mean）。（在退化情況 $P = R$ 下，三個焦點重合，無論半徑為何，Q 都顯然位於中點。）

驗算

- 第 (i) 部分：令 $r_2 \to 0$，C_2 縮成一點，公式給出 $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$：從一點引出的切線當然經過該點。另外，$\mathbf{p}$ 等於 $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$，當 $r_2 < r_1$ 時位於較小的圓之外，與圖中一致。
- (iii) 的一個數值例子：取圓心 $(0,0)$、$(10,1)$、$(3,8)$，半徑分別為 1、$\frac{3}{2}$、3，使得 $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$。於是 $P = (-20,-2)$、$R = (17,-6)$、$Q = (-\frac{3}{2},-4)$，而 Q 確實是 PR 的中點。
- 公式亦經電腦驗證：對許多隨機產生的圓對，直接求兩條切線的交點，都得出相同的點 P。

常見錯誤

- 沒有解釋為何 P 位於連心線上，或為何 P 位於連接兩圓心的線段之外（承載兩個圓心的，是從 P 出發的同一條半直線）。
- 只顯示 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ 與 $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ 平行，卻沒有檢查關係式的係數之和為零；關係式 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 只有在 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 時才蘊含共線。

STEP 之外

焦點 P 是把 C_1 映射到 C_2、比例因子為正數 r_2/r_1 的放大（enlargement，又稱位似 homothety）的中心。第 (ii) 部分就是蒙日（Monge）的三圓定理：把以 Q 和 R 為中心的兩個放大複合起來，便得到以 P 為中心的放大，而兩個放大的複合的中心，位於經過這兩個中心的直線上。(ii) 中的代數運算是重心坐標（barycentric coordinates，又稱仿射坐標 affine coordinates）的初步體驗；在這種坐標中，共線就是一條係數之和為零的線性關係。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）發展了背後的線性映

射理論，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）則收錄了更多同類題目。

詳細解答

STEP II 2015，第 9 題

力學 • 剛體轉動

STEP II 2015，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q9

關鍵思路

這個系統的一切都由一個點控制：兩個質點的質心（centre of mass）G。一個以 A 為樞軸的剛體（rigid body）靜止懸掛時，G 位於 A 的正下方；而當且僅當它有足夠能量把 G 送過最高點時，它才會作完整的旋轉。因此，只要找出 G 的位置及其與 A 的距離，兩部分便迎刃而解。

解答

我們把 B 和 C 視為以輕質剛性桿連接的質點，並設 A 處的轉軸光滑，因此唯一做功的力是重力。

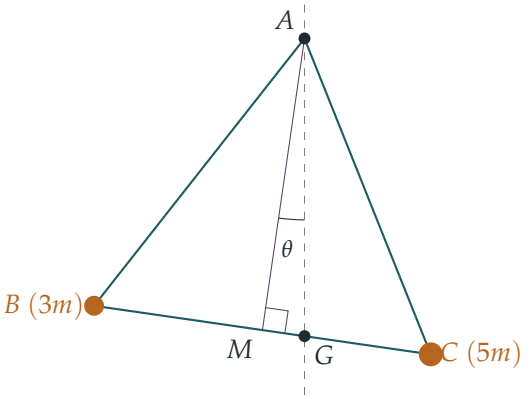
第 (i) 部分

由於桿是輕的，系統的質心就是位於 B 的 $3m$ 與位於 C 的 $5m$ 的質心。該點 G 位於 BC 上，且

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

設 M 為 BC 的中點。於是 $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$，位於靠近 C 的一側。由於三角形是等邊三角形，$AM \perp BC$ 且 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，因此在三角形 AMG 中應用畢氏定理（Pythagoras），

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



在平衡狀態下，作用於 G 的重量 $8mg$ 對 A 的力矩（moment）必須為零，所以 G 位於 A 的正下方：直線 AG 是鉛垂的。而 BC 垂直於 AM，水平方向則垂直於鉛垂線 AG。把一對直線同時旋轉一個直角，並不會改變它們之間的夾角，因此

$$\theta = \angle GAM.$$

在直角三角形 AMG（直角在 M）中，

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

得證。注意較重的質點 C 是 BC 較低的一端，這正合理。

第 (ii) 部分

兩個質點與轉軸的距離都是 a，所以它們的速率永遠相同。若三角形以角速率（angular speed）ω 轉動，每個質點的速率都是 $a\omega$。衝量（impulse）作用後的一瞬間，B 的速率為 v，C 亦然，因此動能為

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

（等價地說，對 A 的轉動慣量（moment of inertia）是 $8ma^2$，而 $\omega = v/a$。）衝量的方向並不重要，因為下面的能量方程只涉及速率。

> ? **想一想** 我們是否需要 v 足夠大，使某些東西在最高點保持拉緊，就像繫在繩上的質點那樣？

不需要。桿是剛性的，既能拉也能推，所以唯一的要求是在系統轉完一整圈之前，角速率永不降至零。這純粹是一個能量條件。

系統的勢能是 $8mg$ 乘以 G 的高度。由於 G 在以 A 為圓心、半徑為 $AG = \frac{7}{8}a$ 的圓上運動，當 G 位於 A 的正上方時勢能最大，此時它比起始位置高出

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

。根據能量守恆（conservation of energy），在 G 升高了 h 的位置，

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

當 $h = \frac{7}{4}a$ 時，右方最小。若右方在該處為正，則全程 $\omega \neq 0$，所以 ω 永不變號，系統一直朝同一方向轉動，一圈接一圈地旋轉。若右方為負，則 ω 必定在 G 到達最高點之前降至零，系統便會擺回去。因此條件是

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

故此

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

（當 $v = v_0$ 恰好成立時，G 會緩緩趨向 A 正上方的位置，卻要花無限長的時間才能到達，這就是條件為嚴格不等式（strict inequality）的原因。）

驗算

- 若兩個質量相等，G 便會在 M，得出 $\theta = 0$ 及 $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$：把 $MG = 0$ 代入公式正好得出這結果。
- 以數值方法在所有方位中求勢能的最小值，得出 $\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$。
- 單位：ag 的單位是 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，所以 v_0 是速率。當 $a = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 時，$v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。
- 以電腦逐步模擬運動，證實當 $v = 1.01v_0$ 時系統會越過最高點，而當 $v = 0.99v_0$ 時則會擺回去。

常見錯誤

- 把 G 的升幅當作 $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$（用了 AM 而不是 AG），結果得出 $v_0^2 = 2\sqrt{3}\,ag$。
- 把 B 和 C 分開處理，忘記衝量同樣令 C 的速率為 v。
- 在最高點加上「繩子保持拉緊」的條件：桿可以承受推力（thrust），所以根本不需要這條件。

STEP 之外

這裏的能量論證是複擺（compound pendulum）的剛體版本：一個在距離質心 d 處以樞軸支撐的物體，其行為就像單擺（simple pendulum），運動方程為 $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$。

在大學一年級的課程中，你會學到這個方程的相平面（phase plane），其中臨界速率 v_0 對應於分隔擺動與完整旋轉的分界線（separatrix）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）詳細討論了剛體繞固定軸的轉動以及物理擺（physical pendulum）。

詳細解答

STEP II 2015，第 10 題

力學 • 約束運動

STEP II 2015，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

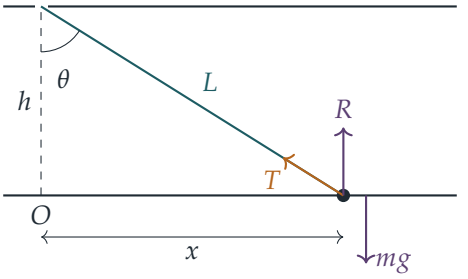
step.maths.org/questions/15-s2-q10

關鍵思路

這是一道約束（constraint）問題：質點的運動完全由繩子決定，所以先處理運動學（kinematics），再處理力。先把天花板下方的繩長用質點與小孔正下方那一點的水平距離表示出來，然後對時間求導；這段繩長的變化率是已知的。求得加速度後，在水平方向應用牛頓第二定律（Newton's second law）便得出張力（tension），再在鉛垂方向分解力便得出法向反作用力（normal reaction）；質點留在地面期間，法向反作用力必須保持非負。

解答

我們把質點視為光滑水平地面上的一點，並把繩子視為輕而不可伸長（inextensible），因此整條繩子的張力 T 都相同。設 O 為小孔正下方地面上的一點，x 為質點與 O 的距離，L 為小孔與質點之間的繩長。



速率

由畢氏定理（Pythagoras）及圖中的三角形，

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

繩子以速率 V 經小孔被拉入，所以 $\dot{L} = -V$。把 $L^2 = x^2 + h^2$ 對時間求導（h 為常數）：

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

因此質點以速率

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

向 O 移動，這個速率總是大於 V（以速率 V 移動的是繩子，而不是質點）。

想一想 為甚麼質點的速率不就是 V，或者 $V\sin\theta$？

只有質點速度沿繩子方向的分量，才必須等於繩子被拉入的速率。由於繩子與地面成角 $\frac{\pi}{2} - \theta$，這個分量是 $v\sin\theta$。令 $v\sin\theta = V$，便得出與上面相同的答案，而且清楚說明了為甚麼 $v > V$。

加速度

利用商法則（quotient rule）、$\dot{L} = -V$ 及 $\dot{x} = -VL/x$，再對 $\dot{x} = -VL/x$ 求導一次：

$$\ddot{x} = -V\,\frac{\dot{L}\,x - L\,\dot{x}}{x^2} = -V\,\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

代入 $x = h\tan\theta$，得 $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$。由於 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 都是負數，質點正在加速：其加速度的大小為

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

方向指向 O。（驗證一下：當 θ 減小時，$v = V/\sin\theta$ 的確增大。）

張力，以及離開地面

作用於質點的力有：重量 mg、地面施加的法向反作用力 R（由於地面光滑，此力為鉛垂方向），以及沿繩子方向的張力 T；張力的水平分量為指向 O 的 $T\sin\theta$，鉛垂分量為向上的 $T\cos\theta$。

在水平方向，由牛頓第二定律，

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

在鉛垂方向，質點留在地面期間處於平衡狀態，所以

$$R + T\cos\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

想一想 質點被拉近時，R 怎樣變化？

當質點接近 O 時，θ 減小，所以 $\tan^4\theta$ 減小，R 亦隨之穩定地減小。開始時（θ 較大）R 接近 mg；只要 $R \geq 0$，質點便留在地面，而在 $R = 0$ 的第一刻離開地面，即當

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

此即所求。對於更小的 θ，公式會給出 $R < 0$，這是不可能的，所以質點確實已離開地面。

驗算

- 量綱（dimensions）：V^2/h 是加速度，mV^2/h 是力，而 $V^2/(gh)$ 是無量綱的，正如 $\tan^4\theta$ 必須是無量綱一樣。
- 極限情況：當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（質點非常遠）時，繩子幾乎水平，$v \to V$ 且 $a \to 0$，符合預期。當 $\theta \to 0$ 時，速率和張力都趨於無限大，所以質點必定在到達 O 之前離開地面。
- 數值：取 $V = 2$、$h = 1$、$\theta = \frac{\pi}{4}$，得 $v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ 及 $a = 4$；以數值方法對 $x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$ 求導，得出相同的數值。取 $g = 9.8$，質點在 $\theta \approx 38.6°$ 時離開地面。

常見錯誤

- 把質點的速率當作 V 或 $V\sin\theta$，而不是 $V/\sin\theta$。
- 第二次對 $\dot{x} = -VL/x$ 求導時，忘記 L 也在變化。
- 因為繩子以恆定速率移動，便假設張力不變；其實質點在加速，所以張力並非不變。

STEP 之外

這裏的質點只有一個自由度（degree of freedom）：一旦繩子的運動給定，質點在每一時刻的位置便已確定。帶有這類約束的問題，可用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）系統地處理；這是大學課程第一或第二年會學到的內容，做法是把約束直接融入坐標的選擇之中，之後才求出像 R 和 T 這樣的約束力。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）收錄了許多這類問題。

詳細解答

STEP II 2015，第 11 題

力學 • 動量與能量

STEP II 2015，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

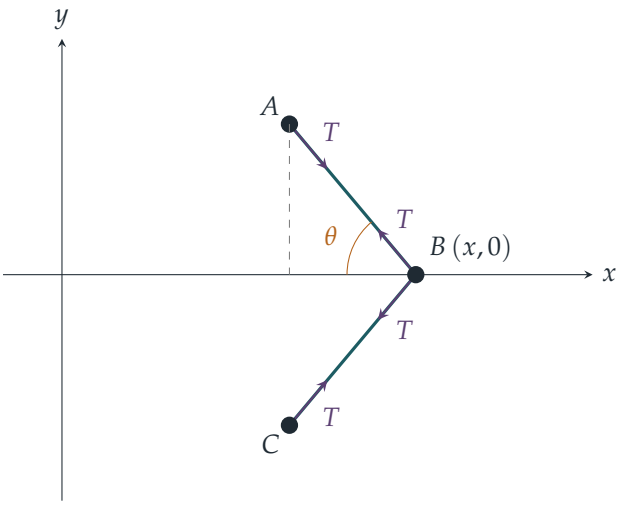
step.maths.org/questions/15-s2-q11

關鍵思路

由於運動始終關於 x 軸對稱，兩個坐標 x 和 θ 就足以描述整個系統。桌面光滑(smooth)，繩子輕而不可伸長（light and inextensible），因此有兩個量守恆（conserved）：x 方向的動量（momentum）和動能（kinetic energy）。這兩條守恆定律直接給出 (ii) 中的兩條方程；細看第二條，它告訴我們 $\dot{\theta}$ 永遠不可能為零。單憑這一點，(iii) 和 (iv) 便迎刃而解。

解答

我們把 A、B、C 視為質點（particles），繩子視為輕而不可伸長。重力和法向反作用力（normal reaction）都是豎直的，所以唯一的水平力是張力（tension），而張力是系統的內力。



第 (i) 部分

A 與 B 相距 a，所在直線與 x 軸負方向成角 θ，因此

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

對 t 求導，並對 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 使用鏈式法則（chain rule），得

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \big(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}\big),$$

此即所求（而 $\dot{x} = v$ 是 B 的速率）。

整個裝置和衝量（impulse）在關於 x 軸的反射下都是對稱的，所以運動始終保持對稱：$C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，其速度為 $\big(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta}\big)$。

第 (ii) 部分

首先看初始值。在衝量作用的一瞬間，兩條繩子都沿 y 軸，與 B 的新速度垂直，因此繩子無需猛拉 A 或 C；它們由靜止開始，而 $\dot{x} = u$。總 x 方向動量為 mu，動能為 $\frac{1}{2}mu^2$。

動量。沒有外部水平力，所以總 x 方向動量一直等於 mu：

$$m\dot{x} + 2m\big(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}\big) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

（A 和 C 的 y 方向動量互相抵消，理應如此。）這裏右邊是 u，即 B 的初速率。試卷印的是 v，但 v 已經用來表示 $\dot{x}$，所以這必定是 u 的誤印。

能量。繩子輕而不可伸長，所以張力對整個系統所做的淨功為零，而其他力亦不做功。在 A 與 C 相撞之前，動能守恆：

$$\dot{x}^2 + 2\Big[\big(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}\big)^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\Big] = u^2. \tag{2}$$

由 (1)，記 $s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$，得

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}\big(u - 2as\dot{\theta}\big), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}\big(u + as\dot{\theta}\big).$$

代入 (2)，交叉項 $\mp 4uas\dot{\theta}$ 互相抵消：

$$\tfrac{1}{9}\big(u - 2as\dot{\theta}\big)^2 + \tfrac{2}{9}\big(u + as\dot{\theta}\big)^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}\big(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2\big) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

所以 $a^2\dot{\theta}^2\big(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2\big) = \frac{2}{3}u^2$，即 $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$。由於 $s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

這就是第二個結果（同樣把 v 理解為 u）。

第 (iii) 部分

因為 $3 - 2\sin^2\theta \le 3$，由第 (ii) 部分得

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

所以 $\dot{\theta}$ 永不為零。在兩次碰撞之間它是連續的，因此保持同一符號，θ 單調（monotonically）變化。

開始時 A 靜止，所以由第 (i) 部分得 $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$，即 $\dot{\theta} = -u/a < 0$。因此 θ 從 $\frac{\pi}{2}$ 開始穩定地減小。A 和 C 的 x 坐標始終相同，而 y 坐標為 $\pm a\sin\theta$，所以它們恰好在 $\sin\theta = 0$ 時相遇。第一次碰撞發生在 $\theta = 0$，位於 B 的後方。

想一想 碰撞對 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$ 有甚麼影響？

在 $\theta = 0$ 時，兩條繩子都沿 x 軸，A 和 C 的 x 方向速度相同，y 方向速度為 $\pm a\dot{\theta}$。它們沿 y 方向互相接近，所以兩者之間的衝量沿 y 方向。這與繩子垂直，因此不會產生衝擊張力，所有 x 方向速度都不變。在等質量物體的彈性碰撞（elastic collision）中，沿連心線的速度分量會互換。所以 A 的 y 方向速度由 $a\dot{\theta}$ 變為 $-a\dot{\theta}$：碰撞只是把 $\dot{\theta}$ 的符號反轉，而 $\dot{x}$ 保持不變。

碰撞前後的動量和能量都一樣，所以 (1) 和 (2)，以及由此得出的 (ii) 兩個結果，在下一階段的運動中仍然成立。此時 $\dot{\theta} > 0$，而且和之前一樣不可能變為零。所以 θ 從 0 開始穩定地增大，下一個使 $\sin\theta = 0$ 的值是 $\theta = \pi$。由於 $\dot{\theta} \ge u/(a\sqrt{3})$，它在有限時間內到達該值，所需時間至多為 $\pi a\sqrt{3}/u$。第二次碰撞發生在

$$\theta = \pi,$$

此時 A 和 C 在 B 的前方相遇。

第 (iv) 部分

在整個運動過程中 $\theta \in [0, \pi]$，所以 $\sin\theta \geq 0$。若 $v = \dot{x} = 0$，則由 (1) 得 $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$；兩邊平方並利用 (ii)，

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \frac{1}{2}.$$

所以可能的值是 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$。

> **想一想** 平方丟失了一個符號。我們實際上需要哪個符號？

我們把 $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ 平方了，而由於 $u > 0$，我們還需要 $\dot{\theta}\sin\theta > 0$，即 $\dot{\theta} > 0$。在 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 時，$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{2a^2}$，所以 $\dot{\theta} = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$，而 $2a\dot{\theta}\sin\theta = \pm u$。由 (1)：

- 若 $\dot{\theta} > 0$，則 $\dot{x} = \frac{1}{3}(u - u) = 0$；
- 若 $\dot{\theta} < 0$，則 $\dot{x} = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$。

所以答案是否定的。在第一次擺動中（θ 從 $\frac{\pi}{2}$ 減至 0），θ 經過 $\frac{\pi}{4}$ 時 $v = \frac{2}{3}u$。在第一次與第二次碰撞之間（θ 從 0 增至 π），在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 兩處都有 $v = 0$。第二次碰撞後 $\dot{\theta}$ 再次為負，所以在從 π 擺回 0 的過程中，兩個角度處都有 $v = \frac{2}{3}u$。之後這個規律不斷重複：只有在 θ 增大的擺動中，這些角度處才有 $v = 0$。

驗算

- 開始時 $\theta = \frac{\pi}{2}$，(ii) 給出 $\dot{\theta}^2 = u^2/a^2$，與直接由 A 靜止得出的 $\dot{\theta} = -u/a$ 吻合。
- 由 (1)，$\dot{x} = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot{\theta}\sin\theta}{u}\right)$。在 $\theta = 0$ 時這等於 $\frac{u}{3}$：三個質點一起以 $\frac{u}{3}$ 運動，這正是質心（centre of mass）速度；當繩子沿 x 軸拉直時理應如此。在 θ 增大的擺動中，於 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 處 $\dot{x} = -\frac{u}{3}$，所以 B 有一段時間向後移動，這解釋了為何 v 兩次經過 0。
- 用電腦模擬三個由極硬彈簧連接的質點，取 $a = u = 1$，結果重現了 (ii) 的兩條方程。模擬顯示第一次碰撞在 $\theta = 0$，第二次在 $\theta = \pi$；而 v 只在 θ 增大的擺動中、於 $\theta \approx 0.785$ 和 2.356 附近改變符號，該處 $\dot{\theta} \approx 0.707$。在第一次擺動中，模擬給出 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時 $v \approx 0.67$。

常見錯誤

- 把 (1) 的右邊當作 $\dot{x}$：它其實是由衝量決定的常數 u。
- 以為碰撞會把 θ 送回 $\frac{\pi}{2}$，而第二次碰撞又在 $\theta = 0$ 發生。把 $\dot{\theta}$ 反轉會使 θ 增大並越過 $\frac{\pi}{2}$，而且在到達 π 之前沒有任何東西能使它停下，因為 $\dot{\theta}^2$ 有大於 0 的下界。

► 在第 (iv) 部分忘記平方會丟失 $\dot{\theta}$ 的符號。

STEP 之外

選取 x 和 θ 作為坐標，並用它們寫出動能，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點，你會在大學一年級學到。在那個框架中，由於 x 不出現在能量表達式中（它是一個「可忽略」坐標（ignorable coordinate）），x 方向動量守恆會自動出現。之後能量方程把問題化為一條關於 θ 的一階方程，正如這裏一樣。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對質點系統的動量和能量方法有非常詳盡的論述。

詳細解答

STEP II 2015，第 12 題

概率與統計 • 硬幣序列遊戲

STEP II 2015，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s2-q12

關鍵思路

這裏每個序列的長度都是三，所以某一次拋擲會否結束遊戲，只取決於該次拋擲及之前的兩次。因此最自然的做法是追蹤*最後兩次拋擲*：可能的狀態（state）只有四個（HH、HT、TH、TT），而從每個狀態出發，下一次拋擲要麼結束遊戲，要麼把我們帶到另一個狀態。有些狀態一出現便決定了勝負；至於其餘狀態，我們以下一次拋擲作條件（conditioning），列出一對簡單的方程。

解答

全文假設各次拋擲互相獨立（independent），每次出現 H 或 T 的概率（probability）均為 $\frac{1}{2}$。頭兩次拋擲不可能完成任何序列，所以遊戲必定會到達四個「兩次拋擲」狀態之一，每個的概率均為 $\frac{1}{4}$。另外要注意，遊戲以概率 1 結束：無論處於甚麼位置，接下來三次拋擲完成某個指定序列的概率是 $\frac{1}{8}$，所以遊戲再持續超過 $3n$ 次拋擲的機會至多為 $(\frac{7}{8})^n \to 0$。

第 (i) 部分

這裏只有 HHT（屬於 A）和 THH（屬於 B）計算在內。

若頭兩次拋擲是 HH：硬幣會連續出現 H 一段時間，而第一個出現的 T 會完成 HHT，因為它之前至少有兩個 H。在這個 T 之前從未出現過反面，所以 THH 不可能已經出現。因此 A 勝出。

若頭兩次拋擲中出現 T：考慮在那個 T 之後第一次出現兩個連續正面的時刻。緊接這個 HH 之前的那次拋擲不可能是 H（否則在那個 T 之後便會有一個更早的 HH，或者這個

HH 就是開頭的一對，而這已被排除），所以它是 T，於是 THH 已經完成。HHT 不可能更早出現，因為它需要一個 HH，而這正是第一個。因此 B 勝出。

所以 A 勝出若且唯若頭兩次拋擲都是正面，從而

$$\mathrm{P}(A \text{ 勝出}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

現在 HHT、THH、TTH、HTT 四個序列全部有效。以頭兩次拋擲作條件。

- **HH**。與第 (i) 部分一樣，拋擲結果會是 H、H、...，直至第一個 T 出現並完成 HHT。其他序列都不包含「HH 之後接 H」，而且尚未出現任何反面來開始 THH、TTH 或 HTT。因此 A 勝出。
- **TT**。把 H 和 T 的角色互換，以同樣的論證可知第一個 H 會完成 TTH，所以 C 勝出。
- **HT**。若下一次是 T，便得到 HTT，D 勝出。若是 H，最後兩次拋擲是 TH（而 HTH 不完成任何序列）。
- **TH**。若下一次是 H，便得到 THH，B 勝出。若是 T，最後兩次拋擲是 HT（而 THT 不完成任何序列）。

所以遊戲一旦進入狀態 HT 或 TH，便會在這兩個狀態之間來回彈跳，直至 D 或 B 勝出。設 d_1 和 d_2 分別為從 HT 和從 TH 出發時 D 勝出的概率。以下一次拋擲作條件，

$$d_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}d_2, \qquad d_2 = \tfrac{1}{2}d_1.$$

代入得 $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d_1$，所以 $d_1 = \frac{2}{3}$，$d_2 = \frac{1}{3}$。從這些狀態出發只有 B 或 D 能勝出，所以 B 從 HT 出發勝出的概率是 $\frac{1}{3}$，從 TH 出發則是 $\frac{2}{3}$。因此

$$\mathrm{P}(A) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

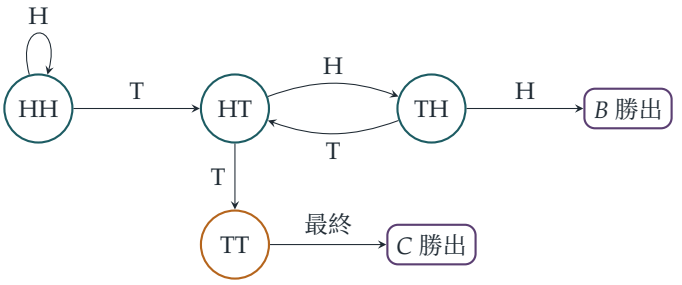
每位玩家勝出的概率都是 $\frac{1}{4}$。

第 (iii) 部分

現在只有 THH（屬於 B）和 TTH（屬於 C）計算在內。

頭兩次拋擲是 TT。之後的拋擲會是 T、T、...，直至第一個 H 出現並完成 TTH。THH 需要一個 TH 之後接 H，而 H 尚未出現過，所以 B 不可能先勝出。因此 C 以概率 1 勝出。

至於其他開局，在遊戲尚未結束的前提下，看清狀態（最後兩次拋擲）如何轉移會很有幫助：



（從 TT 出發，下一個 T 令我們留在 TT，下一個 H 則完成 TTH，所以我們可以把 TT 視為 C 勝出。）

設 p、q、r 分別為從 HT、TH、HH 出發時 C 勝出的概率：

從 HT 出發。T 會得到 TT，從那裏 C 以概率 1 勝出；H 會得到 HTH，它不完成任何一個序列，並令我們處於狀態 TH。所以

$$p = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot q = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}q,$$

即為所求。

從 TH 出發。H 完成 THH，所以 B 勝出；T 得到 THT，不完成任何序列，而我們處於狀態 HT。所以 $q = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$。

想一想 為甚麼一旦知道最後兩次拋擲，之前的歷史便無關重要？

兩個目標序列的長度都是三，所以下一次拋擲會否結束遊戲，只取決於該次拋擲和之前兩次。更早的拋擲無關重要，而將來的拋擲與過去獨立。所以從某個狀態出發 C 勝出的機會，無論我們如何到達該狀態都是一樣的，正因如此 q 才能在 p 的方程右方再次出現。

從 HH 出發。H 令我們留在 HH；T 把我們帶到 HT。所以 $r = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p$，得 $r = p$。

求解：$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$，所以

$$p = \tfrac{2}{3}, \qquad q = \tfrac{1}{3}, \qquad r = \tfrac{2}{3}.$$

最後，以頭兩次拋擲作條件（每種情況的概率均為 $\frac{1}{4}$），

$$\mathrm{P}(C \text{ 勝出}) = \tfrac{1}{4}\,(1 + p + q + r) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

驗算

- 在第 (ii) 部分，四個概率之和為 1，而且答案具有對稱性：互換 H 和 T 會交換 $A \leftrightarrow C$ 及 $B \leftrightarrow D$，所以 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C)$ 和 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D)$ 是必然的。
- 在第 (iii) 部分，$q = \frac{1}{3} < p$ 是合理的：從 TH 出發，B 只差一次拋擲便勝出。
- 以電腦模擬（simulation）每類遊戲各 200,000 局，得到第 (i) 部分 $\mathrm{P}(A) \approx 0.250$，第 (ii) 部分四位玩家都接近 0.25，第 (iii) 部分 $\mathrm{P}(C) \approx 0.667$，與沿馬爾可夫鏈所作的精確計算吻合。

常見錯誤

- 假設兩個長度相同的序列先出現的機會必定相等。HHT 和 THH 各自的期望等待時間（expected waiting time）都是 8 次拋擲，但 THH 每四次便有三次勝過 HHT。
- 忘記一次沒有帶來勝利的拋擲仍可把你帶到有用的狀態：從 HT 出發，拋出 H 並非單純「失敗」，而是把你帶到 TH。
- 寫下 $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$，卻沒有解釋為何 HTH 令你處於與從 TH 出發相同的位置。

STEP 之外

這裏的方法是踏入馬爾可夫鏈（Markov chains）的第一步：這是一種將來只取決於當前狀態的過程，可以透過解線性方程求出吸收概率（absorption probabilities）來分析。這個遊戲是彭尼遊戲（Penney's game）的一個版本：無論對手選擇哪個由三次拋擲組成的序列，你總能選出一個以至少 $\frac{2}{3}$ 的概率勝過它的序列，所以「哪個序列先出現」並不是一個傳遞關係（transitive relation）。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）正是以這個程度討論馬爾可夫鏈和吸收概率。

詳細解答

STEP II 2015，第 13 題

概率與統計 • 指數分佈的矩

> **STEP II 2015，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q13

關鍵思路

成本由固定金額 ky 加上一個隨機金額組成，而除非洪水高於預備的高度，否則這個隨機金額為零。因此一切都歸結為 $W = \max(X - y, 0)$ 的矩（moments），即洪水超出預備高度的部分。指數分佈（exponential distribution）具有無記憶性（memoryless）：在 $X > y$ 的條件下，超出量 $X - y$ 仍然服從參數相同的指數分佈。這使期望值（expectation）和方差（variance）都變成只需一行的計算。

解答

記 $p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$，並設

$$W = \begin{cases} X - y & \text{若} X > y, \\ 0 & \text{若} X \le y, \end{cases} \qquad \text{使得} \qquad C = ky + aW.$$

這裏 $y \ge 0$ 是預先選定的常數，所以 ky 並非隨機量。

第 (i) 部分

由於當 $X \le y$ 時 $W = 0$，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

這裏用到參數為 λ 的指數分佈的平均值是 $\frac{1}{\lambda}$ 這個事實（或者用分部積分法（integration by parts）計算）。因此

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

即為所求。

求最小值。對 $y \geq 0$，設 $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$。則

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

所以 g' 嚴格遞增，由 $g'(0) = k - a$ 開始，當 $y \to \infty$ 時趨向 k。

> ? **想一想** 為甚麼不能直接令 $g'(y) = 0$ 就了事？

因為 y 限制在 $y \geq 0$，而駐點（stationary point）$\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$ 只有在 $k/a \leq 1$ 時才落在這個範圍內。所以我們按 a/k 的值分情況討論。

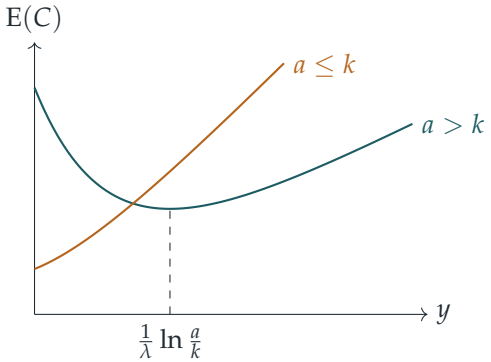
- $a/k > 1$。此時 $g'(0) = k - a < 0$，而 $g'(y) = 0$ 於

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  由於 g' 遞增，g 在此點之前遞減、之後遞增，所以這是 $y \geq 0$ 上的全域最小值。最小期望成本為 $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$。

- $a/k \leq 1$。此時對所有 $y > 0$ 都有 $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$，所以 g 在 $y \geq 0$ 上嚴格遞增，最小值出現在 $y = 0$：完全不作任何預備。此時期望成本為 $\frac{a}{\lambda}$。

這是合理的：每多預備一米，必定要付出 k，而只有在洪水本來會達到該高度時才能節省 a。若 $a \leq k$，節省下來的永遠抵不上付出的。



第 (ii) 部分

加上常數 ky 不會改變方差，所以 $\operatorname{Var}(C) = a^2 \operatorname{Var}(W)$。至於二階矩，用同一個代換 $u = x - y$，

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

因為參數為 λ 的指數隨機變量 U 滿足 $\mathrm{E}(U^2) = \operatorname{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$。因此，以 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$，

$$\operatorname{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right).$$

預先花費的金額是 ky，由於 $k > 0$，它隨 y 遞增；所以我們要證明 $\operatorname{Var}(C)$ 隨 y 增加而減少。求導得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right),$$

當 $y > 0$ 時這嚴格為負，因為此時 $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$。所以 $\operatorname{Var}(C)$ 在 $y \geq 0$ 上關於 y 嚴格遞減：預備花費越多，成本的方差越小，證明完畢。（等價地，$p(2-p) = 1 - (1-p)^2$ 在 $[0,1]$ 上隨 p 遞增，而 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ 隨 y 遞減。）

驗算

- 當 $y = 0$ 時，$C = aX$，所以 $\mathrm{E}(C) = a/\lambda$ 及 $\operatorname{Var}(C) = a^2/\lambda^2$，兩者都與公式吻合。
- 當 $y \to \infty$ 時方差趨向 0：極高的防洪設施幾乎消除了所有不確定性，只剩下固定成本 ky。
- 取 $k = 1$、$a = 3$、$\lambda = 0.5$、$y = 1.2$，公式給出 $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$ 及 $\operatorname{Var}(C) \approx 28.67$；以電腦模擬一百萬年得到 4.496 及 28.68。對這些數值，最佳高度為 $2\ln 3 \approx 2.197$，經電腦搜尋確認。

常見錯誤

- 把 $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 從 0 而不是從 y 開始積分：當 $X \leq y$ 時並沒有洪水損失。
- 忘記邊界 $y \geq 0$，即使在 $a < k$ 時仍給出 $y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k}$，而此時它是負數。
- 把 ky 計入方差；它是常數，對方差毫無貢獻。

STEP 之外

$\mathrm{E}\big(\max(X-y,0)\big)$ 這個量正是行使價（strike price）為 y 的認購期權（call option）的收益，而最優條件 $\mathrm{P}(X>y)=k/a$ 則是運籌學（operations research）中經典的「報販」（newsvendor）法則：選擇使預備的邊際成本等於期望邊際節省的水平。令答案如此簡潔的無記憶性，在連續分佈之中是指數分佈所獨有的。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了指數分佈以及隨機變量函數的期望值。

詳細解答

STEP III 2015，第 1 題

純數學 • 歸約公式與代換

STEP III 2015，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q1

關鍵思路

在第 (i) 部分，$I_n - I_{n+1}$ 可以合併成一個分子為 u^2 的積分。把 u^2 寫成 $u \cdot u$，再用分部積分（integration by parts），就能回到 I_n。在第 (ii) 部分，把 x 換成 $1/x$ 時，式子 $(x - x^{-1})^2$ 保持不變，而這個代換（substitution）會產生因子 x^{-2}。把兩種形式取平均，得到 $1 + x^{-2}$，這正好是 $x - x^{-1}$ 的導數（derivative），於是代換 $u = x - x^{-1}$ 便行得通。至於第 (iii) 部分，只要把分母寫成以 $x - x^{-1}$ 表示的形式，它其實就是喬裝了的第 (ii) 部分。

解答

第 (i) 部分

把兩個被積函數（integrand）通分，

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

第二個因子的原函數（antiderivative）很容易求得：

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

因此我們進行分部積分，對 u 求導，並對 $u/(1+u^2)^{n+1}$ 積分：

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

邊界項（boundary term）在 $u=0$ 時為 0。當 $u\to\infty$ 時它亦趨向 0，因為由 $n\geq 1$ 可得 $0\leq u/(1+u^2)^n\leq u/(1+u^2)<1/u$。因此

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

正如所求。移項整理後，

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\, I_n \qquad (n\geq 1).$$

至於起始值，$I_1 = \left[\arctan u\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$。反覆應用這個遞推關係（recurrence），

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}.$$

? **想一想** 怎樣把奇數的乘積化成階乘（factorials）？

把分子和分母同乘以偶數的乘積 $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$。這樣分子變成 $1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n) = (2n)!$，分母則變成 $(2^n n!)^2$。所以

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

正如所求。（若要嚴格證明，可用歸納法（induction）：公式在 $n=0$ 時成立，此時它給出 $I_1=\frac{\pi}{2}$。若公式對 I_n 成立，則乘以 $\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$ 會把 $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$ 變成 $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$。）

第 (ii) 部分

第一個等式。在 J 中代入 $x=1/t$，於是 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$，而 x 由 0 變到 ∞ 對應於 t 由 ∞ 變到 0。此外

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

因為平方消除了正負號的改變。因此

$$J = \int_\infty^0 \mathrm{f}\big((t-t^{-1})^2\big)\left(-t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{-2}\,\mathrm{f}\big((t-t^{-1})^2\big)\,\mathrm{d}t,$$

再把啞變數（dummy variable）t 改名為 x，便得到第一種形式。

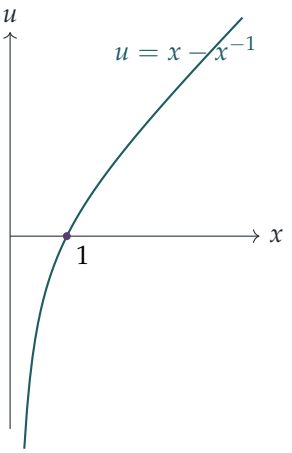
第二個等式。把 J 原來的表達式與這個表達式相加，再除以二，

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(1+x^{-2}\right)\mathrm{f}\big((x-x^{-1})^2\big)\,\mathrm{d}x.$$

第三個等式。現在設 $u = x - x^{-1}$，於是 $\mathrm{d}u = (1+x^{-2})\,\mathrm{d}x$。由於 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x>0$，$u$ 隨 x 嚴格遞增，由 $-\infty$（當 $x\to 0^+$）增至 $+\infty$（當 $x\to\infty$）。所以這個代換在整個範圍上是一一對應的變數變換：

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

最後一步成立，是因為 $\mathrm{f}(u^2)$ 是 u 的偶函數（even function），所以在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上的積分相等。第 (ii) 部分至此完成。



這條曲線經過 $(1,0)$，並在 $x>0$ 上持續上升，恰好一次取遍 u 的每一個實數值。

第 (iii) 部分

目標是把被積函數改寫成 $x^{-2}\,\mathrm{f}\big((x-x^{-1})^2\big)$ 的形式。由於 $(x-x^{-1})^2 = x^2-2+x^{-2}$，

$$x^4-x^2+1 = x^2\left(x^2-1+x^{-2}\right) = x^2\left(1+(x-x^{-1})^2\right).$$

因此

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}\big(1+(x-x^{-1})^2\big)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}\big((x-x^{-1})^2\big), \qquad \text{其中} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1+y)^n}.$$

根據第 (ii) 部分中 J 的第一種和最後一種形式，

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

在第 (i) 部分的公式中以 $n-1$ 代替 n（當 $n-1\geq 0$ 時成立，即對每個正整數 n 皆成立），得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}.$$

驗算

- 當 $n=1$ 時答案是 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$。當 $n=2$ 時答案是 $\frac{\pi}{4}$，當 $n=3$ 時答案是 $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$。對原積分進行數值積分，結果與以上各值吻合，直至 $n=8$ 的情況亦然。

- 遞推關係給出 $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi}{4}$，與用 $u = \tan\theta$ 直接計算的結果一致：$I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$。
- 取 $\mathrm{f}(y) = \mathrm{e}^{-y}$，第 (ii) 部分表明 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-1/x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$。對全部四種形式進行數值計算，都得到這個值。

常見錯誤

- 忘記檢查邊界項 $u/(1+u^2)^n$ 在無窮遠處是否趨於零。這裏它確實趨於零，但這只是因為 $n \geq 1$。
- 代入 $u = x - x^{-1}$ 後仍保留上下限 0 和 ∞。新的下限是 $-\infty$，正是 $\mathrm{f}(u^2)$ 的偶性把範圍帶回 $(0,\infty)$。
- 使用 I_{n+1} 的公式時沒有移動下標：第 (iii) 部分的答案是 I_n，而不是 I_{n+1}。

STEP 之外

比值 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$ 是一個中心二項概率（central binomial probability），而第 (i) 部分的遞推關係，正是推導出 π 的沃利斯（Wallis）乘積的同一個遞推關係。第 (ii) 部分的技巧稱為柯西（Cauchy）－ Schlömilch 變換（Cauchy–Schlömilch transformation）。它可以計算許多沒有初等原函數的定積分，包括像驗算中那個的高斯（Gauss）型積分。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階難題》）收錄了更多可用巧妙代換解決的積分；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）則嚴格地處理反常積分（improper integrals）和變數變換。

詳細解答

STEP III 2015，第 2 題

純數學 • 分析學

STEP III 2015，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 2.1 節「最終」是甚麼意思中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/eventually.html

關鍵思路

關係 $(s_n) \leq (t_n)$ 的意思是「最終（eventually）$s_n \leq t_n$」：我們可以不理會前面任意有限多項。因此，要證明一個命題為真，就要指出一個位置 m，保證由此以後不等式（inequality）必定成立；要證明一個命題為假，則要找出一對數列（sequence），使任何 m 的選擇都行不通。時刻問自己：這個結果是從哪一個 n 開始成立的？

解答

第 (i) 部分

正確。對正整數 n，我們可以除以 $n > 0$，所以

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

因此只要 $n \geq 1000$，便有 $1000n \leq n^2$，取 $m = 1000$ 即可。（更小的 m 都不行，因為 $1000 \cdot 999 > 999^2$。）

第 (ii) 部分

錯誤。陷阱在於「並非最終 $s_n \le t_n$」只告訴我們 $s_n > t_n$ 對無限多個 n 成立，而不是最終成立。兩個數列可以不斷互相超越。取

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

於是 s_n 依次為 $1, 3, 1, 3, \ldots$，而兩個數列的每一項都是正數。

- $(s_n) \le (t_n)$ 不成立：無論提出哪個正整數 m，總有偶數 $n \ge m$，而對這個 n 有 $s_n = 3 > 2 = t_n$。
- $(t_n) \le (s_n)$ 也不成立：無論提出哪個 m，總有奇數 $n \ge m$，而對這個 n 有 $t_n = 2 > 1 = s_n$。

所以命題的假設成立，但結論不成立。

第 (iii) 部分

正確。根據假設，存在正整數 m_1，使得對所有 $n \ge m_1$ 都有 $s_n \le t_n$；又存在正整數 m_2，使得對所有 $n \ge m_2$ 都有 $t_n \le u_n$。設

$$m = \max(m_1, m_2).$$

若 $n \ge m$，則 $n \ge m_1$ 且 $n \ge m_2$，所以兩個不等式在 n 處都成立，得

$$s_n \le t_n \le u_n.$$

因此只要 $n \ge m$ 便有 $s_n \le u_n$，這正是 $(s_n) \le (u_n)$。

> ? **想一想** 為甚麼不直接取 $m = m_1$，或者 $m = m_1 + m_2$？

取 $m = m_1$ 行不通，因為當 $m_1 \le n < m_2$ 時，我們對 t_n 與 u_n 的大小關係一無所知。我們需要 n 同時越過兩個門檻（threshold），而 $\max(m_1, m_2)$ 是能保證這一點的最小選擇。（$m_1 + m_2$ 也可以，但不必要地大。）

第 (iv) 部分

正確，取 $m = 4$。一個簡短的表格顯示應從哪裏開始：

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

不等式在 $n = 1, 2$ 時成立，在 $n = 3$ 時不成立，從 $n = 4$ 起又再成立。所以 $m = 4$ 是最小的可能選擇，我們用歸納法（induction）證明對所有 $n \ge 4$ 都有 $n^2 \le 2^n$。

基本情況（*base case*）。當 $n = 4$ 時，$n^2 = 16 = 2^4$。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $n \geq 4$ 且 $n^2 \leq 2^n$。由於 $n \geq 3$，有 $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$，所以 $2n + 1 < n^2$。因此

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + n^2 && \text{因為} 2n+1 < n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2 \cdot 2^n && \text{由歸納假設（inductive hypothesis）} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

所以結果對 n 成立可推出對 $n+1$ 成立，由歸納法，對每個 $n \geq 4$ 都有 $n^2 \leq 2^n$。因此 $(n^2) \leq (2^n)$，取 $m = 4$。

想一想 歸納法究竟在哪一步需要 n 足夠大？

只在 $2n + 1 < n^2$ 這一步，它需要 $n \geq 3$。這就是歸納法不能從 $n = 1$ 開始的原因：由 $n = 2$ 推到 $n = 3$ 的一步要用到 $5 < 4$，這是錯的，而事實上 $3^2 > 2^3$。

驗算

- 第 (i) 部分：當 $n = 1000$ 時兩邊都等於 10^6；當 $n = 999$ 時，$999\,000 > 998\,001$。
- 第 (iv) 部分：用電腦對 4 至 2000 的每個 n 檢驗 $n^2 \leq 2^n$，結果都成立；上面的表格亦確認了 $n = 3$ 時不成立。要感受 2^n 勝出得有多快：$20^2 = 400$，但 $2^{20} = 1\,048\,576$。
- 第 (ii) 部分：無論你嘗試哪個 m，都會被下一個偶數 n（對其中一個次序）及下一個奇數 n（對另一個次序）推翻。

常見錯誤

- 把「並非最終 $\leq$」當成「最終 $>$」。「存在 m，使得對所有 $n \geq m$……」的否定（negation）是「對每個 m，都存在某個 $n \geq m$ 使得 $s_n > t_n$」。
- 在 (iv) 中從 $n = 1$ 或 $n = 2$ 開始歸納：歸納步驟在那裏確實不成立。
- 在 (iii) 中，兩個假設都用同一個字母 m，彷彿兩個門檻必須相同。

STEP 之外

這裏的關係正是貫穿整個實分析（real analysis）的「最終」量詞（quantifier）：一個數列收斂（converges），是指對每一個容許誤差，它最終都落在其極限的該誤差範圍之內。第 (ii) 部分顯示，與實數上的次序不同，數列的這種次序並不是全序（total order）：兩個數列未必可以互相比較。電腦科學家在大 O 記號（big-O notation）中使用同一個概念，而 (iv) 就是「指數函數最終勝過多項式」這個熟悉的事實。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本親切易讀的書，可以從中看到這類量詞論證如何被系統化。

詳細解答

STEP III 2015，第 3 題

純數學 • 極坐標曲線與面積

STEP III 2015，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q3

關鍵思路

曲線 $r = a\sec\theta$ 其實就是直線 $x = a$，因為 $r\cos\theta = x$。因此 $r - a\sec\theta$ 量度的是：沿着從原點出發、角度為 θ 的射線，一點與該射線和直線交點之間的距離；而方程表示這個距離等於 b。這正是蚌線（conchoid）的定義，其中定點就是極點（pole）。至於作圖，可把絕對值（modulus）拆開成 $r = a\sec\theta + b$ 和 $r = a\sec\theta - b$，再逐一考慮哪些 θ 值使 $r \geq 0$。

解答

全題中，$\sec\theta$ 在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 時無定義，因此這些角度須排除。去掉絕對值後，$(*)$ 表示

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{或} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

而無論哪種情況，我們都需要 $r \geq 0$。

第 (i) 部分

為何 $\sec\theta > 0$。假設 $\sec\theta < 0$。由 $|\cos\theta| \leq 1$ 得 $\sec\theta \leq -1$，所以 $a\sec\theta \leq -a$。於是 r 的兩個可能值都滿足

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

這裏用了 $a > b$。這與 $r \geq 0$ 矛盾，所以每個滿足 $(*)$ 的點都有 $\sec\theta > 0$，即 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。

蚌線。取 A 為極點 O，L 為直線 $x = a$（極坐標形式為 $r\cos\theta = a$，即 $r = a\sec\theta$），並取 $d = b$。注意由於 $a > 0$，A 不在 L 上。

設 P 滿足 $(*)$，其極角為 θ，所以 $\cos\theta > 0$。直線 OP 不與 L 平行，它與 L 相交於同一射線上的點 Q，且 $OQ = a\sec\theta$，即以直角坐標（Cartesian coordinates）表示為 $Q = (a, a\tan\theta)$。由於 O、Q 和 P 都在從 O 出發的同一條射線上，與 O 的距離分別為 $a\sec\theta$ 和 r，

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

所以沿着一條經過 $A = O$ 的直線量度，P 與 L 的距離為 b：它位於以此 L、A 及 $d = b$ 構成的尼科梅德斯（Nicomedes）蚌線上。

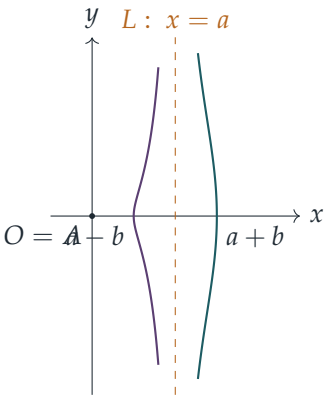
（反過來，該蚌線上的每一點都滿足 $(*)$：在任何經過 O 並與 L 相交於 Q 的直線上，與 Q 距離為 b 的兩點，沿射線 OQ 與 O 的距離為 $a\sec\theta \pm b$，由於 $a\sec\theta \geq a > b$，兩者皆為正數。所以軌跡就是整條蚌線。）

作圖。在直角坐標中，$x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$，而 $y = r\sin\theta$。把 $r - a\sec\theta = \pm b$ 乘以 $\cos\theta$，得 $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$，所以曲線為

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

曲線有兩個分支（branch），兩者都關於 x 軸對稱（以 $-\theta$ 代替 θ 即可見），而當 $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ 時 $r \to \infty$，兩者都以 L 為漸近線（asymptote）：

- 外分支 $r = a\sec\theta + b$，其中 $x = a + b\cos\theta \in (a, a+b]$，與軸相交於 $(a+b, 0)$；
- 內分支 $r = a\sec\theta - b$，其中 $x = a - b\cos\theta \in [a-b, a)$，與軸相交於 $(a-b, 0)$，該點位於 O 的右方。



（圖中取 $a = 2$、$b = 1$：外分支以藍綠色表示，內分支以梅紫色表示。）

第 (ii) 部分

現在 $a < b$。再逐一檢查兩種情況，看看何時 $r \geq 0$。

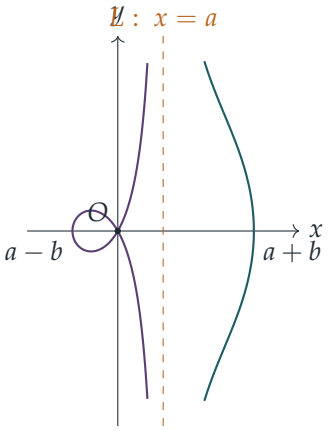
- $r = a\sec\theta + b$。若 $\sec\theta > 0$，它必為正數：這就是與之前相同、位於 L 右方的外分支。若 $\sec\theta < 0$，則 $r \geq 0$ 當且僅當 $-a\sec\theta \leq b$，即 $|\sec\theta| \leq b/a$，即 $\cos\theta \leq -a/b$。
- $r = a\sec\theta - b$。若 $\sec\theta < 0$，它為負數，所以沒有點。若 $\sec\theta > 0$，則 $r \geq 0$ 當且僅當 $\sec\theta \geq b/a$，即 $0 < \cos\theta \leq a/b$。

設 $\alpha = \arccos(a/b)$，由於 $0 < a/b < 1$，它位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內。

想一想 $\sec\theta < 0$ 的那一部分是甚麼樣子？

它是 $r = b + a\sec\theta$，其中 $\cos\theta \leq -a/b$，即 $\pi - \alpha \leq |\theta| \leq \pi$。在兩端，$\cos\theta = -a/b$ 給出 $r = b - b = 0$，所以它在原點開始，也在原點結束。在 $\theta = \pi$ 時得 $r = b - a$，即負 x 軸上的點 $(a - b, 0)$。在兩端之間 $r > 0$，而曲線關於 x 軸對稱，所以這部分是原點左方的一個閉環，位於 $a - b \leq x \leq 0$ 之內（因為 $x = a + b\cos\theta$）。

內分支 $r = a\sec\theta - b$（其中 $\alpha \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$）同樣從原點開始（該處 $\cos\theta = a/b$），並當 $|\theta| \to \frac{\pi}{2}$ 時伸向漸近線 L，一直保持在 $0 \leq x < a$ 之內。所以內分支與閉環合起來構成一條在 O 自身相交的曲線，在該處的切線方向為 $\theta = \pm\alpha$。



（圖中取 $a = 1$、$b = 2$，所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$。外分支以藍綠色表示；內分支連同閉環以梅紫色表示。）

$a = 1$、$b = 2$ **時閉環的面積**。此時 $\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ 表示 $\frac{2\pi}{3} \leq |\theta| \leq \pi$，而在閉環上 $r = 2 + \sec\theta$。當 θ 走遍這個範圍時，射線恰好掃過閉環一次，所以面積為 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。利用關於 x 軸的對稱性，我們取上半部分 $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ 的兩倍：

$$\begin{aligned} \text{面積} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4 + 4\sec\theta + \sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[4\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \tan\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi}. \end{aligned}$$

題目給出的 $\sec\theta$ 的原函數（antiderivative）在此適用，因為區間不包含 $\frac{\pi}{2}$。在 $\theta=\pi$：$\sec\theta=-1$，$\tan\theta=0$，所以括號內的值為 $4\pi+4\ln 1+0=4\pi$。在 $\theta=\frac{2\pi}{3}$：$\sec\theta=-2$，$\tan\theta=-\sqrt{3}$，所以括號內的值為 $\frac{8\pi}{3}+4\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}$。相減，得

$$\text{閉環的面積}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

驗算

- 數值上，面積為 $4.1888+1.7321-5.2678\approx 0.6530$。它是正數，理應如此；而且相比能容納閉環的矩形 $-1\le x\le 0$、$|y|\le 0.45$（面積為 0.9）也較小。直接以數值方法在 $[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 上積分 $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$，同樣得到 0.65301。
- 閉環經過 O 和 $(-1,0)$：在 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，$r=2-2=0$；在 $\theta=\pi$，$r=2-1=1$。
- 在第 (i) 部分的曲線上取一點，例如 $a=2$、$b=1$、$\theta=\frac{\pi}{4}$：則 $r=2\sqrt{2}+1$，而射線與 L 相交於 $(2,2)$，與 O 的距離為 $2\sqrt{2}$，所以該點在交點之外 $1=b$ 的位置。

常見錯誤

- 忘記條件 $r\ge 0$。正是這個條件迫使第 (i) 部分中 $\sec\theta>0$，也決定了第 (ii) 部分中閉環的 θ 範圍。
- 在 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 上積分閉環，即穿過漸近線方向，而不是從 $r=0$ 的 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 開始。
- 在第二象限處理 $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$ 時出現正負號錯誤；該象限中 $\sec\theta$ 和 $\tan\theta$ 皆為負數。

STEP 之外

蚌線由尼科梅德斯約於公元前 200 年發明，用來三等分角和求立方根；這些問題單靠直尺和圓規是不可能解決的，而不可能性的證明來自域論（field theory），在大學第一個代數課程中便會接觸到（見 Allenby，*Rings, Fields and Groups*《環、域與羣》）。第 (ii) 部分中在原點的自交點是一個結點（node），是代數曲線（algebraic curve）上奇點（singular point）的一個例子，這裏的代數曲線是四次曲線 $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$。更多 STEP 風格的曲線作圖題，可參閱 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*《高等數學問題》。

詳細解答

STEP III 2015，第 4 題

純數學 • 三次方程的根

STEP III 2015，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q4

關鍵思路

第 (iii) 部分的三個條件看似一道三角謎題，但每一個其實都是某個量的虛部（imaginary part）：當 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ 時，$r_k^n \sin(n\theta_k)$ 正是 z_k^n 的虛部。因此，這些條件表示三個複數的冪和（power sum）S_1、S_2、S_3 都是實數。第 (ii) 部分把實數冪和轉化為一個實係數（real coefficients）三次方程（cubic），而第 (i) 部分則隨即給我們一個實根（real root）。

解答

第 (i) 部分

對實數 x，設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$；這是一個連續（continuous）實函數。令 $R = 1 + |a| + |b| + |c|$。當 $x \geq R$ 時，有 $x \geq 1$，所以 $|x| \leq x^2$ 及 $1 \leq x^2$，從而 $|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$。因此

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2\big(x - |a| - |b| - |c|\big) > 0.$$

同理，當 $x \leq -R$ 時，得 $f(x) \leq -|x|^2\big(|x| - |a| - |b| - |c|\big) < 0$。所以 $f(-R) < 0 < f(R)$，由介值定理（intermediate value theorem）可知 f 在 $-R$ 與 R 之間有一個零點。這個零點就是 $(*)$ 的一個實根。

（等價的說法：實多項式（polynomial）的非實根必定成共軛（conjugate）對出現，而三個根不可能全部兩兩配對。）

第 (ii) 部分

由於 z_1、z_2、z_3 是方程的根，

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

比較係數（comparing coefficients）得

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

所以 $a = -S_1$。把和平方，得 $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$，故

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right).$$

至於 c，與其展開 S_1^3，不如利用每個根都滿足方程這一事實：對 $k = 1, 2, 3$，有 $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$。把這三條方程相加，得

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

代入 a 和 b，再乘以 2：

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1\left(S_1^2 - S_2\right) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

即為所求。

第 (iii) 部分

對 $k = 1, 2, 3$，定義 $z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$。由棣美弗定理（de Moivre's theorem），$z_k^n = r_k^n\left(\cos n\theta_k + \mathrm{i}\sin n\theta_k\right)$，所以題目給出的三個條件恰好表示

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

其中 S_1、S_2、S_3 是 z_1、z_2、z_3 的冪和，定義與第 (ii) 部分相同。所以 S_1、S_2、S_3 全是實數。

? **想一想** 第 (ii) 部分是從一個三次方程出發的。這裏的三次方程在哪裏？

我們自己構造它：以 $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$ 定義 a、b、c。那麼 z_1、z_2、z_3 就是這個三次方程的根，於是第 (ii) 部分適用，得

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}\left(S_1^2 - S_2\right), \qquad c = \tfrac{1}{6}\left(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3\right),$$

它們全是實數。由第 (i) 部分，這個三次方程有一個實根，而它的根只有 z_1、z_2、z_3，所以某個 z_k 是實數。由於 $r_k > 0$，$z_k = r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$ 是實數當且僅當 $\sin\theta_k = 0$，即 θ_k 是 π 的整數倍；在 $-\pi < \theta_k < \pi$ 範圍內，唯一這樣的值是 $\theta_k = 0$。所以至少有一個 k 使 $\theta_k = 0$。

現在設 $\theta_1 = 0$，於是 $z_1 = r_1$ 是非零實數。那麼

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad 及 \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

都是實數。因此 z_2 和 z_3 是二次方程（quadratic）$z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = 0$ 的根，而這個方程的係數都是實數。分兩種情況。

- 若兩根是非實數，則它們互為共軛複數：$z_3 = \overline{z_2} = r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$。由於 $-\theta_2$ 同樣位於 $(-\pi, \pi)$ 內，而在這個區間內輻角（argument）是唯一的，所以 $\theta_3 = -\theta_2$（且 $r_3 = r_2$）。
- 若兩根是實數，則與上面完全相同的推理（每個根的模（modulus）為正，輻角位於 $(-\pi, \pi)$ 內）給出 $\theta_2 = \theta_3 = 0$，所以同樣有 $\theta_2 = -\theta_3$。

無論哪種情況，都有 $\theta_2 = -\theta_3$，即為所求。

驗算

- 用根 $1, 2, 3$ 驗證第 (ii) 部分：$S_1 = 6$、$S_2 = 14$、$S_3 = 36$，而 $-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$，其中 $c = -6$，正與 $(z-1)(z-2)(z-3)$ 相符。
- 反方向驗證第 (iii) 部分：當 $\theta_1 = 0$、$\theta_3 = -\theta_2$ 及 $r_3 = r_2$ 時，每個和的第二項與第三項互相抵消，而第一項為零，所以三個條件全部成立。用電腦從數千個隨機起點以數值方法求解這三個條件，找到的解全都是一個角為零、另外兩個角互為相反數。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，未加論證便說「三次曲線必定穿過軸」；$|x|$ 很大時的變號需要一行推理來支持。
- 在第 (iii) 部分，忘記 $\theta_k = \pm\pi$ 同樣會令 z_k 成為實數；正是開區間 $(-\pi, \pi)$ 排除了這個可能。
- 只從共軛的情況得出 $\theta_2 = -\theta_3$，卻忽略了 z_2、z_3 都是實數的情況。

STEP 之外

多項式的係數是其根的基本對稱函數（elementary symmetric functions），而第 (ii) 部分的恆等式正是把它們與冪和聯繫起來的牛頓（Newton）恆等式（Newton's identities）的頭幾條。大學的第一門代數課會證明：根的任何對稱多項式（symmetric polynomial）都可以寫成基本對稱函數的多項式，而這正是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是閱讀這方面內容的好起點。

詳細解答

STEP III 2015，第 5 題

純數學 • 以遞降法證明無理性

> **STEP III 2015，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 1.3 節最小反例中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/well-ordering.html

關鍵思路

這是無窮遞降法（infinite descent）的證明：假如 $\sqrt{2}$ 是有理數（rational），那麼必定存在一個最小的正整數，使 $\sqrt{2}$ 乘以它之後變成整數；然後我們構造出一個更小的這樣的數。乘以 $\sqrt{2}-1$ 正好能做到這一點，因為它是介乎 0 與 1 之間的數，而且乘了之後仍留在該集合之內。對於 2 的立方根（cube root），同一招數需要一個同時照顧 $2^{2/3}$ 的集合，這就是題目為何先要求你把這兩個數聯繫起來。

解答

第 (i) 部分

第 3 步。根據第 1 步的假設，對某些整數 p 和 q（$q \neq 0$），有 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$。由於 $\sqrt{2} > 0$，我們可取 p 和 q 皆為正數。於是

$$q\sqrt{2} = p$$

是整數，而 q 是正整數，所以 $q \in S$。因此 S 非空。

第 5 步。由於 $k \in S$，數 $m = k\sqrt{2}$ 是整數。關於 $n = (\sqrt{2}-1)k$，我們需要驗證兩件事。

- n 是正整數：$n = k\sqrt{2} - k = m - k$ 是兩個整數之差，而且由於 $k > 0$ 及 $\sqrt{2} > 1$，有 $n > 0$。

- $n\sqrt{2}$ 是整數：

$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$

同樣是兩個整數之差。

所以 $(\sqrt{2}-1)k \in S$。

第 6 步。由於 $1 < \sqrt{2} < 2$（因為 $1 < 2 < 4$），我們有 $0 < \sqrt{2}-1 < 1$，因此由 $k > 0$ 得

$$(\sqrt{2}-1)k < k.$$

於是第 5 步給出了 S 中一個比 k 小的正整數，與第 4 步中選取 k 為 S 的最小元素相矛盾（contradiction）。（第 4 步是合理的，因為每個非空的正整數集合都有最小元素，而第 3 步已證明 S 非空。）整個論證唯一的假設是第 1 步，所以它必定是錯的：$\sqrt{2}$ 是無理數（irrational）。

第 (ii) 部分

記 $a = 2^{1/3}$，則 $a^2 = 2^{2/3}$ 及 $a^3 = 2$。

等價性（equivalence）。若 a 是有理數，則 a^2 作為有理數的乘積亦是有理數。反過來，若 a^2 是有理數，則由於 $a^2 \neq 0$，

$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

是有理數。所以 $2^{1/3}$ 是有理數當且僅當 $2^{2/3}$ 是有理數。

無理性。用反證法，假設 a 是有理數。根據等價性，a^2 亦是有理數。定義 T 為所有使 na 與 na^2 同時為整數的正整數 n 所組成的集合。

> ? **想一想** 為何不直接照搬第 (i) 部分，取 $S = \{n : na \text{ 是整數}\}$？

在第 (i) 部分中，驗證 $(\sqrt{2}-1)k \in S$ 時需要 $k(\sqrt{2})^2 = 2k$ 是整數，而這是自動成立的。在這裏，把 $(a-1)k$ 乘以 a 得到 $ka^2 - ka$，但條件「ka 是整數」並沒有告訴我們 ka^2 是整數。所以我們把這一點寫進集合的定義之中，而這正是需要本部分前半的地方。

T 非空。記 $a = \frac{p}{q}$，其中 p、q 為正整數。則 $q^2 a = pq$ 及 $q^2 a^2 = p^2$ 都是整數，所以 $q^2 \in T$。

遞降。設 k 為 T 的最小元素，則 $u = ka$ 及 $v = ka^2$ 都是整數。考慮 $n = (a-1)k$。

- $n = u - k$ 是整數，而且由於 $a > 1$（因為 $1^3 < 2$），有 $n > 0$。
- $na = ka^2 - ka = v - u$ 是整數。
- 利用 $a^3 = 2$，$na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$ 是整數。

所以 $n \in T$。但 $a < 2$（因為 $2^3 = 8 > 2$），所以 $0 < a - 1 < 1$，從而 $n = (a-1)k < k$，與 k 的極小性（minimality）相矛盾。因此 $2^{1/3}$ 是無理數，而根據等價性，$2^{2/3}$ 亦是無理數。

驗算

- 在一個「差一點」的例子上試試遞降。分數 $\frac{7}{5}$ 很接近 $\sqrt{2}$；第 5 步中的映射 $(k, m) \mapsto (m-k, 2k-m)$ 把 $(5,7)$ 映到 $(2,3)$，而 $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1 = -(7^2 - 2 \cdot 5^2)$。量 $m^2 - 2k^2$ 只會改變正負號，所以假如它等於 0（即 $m = k\sqrt{2}$），它會一直保持為 0，而 k 卻不斷變小，這是不可能的。
- 數值上，$\sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ 及 $2^{1/3} - 1 \approx 0.260$，兩者都嚴格介乎 0 與 1 之間，正如遞降所需。
- 用電腦搜尋所有 $n \leq 2 \times 10^5$，找不到任何 n 使 $2n^2$ 為完全平方數，亦找不到任何 n 使 $2n^3$ 或 $4n^3$ 為完全立方數。

常見錯誤

- 忘記證明 $(\sqrt{2} - 1)k$ 是正數：S 只包含正整數，所以這一步是必需的。
- 在第 (ii) 部分中，使用只以 na 定義的集合，然後毫無理據地斷言 ka^2 是整數。
- 沒有說明最小元素 k 為何存在：這需要 S（或 T）非空，而這正是第 3 步的目的。

STEP 之外

這個論證其實關乎正整數的良序性（well-ordering），也就是歸納法（induction）背後的原理，而且它可以推廣：若 $\sqrt[r]{N}$ 不是整數，則它是無理數。要看出這一點，可取所有使 $n\alpha, n\alpha^2, \ldots, n\alpha^{r-1}$ 全都是整數的 n 所組成的集合，再把其最小元素乘以 $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$，而這個數嚴格介乎 0 與 1 之間。在第一個代數課程中，這會變成以下命題：整數構成一個整閉（integrally closed）環——整數係數首一多項式（monic polynomial）的有理根必定是整數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步認識整數及其性質的絕佳讀物。

詳細解答

STEP III 2015，第 6 題

純數學 • 根的對稱函數

STEP III 2015，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q6

關鍵思路

關於 w、z 這一對數的一切，都由它們的和與積決定，因為 w 和 z 正是 $t^2-(w+z)t+wz=0$ 的兩個根。於是第 (i) 部分其實是在問：一個實係數二次方程（quadratic equation）何時有實根；而條件 $u^2\le 2v$ 不過是喬裝了的判別式（discriminant）。在第 (ii) 部分，頭兩條方程確定了積 wz，第三條方程隨即變成只含 u 的三次方程（cubic equation），而且有一個一眼就能看出的根。

解答

第 (i) 部分

推動整個證明的恆等式（identity）是

$$2v-u^2=2(w^2+z^2)-(w+z)^2=w^2-2wz+z^2=(w-z)^2.$$

我們亦注意到 $wz=\frac{1}{2}\big((w+z)^2-(w^2+z^2)\big)=\frac{1}{2}(u^2-v)$。

若 w 和 z 是實數：那麼 $u=w+z$ 和 $v=w^2+z^2$ 當然是實數，而由於 $w-z$ 是實數，$2v-u^2=(w-z)^2\ge 0$。所以 $u^2\le 2v$。

反過來，假設 u 和 v 是實數，且 $u^2\le 2v$。那麼 $p=wz=\frac{1}{2}(u^2-v)$ 亦是實數。由於

$$(t-w)(t-z)=t^2-ut+p,$$

w 和 z 恰好是二次方程 $t^2-ut+p=0$ 的兩個根，而這方程的係數都是實數。它的判別式是

$$u^2-4p=u^2-2(u^2-v)=2v-u^2\ge 0,$$

所以兩個根都是實數。因此 w 和 z 是實數，等價關係（equivalence）的證明至此完成。

想一想 為甚麼單靠「u 和 v 是實數」並不足夠？

因為一對共軛複數（conjugate pair）的和與平方和同樣是實數。例如 $w = 1 + 2\mathrm{i}$、$z = 1 - 2\mathrm{i}$ 給出 $u = 2$ 和 $v = -6$，兩者都是實數，但 $u^2 = 4 > -12 = 2v$。這條不等式正正就是用來排除非實數的共軛對。

第 (ii) 部分

化為三次方程。第一條方程說的是 $u = w + z$。記 $v = w^2 + z^2$，第二條方程說 $v = u^2 - \frac{2}{3}$，所以

$$wz = \tfrac{1}{2}(u^2 - v) = \tfrac{1}{3}.$$

對於立方，我們用標準恆等式

$$w^3 + z^3 = (w + z)^3 - 3wz(w + z) = u^3 - u.$$

因此第三條方程變成 $u^3 - u - \lambda u = -\lambda$，即

$$u^3 - (1 + \lambda)u + \lambda = 0.$$

代入 $u = 1$ 得 $1 - 1 - \lambda + \lambda = 0$，所以 $u - 1$ 是一個因式，而

$$u^3 - (1 + \lambda)u + \lambda = (u - 1)(u^2 + u - \lambda).$$

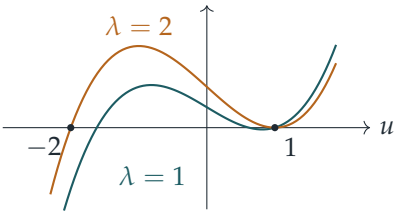
數算根的個數。由於 $\lambda > 0$，二次因式的判別式 $1 + 4\lambda > 0$。所以它有兩個相異實根：

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}.$$

其中一個根等於 1，當且僅當 $1^2 + 1 - \lambda = 0$，即 $\lambda = 2$。所以：

- 若 $\lambda \neq 2$，u 的可能值為 1 及 $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}\right)$：共三個相異的值，全部是實數；
- 若 $\lambda = 2$，三次式為 $(u - 1)^2(u + 2)$，只有兩個值：$u = 1$ 和 $u = -2$。

這些值每一個都確實可以出現：給定 u，取 w 和 z 為 $t^2 - ut + \frac{1}{3} = 0$ 的根。那麼 $w + z = u$ 且 $wz = \frac{1}{3}$，把上面的步驟倒過來推，便可知三條方程全部成立。所以例外的值是 $\lambda = 2$。



這幅草圖（已在垂直方向縮放）顯示 $u^3-(1+\lambda)u+\lambda$ 在 $\lambda=1$ 時的圖像，與橫軸有三個分開的交點；以及在 $\lambda=2$ 時的圖像，曲線在 $u=1$ 處剛好與橫軸相切。

w 和 z 是否必然是實數？不是。由於 u 是實數，而 $v=u^2-\frac{2}{3}$ 也是實數，第 (i) 部分告訴我們：w 和 z 是實數當且僅當 $u^2\le 2v=2u^2-\frac{4}{3}$，即當且僅當 $u^2\ge\frac{4}{3}$。無論 λ 取何值，根 $u=1$ 都存在，而 $1<\frac{4}{3}$，所以它總是給出非實數的 w 和 z。

具體來說，$u=1$ 給出 $t^2-t+\frac{1}{3}=0$，所以

$$w=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}},\qquad z=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

驗證一下：$w+z=1=u$；$wz=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$，所以 $w^2+z^2=1-\frac{2}{3}=u^2-\frac{2}{3}$；而 $w^3+z^3=u^3-3wz\,u=1-1=0$，所以對任何 $\lambda>0$ 都有 $w^3+z^3-\lambda u=-\lambda$。這是一個反例（counterexample）：$u$ 的三個值全是實數，但 w 和 z 未必是實數。

驗算

- 當 $\lambda=1$ 時，u 的值為 1 及 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})\approx 0.618,\,-1.618$，每一個都滿足 $u^3-2u+1=0$。
- 當 $\lambda=2$ 時，三次式 u^3-3u+2 在 $u=-2$ 處為零（$-8+6+2=0$），而它及其導數（derivative）$3u^2-3$ 在 $u=1$ 處都為零，證實了這是重根（double root）。
- 用電腦對大量 λ 值進行檢查：由每個 u 構造出 w 和 z，確認三條方程在捨入誤差範圍內成立；檢查亦發現除了 $\lambda=2$ 以外，u 都有三個相異的值。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分只證明了一個方向。逆命題需要積 wz 是實數，而這正是用到 v 是實數的地方。
- 忘記檢查二次因式的根是否與 1 不同，因而漏掉了例外值 $\lambda=2$。
- 以為 u 是實數，w 和 z 就必定是實數。w 和 z 的實值對稱函數同樣可以來自一對共軛複數。

STEP 之外

一對數（或任何一組數）由其對稱函數決定——這個想法是對稱多項式（symmetric polynomial）理論的起點：任何關於 w 和 z 的對稱多項式都可以用 $w+z$ 和 wz 表示，而牛頓（Newton）恆等式則把 w^3+z^3 這類冪和（power sum）與它們聯繫起來。同樣的推

理，配合判別式，可以判定一個實係數多項式的根何時全是實數。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）是學習複數的絕佳良伴，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則把對稱多項式的討論推得更遠。

詳細解答

STEP III 2015，第 7 題

純數學 • 微分算子

> **STEP III 2015，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q7

關鍵思路

x 的冪是 $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特徵函數（eigenfunction）：把 D 作用於 x^a，結果只是乘以 a。因此 D^n 對多項式是逐項作用的，把 x^r 的係數乘以 r^n，而這正是最後那個和式中 r^n 的來源。至於整除性（divisibility），要留意每作用一次 D，因式 $(1-x)$ 的次方最多只會減少一。

解答

開首的結果

對任何常數 a（若 a 不是整數，則需 $x > 0$），

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

再作用一次 D，並利用這個結果，把常數 a 提出來，

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}\left(ax^a\right) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

即為所求。由於 D 是線性（linear）的（對常數 α, β，有 $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$），重複這一步，由歸納法（induction）可得

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

第 (i) 部分

設 $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$，其中 $c_r \neq 0$。由線性及上述結果，

$$\mathrm{D}^n\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k\, k^n x^k.$$

這是一個沒有高於 x^r 的項的多項式，而其 x^r 項的係數為 $r^n c_r$。由於 $r \geq 1$，故 $r^n \neq 0$，又 $c_r \neq 0$，所以 $r^n c_r \neq 0$。因此 $\mathrm{D}^n\mathrm{P}(x)$ 是次數（degree）恰好為 r 的多項式。

（條件 $r \geq 1$ 是必要的：常數多項式會被映到 0，因為 $0^n = 0$。）

第 (ii) 部分

固定 m。我們對 n 用歸納法證明：當 $1 \leq n \leq m$ 時，

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = (1-x)^{m-n}\,\mathrm{Q}_n(x) \quad \text{對某個多項式} \mathrm{Q}_n.$$

基本情況。$\mathrm{D}(1-x)^m = x \cdot \big(-m(1-x)^{m-1}\big) = (1-x)^{m-1} \cdot (-mx)$，所以 $\mathrm{Q}_1(x) = -mx$。

歸納步驟。假設命題對某個滿足 $n < m$ 的 n 成立，於是 $m - n \geq 1$。由乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)\Big] \\
&= x\Big[-(m-n)(1-x)^{m-n-1}\mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n'(x)\Big] \\
&= (1-x)^{m-n-1} \cdot x\Big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)\Big].
\end{aligned}$$

方括號內是一個多項式，所以上式具有所需的形式，其中 $\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x\big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)\big]$。

> **想一想** 在歸納步驟中，我們在哪裏用到了 $n < m$？

只有當 $m - n - 1 \geq 0$，即 $n < m$ 時，提出因式 $(1-x)^{m-n-1}$ 作為多項式因式才有意義。到了 $n = m$，已經再沒有 $(1-x)$ 的因式可以減少，所以歸納（理所當然地）在那裏停止。

因此對每個正整數 $n < m$，$\mathrm{D}^n(1-x)^m$ 都能被 $(1-x)^{m-n}$ 整除。

第 (iii) 部分

用二項式定理（binomial theorem）展開：

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} x^r.$$

與第 (i) 部分完全一樣，把 D^n 逐項作用，

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n x^r.$$

由第 (ii) 部分，在 $n < m$ 時，左方等於 $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$，且 $m-n \geq 1$，所以它在 $x=1$ 時等於零。因此在右方代入 $x=1$，便得

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n = 0,$$

即為所求。（$r=0$ 那一項是 $0^n=0$，與 D 消去常數項一致。）

驗算

取 $m=3$、$n=2$：和式為 $0-3\cdot1+3\cdot4-1\cdot9=0$。取 $m=4$、$n=3$：$0-4+6\cdot8-4\cdot27+64=0$。我們亦已用電腦驗證此恆等式對所有 $1\leq n<m\leq 19$ 均成立，並驗證了當 $m\leq 11$ 時，$(1-x)^{m-n}$ 是整除 $\mathrm{D}^n(1-x)^m$ 的*確切*次方。作為對照，當 $n=m$ 時和式不再為零：當 $m=2$ 時，它是 $0-2+4=2=2!$，一般而言則是 $(-1)^m m!$。

常見錯誤

- 把 D^2x^a 寫成 $x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}x^a = a(a-1)x^a$：$\mathrm{D}^2$ 是把 D 作用兩次，而不是 x^2 乘以二階導數。
- 在第 (i) 部分，忘記說明為何首項係數（leading coefficient）$r^n c_r$ 不為零；條件 $r\geq 1$ 正是用在這裏。
- 在第 (iii) 部分，在作用 D^n 之前就把 $x=1$ 代入 $(1-x)^m$；重點在於因式 $(1-x)$ 在 $n<m$ 次作用後仍然保留。

STEP 之外

算子（operator）$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 有時稱為歐拉（Euler）算子，而 x^a 是它的特徵函數，對應的特徵值（eigenvalue）為 a；它是處理歐拉—柯西方程（Euler–Cauchy equations）的自然工具，例如 $x^2y''+bxy'+cy=0$，在代換 $x=e^t$ 下會變成常係數方程。第 (iii) 部分的恆等式說的是：次數低於 m 的多項式，其 m 階有限差分（finite difference）為零；它與斯特林數（Stirling numbers）以及用容斥原理（inclusion–exclusion）計算滿射（surjection）個數密切相關。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講述了歐拉方程；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多同類風格的題目。

詳細解答

STEP III 2015，第 8 題

純數學 • 極坐標微分方程

STEP III 2015，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 8.4 節盤旋趨向圓中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/limit-cycle.html

關鍵思路

兩條微分方程（differential equations）都由組合 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 和 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 構成，而這正是極坐標（polar coordinates）能夠化簡的式子：它們分別變成 $r^2\,\mathrm{d}\theta$ 和 $r\,\mathrm{d}r$。因此我們把 θ 視為沿曲線的參數（parameter），把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 寫成兩個對 θ 的導數（derivative）之比，讓三角部分自行化簡。在第 (ii) 部分，新增的項使方程變成關於 r 的伯努利方程（Bernoulli equation），而代換 $u = r^{-2}$ 可把它化為線性（linear）方程。

解答

記 r' 為 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，$c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$。沿曲線 $r = r(\theta)$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

把任一方程兩邊乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$，形如 $P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ 的方程便變成

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

全部工夫都靠以下兩條恆等式：

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

第 (i) 部分

這裏 $P = y + x$ 而 $Q = y - x$，所以

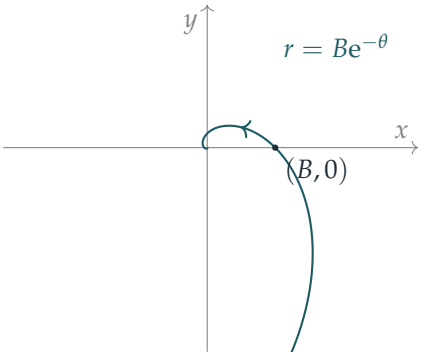
$$\begin{aligned}(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= r^2 + rr'.\end{aligned}$$

因此方程為 $r(r' + r) = 0$，由於 $r > 0$，可以除以 r，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

即所求。

這是可分離變數（separable）的方程（或直接認出它是指數衰減）：$r = B\mathrm{e}^{-\theta}$，其中 $B > 0$。這是一條等角螺線（equiangular spiral），亦稱對數螺線（logarithmic spiral）。當 θ 增加時，曲線以逆時針方向繞向原點，但永不到達；當 θ 減少時，它無界地向外盤旋。由於 $r/r' = -1$，曲線與每條由原點出發的射線都以相同角度相交，即與指向原點的徑向成 45°。不同的 B 給出同一螺線的旋轉，因為 $B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$。



箭頭表示 θ 增加的方向。螺線每繞一圈便縮小 $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$ 倍，所以在任何比例下都只看得見大約一圈；其餘部分都緊密地擠在原點周圍。

第 (ii) 部分

現在 $P = y + x - x(x^2 + y^2)$ 而 $Q = y - x - y(x^2 + y^2)$，其中 $x^2 + y^2 = r^2$。新增的項貢獻

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2 \cdot r^2 = -r^4,$$

所以利用第 (i) 部分處理原有的項，方程變成

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

同樣是除以 $r > 0$ 所得。

想一想 r^3 這一項令方程不再是線性的，我們該如何處理它？

這是一條伯努利方程。目標答案以 r^2 表示，提示我們使用 $u = r^{-2}$。於是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

所以 $u' - 2u = -2$，這是一條常係數線性方程：$u = 1$ 是一個特解（particular solution），而 $A\mathrm{e}^{2\theta}$ 是齊次方程（homogeneous equation）的解，因此

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

這正是所求的形式。（分離變數，並對 $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$ 使用部分分式（partial fractions），亦可得出相同結果，只是較費工夫。）曲線只在 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ 的地方存在。

解的形狀

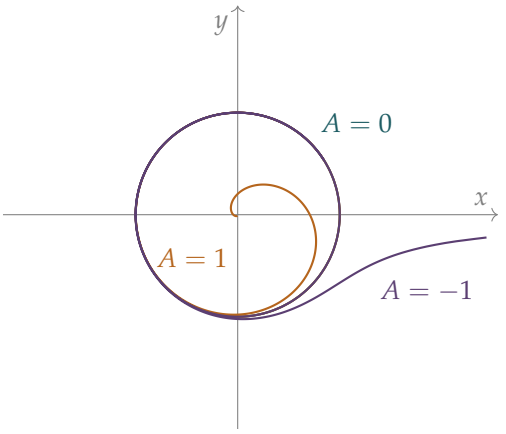
首先留意，若 $A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$，則 $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$，所以對應 A 的曲線，就是對應 $A = \pm 1$ 的曲線旋轉 α 所得。因此按 A 的正負號，實際上只有三種形狀。

- $A = 0$：$r = 1$，即單位圓。
- $A > 0$：$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$，所以 $r < 1$，而曲線對每個 θ 都有定義。由於 $r' = r(r^2 - 1) < 0$，r 穩定地遞減。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 1$，所以曲線從內側向外盤旋趨向單位圓；當 $\theta \to +\infty$ 時，$r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$，所以它盤旋進入原點，看起來愈來愈像第 (i) 部分的螺線。
- $A < 0$：我們需要 $\mathrm{e}^{2\theta} < -1/A$，即 $\theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(-1/A)$。此時 $r > 1$ 且 $r' > 0$。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 1$ 從上方趨近，所以曲線從外側向內盤旋趨向單位圓；當 $\theta \to \theta_0^-$ 時，$r \to \infty$。在 θ_0 附近，$1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \approx 2(\theta_0 - \theta)$（因為 $A\mathrm{e}^{2\theta_0} = -1$），所以 $r \approx \big(2(\theta_0 - \theta)\big)^{-1/2}$，而曲線到直線 $\theta = \theta_0$ 的距離為

  $$r\sin(\theta_0 - \theta) \approx r(\theta_0 - \theta) \approx \frac{1}{2r} \to 0.$$

  因此曲線趨向無窮遠，並以通過原點、傾角為 θ_0 的直線為漸近線（asymptote），從順時針一側趨近它。當 $A = -1$ 時，$\theta_0 = 0$，而對於大的 x，曲線最終貼近 $y = -\frac{1}{2x}$。

單位圓是一個極限環（limit cycle）：當 $\theta \to -\infty$ 時，其他每個解都盤旋趨向它；當 θ 增加時，則盤旋離開它。



紫紅色曲線（$A=-1$）沿正 x 軸、緊貼其下方伸向無窮遠。

驗算

- 把 $r=B\mathrm{e}^{-\theta}$ 代回第 (i) 部分的原方程，在幾個點上檢查（換算成 x、y 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$），結果為零；對第 (ii) 部分的公式，取若干正負不同的 A 值檢查，結果亦然。
- $A=0$ 給出 $r=1$，而常數 $r=1$ 確實滿足 $r'=r^3-r$；以 x、y 表示，圓 $x^2+y^2=1$ 使新增的項與原有的項恰好抵消。
- 從 $r(0)=\frac{1}{2}$ 出發（即 $A=3$），公式給出 $r(2)=1/\sqrt{1+3\mathrm{e}^4}\approx 0.0779$，與 $r'=r^3-r$ 的逐步數值解在許多位小數上吻合。
- 對於 $A=-1$，在 $\theta=-10^{-4}$ 處，$r\approx 70.71$，而到 x 軸的距離為 $0.00707\approx 1/(2r)$，印證了漸近線。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 必須在 r 會變化的情況下以 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ 求得，即漏掉了含 r' 的項。
- 當 $A<0$ 時忽略了限制 $1+A\mathrm{e}^{2\theta}>0$，因而沒有察覺這些曲線在有限的角度便趨向無窮遠。
- 對每種 A 的正負號只畫一條曲線，卻沒有說明其他曲線都是它的旋轉。

STEP 之外

方程 $r' = r^3 - r$ 是一個平面動力系統（dynamical system）的極坐標描述，而單位圓是一個極限環：一條孤立的閉軌道，鄰近的軌跡都盤旋趨向它或離開它。這類徑向方程可以獨立分離出來的系統，是非線性微分方程和相平面分析（phase-plane analysis）課程中的標準入門例子，並引向龐加萊–本迪克森定理（Poincaré–Bendixson theorem）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）有一章很好地講解非線性系統與極限環。

詳細解答

STEP III 2015，第 9 題

力學 • 非線性彈性振動

STEP III 2015，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q9

關鍵思路

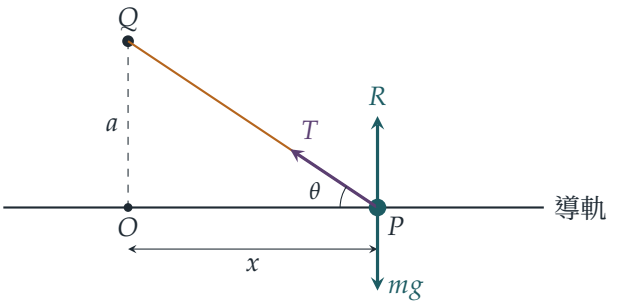
導軌光滑（smooth），法向反作用力（normal reaction）不做功，所以能量守恆（conservation of energy），由此即可直接得到一階方程（first-order equation）。由於在導軌上每一點都有 $PQ \geq a$，弦從不鬆弛（slack）。轉向點（turning point）就是 $\dot{x} = 0$ 的位置。週期（period）是由中心走到 x_0 所需時間的四倍。當 v 很小時，質點一直停留在起點附近，所以 $\sqrt{x^2 + a^2} - a \approx x^2/(2a)$，而代換（substitution）$x = x_0 u$ 則可把積分整理好。

解答

能量方程

把 P 視為質點，弦視為輕而有彈性、遵從胡克定律（Hooke's law）。取導軌為 x 軸，P 從原點出發，原點即由 Q 所作垂線的垂足。當 P 位於 x 時，它與 Q 的距離為 $PQ = \sqrt{x^2 + a^2} \geq a$，所以弦是拉緊的，其伸長量（extension）為

$$e = \sqrt{x^2 + a^2} - a \quad (\geq 0).$$



作用於 P 的力有其重量、導軌的法向反作用力 R（兩者都與運動方向垂直，所以不做功），以及張力（tension）T。張力是保守力（conservative force），其彈性勢能（elastic potential energy）為 $\lambda e^2/(2a)$。開始時 $e=0$，速率為 v，所以能量守恆給出

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\tfrac{1}{2}mv^2.$$

兩邊乘以 $2/m$，並記 $k^2=\lambda/(ma)$，得

$$\dot{x}^2=v^2-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2,$$

此即所求。

最大位移及該處的加速度

伸長量 e 隨 $|x|$ 增大而增大，所以 P 向外移動時 $\dot{x}^2$ 遞減，而 P 會一直向外移動，直至 $\dot{x}=0$。在該點 $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2}-a\right)=v$（由於 $e\geq 0$，取正根）。因此

$$\sqrt{x_0^2+a^2}=a+\frac{v}{k}\quad\Longrightarrow\quad x_0^2=\left(a+\frac{v}{k}\right)^2-a^2=\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2},$$

得

$$x_0=\frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

求加速度時，沿導軌方向分解。設 θ 為 PQ 與導軌之間的夾角，則 $\cos\theta=x/\sqrt{x^2+a^2}$，而張力沿導軌的分量為 $T\cos\theta$，指向 O。由 $T=\lambda e/a$，

$$m\ddot{x}=-\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\qquad\text{所以}\qquad\ddot{x}=-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

（把能量方程對 t 求導，再約去 $2\dot{x}$，亦得到相同結果。）在 $x=x_0$ 處有 $\sqrt{x_0^2+a^2}-a=v/k$ 及 $\sqrt{x_0^2+a^2}=(ak+v)/k$，所以

$$\ddot{x}=-k^2\cdot\frac{v}{k}\cdot\frac{k\,x_0}{ak+v}=-\frac{k^2v\,x_0}{ak+v}=-\frac{kv\sqrt{v\,(2ak+v)}}{ak+v}.$$

因此在 x_0 處加速度的大小為 $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak+v)}}{ak+v}$，方向沿導軌指回初始位置。

週期

$\dot{x}^2$ 的方程只依賴於 x^2，所以運動關於 O 對稱。質點在 $-x_0$ 與 x_0 之間振盪，而 $O\to x_0\to O\to -x_0\to O$ 這四段各需相同的時間。在第一段中 $\dot{x}>0$，所以 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/\dot{x}$，週期為

$$\tau=4\int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2}}.$$

被積函數（integrand）在 x_0 處趨於無窮，但只是如 $(x_0-x)^{-1/2}$ 般增長，所以積分收斂（converge）。

> **想一想** $v \ll ka$ 告訴我們 x 的大小是怎樣的？

由於 $x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$，若 $v/k \ll a$，則 $x_0^2 \approx 2av/k$，所以 $x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$。因此積分範圍內每個 x 都滿足 $|x| \ll a$，而二項式展開（binomial expansion）給出

$$\sqrt{x^2+a^2} - a = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

週期變為

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

而這個近似的 x_0 正好是新分母等於零的位置，因為 $k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$。現在代入 $x = x_0u$，於是 $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$ 及 $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$：

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1-u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}},$$

因為 $\frac{16}{v^2}\cdot\frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$。這就是所求的近似式。

驗算

- 單位：$k^2 = \lambda/(ma)$ 的單位是 s^{-2}，所以 v/k 是長度（理應如此，因為它是 x_0 處的伸長量），而 $\sqrt{a/(kv)}$ 是時間。
- 取 $m=1$、$\lambda=2$、$a=1$、$v=1$，得 $k=\sqrt{2}$、$x_0 = \sqrt{1+2\sqrt{2}} \approx 1.3836$，以及 x_0 處的加速度 ≈ -1.1462。以數值方法逐步推進運動方程，得到相同的轉向點，週期約為 7.612，與積分結果吻合。
- 取 $a=1$、$k=2$、$v=0.001$，精確的週期積分為 165.862，而近似式給出 165.833，其中 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$。當 $v\to 0$ 時，兩者之比趨於 1。

常見錯誤

- 把伸長量當作 x 或 $\sqrt{x^2+a^2}$，而不是 $\sqrt{x^2+a^2}-a$；弦開始時處於自然長度（natural length）。
- 忘記分解張力：只有分量 $T\cos\theta$ 沿導軌作用。
- 把週期當作 $2\int_0^{x_0}$ 或 $\int_0^{x_0}$；振盪是在 $-x_0$ 與 x_0 之間進行的，所以需要四個四分之一週期。

STEP 之外

當 v 很小時，回復力(restoring force)大致與 x^3 而非 x 成正比，所以這是一個非線性振子（nonlinear oscillator），其週期依賴於振幅（amplitude）：與簡諧運動（simple harmonic motion）不同，能量越小，週期越大，按 $v^{-1/2}$ 增長。積分 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ 是一個橢圓積分（elliptic integral）（等於雙紐線常數（lemniscate constant）的一半），擺（pendulum）的精確週期也會出現這類積分。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以同樣的精神講解能量方法和振盪。

詳細解答

STEP III 2015，第 10 題

力學 • 轉動的剛桿

STEP III 2015，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

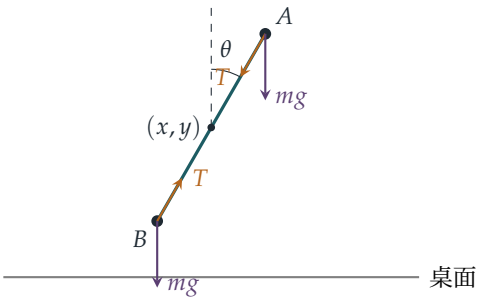
step.maths.org/questions/15-s3-q10

關鍵思路

用中點的運動和桿的轉動來描述整個系統。以 x、y 和 θ 寫出每個質點（particle）的位置，對時間求導兩次，再對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law）。把兩條方程相加便消去張力（tension），得出質心（centre of mass）的運動。把兩條方程相減，再沿垂直於桿的方向分解，又一次消去張力，剩下的就是轉動。三個加速度都求出後，最後一部分就是拋射體運動（projectile motion）加上勻速轉動。

解答

我們把兩個質量模型化為由一根輕質剛性桿連接的質點。每個質點只受兩個力：本身的重量，以及沿桿方向作用的桿的力。設 T 為張力，$T > 0$ 表示桿把每個質點拉向中點。（桿也可以推，此時 $T < 0$；以下的推導與 T 的正負無關。）



質點 A 的運動方程

設 A 為桿上起初位於中點上方那一端的質點，因此由中點指向 A 的向量（vector）是 $a(\sin\theta, \cos\theta)$。於是 A 的位置是

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

這是由鏈式法則（chain rule）得出的，也就是題目要求的速度。再求導一次，對 $\dot{\theta}\cos\theta$ 和 $\dot{\theta}\sin\theta$ 使用積法則（product rule），得

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

桿以大小為 T 的力，沿 $-(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向把 A 拉向中點。重力貢獻 $-mg(0,1)$。因此對 A 應用牛頓第二定律，正好得出題目所給的方程：

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

另一個質點

對於位於另一端的 B，把所有 a 換成 $-a$ 即可。此時桿沿 $+(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向拉 B：

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

這裏 B 的速度是 $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$。

推導加速度

把 (A) 和 (B) 相加，所有含 a 或 T 的項都會抵消：

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{所以} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

以 (A) 減去 (B)，再除以 2：

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

想一想 我們不知道 T，該怎樣把它消去？

張力沿桿的方向作用，所以我們沿垂直於桿的方向 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 分解，即取第一條方程乘以 $\cos\theta$，減去第二條方程乘以 $\sin\theta$。右邊得出 $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$，而 $\dot\theta^2$ 項亦以同樣方式抵消。剩下的是

$$ma\ddot\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

由於 $m, a \neq 0$，得 $\ddot\theta = 0$。（若改為沿桿的方向分解，則得 $T = ma\dot\theta^2$，即繞中點作圓周運動所需的張力。）

最後一部分

在 $t = 0$ 時桿是鉛直的，所以 $\theta = 0$。此時質點 A 在較高位置，速度為 $(\dot x + a\dot\theta,\ \dot y)$；$B$ 在較低位置，速度為 $(\dot x - a\dot\theta,\ \dot y)$。與題目所給的初速度比較：

$$\dot x + a\dot\theta = u, \qquad \dot x - a\dot\theta = 0, \qquad \dot y = v,$$

所以起初 $\dot x = \frac{1}{2}u$、$\dot\theta = \dfrac{u}{2a}$ 及 $\dot y = v$。

由上一部分，$\dot\theta$ 保持不變，所以 $\theta = \dfrac{ut}{2a}$。我們取 $u > 0$，使 θ 遞增。此外 $\ddot y = -g$ 且 $y(0) = h$，所以

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$，即 $t = \dfrac{\pi a}{u}$ 時，桿轉過了 $\frac{1}{2}\pi$。此時桿是水平的，所以兩個質點都位於中點的高度 y。兩者在那一刻同時碰到桌面，當且僅當那時 $y = 0$：

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

乘以 $2u^2$ 並整理，得

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

此即所求。

驗算

- 當 $v = 0$ 時，下落時間為 $\sqrt{2h/g}$，這必須等於 $\pi a/u$。兩邊平方得 $2hu^2 = \pi^2a^2g$，與結果吻合。
- 單位：結果中每一項的量綱（dimensions）都是 $\mathrm{L^3T^{-2}}$。
- 我們用電腦模擬了兩個由剛性桿連接的質點，隨機選取多組 a、u、v，取 $g = 9.8$，並由公式給出 h。例如 $a \approx 1.754$ 時 $h \approx 17.93$。在每一種情況下，兩個質點都在 $t = \pi a/u$ 時同時到達桌面，誤差在 10^{-10} 以內，而且桿是水平的。

常見錯誤

- 把其中一個質點所受張力的方向弄錯。桿把每個質點拉向中點，所以兩個力大小相等、方向相反。
- 在兩條方程中使用不同的 T。桿是輕質的，所以它所受的合力必須為零，兩端的張力相同。
- 對 $\dot{\theta}\cos\theta$ 求導時漏掉 $-a\dot{\theta}^2$ 項。缺少這些項，相減那一步就不能乾淨地得出結果。

STEP 之外

這道題是關於質點系的一條一般定理的小小例子。質心的運動，就如同全部質量和全部外力都集中在質心一樣。內力兩兩抵消，所以若對質心沒有外力矩（torque），則繞質心的角動量（angular momentum）守恆。在大學一年級的力學課程中，你還會學到拉格朗日方法（Lagrangian approach），它把 x、y、θ 當作廣義坐標（generalised coordinates），完全不需要用到 T。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對質心和剛體轉動有詳盡的論述。

詳細解答

STEP III 2015，第 11 題

力學 • 圓周運動

> **STEP III 2015，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q11

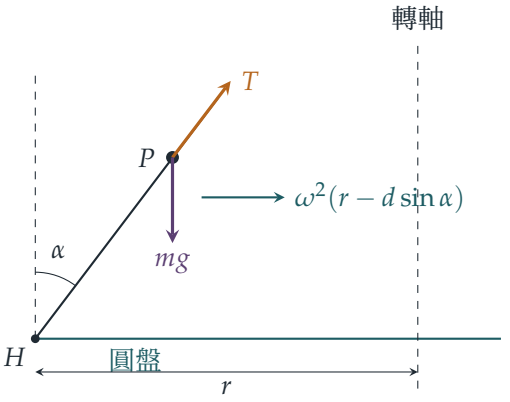
關鍵思路

輕桿（light rod）沒有質量，所以即使它在運動，作用在它上面的力和力矩（moment）都必須完全平衡。在第 (i) 部分，只有兩個力作用在桿上，而來自鉸鏈（hinge）的力對鉸鏈沒有力矩，所以來自 P 的力必須正正指向鉸鏈。之後，P 就是一個作水平圓周運動的質點，餘下的只需分解力（resolving）便可完成。在第 (ii) 部分，兩個質點施加的力不一定沿着桿的方向，但對鉸鏈取力矩，仍然可以得到一條關於 β 的方程。

解答

模型。質點是點質量，桿是輕而剛性的，鉸鏈是光滑的，所以它不會對自身的軸（即通過鉸鏈、垂直於包含桿的鉛垂平面的水平直線）施加力偶（couple）。在該平面上設立坐標軸，原點位於鉸鏈 H，x 軸水平並指向轉軸，y 軸鉛垂向上。桿上與 H 距離為 s 的點位於 $(s\sin\theta,\ s\cos\theta)$，其中 θ 是桿與向上鉛垂線所成的角，而該點與轉軸的水平距離為 $r - s\sin\theta$。

第 (i) 部分



上圖畫出了作用在 P 上的力：它的重量，以及來自桿的力；我們稍後會證明後者沿着桿的方向作用。青色箭頭表示 P 的加速度。

來自 P 的力沿着桿的方向。只有兩個力作用在桿上：來自鉸鏈、作用於 H 的力，以及來自 P、作用於 P 的力 **G**。桿是輕的，所以無論它如何運動，它所受關於鉸鏈軸的總力矩都是零（質量乘以角加速度等於零）。鉸鏈力對 H 沒有力矩，所以 **G** 對 H 也沒有力矩。

其次，P 以轉軸為圓心作水平圓周運動，所以它的加速度是水平的，並指向轉軸，而轉軸位於桿所在的鉛垂平面上。P 的重量也在該平面上，所以桿對 P 施加的力，以及因此 **G**（根據牛頓第三定律（Newton's third law），兩者大小相等、方向相反），也位於該平面上。該平面上一個對 H 力矩為零的力，其作用線必通過 H。這條作用線也通過位於桿上的 P，所以 **G** 與桿平行，得證。

角度。因此，桿沿着桿的方向以力 T 推或拉 P；我們取 T 的方向為由 H 指向 P，即分量為 $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$。$P$ 與轉軸的距離為 $r - d\sin\alpha$，由於 $d\sin\alpha < r$，這個距離是正數，所以 P 與 H 位於轉軸的同一側，而它的加速度 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$ 指向 $+x$ 方向。對 P 應用牛頓第二定律（Newton's second law）：

$$\begin{aligned} &\text{鉛垂方向：} && T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{水平方向：} && T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

將第二式除以第一式（我們有 $\cos\alpha \neq 0$，否則 $T\cos\alpha = 0 \neq mg$）：

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

兩邊乘以 $a\cot\alpha$，得 $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$，即

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

得證。

鉸鏈力。第一式給出 $T = mg/\cos\alpha > 0$，所以桿把 P 推離鉸鏈：桿處於受壓（compression）狀態。根據牛頓第三定律，P 沿着桿的方向以力 T 把桿推向 H。桿是輕的，所以它所受的力總和為零，而鉸鏈對桿的力與此大小相等、方向相反：它**沿着桿的方向，由鉸鏈指向** P（向上，並向內指向轉軸），大小為

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

第 (ii) 部分

現在質量為 $m_i (i = 1, 2)$的質點位於 $(d_i \sin\beta,\, d_i\cos\beta)$，與轉軸的距離為 $r - d_i\sin\beta > 0$。

> **想一想** 現在每個質點都以某個未知的方向拉桿。我們怎樣才能避免逐一求出這些力？

我們不需要逐一求出它們：對每個質點應用牛頓第二定律，可得桿對它施加的力，然後對輕桿關於 H 列出力矩方程，便能消去未知的鉸鏈力。設 $\mathbf{F}_i$ 為桿對質點 i 施加的力。質點 i 的加速度為 $+x$ 方向的 $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$，所以

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_ig) = \big(m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\, 0\big) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}_i = \big(m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\, m_ig\big).$$

根據牛頓第三定律，質點 i 在點 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\, d_i\cos\beta)$ 對桿施加 $-\mathbf{F}_i$。作用於 (x, y) 的力 (X, Y) 關於 H 的逆時針力矩為 $xY - yX$，所以 $-\mathbf{F}_i$ 的力矩為

$$-d_i\sin\beta\cdot m_ig + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

鉸鏈力對 H 沒有力矩，而桿是輕的，所以這兩個力矩之和為零。除以 $\omega^2\sin\beta$（它不等於零：若 $\beta = 0$，力矩方程會變成 $\sum m_id_i\omega^2 r = 0$，這是錯的），並利用 $g/\omega^2 = a$：

$$\sum_{i=1}^{2} m_id_i\big(-a + r\cot\beta - d_i\cos\beta\big) = 0,$$

即

$$(m_1d_1 + m_2d_2)\, r\cot\beta = (m_1d_1 + m_2d_2)\, a + (m_1d_1^2 + m_2d_2^2)\cos\beta.$$

除以 $m_1d_1 + m_2d_2 > 0$，

$$r\cot\beta = a + b\cos\beta, \qquad b = \frac{m_1d_1^2 + m_2d_2^2}{m_1d_1 + m_2d_2}.$$

驗算

- 只有一個質點時（例如 $m_2 = 0$），得 $b = d_1$，與第 (i) 部分一致。若 $d_1 = d_2 = d$，則同樣有 $b = d$：位於同一點的兩個質點，作用就如一個質點。

- b 是 d_1 與 d_2 的加權平均（權為 $m_i d_i$），所以它介乎兩者之間，理應如此。
- 當 $\omega \to 0$ 時，$a \to \infty$，所以 $\cot\alpha \to \infty$，桿趨向鉛垂，這正是圓盤幾乎不轉動時我們所預期的。當 $\omega \to \infty$ 且 $d > r$ 時，$a \to 0$，方程趨向 $r = d\sin\alpha$：質點趨近轉軸，在那裏它幾乎不需要向心力。
- 取 $r = 1\,\text{m}$、$\omega = 5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$、$d = 0.6\,\text{m}$ 及 $g = 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$，得 $a = 0.3924\,\text{m}$，而方程給出 $\alpha \approx 0.9251$（約 53.0°）；於是 $r\cot\alpha \approx 0.7538 \approx a + d\cos\alpha$。以電腦模擬桿的運動，令它在這個角度由靜止開始，它會一直停留在該處。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分假設每個質點對桿的力都沿着桿的方向。這只是單一質點時的特殊情況；有兩個質點時，只有關於 H 的總力矩為零。
- 把質點圓周的半徑誤用為 r（或 $d\sin\alpha$），而不是 $r - d\sin\alpha$。
- 把鉸鏈力說成指向鉸鏈：桿處於受壓狀態，所以鉸鏈把桿推向 P。

STEP 之外

第 (ii) 部分的力矩方程，正是有效勢能（effective potential）$\sum m_i\left(gd_i\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2(r - d_i\sin\theta)^2\right)$ 取駐值的條件：在旋轉參考系中，離心力的表現就像一個額外的勢能。這是分析離心調速器（centrifugal governor）等旋轉系統，以及探討穩態是否穩定（stable）的起點。在這裏，有效勢能在 $\theta = \alpha$ 處取極大值，所以第 (i) 部分的穩態其實是不穩定的：只要輕輕推一下桿，它便會擺離該位置。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）涵蓋了剛體力矩和旋轉參考系。

詳細解答

STEP III 2015，第 12 題

概率與統計 • 概率生成函數

STEP III 2015，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q12

關鍵思路

除以 m 的餘數（remainder）只取決於指數模 m 的值，所以在餘數的生成函數（generating function）中，凡是出現 x^m 的地方都可以換成 1。把獨立（independent）的投擲結果相加，相當於把生成函數相乘，之後再把 x 的冪次約簡一次。有了這條規則，整個計算就變成簡單的多項式代數，其中 $x \cdot y$ 和 y^2 都會化為 y 的倍數。

解答

全文中，設 $X_1, X_2, \ldots$ 為各次投擲的結果，它們互相獨立，且各自在 $\{1, \ldots, 6\}$ 上服從均勻分佈（uniform）。

約簡規則。 設 m 為正整數。若 U 與 V 互相獨立，且取值於 $\{0, 1, \ldots, m-1\}$，則 $U+V$ 的概率生成函數（probability generating function, pgf）是 $G_U(x)G_V(x)$，這是一個多項式，其中 x^k 項的係數就是 $U+V=k$ 的概率。$U+V$ 除以 m 的餘數等於 j，當且僅當 $U+V$ 等於 j 或 $j+m$。因此，只要對 $k \geq m$ 把每個 x^k 換成 x^{k-m}，換言之令 $x^m = 1$，便得到該餘數的 pgf。由於 S_n 的餘數就是（S_{n-1} 的餘數）+（X_n 的餘數）的餘數，而這兩者互相獨立，所以每個餘數的 pgf 都可由前一個相乘再令 $x^m = 1$ 得到。我們以 $\equiv$ 表示「在使用 $x^m = 1$ 後相等」。

第 (i) 部分

擲出 $1,\ldots,5$ 的餘數分別是 $1,\ldots,5$，而擲出 6 的餘數是 0。每種情況的概率都是 $\frac{1}{6}$，所以

$$\mathrm{G}(x)=\tfrac{1}{6}\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)=\tfrac{1}{6}z,\qquad \text{其中}z=1+x+\cdots+x^5.$$

在 $x^6=1$ 之下，把 z 乘以 x 只是把每一項往前轉一格：$xz=x+x^2+\cdots+x^5+x^6\equiv z$。因此對每個 k 都有 $x^kz\equiv z$，而且

$$z^2=\sum_{k=0}^{5}x^kz\equiv 6z.$$

所以 R_2 的 pgf 是

$$\tfrac{1}{36}z^2\equiv\tfrac{1}{36}\cdot 6z=\tfrac{1}{6}z=\mathrm{G}(x),$$

正如所求。

同樣的步驟在每一步都適用：若 R_{n-1} 的 pgf 是 $\mathrm{G}(x)$，則 R_n 的 pgf 是 $\mathrm{G}(x)^2\equiv\mathrm{G}(x)$。由歸納法（induction），每個 R_n 的 pgf 都是 $\mathrm{G}(x)=\frac{1}{6}z\circ 6\mid S_n$ 的概率就是 $\mathrm{P}(R_n=0)$，即 $\mathrm{G}(x)$ 的常數項（constant term）：

$$\mathrm{P}(S_n\text{ 可被整除，除數為}6)=\tfrac{1}{6}.$$

第 (ii) 部分

現在 $m=5$。擲出 $1,2,3,4$ 的餘數是 $1,2,3,4$；擲出 5 的餘數是 0；擲出 6 的餘數是 1。所以餘數為 1 的概率是 $\frac{2}{6}$，其餘各為 $\frac{1}{6}$：

$$\mathrm{G}_1(x)=\tfrac{1}{6}\left(1+2x+x^2+x^3+x^4\right)=\tfrac{1}{6}(x+y),\qquad y=1+x+x^2+x^3+x^4.$$

與第 (i) 部分完全一樣，在 $x^5=1$ 之下有 $xy\equiv y$，所以對所有 k 都有 $x^ky\equiv y$，而且

$$y^2=\sum_{k=0}^{4}x^ky\equiv 5y.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_2(x)&\equiv\tfrac{1}{36}(x+y)^2=\tfrac{1}{36}\left(x^2+2xy+y^2\right)\\&\equiv\tfrac{1}{36}\left(x^2+2y+5y\right)=\tfrac{1}{36}\left(x^2+7y\right),\end{aligned}$$

這就是所求的結果。（作為合理性檢查，代入 $x=1$ 得 $\frac{1}{36}(1+35)=1$。）

一般的 pgf。 由約簡規則，$G_n(x) \equiv G_1(x)^n = \frac{1}{6^n}(x+y)^n$。用二項式定理（binomial theorem）展開：

$$(x+y)^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

對 $k \geq 1$，利用 $y^k \equiv 5^{k-1} y$（由 $y^2 \equiv 5y$ 用歸納法得出），再利用 $x^{n-k} y \equiv y$，得

$$x^{n-k} y^k \equiv 5^{k-1} y.$$

所以

$$(x+y)^n \equiv x^n + y \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 5^{k-1} = x^n + \frac{y}{5}\left[(1+5)^n - 1\right] = x^n + \frac{6^n - 1}{5} y.$$

想一想 $(6^n - 1)/5$ 是從哪裏來的？

由二項式定理，和 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$ 等於 $(1+5)^n = 6^n$；我們少了 $k = 0$ 那一項（其值為 1），又多了一個因子 $\frac{1}{5}$。因此

$$G_n(x) = \frac{1}{6^n}\left(x^r + \frac{6^n - 1}{5} y\right),$$

其中 r 是 n 除以 5 的餘數（因為 $x^n \equiv x^r$）。所以每個餘數的概率都是 $\dfrac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n}$，唯獨餘數 r 額外多了 $\frac{1}{6^n}$。

被 5 整除。 我們需要 $P(T_n = 0)$，即 $G_n(x)$ 的常數項。y 的常數項是 1。

- 若 $5 \nmid n$，則 $r \neq 0$，x^r 對常數項沒有貢獻，所以

$$P(S_n \text{ 可被整除，除數為5}) = \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right),$$

  正如所求。

- 若 $5 \mid n$，則 $r = 0$，$x^r = 1$ 會加上 $\frac{1}{6^n}$：

$$P(S_n \text{ 可被整除，除數為5}) = \frac{6^n - 1}{5 \cdot 6^n} + \frac{1}{6^n} = \frac{6^n + 4}{5 \cdot 6^n} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{6^n}\right).$$

驗算

- $n = 1$：公式給出 $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$，而事實上只有擲出 5 才能被 5 整除。
- $n = 2$：公式給出 $\frac{1}{5} \cdot \frac{35}{36} = \frac{7}{36}$。直接計算，和為 5（四種方法）及 10（三種方法）共得 $\frac{7}{36}$，與 $\frac{1}{36}(x^2 + 7y)$ 的常數項吻合。

- $n = 5$：答案是 $\frac{6^5+4}{5\cdot 6^5} = \frac{389}{1944} \approx 0.2001$，略高於 $\frac{1}{5}$。用電腦對 $n \le 8$ 窮舉全部 6^n 種結果，證實了整個 pgf $G_n(x)$ 以及兩種情況。
- 當 $n \to \infty$ 時，兩個答案都趨向 $\frac{1}{5}$：餘數變成均勻分佈。

常見錯誤

- 忘記擲出 6 除以 5 的餘數是 1，因此 G_1 中 x 的係數是 $\frac{2}{6}$。
- 對所有 n 都把 x^n 約簡為 x^0：其實 x^n 約簡為 x^r，其中 r 是 n 的餘數，這正是 $5 \mid n$ 的情況與別不同的原因。
- 用「=」寫出 $G_n(x) = G_1(x)^n$，然後沒有按 $x^5 = 1$ 約簡就直接讀取係數。

STEP 之外

令 $x^m = 1$ 相當於在模 $x^m - 1$ 的多項式環（ring）中運算，即 m 階循環羣（cyclic group）的羣代數（group algebra）。一個等價的工具是單位根濾波（roots-of-unity filter）：$P(m \mid S_n) = \frac{1}{m}\sum_{\omega^m=1} G_S(\omega)$，這正是離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）在發揮作用。這個觀點亦解釋了為何循環上隨機步的總和會趨於均勻分佈，而這正是馬爾可夫鏈（Markov chains）與羣上隨機漫步（random walks）理論的起點。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）以合適的程度介紹了生成函數與隨機漫步。

詳細解答

STEP III 2015，第 13 題

概率與統計 • 均勻分佈變量的函數

STEP III 2015，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q13

關鍵思路

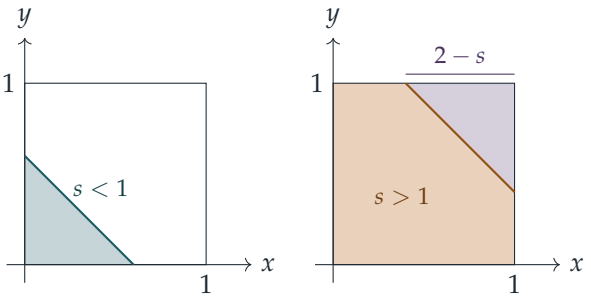
由於 X 與 Y 互相獨立（independent），且都在 $[0,1]$ 上均勻分佈（uniform distribution），數對 (X,Y) 便在單位正方形上均勻分佈，因此關於 X 和 Y 的每一個概率，其實就是一個面積。像 $X+Y \leq s$ 或 $Y \leq rX$ 這類事件，都是用一條直線把正方形切開，而直線一側的面積不是一個三角形，就是正方形減去一個三角形。之後，只要把 $1/(X+Y)$ 和 $X/(X+Y)$ 的事件改寫成我們已經量度過的事件，就能得出它們的分佈。

解答

全文中，(X,Y) 在面積為 1 的單位正方形 $[0,1]^2$ 上均勻分佈，所以對正方形內任何區域 A，$\mathrm{P}\big((X,Y) \in A\big)$ 都等於 A 的面積。

第 (i) 部分

設 $S = X+Y$，其取值範圍為 $[0,2]$，並設 $F(s) = \mathrm{P}(S \leq s)$。事件 $S \leq s$ 就是正方形中位於直線 $x+y=s$ 上或其下方的部分。



若 $0 \le s \le 1$，該直線與兩軸相交於 $(s,0)$ 和 $(0,s)$，其下方的區域是一個兩直角邊長均為 s 的等腰直角三角形。若 $1 \le s \le 2$，則直線上方的區域是位於角落 $(1,1)$ 的三角形；它的兩條直角邊由直線延伸至該角，長度為 $1-(s-1) = 2-s$。因此

$$F(s) = \mathrm{P}(X+Y \le s) = \begin{cases} 0 & s < 0, \\ \frac{1}{2}s^2 & 0 \le s \le 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-s)^2 & 1 \le s \le 2, \\ 1 & s > 2. \end{cases}$$

中間兩條公式在 $s = 1$ 時一致（都等於 $\frac{1}{2}$），這是理所當然的。

第 (ii) 部分

設 $T = 1/S$。由於 $0 < S \le 2$（$S = 0$ 的概率為零），T 的取值範圍為 $[\frac{1}{2}, \infty)$。對 $t > 0$，因為 $s \mapsto 1/s$ 在 $s > 0$ 上是遞減的，

$$\mathrm{P}(T \le t) = \mathrm{P}\big(S \ge \tfrac{1}{t}\big) = 1 - F\big(\tfrac{1}{t}\big),$$

這裏用到 S 是連續隨機變量（continuous random variable），所以 $\mathrm{P}(S = 1/t) = 0$。

? **想一想** 應該用 F 的哪一條公式？這取決於 $1/t$ 落在哪裏，而不是 t 落在哪裏。

若 $t \ge 1$，則 $0 < 1/t \le 1$，所以用第一個分支：$\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \frac{1}{2}t^{-2}$。若 $\frac{1}{2} \le t \le 1$，則 $1 \le 1/t \le 2$，所以用第二個分支：$\mathrm{P}(T \le t) = \frac{1}{2}\big(2 - t^{-1}\big)^2$。而當 $t < \frac{1}{2}$ 時，$\mathrm{P}(T \le t) = 0$。

求導便得到概率密度函數（probability density function）。當 $t \ge 1$，

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(1 - \tfrac{1}{2}t^{-2}\Big) = t^{-3},$$

而當 $\frac{1}{2} \le t \le 1$，由鏈式法則（chain rule），

$$f(t) = \big(2 - t^{-1}\big) \cdot t^{-2} = 2t^{-2} - t^{-3},$$

其他情況下 $f(t) = 0$。這就是所求的概率密度函數。

至於期望值（expectation），

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(\frac{1}{X+Y}\Big) = \int_{1/2}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{1/2}^{1} \big(2t^{-1} - t^{-2}\big)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[2\ln t + t^{-1}\Big]_{1/2}^{1} + \Big[-t^{-1}\Big]_{1}^{\infty} \\ &= (0+1) - (-2\ln 2 + 2) + 1 \\ &= 2\ln 2. \end{aligned}$$

這個反常積分（improper integral）收斂，因為 t^{-2} 在 $[1,\infty)$ 上可積。

第 (iii) 部分

設 $R = Y/X$，其取值範圍為 $[0,\infty)$（事件 $X = 0$ 的概率為零）。對 $r \geq 0$，事件 $R \leq r$ 即 $Y \leq rX$：正方形中位於通過原點的直線 $y = rx$ 上或其下方的部分。

若 $0 \leq r \leq 1$，這條直線從正方形右邊的 $(1, r)$ 離開，其下方的區域是一個底為 1、高為 r 的三角形，面積為 $\frac{1}{2}r$。若 $r \geq 1$，直線從頂邊的 $(1/r, 1)$ 離開，其上方的區域是一個沿頂邊的底為 $1/r$、高為 1 的三角形，面積為 $\frac{1}{2r}$。所以

$$H(r) = \mathrm{P}\Big(\frac{Y}{X} \leq r\Big) = \begin{cases} 0 & r < 0, \\ \frac{1}{2}r & 0 \leq r \leq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2r} & r \geq 1. \end{cases}$$

現設 $Z = \dfrac{X}{X+Y} = \dfrac{1}{1+R}$，其取值範圍為 $[0,1]$。對 $0 < z \leq 1$，由於 $r \mapsto 1/(1+r)$ 在 $r \geq 0$ 上是遞減的，

$$\mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}\Big(1 + R \geq \frac{1}{z}\Big) = \mathrm{P}\Big(R \geq \frac{1-z}{z}\Big) = 1 - H\Big(\frac{1-z}{z}\Big).$$

同樣，用哪個分支取決於 $(1-z)/z$ 落在哪裏：它不大於 1 當且僅當 $z \geq \frac{1}{2}$。

- 當 $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$：$\mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \dfrac{1-z}{2z} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2z}$。
- 當 $0 < z \leq \frac{1}{2}$：$\mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \Big(1 - \dfrac{z}{2(1-z)}\Big) = \dfrac{z}{2(1-z)}$。

兩者在 $z = \frac{1}{2}$ 時都等於 $\frac{1}{2}$。求導（第二條可先寫成 $\frac{z}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{1-z} - 1\big)$），得 Z 的概率密度函數為

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-z)^2} & 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2z^2} & \frac{1}{2} \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{其他情況}. \end{cases}$$

留意 $g(1-z) = g(z)$：這個概率密度函數關於 $\frac{1}{2}$ 對稱。

期望值。 我們無須積分便可直接寫出答案。由於 X 與 Y 互相獨立且分佈相同，數對 (X, Y) 與 (Y, X) 有相同的分佈。所以 $\dfrac{X}{X+Y}$ 與 $\dfrac{Y}{X+Y}$ 的期望值相同。兩者之和恰好是 1，所以

$$\mathrm{E}\Big(\frac{X}{X+Y}\Big) = \tfrac{1}{2}.$$

以積分驗證。

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2z}\,\mathrm{d}z.$$

第二個積分等於 $\frac{1}{2}\big[\ln z\big]_{1/2}^1 = \frac{1}{2}\ln 2$。第一個積分中，代入 $u = 1-z$，於是 $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}u$，而 $z = 0, \frac{1}{2}$ 分別對應 $u = 1, \frac{1}{2}$：

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{1-u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{u} - \ln u\Big]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{2}\big(-1-(-2+\ln 2)\big) = \frac{1}{2}(1-\ln 2).\end{aligned}$$

相加得 $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}(1-\ln 2) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}$，證實了上面的值。

驗算

- 每個分佈函數（distribution function）都由 0 上升至 1，並在各分支相接處連續：$F(1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(T \le 1) = \frac{1}{2}$、$H(1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(Z \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$。由於正方形關於對角線對稱，這些值都是 $\frac{1}{2}$。
- 概率密度函數 f 的積分等於 1：$\int_{1/2}^1 (2t^{-2} - t^{-3})\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$，而 $\int_1^\infty t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$。
- $2\ln 2 \approx 1.386$ 介乎 1 與 2 之間，合乎預期；而且它大於 $1/\mathrm{E}(X+Y) = 1$，正如對凸函數（convex function）$1/s$ 應用琴生不等式（Jensen's inequality）所預測的。直接以數值計算 $\iint (x+y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 在正方形上的值，得 1.3863。各分佈函數以及 $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}$ 亦已用電腦模擬證實。

常見錯誤

- 按 t 或 z 而不是按 $1/t$ 或 $(1-z)/z$ 來選擇 F 或 H 的分支，結果把兩條公式對調了。
- 忘記 $1/s$ 和 $1/(1+r)$ 是遞減的，因而沒有把不等號反轉：$T \le t$ 的意思是 $S \ge 1/t$。
- 把第 (i) 部分角落三角形的直角邊弄錯：它是 $2-s$，不是 $s-1$。

STEP 之外

把關於 (X, Y) 的陳述化為面積，再對分佈函數求導，這是求隨機變量函數之分佈的一般方法，稱為*分佈函數法*（distribution function method）。到了大學，還會學到聯合概率密度函數的變量代換公式（雅可比行列式，Jacobian），它可以同時處理 $X+Y$ 與 $X/(X+Y)$；特別地，這裏 $X+Y$ 的概率密度函數正是兩個均勻分佈概率密度函數的*卷積*（convolution）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵

蓋了這兩種方法，而 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）則有許多同類型的例子。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2015 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。