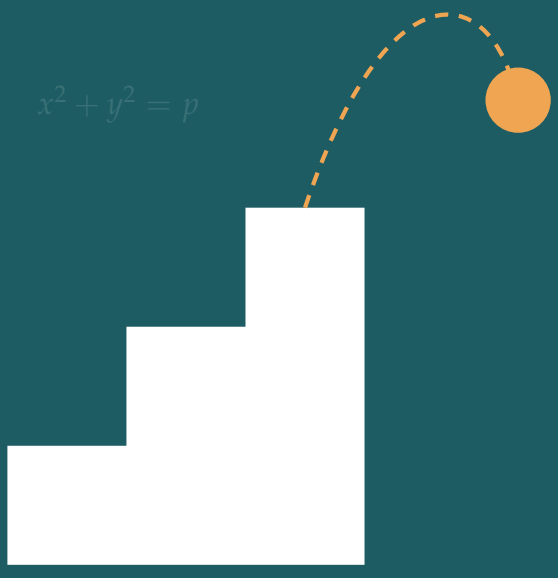
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2014 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2014 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2014 年詳細解答

2014 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 平方差 純數學 . . . 3

第 2 題 對數函數的積分 純數學 . . . 7

第 3 題 多項式方程與不等式 純數學 . . . 11

第 4 題 相關變率 純數學 . . . 15

第 5 題 三次不等式 純數學 . . . 19

第 6 題 羅輯斯諦映射的遞推關係 純數學 . . . 23

第 7 題 三角形中的向量 純數學 . . . 27

第 8 題 直線族的包絡線 純數學 . . . 31

第 9 題 受水平力作用的拋體 力學 . . . 34

第 10 題 碰撞與恢復係數 力學 . . . 38

第 11 題 連接滑輪系統 力學 . . . 41

第 12 題 離散隨機變量 概率與統計 . . . 45

第 13 題 角分佈 概率與統計 . . . 49

STEP II

第 1 題 三角形幾何與二次方程 純數學 . . . 53

第 2 題 積分不等式 純數學 . . . 58

第 3 題 切線與包絡線 純數學 . . . 62

第 4 題 代換積分法 純數學 . . . 66

第 5 題 齊次微分方程 純數學 . . . 69

第 6 題 三角級數 純數學 . . . 73

第 7 題 絕對值函數的圖像 純數學 . . . 77

第 8 題 最大二項式係數 純數學 . . . 82

第 9 題 剛體平衡 力學 . . . 86

第 10 軌道的包絡線 力學 90
第 11 圓周運動 力學 94
第 12 風險函數 概率與統計 99
第 13 離散隨機變量 概率與統計 103

STEP III

第 1 對數級數展開 純數學 107
第 2 雙曲函數積分法 純數學 111
第 3 到拋物線的距離 純數學 115
第 4 積分不等式 純數學 119
第 5 幾何中的複數 純數學 123
第 6 以凸性證明不等式 純數學 127
第 7 向量與圓內接四邊形 純數學 131
第 8 級數的收斂 純數學 135
第 9 有阻力的拋體 力學 139
第 10 耦合振動 力學 143
第 11 圓周運動 力學 147
第 12 對數正態分佈 概率與統計 151
第 13 概率生成函數 概率與統計 155

詳細解答

STEP I 2014，第 1 題

純數學 • 平方差

> **STEP I 2014，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q1

關鍵思路

一切都建基於一個因式分解（factorisation）：$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$。把 n 寫成兩個平方數之差（difference of two squares），等同於把它寫成 $n = de$，其中 $d = a - b$、$e = a + b$；由於 d 與 e 相差偶數 $2b$，兩者的奇偶性（parity）必須相同。看清這一點之後，每一部分都會變成關於奇偶性相同的因數對（factor pair）的問題。

解答

全文中，a 與 b 均為非負整數。若 $n = a^2 - b^2$ 且 $n \geq 1$，則 $a > b$，因此我們總可以把一種寫法記作 (a, b)，其中 $a > b \geq 0$。

第 (i) 部分

$$3 = 2^2 - 1^2, \quad 5 = 3^2 - 2^2, \quad 8 = 3^2 - 1^2, \quad 12 = 4^2 - 2^2, \quad 16 = 5^2 - 3^2.$$

（對於 16，顯而易見的 $4^2 - 0^2$ 並不符合要求，因為平方數必須非零。）

第 (ii) 部分

相鄰平方數之差是奇數：$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$。因此任何奇數 $2m + 1$（其中 $m \geq 0$）都可寫成

$$2m + 1 = (m+1)^2 - m^2.$$

第 (iii) 部分

相隔二的平方數之差是 4 的倍數：$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$。當 $k\geq 1$ 時，$k+1$ 與 $k-1$ 均為非負，所以

$$4k=(k+1)^2-(k-1)^2.$$

當 $k=0$ 時，直接有 $0=0^2-0^2$（或 1^2-1^2）。

第 (iv) 部分

每個平方數除以 4 的餘數都是 0 或 1：$(2m)^2=4m^2$ 及 $(2m+1)^2=4(m^2+m)+1$。因此 a^2-b^2 的餘數為

$$0-0=0,\quad 1-1=0,\quad 1-0=1\quad 或\quad 0-1\equiv 3\pmod 4,$$

而永遠不會是 2。因此沒有任何形如 $4k+2$ 的數是兩個平方數之差。

（等價地說：若 $(a-b)(a+b)=4k+2$，則 $a-b$ 與 $a+b$ 的奇偶性相同。兩者皆奇，乘積便是奇數；兩者皆偶，乘積便可被 4 整除。兩種情況都不會得到 $4k+2$。）

第 (v) 部分

設 $pq=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$，其中 $a>b\geq 0$。令 $d=a-b$、$e=a+b$。那麼 d 與 e 是正整數，且 $d\leq e$、$de=pq$。反之，任何滿足 $d\leq e$ 且 d、e 奇偶性相同的分解 $pq=de$，都恰好給出一種寫法，即

$$a=\frac{e+d}{2},\qquad b=\frac{e-d}{2},$$

而它們都是非負整數。所以 pq 的各種寫法與這類因數對 (d,e) 一一對應（one-to-one correspondence）。

想一想 為甚麼這裏的 d 與 e 總是奇偶性相同？又為甚麼只有兩對？

由於 p 與 q 是奇質數（odd prime），pq 是奇數，所以 pq 的每個因數（divisor）都是奇數，奇偶條件自動成立。取 $p\leq q$。根據唯一分解定理（unique factorisation），滿足 $d\leq e$ 的因數對只有

$$(d,e)=(1,pq)\qquad 及\qquad (d,e)=(p,q).$$

（當 $p=q$ 時這仍然成立：p^2 的因數是 1、p 及 p^2。）由此得到

$$pq=\left(\frac{pq+1}{2}\right)^2-\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2\qquad 及\qquad pq=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2-\left(\frac{q-p}{2}\right)^2.$$

這兩種寫法是不同的，因為它們的 $d = a - b$ 值分別是 1 和 p，而 $p \geq 3$。所以 pq 恰好有兩種方法寫成兩個平方數之差。例如 $15 = 8^2 - 7^2 = 4^2 - 1^2$。當 $p = q$ 時，第二種寫法是 $p^2 - 0^2$，這在此處是容許的，因為只有第 (i) 部分要求平方數非零。

當 $q = 2$ 時，結果不成立。此時 $pq = 2p$，其中 p 是奇數，設 $p = 2m + 1$，則 $2p = 4m + 2$。根據第 (iv) 部分，$2p$ 根本無法以任何方式寫成兩個平方數之差。（因數對 $(1, 2p)$ 與 $(2, p)$ 都是一奇一偶。）

第 (vi) 部分

與第 (v) 部分一樣，675 的各種寫法對應於滿足 $d \leq e$ 且 d、e 奇偶性相同的因數對 $675 = de$。由於 675 是奇數，它的所有因數都是奇數，所以每個因數對都算數。

現在 $675 = 27 \times 25 = 3^3 \times 5^2$，它有 $(3+1)(2+1) = 12$ 個因數。這些因數按 $d \leftrightarrow 675/d$ 兩兩配對，而且沒有因數與自己配對，因為 675 不是完全平方數（perfect square）（$26^2 = 676$）。所以共有 $12/2 = 6$ 對：

(d, e)	$(1, 675)$	$(3, 225)$	$(5, 135)$	$(9, 75)$	$(15, 45)$	$(25, 27)$
(a, b)	$(338, 337)$	$(114, 111)$	$(70, 65)$	$(42, 33)$	$(30, 15)$	$(26, 1)$

所以 675 恰好有 **6** 種不同的方法寫成兩個平方數之差。

? **想一想** (a, b) 與 $(-a, b)$，或者 $a^2 - b^2$ 與 $-(b^2 - a^2)$，應否算作不同的寫法？

不應該。題目把一切限制於非負整數，而 $a^2 - b^2 = 675 > 0$ 迫使 $a > b$。所以每種寫法就是單一一對 (a, b)，其中 $a > b \geq 0$，而這正是我們所數的。

驗算

- 抽查表格：$26^2 - 1^2 = 676 - 1 = 675$ 及 $30^2 - 15^2 = 900 - 225 = 675$。
- 第 (ii)–(iv) 部分合起來說明：$n \geq 1$ 是兩個平方數之差，當且僅當 $n \not\equiv 2 \pmod 4$。用電腦逐一檢查不超過 2000 的每個 n，結果吻合；另外亦驗證了對所有奇質數 $p \leq q < 200$，pq 恰好有兩種表示法，而 $2p$ 則一種也沒有。
- 對所有 b 進行搜尋，找到 675 恰好有六種表示法，正是表中那六種。

常見錯誤

- 忘記奇偶條件：例如對 $2p$ 把 $(2, p)$ 這類因數對也算進去，這會給出非整數 $a = \frac{p+2}{2}$。
- 在第 (v) 部分漏掉 $p = q$ 的情況，或在那裏排除 $p^2 - 0^2$。除第 (i) 部分外，零是容許的。

► 在第 (vi) 部分數了因數的個數（12），而不是因數對的數目（6）。

STEP 之外

這裏的規律——表示法的數目由 n 的因數決定——是初等數論（elementary number theory）中的典型現象。一個著名的近親是費馬（Fermat）的二平方和定理：奇質數可寫成 $x^2 + y^2$，當且僅當它是 1 mod 4；這個命題可以利用高斯整數（Gaussian integers）$a + bi$ 簡潔地證明。想了解更多，可閱讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

詳細解答

STEP I 2014，第 2 題

純數學 • 對數函數的積分

STEP I 2014，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q2

關鍵思路

一切都建基於因式分解（factorising）$x^2-4=(x-2)(x+2)$，這樣二次式的對數（logarithm）便可拆成 $\ln(2-x)+\ln(2+x)$，而這兩部分都可以用第 (i) 部分（及其鏡像）的結果即時積分。至於絕對值（modulus）符號，只是要求我們留意 $\ln|x^2-4|$ 在哪裏為正、在哪裏為負，而第 (ii) 部分的草圖正好顯示了這一點。

解答

第 (i) 部分

當 $x<2$ 時，$2-x>0$，因此所有式子都有定義。我們對右方求導，並對 $-(2-x)\ln(2-x)$ 使用乘積法則（product rule）。$-(2-x)$ 的導數（derivative）是 1，而根據鏈式法則（chain rule），$\ln(2-x)$ 的導數是 $-\frac{1}{2-x}$。所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-(2-x)\ln(2-x)+(2-x)\Big] &= 1\cdot\ln(2-x)-(2-x)\cdot\left(-\frac{1}{2-x}\right)-1\\ &= \ln(2-x)+1-1=\ln(2-x),\end{aligned}$$

可見題中所給的原函數（antiderivative）正確。

（另一做法是代換（substitution）$u=2-x$，並利用 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u-u$。）

同理，當 $x>-2$ 時，

$$\int \ln(2+x)\,\mathrm{d}x=(2+x)\ln(2+x)-(2+x)+c,$$

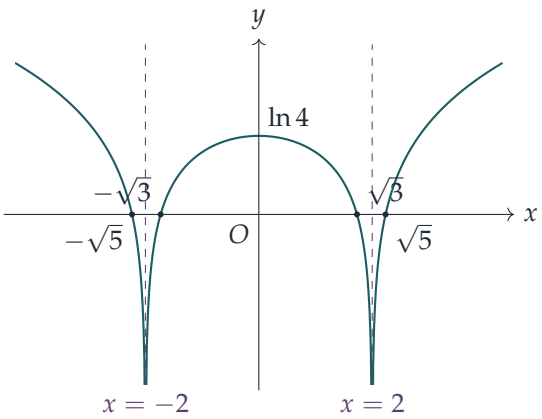
這個結果稍後亦會用到。

第 (ii) 部分

設 $f(x) = \ln|x^2 - 4|$，其定義域為 $x \neq \pm 2$。由於 $f(-x) = f(x)$，曲線關於 y 軸對稱（symmetric）。

- 當 $|x| < 2$ 時：$f(x) = \ln(4 - x^2)$，在 $x = 0$ 取得最大值，此時 $y = \ln 4$。當 $4 - x^2 = 1$，即 $x = \pm\sqrt{3}$ 時，函數值為零；當 $x \to \pm 2$ 時，函數趨向 $-\infty$。
- 當 $|x| > 2$ 時：$f(x) = \ln(x^2 - 4)$，在 $x = \pm 2$ 附近由 $-\infty$ 上升，在 $x^2 - 4 = 1$，即 $x = \pm\sqrt{5}$ 處與軸相交，之後緩慢增長，增長方式類似 $2\ln|x|$。

直線 $x = \pm 2$ 是鉛垂漸近線（vertical asymptote）。



第 (iii) 部分

由正 x 軸、y 軸及 A 所圍成的有限區域，就是 $x = 0$ 與 $x = \sqrt{3}$ 之間的拱形部分，在此範圍內 $y = \ln(4 - x^2) \geq 0$。其面積為

$$\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 + x)\,\mathrm{d}x,$$

這裏用了 $\ln(4 - x^2) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$；由於兩個因式在此範圍內皆為正，等式成立。根據第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2 - x)\,\mathrm{d}x &= \Big[-(2 - x)\ln(2 - x) + (2 - x)\Big]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) + 2\ln 2 - 2 \\ &= -(2 - \sqrt{3})\ln(2 - \sqrt{3}) - \sqrt{3} + 2\ln 2,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[(2+x)\ln(2+x)-(2+x)\Big]_0^{\sqrt{3}}\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})-2\ln 2+2\\ &= (2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-2\ln 2.\end{aligned}$$

想一想 怎樣把 $\ln(2-\sqrt{3})$ 與 $\ln(2+\sqrt{3})$ 合併？

由於 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=4-3=1$，所以 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$。把兩個積分相加，$\ln 2$ 項互相抵消，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x &= (2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}\\ &= 4\ln(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3},\end{aligned}$$

正如所求。

第 (iv) 部分

在 $|x|<2$ 的範圍內，B 就是 A 在兩條漸近線之間的部分，並把位於軸下方的部分向上反射。由草圖可見，當 $|x|\le\sqrt{3}$ 時 $\ln(4-x^2)\ge 0$，而當 $\sqrt{3}<|x|<2$ 時 $\ln(4-x^2)<0$。利用對稱性，所求面積為

$$2\left[\int_0^{\sqrt{3}} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x-\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x\right].$$

第二個積分是反常積分，因為被積函數在 $x=2$ 處趨向 $-\infty$。我們先積分至 $x=2-\varepsilon$，再令 $\varepsilon\to 0^+$。在第 (i) 部分 $\ln(2-x)$ 的原函數中，代入 $x=2-\varepsilon$ 得

$$-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon\to 0,$$

這是根據題中所給「當 $t\to 0$ 時 $t\ln t\to 0$」這一事實。因此上限在該處的貢獻為 0，於是

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2-x)\,\mathrm{d}x &= 0-\Big[-(2-\sqrt{3})\ln(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\Big]\\ &= -(2-\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-2+\sqrt{3},\end{aligned}$$

這裏再次用了 $\ln(2-\sqrt{3})=-\ln(2+\sqrt{3})$。另一部分是普通積分：

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(2+x)\,\mathrm{d}x &= (4\ln 4-4)-\Big[(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\Big]\\ &= 8\ln 2-2+\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

相加，得

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3}),$$

其值約為 -0.259：是負數，與預期相符。因此面積為

$$\begin{aligned} &2\Big[\big(4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\big) - \big(8\ln 2 - 4 + 2\sqrt{3} - 4\ln(2+\sqrt{3})\big)\Big] \\ &\quad = 16\ln(2+\sqrt{3}) - 16\ln 2 + 8 - 8\sqrt{3} \\ &\quad = 16\ln\Big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Big) + 8 - 8\sqrt{3} \approx 4.125. \end{aligned}$$

驗算

- 把 $[0,\sqrt{3}]$ 與 $[\sqrt{3},2]$ 上的兩個積分相加，得 $\int_0^2 \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 4 \approx 1.545$。這個結果亦可直接由第 (i) 部分一行得出，因為在 $x = 0$ 處，兩個原函數分別給出 $-2\ln 2 + 2$ 和 $2\ln 2 - 2$，兩者互相抵消。
- 第 (iii) 部分的面積是 $4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3} \approx 1.804$。這比包圍該拱形的長方形面積 $\sqrt{3} \times \ln 4 \approx 2.40$ 小，理應如此。
- 對 $\big|\ln|x^2-4|\big|$ 在 $(-2,2)$ 上進行數值積分（numerical integration），得 4.1246，與 $16\ln\big(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\big) + 8 - 8\sqrt{3} = 4.12457\ldots$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記曲線在 $x = \sqrt{3}$ 與 $x = 2$ 之間的部分位於軸下方，因而把有向積分加上去，而不是減去。
- 沒有把 $\ln(2-\sqrt{3})$ 合併：正是恆等式 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$ 令答案變得簡潔。
- 不加說明便直接把 $x = 2$ 代入 $(2-x)\ln(2-x)$：該式在此處並無定義，真正支持取值為 0 的，是極限（limit）$t\ln t \to 0$。

STEP 之外

第 (iv) 部分的積分是一個*反常積分*（improper integral）：被積函數無界，但面積仍然有限，因為對數爆增得極慢，以致 $t\ln t \to 0$。到了大學，你會把這一點嚴謹化，準確判斷對於無界的 g，$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ 何時收斂（converges）（例如，$\int_0^1 t^{-p}\,\mathrm{d}t$ 收斂當且僅當 $p < 1$）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對 $t\ln t \to 0$ 這類極限以及積分的定義都有細緻的討論。

詳細解答

STEP I 2014，第 3 題

純數學 • 多項式方程與不等式

> **STEP I 2014，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q3

關鍵思路

兩個積分都是初等積分，所以條件不過是一條關於 a 和 b 的多項式方程。關鍵在於找出公因式 $b-a$（它不為零，所以可以約去），以及在第 (iii) 部分中，留意到剩下的式子具有足夠的對稱性，可以用和 $b+a$ 與差 $b-a$ 簡潔地表示。

解答

計算兩個積分後，條件為

$$\frac{b^3-a^3}{3}=\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2(b+a)^2}{4}. \qquad (*)$$

由於 $b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$ 且 $b-a>0$，我們可以把 $(*)$ 除以 $b-a$，得到

$$4(b^2+ab+a^2)=3(b-a)(b+a)^2. \qquad (**)$$

第 (i) 部分

當 $a=0$ 時，$(**)$ 變成 $4b^2=3b^3$。由於 $b>0$，可以除以 b^2，得到

$$b=\tfrac{4}{3}.$$

第 (ii) 部分

當 $a=1$ 時，$(**)$ 變成

$$4(b^2+b+1)=3(b-1)(b+1)^2=3(b^3+b^2-b-1),$$

即 $3b^3+3b^2-3b-3-4b^2-4b-4=0$，亦即

$$3b^3-b^2-7b-7=0,$$

得證。

現設 $f(x)=3x^3-x^2-7x-7$，則

$$f'(x)=9x^2-2x-7=(9x+7)(x-1).$$

駐點（stationary point）位於 $x=-\frac{7}{9}$（局部極大值（local maximum），因為這個三次函數的首項係數為正）及 $x=1$（局部極小值（local minimum）），且

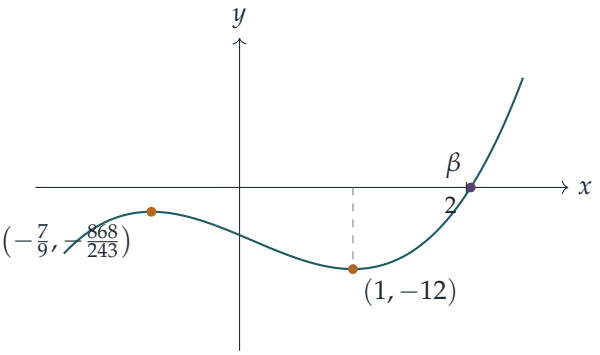
$$f(1)=3-1-7-7=-12,\qquad f\left(-\tfrac{7}{9}\right)=\frac{-343-147+1323-1701}{243}=-\frac{868}{243}.$$

想一想 知道局部極大值的數值，如何告訴我們有多少個根？

局部極大值是負數。當 $x\le 1$ 時，f 先遞增至 $x=-\frac{7}{9}$，然後遞減，所以在這範圍內 $f(x)\le f(-\frac{7}{9})<0$：沒有滿足 $x\le 1$ 的根。當 $x>1$ 時，f 嚴格遞增（f' 的兩個因式皆為正），且 $f(x)\to\infty$，所以它恰好穿過零一次。因此恰好有一個實根，而

$$f(2)=24-4-14-7=-1<0,\qquad f(3)=81-9-21-7=44>0,$$

所以由連續性（continuity）可知，這個根位於 2 與 3 之間。



草圖顯示曲線 $y=3x^3-x^2-7x-7$：兩個轉向點（turning point）都位於 x 軸下方，所以曲線只穿過 x 軸一次，位於 $\beta\approx 2.04$。

第 (iii) 部分

設 $p=b+a$ 及 $q=b-a$，則 $p^2=b^2+2ab+a^2$ 及 $q^2=b^2-2ab+a^2$，所以

$$3p^2+q^2=4b^2+4ab+4a^2=4(b^2+ab+a^2).$$

因此 $(**)$ 的左方是 $3p^2+q^2$，而右方是 $3qp^2$。所以

$$3p^2+q^2=3p^2q,$$

得證。移項得 $q^2=3p^2(q-1)$。由於 $q>0$，左方為正，所以 $q\neq 1$，且

$$p^2=\frac{q^2}{3(q-1)}.$$

至於推論部分：

- 下界（*lower bound*）。$q^2>0$ 且 $p^2>0$（因為 $p=b+a>0$），所以 $3(q-1)=q^2/p^2>0$，即 $q>1$。
- 上界（*upper bound*）。由於 $a\geq 0$，我們有 $p=q+2a\geq q>0$，所以 $p^2\geq q^2$。因此

$$\frac{q^2}{3(q-1)}\geq q^2 \iff 1\geq 3(q-1) \iff q\leq \tfrac{4}{3},$$

  其中我們除以 $q^2>0$ 並乘以 $3(q-1)>0$，兩者都不會改變不等號的方向。

因此 $1<b-a\leq \frac{4}{3}$，而等號成立若且唯若 $a=0$，這正是第 (i) 部分的情況。

驗算

- 第 (i) 部分與第 (iii) 部分吻合：$a=0$ 給出 $q=b=\frac{4}{3}$，正是範圍的上端。
- 第 (ii) 部分同樣吻合：根為 $b\approx 2.0390$，所以 $q=b-1\approx 1.039$，位於 $(1,\frac{4}{3}]$ 之內。在 $[1,2.0390]$ 上計算兩個積分，得到的數值相等（約為 2.4924），而且準確至多個小數位。
- 反過來，$(1,\frac{4}{3}]$ 中任何 q 都給出 $p=q/\sqrt{3(q-1)}\geq q$，從而得到合法的 $a=\frac{1}{2}(p-q)\geq 0$；所以這個界是最佳的（sharp）。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記約去 $b-a$，結果得到一條帶有多餘根 $b=1$ 的四次方程。
- 只證明 $f(2)<0<f(3)$：這只證明了在 $(2,3)$ 內有一個根，卻沒有證明它是唯一的實根。你還需要考慮轉向點。
- 在第 (iii) 部分，未確立 $q-1>0$ 便把不等式除以 $q-1$。

STEP 之外

積分形式的柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）給出 $\left(\int_a^b x\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$，等號只在被積函數 x 為常數時成立，而它並非常數。結合題目給定的條件，這表示 $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x < (b-a)\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x$，所以 $b-a > 1$：一行便得出第 (iii) 部分的下界。柯西－施瓦茨不等式有多種形式，是大學一年級分析學中最常用的工具之一；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）細緻地建立了黎曼積分（Riemann integral）以及類似這樣的不等式。

詳細解答

STEP I 2014，第 4 題

純數學 • 相關變率

> **STEP I 2014，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q4

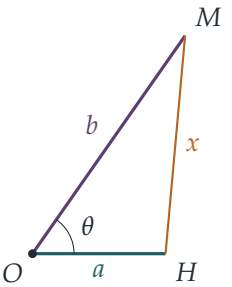
關鍵思路

兩支指針與連接兩針尖端的線段構成一個三角形，所以利用餘弦定律（cosine rule）便可以用 θ 表示 x。由於時鐘準確，θ 以恆定速率增加，因此 x 的增加率就是這個常數乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$。求這個量的最大值就變成一道普通的單變量微積分題目，而駐點（stationary point）方程原來是一條關於 $\cos\theta$ 的二次方程，而且可以整齊地因式分解。

解答

x 的增加率

設 O 為轉軸，H 為時針尖端，M 為分針尖端，於是 $OH = a$、$OM = b$、$\angle HOM = \theta$ 及 $HM = x$。



由餘弦定律，

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

注意 $x \geq b - a > 0$，所以我們可以放心除以 x。對時間 t 求導，

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2ab\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

時鐘準確，所以每支指針都以恆定的角速率（angular speed）轉動，而兩針之間的夾角以恆定速率 $\omega > 0$ 改變（即兩個角速率之差；當 $0 \leq \theta < \pi$ 時，分針正在拋離時針，所以 θ 在增加）。因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega\, ab\,\frac{\sin\theta}{x}.$$

所以我們要找出 $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{x}$ 在 $0 \leq \theta < \pi$ 上何處取得最大值，同時要記住 x 依賴於 θ，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{ab\sin\theta}{x}$。

求最大值

由商法則（quotient rule），

$$f'(\theta) = \frac{x\cos\theta - \sin\theta\cdot\dfrac{ab\sin\theta}{x}}{x^2} = \frac{x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta}{x^3}.$$

記 $c = \cos\theta$。利用 $x^2 = a^2 + b^2 - 2abc$ 及 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，分子為

$$\begin{aligned} x^2\cos\theta - ab\sin^2\theta &= (a^2+b^2)c - 2abc^2 - ab + abc^2 \\ &= -\big(abc^2 - (a^2+b^2)c + ab\big) \\ &= -(ac-b)(bc-a) \\ &= (b-ac)(bc-a). \end{aligned}$$

想一想 我們怎樣知道這個駐點是極大點，而且是唯一的駐點？

由於 $c \leq 1 < b/a$，我們有 $ac < b$，所以因子 $b - ac$ 恆為正數。此外 $x^3 > 0$。所以 $f'(\theta)$ 與 $bc - a$ 同號，即與 $\cos\theta - \dfrac{a}{b}$ 同號：

- 當 $\cos\theta > a/b$（θ 較小）時，$f'(\theta) > 0$，f 遞增；
- 當 $\cos\theta < a/b$（θ 較大）時，$f'(\theta) < 0$，f 遞減。

由於 $\cos\theta$ 在 $[0, \pi)$ 上遞減，且 $0 < a/b < 1$，在此範圍內恰好有一個 θ 使 $\cos\theta = a/b$，而 f 在此之前上升，在此之後下降。所以這給出 x 增加率的全局最大值。此時

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\frac{a}{b} = b^2 - a^2,$$

所以當 $x = (b^2 - a^2)^{1/2}$ 時，x 的增加率最大，得證。

從幾何角度看，$x^2 + a^2 = b^2$ 表示三角形在 H 處是直角：當連接兩針尖端的線段與時針垂直時，增加率最大。

$b = 2a$ 的情況

此時 $\cos\theta = a/b = \frac{1}{2}$，所以最大增加率出現在 $\theta = \pi/3$ 時。

以正午後的分鐘數量度 t。分針在 60 分鐘內轉過 2π，時針則在 720 分鐘內轉過 2π，兩者都從豎直位置起順時針轉動。所以兩針之間的夾角為

$$\theta = 2\pi\left(\frac{1}{60} - \frac{1}{720}\right)t = 2\pi\cdot\frac{11}{720}\,t = \frac{11\pi}{360}\,t,$$

此式在其值小於 π 時成立。由正午時 $\theta = 0$ 開始，θ 首次到達 $\pi/3$ 的時刻滿足

$$\frac{11\pi}{360}\,t = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{120}{11} = 10\tfrac{10}{11}\text{ 分鐘.}$$

這大約是 10.91 分鐘（10 分鐘零大約 55 秒），比 11 分鐘稍少，得證。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，增加率為 0（兩針重疊，$x = b - a$ 處於最小值）；當 $\theta \to \pi$ 時，增加率再次趨向 0（此時 $x \to a + b$ 處於最大值）。所以最大值嚴格位於兩者之間，正如我們所預期。
- 取 $a = 1$、$b = 2$，逐分鐘追蹤兩針尖端的位置並估算它們之間距離的變化率，最大變化率出現在 $t \approx 10.909$ 分鐘，此時 $x \approx 1.732 = \sqrt{3} = \sqrt{b^2 - a^2}$。
- 答案略少於 11，是因為假如時針靜止不動，分針恰好需要 10 分鐘到達 60°；但時針會慢慢向前移，所以需要多一點時間。120/11 與大家熟悉的「兩針在 720/11 分鐘後再次重合」屬於同一類數字。

常見錯誤

- 求 x 本身的最大值，或者求 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 的最大值時，在使用商法則那一步沒有留意 x 也依賴於 θ。
- 只用分針的速率（每分鐘 $2\pi/60$）作為 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$，這樣會得出恰好 10 分鐘；其實兩針之間的夾角是以兩個速率的*差*增長的。
- 忘記捨去 $\cos\theta = b/a$ 這個根；由於 $b > a$，這個根是不可能的。

STEP 之外

這是一道相關變率（related rates）問題：某個量以已知速率改變，我們追蹤一個在幾何上與之相關的量如何隨之變化。同樣的想法——用隨時間均勻變化的角度來描述位置

——正是研究行星運動的起點：兩顆在圓形軌道上運行的行星之間的距離，表現與這裏的 x 完全一樣，而它們分離得最快的時刻也是用同樣方法求得。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以向量發展這類運動學。

詳細解答

STEP I 2014，第 5 題

純數學 • 三次不等式

STEP I 2014，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q5

關鍵思路

第 (i) 部分是一個單變量三次函數（cubic），它在 $x \geq 0$ 上的最小值恰好是零，並在 $x = a$ 處與軸相切。這一條不等式 $(x+2a)^3 \geq 27a^2x$，其實是經過偽裝的算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality）：左邊涉及和 $x + a + a$，右邊則涉及積 $x \cdot a \cdot a$。第 (ii) 及 (iii) 部分的關鍵在於選擇以甚麼作為 x 和 a，並準確追蹤等號何時成立。

解答

第 (i) 部分

求導數（derivative）：

$$f'(x) = 3(x+2a)^2 - 27a^2 = 3\big((x+2a)^2 - 9a^2\big) = 3(x-a)(x+5a),$$

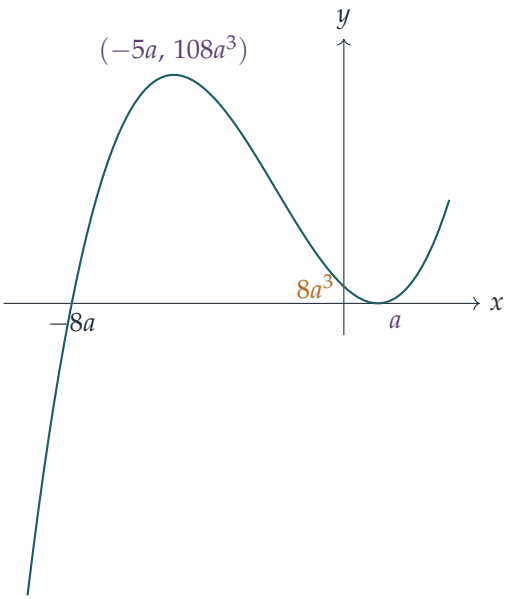
所以駐點（stationary points）位於 $x = a$ 及 $x = -5a$。在這兩點，

$$f(a) = (3a)^3 - 27a^3 = 0, \qquad f(-5a) = (-3a)^3 + 135a^3 = 108a^3,$$

而 $f(0) = 8a^3$。由於 f 是首項係數為正的三次函數，$x = -5a$ 是局部極大點，$x = a$ 是局部極小點。因為極小值是 0，圖像在 $x = a$ 處與 x 軸相切，所以 $(x-a)^2$ 是一個因式；再比較常數項，便得

$$f(x) = (x-a)^2(x+8a),$$

你可以把兩邊都展開成 $x^3 + 6ax^2 - 15a^2x + 8a^3$ 來驗證。



當 $x \geq 0$ 時，圖像由高度 $8a^3 \geq 0$ 開始，下降至 $x = a$ 處的 0，然後一直上升。所以 f 在 $x \geq 0$ 上的最小值是 0，並且

$$f(x) \geq 0 \quad \text{當} x \geq 0,$$

等號只在 $x = a$ 時成立。（因式分解後的形式直接說明了同一件事：當 $x \geq 0$ 時，$(x - a)^2 \geq 0$，而且除非 $x = a = 0$，否則 $x + 8a > 0$。）若 $a = 0$，圖像退化為 $f(x) = x^3$，它在 $x \geq 0$ 時仍然非負，等號只在 $x = 0 = a$ 時成立。在所有情況下，

$$(x + 2a)^3 \geq 27a^2x \quad (x, a \geq 0), \qquad \text{等號成立當且僅當} x = a.$$

第 (ii) 部分

我們想處理 xy^2，所以在第 (i) 部分中取 $a = y \geq 0$。對於 $x \geq 0$、$y \geq 0$，

$$27xy^2 \leq (x + 2y)^3 \leq 3^3 = 27,$$

第二步成立是因為 $0 \leq x + 2y \leq 3$，而立方是遞增函數。因此在整個區域內 $xy^2 \leq 1$。

這個上界是可以達到的：等號需要 $x = y$（來自第 (i) 部分）及 $x + 2y = 3$，由此得 $x = y = 1$，而確實 $1 \cdot 1^2 = 1$。所以 xy^2 的最大值是 1，只在 $x = 1$、$y = 1$ 時取得。

第 (iii) 部分

? **想一想** 第 (i) 部分只涉及兩個數 x 和 a。它怎能告訴我們關於三個數的事情？

把 q 和 r 合在一起：設 $x = p$ 及 $2a = q + r$，所以 $a = \frac{1}{2}(q + r) \geq 0$。由第 (i) 部分得

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2.$$

而 $\left(\frac{q+r}{2}\right)^2 - qr = \frac{(q-r)^2}{4} \geq 0$，且 $p \geq 0$，所以

$$(p + q + r)^3 \geq 27p\left(\frac{q + r}{2}\right)^2 \geq 27pqr,$$

這正是所求的不等式。

等號情況。若 $(p + q + r)^3 = 27pqr$，則這串不等式中的兩個不等號都必須取等號。

- 第一個取等號，當且僅當 $x = a$，即 $p = \frac{1}{2}(q + r)$。
- 第二個取等號，當且僅當 $\frac{27}{4}p(q - r)^2 = 0$，即 $p = 0$ 或 $q = r$。

若 $p = 0$，第一個條件給出 $q + r = 0$，所以亦有 $q = r = 0$。若 $q = r$，第一個條件給出 $p = q$。無論哪種情況，都有 $p = q = r$。反過來，若 $p = q = r$，則兩邊都等於 $27p^3$。所以等號成立當且僅當

$$p = q = r.$$

驗算

- 展開 $(x - a)^2(x + 8a)$ 可得回 $(x + 2a)^3 - 27a^2x$；取 $a = 1$，$f(0) = 8$、$f(1) = 0$、$f(3) = 4 \cdot 11 = 44$，全部非負。
- 在第 (ii) 部分，試試直線 $x + 2y = 3$ 上的其他點：$(x, y) = (2, \frac{1}{2})$ 給出 $\frac{1}{2}$，$(0.5, 1.25)$ 給出約 0.78，兩者都小於 1。用電腦在三角形上的細密網格中搜尋，亦得到最大值 1，位於 $(1, 1)$。
- 在第 (iii) 部分，$p = 1, q = 2, r = 3$ 給出 $216 \geq 162$；用電腦在較小的正整數中搜尋，發現只有當 $p = q = r$ 時等號才成立。

常見錯誤

- 證明了 $f(a) = 0$，卻沒有解釋為何這是 $x \geq 0$ 上的最小值：你需要用到圖像的形狀（或因式分解），包括端點值 $f(0) = 8a^3 \geq 0$。
- 在第 (ii) 部分，忘記檢查上界 1 是否真的可以達到；單有上界並不等於最大值。
- 在第 (iii) 部分的等號情況中，只得出 $q = r$，而遺漏了另一可能 $p = 0$；這情況必須排除（或證明它迫使 $p = q = r = 0$）。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是三項的算術—幾何平均不等式 $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$；而這裏的方法——把兩個變量合併為它們的平均值，再運用一條雙變量不等式——正是 n 項算術—幾何平均不等式各種經典證明的雛形。第 (ii) 部分是一個小型的約束最優化（constrained optimisation）問題，大學課程通常以拉格朗日（Lagrange）乘數法處理這類問題，不過像算術—幾何平均不等式這類不等式，往往能更簡潔地得出答案。如想看更多同類風格的內容，可參閱 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP I 2014，第 6 題

純數學 • 遞輯斯諦映射的遞推關係

> **STEP I 2014，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 8.7 節可以解出的混沌中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/solvable-chaos.html

關鍵思路

表達式 $4x(1-x)$ 看起來很彆扭，但只要令 $x = \sin^2\theta$，便有 $1-x = \cos^2\theta$，而 $4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$ 其實是喬裝了的二倍角公式（double-angle formula）。遞推關係（recurrence）的每一步只是把角度加倍。第 (ii) 部分的重點則在於認出：只要係數（coefficients）滿足某一個條件，任何二次遞推關係都可以透過線性變量代換（linear change of variable）化為這一個。

解答

第 (i) 部分

由 $u_0 = \sin^2\theta$ 得 $1-u_0 = \cos^2\theta$，所以

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

這與 u_0 的形式完全相同，只是把 θ 換成 2θ，因此同樣的計算給出

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\,\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

角度每一步都加倍，所以我們猜想（conjecture）

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

用歸納法（*induction*）證明。當 $n=0$ 時，式子即 $u_0=\sin^2\theta$，成立。假設對某個 $k\geq 0$ 有 $u_k=\sin^2(2^k\theta)$。那麼 $1-u_k=\cos^2(2^k\theta)$，而

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \big(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\big)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

這裏用了 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$，其中 $A=2^k\theta$。因此 k 的結果蘊涵 $k+1$ 的結果，由歸納法，對所有 $n\geq 0$ 都有 $u_n=\sin^2(2^n\theta)$。

第 (ii) 部分

設 $v_n=\alpha u_n+\beta$，其中 $\alpha\neq 0$（需要 $\alpha\neq 0$，才能由 v_n 還原 u_n）。代入 v_n 的遞推關係：

$$\alpha u_{n+1}+\beta = -p(\alpha u_n+\beta)^2+q(\alpha u_n+\beta)+r.$$

展開後除以 α，

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q-2p\beta)\,u_n + \frac{-p\beta^2+(q-1)\beta+r}{\alpha}.$$

我們希望這就是 $u_{n+1}=4u_n-4u_n^2$，所以比較係數。

- u_n^2：$p\alpha=4$，所以 $\alpha=\dfrac{4}{p}$（由於 $p\neq 0$，這沒有問題，而且此時 $\alpha\neq 0$ 亦成立）。
- u_n：$q-2p\beta=4$，所以 $\beta=\dfrac{q-4}{2p}$。
- 常數項：$-p\beta^2+(q-1)\beta+r=0$。

前兩條確定了 α 和 β；第三條於是成為 p、q、r 須滿足的條件。代入 $\beta=(q-4)/(2p)$，再整條乘以 $4p$：

$$\begin{aligned} & 0 = -p\cdot\frac{(q-4)^2}{4p^2}+(q-1)\frac{q-4}{2p}+r \\ \iff\quad & 0 = -(q-4)^2+2(q-1)(q-4)+4pr \\ & = (q-4)\big(-(q-4)+2(q-1)\big)+4pr \\ & = (q-4)(q+2)+4pr \\ & = q^2-2q-8+4pr. \end{aligned}$$

所以若 $4pr=8+2q-q^2$，則取 $\alpha=4/p$ 及 $\beta=(q-4)/(2p)$ 時三個係數全部吻合，而數列 $u_n=(v_n-\beta)/\alpha$ 滿足 $(*)$，正如所求。

該特定數列。這裏 $p=1$、$q=2$、$r=2$。條件成立：$4pr=8$，而 $8+2q-q^2=8+4-4=8$。我們得到

$$\alpha=4,\qquad \beta=\frac{2-4}{2}=-1,\qquad \text{所以}\qquad v_n=4u_n-1.$$

想一想 第 (i) 部分需要 $u_0 = \sin^2\theta$。這裏能否找到合適的 θ？

由於 $v_0 = 1$，我們需要 $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$，而 $\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$。所以 $\theta = \pi/4$ 可行，由第 (i) 部分得 $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$。因此

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

這裏用了 $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$。逐項計算：

- $n = 0$：$v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$；
- $n = 1$：$v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$；
- $n \geq 2$：2^{n-2} 是整數，所以 $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$，而 $v_n = -1$。

所以數列是

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

即 $v_0 = 1$、$v_1 = 3$，而對所有 $n \geq 2$ 有 $v_n = -1$。

驗算

直接迭代遞推關係：$v_1 = -1+2+2 = 3$，$v_2 = -9+6+2 = -1$，以及 $v_3 = -1-2+2 = -1$；由於 -1 映射到自身，數列此後一直停留在 -1，與公式相符。至於第 (i) 部分，試取 $\theta = \pi/6$：$u_0 = \frac{1}{4}$，$u_1 = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$，以及 $u_2 = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$，與預測一致。公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 亦已用電腦就多個隨機角度及首若干項驗證過。

常見錯誤

- 寫成 $u_n = \sin^2(2n\theta)$：角度每次加倍，所以增長方式是 2^n，而不是 $2n$。
- 忘記檢查初始值 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$ 是否落在 $[0,1]$ 內，從而確實能寫成 $\sin^2\theta$。
- 把常數項方程當作要解第三個未知數，而不是把它看成題目要你推導出的條件。

STEP 之外

遞推關係 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 是取最極端參數時的邏輯斯諦映射（logistic map），是混沌（chaos）的標準例子：由於 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，把 θ/π 寫成二進制（binary）便可看出，每一步只是把二進制數字移動一位，因此兩個相近的初始值會以指數速度分開。第 (ii)

部分的代換是一種共軛（conjugacy），意思是兩個動力系統（dynamical systems）在變換坐標之後其實是同一個系統。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非線性動力學與混沌》）是這些概念非常易讀的入門書。

詳細解答

STEP I 2014，第 7 題

純數學 • 三角形中的向量

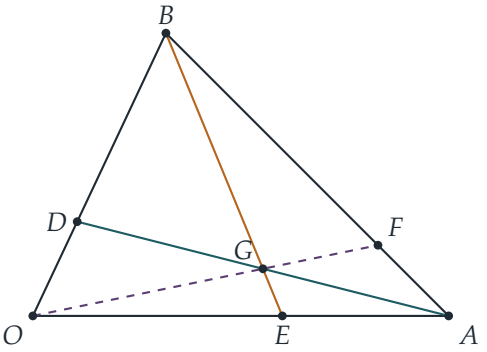
STEP I 2014，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q7

關鍵思路

把每一點都寫成 **a** 與 **b** 的組合。經過兩個已知點的直線上的點，有一條單參數的向量方程（vector equation），所以 G 可以用兩種方式表示，每條直線各給出一種。由於 **a** 與 **b** 不平行（三角形並非退化），我們可以比較係數（comparing coefficients），從而得到關於兩個參數的兩條簡單方程。



解答

首先確定 D 和 E 的位置。由於 $BD = r\,DO$，點 D 位於由 O 到 B 的路程的 $\frac{1}{1+r}$ 處；由於 $OE = s\,EA$，點 E 位於由 O 到 A 的路程的 $\frac{s}{1+s}$ 處。所以

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

第 (i) 部分

直線 AD 上的一般點為

$$\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{a})=(1-\lambda)\,\mathbf{a}+\frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

而直線 BE 上的一般點為

$$\mathbf{b}+\mu(\mathbf{e}-\mathbf{b})=\frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a}+(1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

在 G 處，兩者相等。

? **想一想** 為甚麼我們可以分別令 **a** 的係數相等及 **b** 的係數相等？

因為 O、A、B 構成一個真正的三角形，所以 **a** 與 **b** 都不是零向量，而且互不平行。若 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha'\mathbf{a}+\beta'\mathbf{b}$ 而 $\alpha\neq\alpha'$，則 **a** 便會是 **b** 的倍數，這是不可能的。所以

$$1-\lambda=\frac{\mu s}{1+s},\qquad \frac{\lambda}{1+r}=1-\mu.$$

由第二條方程得 $\lambda=(1+r)(1-\mu)$。代入第一條方程，

$$\begin{aligned}1-(1+r)(1-\mu)&=\frac{\mu s}{1+s}\\ \mu\left[(1+r)-\frac{s}{1+s}\right]&=r\\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s)-s}{1+s}&=r\\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s}&=r,\end{aligned}$$

所以

$$\mu=\frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

由於 $r,s>0$，有 $1+r+rs>0$，所以這一步是容許的。把這個 μ 值代入 BE 的方程，**a** 的係數為

$$\frac{\mu s}{1+s}=\frac{rs}{1+r+rs},$$

而 **b** 的係數為

$$1-\mu=\frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs}=\frac{1}{1+r+rs}.$$

因此

$$\mathbf{g}=\frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a}+\frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

得證。

第 (ii) 部分

由於直線 OG 經過原點，其上每一點都是 $\mathbf{g}$ 的純量倍數 $k\mathbf{g}$：

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\left(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\right).$$

由於 AB 由點 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$ 組成，點 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ 位於直線 AB 上當且僅當 $\alpha + \beta = 1$。所以在 F 處我們需要 $k(rs+1) = 1 + r + rs$，於是

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

另一方面，$AF = t\,FB$ 表示 F 位於由 A 到 B 的路程的 $\frac{t}{1+t}$ 處：

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

比較 $\mathbf{a}$ 的係數（理由與前面相同）得 $1 + t = \dfrac{1+rs}{rs}$，所以

$$t = \frac{1}{rs}.$$

$\mathbf{b}$ 的係數亦相符：$\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$。

驗算

- **中線**。當 $r = s = 1$ 時，D 和 E 是中點，所以 G 應該是重心（centroid）。公式給出 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$，這是正確的；而 $t = 1$，所以 F 是 AB 的中點。這是必然的，因為三條中線（median）共點（concurrent）。
- **塞瓦定理**。答案表明 $r \cdot s \cdot t = 1$，即 $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$，這正是共點直線 AD、BE、OF 的塞瓦定理（Ceva's theorem）。
- **一個數值例子**。取 $\mathbf{a} = (5,0)$、$\mathbf{b} = (0,5)$、$r = 2$、$s = 3$。那麼 $D = (0, \frac{5}{3})$、$E = (\frac{15}{4}, 0)$，而公式給出 $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$。這點位於方程為 $x + 3y = 5$ 的 AD 上，亦位於方程為 $4x + 3y = 15$ 的 BE 上。直線 OG 與 $x + y = 5$ 相交於 $F = (\frac{30}{7}, \frac{5}{7})$，而 $\overrightarrow{AF} = (-\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$、$\overrightarrow{FB} = (-\frac{30}{7}, \frac{30}{7})$，所以 $AF : FB = 1 : 6$，得 $t = \frac{1}{6} = \frac{1}{rs}$。這些公式亦已用電腦以精確算術，對二千個隨機三角形及比例驗證過。

常見錯誤

- 把比例弄反：$BD = r\,DO$ 使 D 位於由 O 到 B 的路程的 $\frac{1}{1+r}$ 處，而不是 $\frac{r}{1+r}$ 處。
- 比較係數時沒有說明為何可行：這需要 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行。
- 在第 (ii) 部分忘記把 $\mathbf{g}$ 重新縮放：G 本身並不在 AB 上，因為它的係數之和小於 1。

STEP 之外

像 **f** 的係數那樣總和為 1 的係數，稱為重心坐標（barycentric coordinates）。它們以各頂點上的權重來描述點，並使塞瓦定理和梅涅勞斯（Menelaus）定理等結果幾乎水到渠成。用線性代數（linear algebra）的語言來說，比較係數之所以可行，是因為 **a** 與 **b** 線性獨立（linearly independent），因而構成平面的一組基（basis）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對基和坐標有細緻的闡述。

詳細解答

STEP I 2014，第 8 題

純數學 • 直線族的包絡線

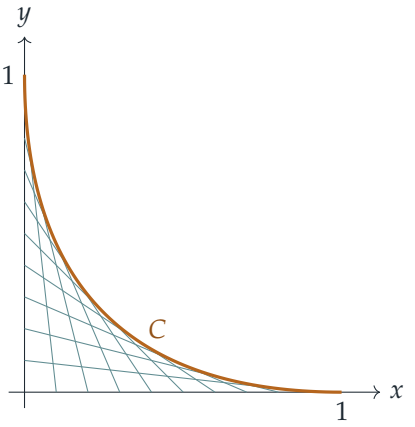
STEP I 2014，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q8

關鍵思路

把每條直線寫成截距式（intercept form）$\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$；這樣，兩條直線的交點便可從一對線性方程中直接求出，而且結果對 a 和 b 是對稱的。令 $b\to a$，便得到一條直線與其「鄰居」的交點，這些點描出一條曲線，而每條直線 L_a 都與這條曲線相切。曲線 C 就是這族直線的包絡線（envelope），而第 (iii) 部分則從另一個方向證實這一點。



解答

經過 $(a,0)$ 和 $(0,1-a)$ 的直線，其截距（intercept）為 a 和 $1-a$，所以

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1,\qquad \text{即}\qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

第 (i) 部分

我們解

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

為了消去 y，把第一條方程乘以 b，第二條乘以 a，然後相減：

$$\big[b(1-a) - a(1-b)\big]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{即} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

由於 $a \neq b$，我們可以除以 $b-a$，得 $x = ab$。代入第一條方程，

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

又因 $a \neq 0$，得 $y = (1-a)(1-b)$。所以 L_a 與 L_b 相交於

$$\big(ab,\ (1-a)(1-b)\big).$$

（答案對 a 和 b 對稱，這是理所當然的。你也可以驗證它同樣位於 L_b 上：$(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)\big(a+1-a\big) = b(1-b)$。）

第 (ii) 部分

兩個坐標都是 b 的多項式（polynomial），因此是連續（continuous）的，所以當 $b \to a$ 時的極限（limit）就是在 $b = a$ 處的值：

$$(x, y) = \big(a^2,\ (1-a)^2\big).$$

由於 $0 < a < 1$，我們有 $0 < x = a^2 < 1$，又因為 $a > 0$，取正平方根便得 $\sqrt{x} = a$。因此

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

所以極限點位於 C 上，得證。

第 (iii) 部分

在 C 上任取一點。它的 x 坐標位於 $(0,1)$ 之內，所以可以寫成 t^2，其中 $t = \sqrt{x} \in (0,1)$，而該點就是 $\big(t^2, (1-t)^2\big)$。

用鏈式法則（chain rule）對 $y = (1-\sqrt{x})^2$ 求導，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

在 $x = t^2$ 處其值為 $-\frac{1-t}{t}$。該處的切線（tangent）為

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\left(x - t^2\right).$$

想一想 我們怎樣看出這條直線是其中一條 L_a？

一條直線 L_a 由它的兩個截距完全確定，而這兩個截距必須是 a 和 $1-a$。所以，求出切線的截距。

- 令 $y=0$：$-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$。由於 $1-t \neq 0$，可以約去，得 $x-t^2 = t(1-t)$，所以 $x=t$。
- 令 $x=0$：$y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2=(1-t)^2+t(1-t)=1-t$。

所以切線經過 $(t,0)$ 和 $(0,1-t)$，且 $0<t<1$：它正是 L_t。由於 C 上每一點都由某個 $t\in(0,1)$ 給出，C 的每條切線都具有 L_a 的形式（在切點處 $a=\sqrt{x}$）。證明完畢。

留意在 $\left(a^2,(1-a)^2\right)$ 處的切線是 L_a，而這一點正是第 (ii) 部分由 L_a 得出的點：每條直線都在它自己的極限交點處與 C 相切。

驗算

- 取 $a=\frac{1}{2}$、$b=\frac{1}{3}$，第 (i) 部分給出 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$。在 $L_{1/2}$ 上：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$；在 $L_{1/3}$ 上：$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$。
- 在 $x=\frac{1}{4}$ 處，曲線的 $y=\frac{1}{4}$，斜率為 -1，所以切線是 $x+y=\frac{1}{2}$，即經過 $(\frac{1}{2},0)$ 和 $(0,\frac{1}{2})$ 的 $L_{1/2}$。
- 曲線本身是拋物線（parabola）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 的一部分，對 x 和 y 對稱，與這族直線的對稱性 $a\leftrightarrow 1-a$ 吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記解釋為何 $\sqrt{x}=a$：這需要 $a>0$，而題目已給出此條件。
- 在第 (iii) 部分只證明了 L_a 與 C 相切。題目要求的是逆命題：從 C 的任意一條切線出發，證明它是某條 L_a。

STEP 之外

曲線 C 是直線族 L_a 的**包絡線**：即與族中每一條直線都相切的曲線。一般而言，曲線族 $F(x,y,a)=0$ 的包絡線，可以從 $F=0$ 和 $\partial F/\partial a=0$ 中消去 a 而求得，這正是第 (ii) 部分「令 $b\to a$」取極限的微積分版本。包絡線在光學中以焦散線（caustics）的形式出現，例如咖啡杯中那條明亮的光線曲線。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類題目。

詳細解答

STEP I 2014，第 9 題

力學 • 受水平力作用的拋體

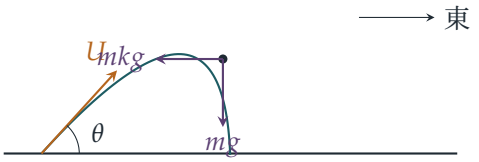
> **STEP I 2014，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q9

關鍵思路

兩個力都是恆定的，所以每個方向上的加速度（acceleration）都是常數，我們可以把水平運動和豎直運動分開處理，做法和普通拋射體（projectile）完全一樣。豎直運動完全不受向西的力影響。新的地方在於水平速度不斷減少，所以質點會在某一刻停止向東移動，然後往西飄回去。整條軌跡的形狀取決於這一刻何時出現，以及它與飛行最高點和落地時刻的先後關係。

解答

把質點視為在豎直平面內運動的質點（point mass），除了重量和題目給出的水平力之外不受其他力。取 x 向東、y 豎直向上，原點設在拋出點。



時間 T_H 與 T_L

在每個方向上應用牛頓第二定律（Newton's second law），再除以 m，得

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

初速度為 $(U\cos\theta,\ U\sin\theta)$，所以積分兩次，得

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

當 $\dot{y} = 0$ 時到達最大高度，而質點在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 時落地：

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

這些結果與沒有向西的力時相同，因為那個力沒有豎直分量。

T 的意義

題目給出的時間 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$ 正是 $\dot{x} = 0$ 的時刻。在 T 之前質點向東移動；在 T 之後它向西移動。所以，如果質點在時刻 T 仍在空中，那就是它位於最東的時刻。比較這三個時間：

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

知道質點在哪裏落地也會有幫助：

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

若 $k\tan\theta < 1$，這個值為正（在起點以東）；若 $k\tan\theta > 1$，則為負（在起點以西）。

想一想 軌跡不再對稱，那麼它實際上是甚麼樣子？

加速度 $(-kg, -g)$ 是常數，所以軌跡仍然是拋物線（parabola），只是它的對稱軸傾斜了：這就是在大小為 $g\sqrt{1+k^2}$、指向西下方的「重力」作用下所得到的拋物線。飛行的最高點不再是拋物線的頂點，而下面三種情況討論的，就是最東點（時刻 T）落在甚麼位置。

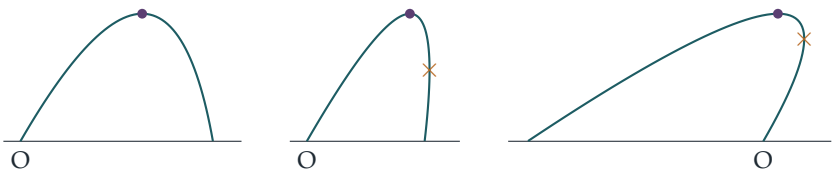
三種情況

情況 $k\tan\theta < \frac{1}{2}$。此時 $T_H < T_L < T$。質點在向東的速度耗盡之前已經落地，所以全程向東移動。軌跡看起來像普通的拋射軌跡，上升到最高點後下降，而由於水平速率不斷減少，下降時比上升時更陡。它落在起點以東。

情況 $\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$。此時 $T_H < T < T_L$。質點在仍向東移動時經過最高點，下降時繼續向東，直到時刻 T，此時它的速度豎直向下，之後便向西彎回，然後落地。由於 $k\tan\theta < 1$，它仍然落在起點以東，但在其最東點以西。

情況 $k\tan\theta > 1$。此時 $T < T_H$。質點仍在上升時，向東的運動已經停止，那一刻它正豎直向上移動。它在已經向西移動時才到達最大高度，然後下降並落在拋出點以西。

下面的草圖展示了這三種情況，取 $\theta = 60°$，而 U 和 g 相同，分別有 $k\tan\theta \approx 0.35$、0.6 和 1.8。圓點標示時刻 T_H 的最高點，叉號標示時刻 T 的最東點，O 為拋出點。



$k\tan\theta < \frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$　　$k\tan\theta > 1$

$k\tan\theta = 1$ 的情況

此時 $T = T_H$，所以在飛行最高點時，速度的兩個分量同時為零，質點瞬間靜止。此外 $x(T_L) = 0$，所以它落回拋出點。

事實上，質點沿一條直線運動。當 $\tan\theta = 1/k$ 時，初速度 $U(\cos\theta, \sin\theta)$ 是 $(k, 1)$ 的正數倍，而加速度 $(-kg, -g) = -g(k, 1)$ 恰好指向相反方向。一個加速度恆定且與速度方向正好相反的質點會沿直線運動：它沿拋射線向上移動，以 $g\sqrt{1+k^2}$ 減速，在時刻 T_H 停下，然後沿同一直線滑回，在時刻 $T_L = 2T_H$ 落回起點。你可以從方程驗證這一點：取 $k = \cot\theta$，

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{對所有} t,$$

所以質點始終不離開直線 $y = x\tan\theta$。

驗算

- 令 $k \to 0$，則 $T \to \infty$，所以永遠屬於第一種情況，而 $x(T_L)$ 變成熟悉的射程 $U^2\sin 2\theta/g$。
- 落地位置 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$ 恰好在 $k\tan\theta = 1$ 時變號，與第二、第三種情況的分界吻合。
- 取 $U = g = 1$、$\theta = 60°$ 和 $k = 0.45$，質點落在 $x \approx 0.191$，但在時刻 $T \approx 1.11$ 到達 $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$，該時刻介於 $T_H \approx 0.87$ 與 $T_L \approx 1.73$ 之間，所以它確實在落地前折返。對運動進行逐步數值積分（numerical integration），結果與三個時間及落地點全部吻合。

常見錯誤

- 讓向西的力影響豎直運動：T_H 和 T_L 完全不涉及 k。

- 假設最高點就是軌跡的「中間」。有了水平力，軌跡是一條傾斜的拋物線，所以最高點和最東點並不相同。
- 把第二種情況畫成質點落在起點以西：它雖然折返，但由於 $k\tan\theta < 1$，折返得不夠遠。

STEP 之外

任何方向上的恆定加速度總會產生拋物線。這裏的等效重力只是傾斜了，把坐標軸旋轉至與它對齊，問題便變回普通的拋射體問題。這種選取與受力相配合的坐標的想法，是大學一年級力學的核心內容；同樣重要的還有均勻電場中的帶電粒子，它們的行為正是如此。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）細緻地發展了這些想法。

詳細解答

STEP I 2014，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP I 2014，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q10

關鍵思路

兩部分的做法都一樣：自由飛行階段用能量守恆（conservation of energy），每次碰撞則用牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。第 (ii) 部分的竅門在於留意到：兩球相撞的一刻，大球剛剛反向，而小球仍以全速下落。兩者以很大的接近速率（closing speed）相遇，於是較重的下方球可以把較輕的上方球拋到遠高於起始位置的高度。之後就只是一道含兩條方程的碰撞題，而題目給出的數值令速率之比算得乾淨利落。

解答

把兩球都模型化為沿鉛垂方向運動的均勻剛體球（uniform rigid sphere），不計空氣阻力，並以 g 表示重力加速度。每次碰撞都是瞬時的，所以碰撞期間重力不會改變任何動量（momentum）。

第 (i) 部分

當球心位於高度 R 時，球便接觸地面，因此球已下落了距離 H。由能量守恆，球在碰撞前一刻的速率為

$$u = \sqrt{2gH}.$$

地面固定不動，所以由牛頓實驗定律，反彈速率為向上的 eu。之後球上升至速率為零；再次由能量守恆，球再上升

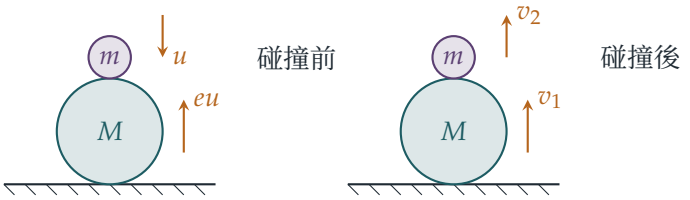
$$\frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2 \cdot 2gH}{2g} = e^2 H.$$

球心在這段上升開始時位於高度 R，所以它到達離地高度 $R + He^2$，即為所求。

第 (ii) 部分

兩球一同由靜止開始自由下落，所以在每一時刻速率都相同。下方球的球心下落 H 後到達地面，因此在那一刻兩球都以 $u = \sqrt{2gH}$ 向下運動。下方球反彈，如第 (i) 部分一樣以向上速率 eu 離開地面；緊接着它與仍以 u 向下運動的上方球相撞。

取向上為正，並設兩球相撞後一刻的速度分別為 v_1（質量 M 的球）和 v_2（質量 m 的球）。



由動量守恆（conservation of momentum）得

$$Meu - mu = Mv_1 + mv_2,$$

而由牛頓實驗定律（分離速率（speed of separation）等於 e 乘以接近速率（speed of approach），其中接近速率為 $eu + u$）得

$$v_2 - v_1 = e(1 + e)u.$$

把 $v_1 = v_2 - e(1 + e)u$ 代入動量方程，

$$\begin{aligned}(M + m)v_2 &= Meu - mu + Me(1 + e)u \\ &= \big(Me(2 + e) - m\big)u,\end{aligned}$$

因此

$$v_2 = \frac{Me(2 + e) - m}{M + m}\,u.$$

想一想 兩球相撞時，小球的球心在哪裏？

碰撞緊接在反彈之後發生，所以大球仍然接觸地面：其球心位於高度 R，頂部位於 $2R$，而小球的球心位於 $2R + r$。小球由該處再上升 $v_2^2/(2g)$，因此

$$h = 2R + r + \frac{v_2^2}{2g}.$$

代入題目給出的數值，$2R + r = 0.45$，所以 $v_2^2/(2g) = 4.05$；又 $u^2/(2g) = H = 1.8$。兩式相除，

$$\frac{v_2^2}{u^2} = \frac{4.05}{1.8} = \frac{9}{4}, \qquad \text{所以} \qquad v_2 = \tfrac{3}{2}u,$$

這裏取正根，因為小球在碰撞後向上運動。

當 $e=\frac{2}{3}$ 時，$e(2+e)=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{9}$。設 $k=M/m$，並把分子和分母同除以 m，

$$\frac{\frac{16}{9}k-1}{k+1}=\frac{3}{2}\implies \tfrac{32}{9}k-2=3k+3\implies \tfrac{5}{9}k=5,$$

因此

$$\frac{M}{m}=9.$$

驗算

- 當 $M/m=9$ 時，得 $v_2=\frac{3}{2}u$ 及 $v_1=v_2-\frac{10}{9}u=\frac{7}{18}u$。碰撞前的動量為 $9m\cdot\frac{2}{3}u-mu=5mu$，碰撞後為 $9m\cdot\frac{7}{18}u+m\cdot\frac{3}{2}u=5mu$。兩者相符。
- 由於 $v_1<v_2$，兩球在碰撞後分離，這是必然的。
- 以數值計算，$u=\sqrt{2\times 9.8\times 1.8}\approx 5.94\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 及 $v_2\approx 8.91\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，以此速率可上升 $4.05\,\mathrm{m}$，得 $h=4.5$。
- 若 $M\gg m$，則 $v_2\to e(2+e)u$；當 $e=1$ 時為 $3u$，這正是完全彈性「疊球」下落中著名的高度九倍因子。

常見錯誤

- 只以 $v_2^2/(2g)$ 作為離地的最終高度，忘記碰撞發生時小球的球心位於 $2R+r$。
- 以 $e\cdot 2u$ 或 eu 作為分離速率：接近速率是 $eu+u$，因為兩球正相向運動。
- 正負號錯誤：應固定向上為正，並把上方球在碰撞前的速度記為 $-u$。

STEP 之外

疊球下落是一個很好的示範，展示動量如何被「集中」傳到一件較輕的物體上：若把多個球疊成一座塔，每個都比下面的一個輕，最頂的球可被拋到釋放高度的許多倍。分析這類碰撞最簡潔的方法是使用零動量參考系（zero-momentum frame，即質心參考系（centre-of-mass frame）），在這參考系中，每個球的速度只是反向並乘以 e。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對碰撞及質心參考系有細緻的闡述。

詳細解答

STEP I 2014，第 11 題

力學 • 連接滑輪系統

STEP I 2014，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q11

關鍵思路

對每個質點寫出牛頓第二定律（Newton's second law），每條繩各用一個張力（tension），再由繩的約束條件（constraint）得出所有質點的加速度。在系統 II 中，關鍵在於滑輪（pulley）P_1 是輕的（light）：作用於它的合力必須為零（否則它的加速度會是無限大），所以上面那條繩的張力恰好是下面那條的兩倍。確立了這一點之後，P_1 連同其下的兩個質點對 M 的作用，就跟單一個質量為 4μ 的質點完全一樣。

解答

全題中，質點視為點質量（point mass），繩視為輕而不可伸長（inextensible），滑輪視為光滑（smooth）且輕，因此每條繩上各處的張力相同。

第 (i) 部分

設繩的張力為 T。由於繩不可伸長，若 M 以 a_1 向下加速，則 m 以 a_1 向上加速。對每個質點應用牛頓第二定律，並以運動方向為正方向，得

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - T = Ma_1, \\ m: &\quad T - mg = ma_1. \end{aligned}$$

兩式相加，得 $(M-m)g = (M+m)a_1$，所以

$$a_1 = \frac{M-m}{M+m}\,g,$$

得證。代回 m 的方程，

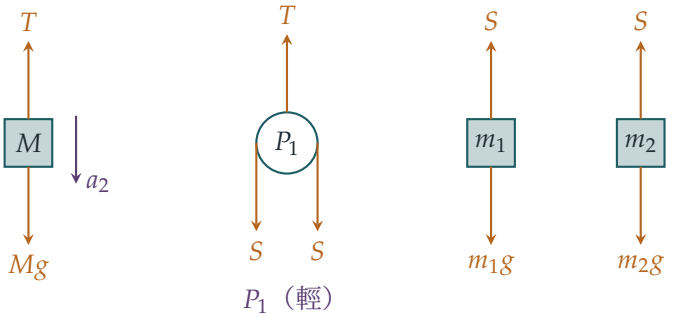
$$T = m(g+a_1) = m\cdot\frac{2M}{M+m}\,g = \frac{2Mmg}{M+m}.$$

繩的兩段直線部分都從滑輪鉛垂向下伸出，各以張力 T 拉動滑輪，所以張力對滑輪的作用力為

$$2T = \frac{4Mmg}{M+m} \quad \text{，方向鉛垂向下。}$$

第 (ii) 部分

設跨過固定滑輪 P 的繩的張力為 T，跨過 P_1 的繩的張力為 S。



輕滑輪。 作用於 P_1 的力是向上的 T 和向下的 $2S$（它本身的重量為零）。由於它的質量為零，$T - 2S = 0 \cdot (\text{加速度}) = 0$，所以

$$T = 2S.$$

> **想一想** m_1 和 m_2 的加速度與 M 的加速度有甚麼關係？

上面那條繩不可伸長，所以若 M 以 a_2 向下加速，則 P_1 以 a_2 向上加速。下面那條繩只決定 m_1 和 m_2 相對於 P_1 的運動：若 m_1 相對於 P_1 以 b 向下加速，則 m_2 相對於 P_1 以 b 向上加速。再加上 P_1 本身的運動，實際的加速度為

$$m_1 : b - a_2 \text{ ，向下，} \qquad m_2 : b + a_2 \text{ ，向上.}$$

這裏 b 是第二個未知量，稍後會把它消去。

運動方程。

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg - 2S = Ma_2, \\ m_1: &\quad m_1 g - S = m_1(b - a_2), \\ m_2: &\quad S - m_2 g = m_2(b + a_2). \end{aligned}$$

把 m_1 的方程除以 m_1，m_2 的方程除以 m_2：

$$g - \frac{S}{m_1} + a_2 = b = \frac{S}{m_2} - g - a_2.$$

因此

$$2(g+a_2) = S\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = S\,\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} = \frac{S}{\mu},$$

所以 $S = 2\mu(g+a_2)$，而 $T = 2S = 4\mu(g+a_2)$。代入 M 的方程，

$$Mg - 4\mu g - 4\mu a_2 = Ma_2 \quad\Longrightarrow\quad (M+4\mu)a_2 = (M-4\mu)g,$$

因此

$$a_2 = \frac{M-4\mu}{M+4\mu}\,g,$$

得證。與第 (i) 部分比較：M 的表現跟它與單一個質量為 4μ 的質點懸掛在一起時完全相同。

a_1 與 a_2 何時相等？ 對 $x>0$ 設 $f(x) = \dfrac{M-x}{M+x}$，於是 $a_1 = f(m)\,g$，$a_2 = f(4\mu)\,g$。由於

$$f(x) = \frac{2M}{M+x} - 1$$

且 $M>0$，f 在 $x>0$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），因此是一對一（one-to-one）的。所以 $a_1 = a_2$ 當且僅當 $m = 4\mu$。由 $m = m_1+m_2$，這變成

$$m_1+m_2 = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} \iff (m_1+m_2)^2 = 4m_1m_2 \iff (m_1-m_2)^2 = 0 \iff m_1 = m_2,$$

其中第一步是乘以 $m_1+m_2>0$，這一步是可逆的。這樣便完成了雙向的證明。

驗算

- 若 $m_1 = m_2$，系統 II 的下半部分平衡，所以 $b=0$：P_1 及其下的質點作為一個質量為 m_1+m_2 的整體運動，系統 II 便化為系統 I。這與此情況下 $4\mu = m_1+m_2$ 相符。
- 若 $m_2 \to 0$，則 $\mu \to 0$ 且 $a_2 \to g$：沒有重物牽制 M，因為 m_1 只是自由下落，不承受張力。合理。
- 第 (ii) 部分的張力 $T = 4\mu(g+a_2)$ 也可以從第 (i) 部分得出：若 P_1 固定不動，作用於它的力為 $4m_1m_2g/(m_1+m_2) = 4\mu g$。以 a_2 向上加速，只是把 g 換成 $g+a_2$。
- 數值上，取 $M=3$、$m_1=1$、$m_2=2$，得 $\mu = \frac{2}{3}$ 及 $a_2 = \frac{1}{17}g \approx 0.576\ \mathrm{m\,s^{-2}}$（取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$）。直接解四條方程也得出相同的值。

常見錯誤

- 忘記 P_1 會移動，把 m_1 和 m_2 的加速度寫成 $\pm b$，而不是 $b-a_2$ 和 $b+a_2$。

- 在輕滑輪兩邊使用 $T = S$。P_1 每一邊都以 S 向下拉，所以它上方的繩必須承受 $2S$。
- 推出 $a_1 = a_2 \Rightarrow m = 4\mu$ 卻沒有說明理由：這需要 f 是一對一的。

STEP 之外

這個裝置是阿特伍德機（Atwood machine）之中再套一部阿特伍德機，而 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ 就是約化質量（reduced mass）——當把行星與其恆星這類二體問題（two-body problem）化為單體問題時，出現的正是同一個量。帶有這類約束的系統，用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）處理最為簡潔：它直接使用獨立坐標（這裏是 P_1 的高度，以及 m_1 相對於 P_1 的位置），完全不需要求張力。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細講解了滑輪系統，並進而討論二體問題中的約化質量。

詳細解答

STEP I 2014，第 12 題

概率與統計 • 離散隨機變量

STEP I 2014，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q12

關鍵思路

平方可以消去絕對值（modulus）符號，因此 $\mathrm{E}(X^2)$ 只需要用到骰子點數 S 的 $\mathrm{E}(S)$ 和 $\mathrm{E}(S^2)$，再對硬幣的兩種結果取平均。整數條件隨即化為一個關於 $(k-1)^2$ 的整除（divisibility）問題，於是只剩下極少數個位數候選值。一旦知道 k，X 只取五個值，而兩輪遊戲只需簡短地枚舉（enumeration）所有數對。

解答

求 $\mathrm{E}(X^2)$

設 S 為骰子顯示的點數，則

$$\mathrm{P}(S=1)=\tfrac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(S=2)=\tfrac{1}{3},\qquad \mathrm{P}(S=3)=\tfrac{1}{6}.$$

於是

$$\mathrm{E}(S)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}=\tfrac{5}{3},\qquad \mathrm{E}(S^2)=\tfrac{1}{2}+\tfrac{4}{3}+\tfrac{9}{6}=\tfrac{10}{3}.$$

硬幣是公平（fair）的，且與骰子獨立（independent）。由於 $|a|^2=a^2$，在擲得正面的條件下 $X^2=(kS-1)^2$，在擲得反面的條件下 $X^2=(k-S)^2$。所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)&=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\big[(kS-1)^2\big]+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\big[(k-S)^2\big]\\&=\tfrac{1}{2}\big[k^2\mathrm{E}(S^2)-2k\mathrm{E}(S)+1\big]+\tfrac{1}{2}\big[k^2-2k\mathrm{E}(S)+\mathrm{E}(S^2)\big]\\&=\tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{10}{3}k^2-\tfrac{10}{3}k+1+k^2-\tfrac{10}{3}k+\tfrac{10}{3}\Big]\\&=\frac{13k^2-20k+13}{6}.\end{aligned}$$

另一方面，

$$k + \frac{13(k-1)^2}{6} = \frac{6k + 13k^2 - 26k + 13}{6} = \frac{13k^2 - 20k + 13}{6},$$

所以 $\mathrm{E}(X^2) = k + \frac{13}{6}(k-1)^2$，正如所求。

求 k

由於 k 是整數，$\mathrm{E}(X^2)$ 是整數若且唯若 6 整除 $13(k-1)^2$。因為 13 與 6 互質（coprime），這等同於 $6 \mid (k-1)^2$，即 2 和 3 都整除 $(k-1)^2$。由於 2 和 3 是質數（prime），它們各自必須整除 $k-1$ 本身，所以 $6 \mid k-1$。在 $1 \le k \le 9$ 的範圍內，只剩下 $k = 1$ 或 $k = 7$。

想一想 兩個候選值都令 $\mathrm{E}(X^2)$ 為整數。哪個條件排除了其中一個？

是關於 $\mathrm{E}(X)$ 的條件。若 $k = 1$，兩條規則都給出 $X = |S - 1| = S - 1$，所以 $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$，並非整數。

若 $k = 7$，則對每一面都有 $7S - 1 > 0$ 及 $7 - S > 0$，因此可以去掉絕對值符號：

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{2}\left(7 \cdot \tfrac{5}{3} - 1\right) + \tfrac{1}{2}\left(7 - \tfrac{5}{3}\right) = \tfrac{16}{3} + \tfrac{8}{3} = 8,$$

而 $\mathrm{E}(X^2) = 7 + \frac{13}{6} \cdot 36 = 85$。兩者都是正整數，所以 $k = 7$。

X 的分佈

當 $k = 7$ 時，正面給出 $X = 7S - 1 \in \{6, 13, 20\}$，反面給出 $X = 7 - S \in \{6, 5, 4\}$。每個（硬幣，骰子）組合的概率為 $\frac{1}{2}\mathrm{P}(S = s)$，而數值 6 既來自正面且 $S = 1$，也來自反面且 $S = 1$：

x	4	5	6	13	20
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

各概率之和為 1。

兩輪遊戲

設 X_1、X_2 為兩輪的結果。由於每一輪都重新擲骰子和硬幣，它們互相獨立，且各自服從上述分佈（distribution）。我們需要找出和大於 25 及和恰好等於 25 的數對。

想一想 怎樣才能不遺漏地列出總和大於 25 的所有數對？

按較大的值分類。若兩個結果都不是 20，最大可能總和為 $13 + 13 = 26$，而 $13 + 6 = 19$ 已經太小，所以 $(13, 13)$ 是唯一這樣的數對。若其中一個結果是 20，另一個必須大於 5，

即為 6、13 或 20；若它等於 5，總和恰好是 25。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_1+X_2>25) &= \mathrm{P}(13,13)+2\,\mathrm{P}(20,6)+2\,\mathrm{P}(20,13)+\mathrm{P}(20,20)\\ &= \tfrac{1}{36}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{2}+2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{144}\\ &= \frac{4+12+4+1}{144}=\frac{7}{48},\end{aligned}$$

其中因子 2 計算兩種次序。同理

$$\mathrm{P}(X_1+X_2=25)=2\,\mathrm{P}(20,5)=2\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36}.$$

所以賭客預期獲付的金額（以英鎊計）為

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}.$$

當這個金額少於 £1 的賭注時，遊戲對賭場有利：

$$\frac{7w}{48}+\frac{1}{36}<1 \iff \frac{7w}{48}<\frac{35}{36} \iff w<\frac{35\cdot 48}{36\cdot 7}=\frac{20}{3}.$$

由於 w 是整數，最大可能值為 $w=6$。又因為 $\frac{20}{3}$ 不是整數，無論是否容許公平遊戲（預期獲付恰好 £1），答案都相同。

驗算

- 由表可得 $\mathrm{E}(X)=\frac{4+10+36+26+20}{12}=8$ 及 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{16+50+216+338+400}{12}=85$，與公式吻合。
- 當 $w=6$ 時，預期獲付為 $\frac{7}{8}+\frac{1}{36}=\frac{65}{72}\approx$ £0.90，低於賭注；當 $w=7$ 時為 $\frac{151}{144}\approx$ £1.05，高於賭注。
- 以電腦模擬 2×10^5 局兩輪遊戲，約 14.5% 的局總和大於 25（$\frac{7}{48}\approx 14.6\%$），約 2.8% 的局總和恰好是 25（$\frac{1}{36}\approx 2.8\%$）。

常見錯誤

- 在分佈中把 $X=6$ 列出兩次，一次對應正面、一次對應反面，而沒有把它們合併為 $\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{2}$。
- 對於像 $(20,6)$ 這樣兩數不相等的數對，忘記乘以代表兩種次序的因子 2。
- 把「總和等於 25」當作贏得 £w 或當作輸：賭客只是取回賭注。

STEP 之外

計算 $\mathrm{E}(X^2)$ 的過程是全期望定律（law of total expectation）$\mathrm{E}(Y) = \sum_i \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{E}(Y \mid A_i)$ 的一個例子，大學一年級的概率課程經常用到它。兩輪遊戲涉及獨立隨機變量（random variables）之和的分佈，即卷積（convolution），而生成函數（generating functions）可以簡潔地處理這類問題。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了這兩個概念。

詳細解答

STEP I 2014，第 13 題

概率與統計 • 三角分佈

STEP I 2014，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

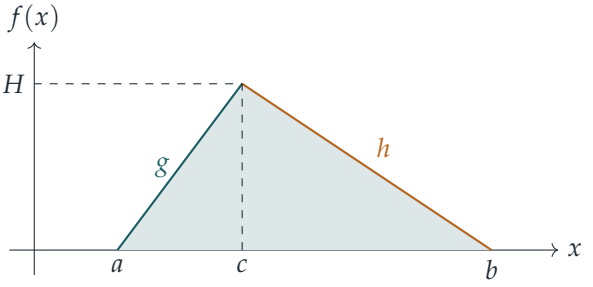
step.maths.org/questions/14-s1-q13

關鍵思路

密度函數（density function）的圖像是一個三角形，底邊由 a 延伸至 b，頂點（apex）位於 c 的正上方，而三角形的面積必須等於 1。這就確定了頂點的高度，之後每段線性部分都由兩點完全確定。計算平均值（mean）和中位數（median）時，先平移變量，使每段線性部分都從零開始，積分就會保持簡潔；至於中位數，首要問題只是它落在 c 的哪一邊。

解答

全文假設 $a < c < b$，使兩段都是真正存在的（題目的公式要有意義，$c - a$ 與 $b - c$ 必須不等於零）。



兩段線性部分

設 $H = g(c) = h(c)$ 為頂點的高度。f 的圖像下方的區域是一個底為 $b-a$、高為 H 的三角形，而總概率為 1，所以

$$\tfrac{1}{2}(b-a)H = 1, \qquad H = \frac{2}{b-a}.$$

由於 g 是線性函數且 $g(a) = 0$，故對某常數 k 有 $g(x) = k(x-a)$，而 $g(c) = H$ 給出 $k(c-a) = \dfrac{2}{b-a}$。因此

$$g(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)},$$

得證。同理，$h(x) = m(b-x)$ 且 $h(c) = H$，所以

$$h(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}.$$

由於 $b-a$、$c-a$ 和 $b-c$ 全部為正，g 是遞增的而 h 是遞減的，符合要求。

第 (i) 部分

記 $\mathrm{E}(X) = I_1 + I_2$，其中 $I_1 = \int_a^c x\,g(x)\,\mathrm{d}x$，$I_2 = \int_c^b x\,h(x)\,\mathrm{d}x$。

在 I_1 中代入 $x = a + t$，於是 t 由 0 變到 $c-a$：

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_0^{c-a} (a+t)\,t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left[\frac{a(c-a)^2}{2} + \frac{(c-a)^3}{3}\right] \\ &= \frac{(c-a)\big(3a + 2(c-a)\big)}{3(b-a)} = \frac{(c-a)(a+2c)}{3(b-a)}. \end{aligned}$$

在 I_2 中代入 $x = b - s$，於是 s 由 0 變到 $b-c$：

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_0^{b-c} (b-s)\,s\,\mathrm{d}s = \frac{2}{(b-a)(b-c)} \left[\frac{b(b-c)^2}{2} - \frac{(b-c)^3}{3}\right] \\ &= \frac{(b-c)\big(3b - 2(b-c)\big)}{3(b-a)} = \frac{(b-c)(b+2c)}{3(b-a)}. \end{aligned}$$

兩者相加，分子為

$$\begin{aligned} (c-a)(a+2c) + (b-c)(b+2c) &= \big(ac + 2c^2 - a^2 - 2ac\big) + \big(b^2 + 2bc - bc - 2c^2\big) \\ &= b^2 - a^2 + bc - ac \\ &= (b-a)(b+a+c). \end{aligned}$$

除以 $3(b-a)$，得

$$\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{3}(a+b+c),$$

得證。（這正是三角形形心（centroid）的 x 坐標，而這並非巧合：平均值就是密度函數下方區域的平衡點。）

第 (ii) 部分

首先求出頂點左方有多少概率。這就是左邊那個三角形的面積：

$$\mathrm{P}(X \le c) = \tfrac{1}{2}(c-a)H = \frac{c-a}{b-a}.$$

想一想 我們怎樣知道中位數在 c 的左邊還是右邊？

中位數 M 滿足 $\mathrm{P}(X \le M) = \frac{1}{2}$。若 $\mathrm{P}(X \le c) \ge \frac{1}{2}$，中位數就在 c 處或其左方；否則就在其右方。而 $\frac{c-a}{b-a} \ge \frac{1}{2}$ 當且僅當 $c \ge \frac{1}{2}(a+b)$，即頂點位於 $[a,b]$ 的中點處或其右方。所以分情況的依據，就是比較 c 與 $\frac{1}{2}(a+b)$。

情況 $c \ge \frac{1}{2}(a+b)$。此時 $a < M \le c$，而對於 $a \le m \le c$，由 a 到 m 的小三角形面積為

$$\mathrm{P}(X \le m) = \int_a^m g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(m-a)^2}{(b-a)(c-a)}.$$

令它等於 $\frac{1}{2}$，並取正根（因為 $M > a$），得

$$M = a + \sqrt{\tfrac{1}{2}(b-a)(c-a)}.$$

情況 $c < \frac{1}{2}(a+b)$。這時中位數在 c 的右方，從右端入手會比較容易。對於 $c \le m \le b$，

$$\mathrm{P}(X \ge m) = \int_m^b h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-m)^2}{(b-a)(b-c)}.$$

令它等於 $\frac{1}{2}$，並利用 $M < b$，得

$$M = b - \sqrt{\tfrac{1}{2}(b-a)(b-c)}.$$

當 $c = \frac{1}{2}(a+b)$ 時，分佈是對稱的，兩條公式都給出 $M = \frac{1}{2}(a+b)$（例如第一條給出 $a + \sqrt{\frac{1}{4}(b-a)^2} = a + \frac{1}{2}(b-a)$），所以兩種情況能夠銜接起來。

驗算

- 取 $a=0$、$b=4$、$c=1$：$\mathrm{P}(X \le c) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$，所以屬於第二種情況，$M = 4 - \sqrt{6} \approx 1.5505$。平均值為 $\frac{5}{3}$。用電腦模擬 200 000 個數值，得到樣本中位數 1.5505 及樣本平均值 1.668。
- 取 $a=0$、$b=4$、$c=3$：適用第一種情況，$M = \sqrt{6} \approx 2.449$，正好是上一個例子的鏡像，理應如此。
- 中位數總是介乎眾數（mode）c 與中點 $\frac{1}{2}(a+b)$ 之間。例如在第一種情況中 $M \le c$，而由於當 $c \ge \frac{1}{2}(a+b)$ 時 $(b-a)(c-a) \ge \frac{1}{2}(b-a)^2$，所以 $M \ge \frac{1}{2}(a+b)$。

常見錯誤

- 求中位數時用錯了密度函數的那一段：應先確定中位數落在 c 的哪一邊。
- 取了負的平方根，令 M 落在 $[a, b]$ 之外。
- 不作平移，直接以 x 展開平均值的積分：這樣做也可以，但代數運算繁重得多，容易出錯。

STEP 之外

當 c 是中點時，三角分佈（triangular distribution）就是兩個獨立均勻隨機變量（uniform random variable）之和的分佈；而在只知道最小值、最大值和最可能值的情況下（例如項目規劃），三角分佈亦廣泛用作粗略的模型。計算獨立隨機變量之和的分佈會引出卷積（convolution），這是大學一年級概率論的核心工具。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）是閱讀這方面內容的好起點。

詳細解答

STEP II 2014，第 1 題

純數學 • 三角形幾何與二次方程

> **STEP II 2014，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q1

關鍵思路

沿着鋸齒形路線 $A \to P \to Q \to B$ 由 A 走到 B。三段路的長度都是 x，合起來必須剛好走過水平距離 1，而淨上升高度為 0。分別沿水平及鉛直方向分解（resolving），得到 $x\cos\theta$ 和 $x\sin\theta$，再利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 消去未知角。之後的一切，就只是一條關於 x 的二次方程（quadratic equation）及其判別式（discriminant）。

解答

把 A 放在原點，B 放在 $(1,0)$，而 C 在 AB 上方。由於 P 位於由 A 出發經過 C 的射線（ray）上，與 A 的距離為 x；而 Q 位於由 B 出發經過 C 的射線上，與 B 的距離為 x，所以

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

第 (i) 部分

水平方向。$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 的水平分量（component）分別為 $x\cos\alpha$、$x\cos\theta$ 和 $x\cos\beta$，它們之和等於 $AB = 1$。因此

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

這就是第一個結果。（以坐標來說：這是 Q 與 P 的 x 坐標之差。）

鉛直方向。P 的高度為 $x\sin\alpha$，Q 的高度為 $x\sin\beta$，所以

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

（這個值永不為負：由於三角形的內角和小於 180°，有 $\alpha \le \beta < 180° - \alpha$，而在這個區

間上 $\sin\beta \geq \sin\alpha$。所以 Q 永遠不會低於 P。）

消去 θ。把兩式平方後相加，並利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，得

$$x^2 = \big(1 - x(\cos\alpha + \cos\beta)\big)^2 + x^2(\sin\beta - \sin\alpha)^2.$$

展開右方，x^2 的係數為

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &\quad + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

所以 $x^2 = 1 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + \big(2 + 2\cos(\alpha+\beta)\big)x^2$。把 x^2 移到右方，得

$$\big(1 + 2\cos(\alpha+\beta)\big)x^2 - 2(\cos\alpha + \cos\beta)x + 1 = 0, \qquad (*)$$

此即所求。

***P* 和 *Q* 在兩邊的延長線上**。若 P 位於 AC 的延長線（produced）上，它仍然在由 A 出發經過 C 的射線上，與 A 的距離為 x，所以其坐標仍是 $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$。同理，$Q$ 仍是 $(1 - x\cos\beta, x\sin\beta)$。上面的推導並沒有用到其他東西：由 P 到 Q 的位移為

$$\big(1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,\ x\sin\beta - x\sin\alpha\big),$$

而 $PQ^2 = x^2$ 給出完全相同的方程 $(*)$。（此時 x 可以大於 AC 和 BC，而 $1 - x\cos\alpha - x\cos\beta$ 可以是負數，所以 θ 可以是鈍角。這並無影響，因為平方後正負號便消失了。）

第 (ii) 部分

方程 $(*)$ 是線性方程，當且僅當 $1 + 2\cos(\alpha+\beta) = 0$，即 $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2}$。由於 $0 < \alpha + \beta < 180^\circ$，唯一的可能是

$$\alpha + \beta = 120^\circ.$$

否則 $(*)$ 是一條真正的二次方程，其判別式的四分之一為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta &= (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - \big(1 + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\big) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta \\ &= 1 - (\sin\beta - \sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

這裏用了 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ 及 $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$。

? **想一想** 為甚麼 $(\sin\beta - \sin\alpha)^2$ 必定小於 1？

兩個角都嚴格介乎 0° 與 180° 之間，所以 $0 < \sin\alpha \le 1$ 及 $0 < \sin\beta \le 1$。兩個屬於 $(0,1]$ 的數之差嚴格介乎 -1 與 1 之間。因此 $(\sin\beta - \sin\alpha)^2 < 1$，故 $\Delta > 0$，而 $(*)$ 有兩個相異實根。

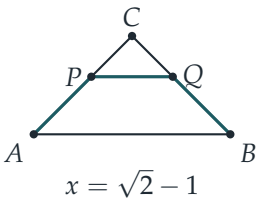
第 (iii) 部分

(a) $\alpha = \beta = 45^\circ$。此時 $\cos(\alpha+\beta) = \cos 90^\circ = 0$ 且 $\cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{2}$，所以 $(*)$ 為

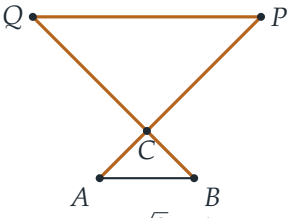
$$x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0, \qquad x = \sqrt{2} \pm 1.$$

這個三角形是等腰直角三角形，$C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，且 $AC = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$。

- $x = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414 < AC$：$P$ 和 Q 位於兩邊上，分別在 $P = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$。由對稱性，$PQ$ 與 AB 平行，所以 $\theta = 0$。驗證：$PQ = \sqrt{2} - 1 = x$。
- $x = \sqrt{2} + 1 \approx 2.414 > AC$：$P$ 和 Q 分別位於 AC 的延長線和 BC 的延長線上，在 $P = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $Q = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$。兩條延長線已在 C 點相交而過，所以現在 P 在 Q 的*右方*。PQ 同樣是水平的，長度為 $1 + \sqrt{2} = x$。



$x = \sqrt{2} - 1$

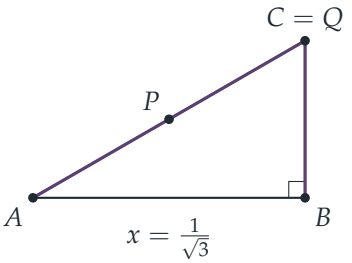


$x = \sqrt{2} + 1$

(b) $\alpha = 30^\circ$，$\beta = 90^\circ$。現在 $\alpha + \beta = 120^\circ$，所以這正是第 (ii) 部分中的線性情況。由於 $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$(*)$ 變成

$$-\sqrt{3}\,x + 1 = 0, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

這個三角形的直角在 B，$BC = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$，而 $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$。所以 $QB = BC$ 表示 Q 就是 C，而 $AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}AC$ 使 P 位於 AC 的中點。於是 $PQ = PC = \frac{1}{\sqrt{3}} = x$，正如所料。這是唯一的可能。



第二個根去了哪裏？若 $\alpha+\beta=120°$，直線 AC 和 BC 相交成 60°。當 x 非常大時，沿這兩條直線遠處的點 P 和 Q 之間的距離便幾乎剛好是 x，與 C 組成一個近乎等邊的三角形。當 $\alpha+\beta\to 120°$ 時，二次方程的其中一個根便趨向無窮大。

驗算

- 在 (a) 中，$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，與兩根之積 $1/(1+2\cos 90°)=1$ 吻合。
- 對任意一個三角形，例如 $\alpha=40°$、$\beta=70°$，解 $(*)$，定出 P 和 Q 的位置並量度 PQ：對兩個根而言，它都等於 x。我們已用電腦對許多隨機三角形驗證過這一點，誤差約為 10^{-10}。
- 在 (b) 中，$x=1/\sqrt{3}\approx 0.577$ 剛好等於 BC，而 AC 的中點為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}})$，與 $C=(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的距離為 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。

常見錯誤

- 把 $\cos\beta$ 項的正負號弄錯：$\overrightarrow{QB}$ 是朝向 B 的，所以即使 Q 在 B 的左方，其水平分量仍是 $+x\cos\beta$。
- 在第 (ii) 部分中容許 $\alpha+\beta=240°$。三角形的內角和小於 180°。
- 在 (b) 中，首項係數為零時仍試圖使用二次公式，或斷定方程無解。

STEP 之外

把一個封閉的向量多邊形分解成分量，再用 $\cos^2+\sin^2=1$ 消去一個角，是運動學（kinematics）和連桿（linkage）問題中的標準技巧：我們的鋸齒形路線就是一個簡單的三桿連桿。當二次方程退化為線性方程時「逃往無窮遠」的那個根，讓我們初次窺見射影幾何（projective geometry）。在射影幾何中，平行線相交於無窮遠點，而只要把這些點也計算在內，二次方程總有兩個根。Coxeter 與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*

(《幾何再探》) 是在這個程度上踏入古典幾何的絕佳入門書。

詳細解答

STEP II 2014，第 2 題

純數學 • 積分不等式

> **STEP II 2014，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 3.7 節 $\pi^2 \leq 10$ 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/wirtinger.html

關鍵思路

$(*)$ 兩邊都是積分，對任何明確給出的 f 都可以精確計算，所以每一個在兩端都等於零的函數，都會把 $(*)$ 變成一條涉及 π 的數值不等式。真正需要選擇的，只是怎樣取自由常數，使 $f(0) = f(\pi) = 0$。若函數在某一端不等於零，它可以數值很大而變化很慢，這正是端點條件（end conditions）重要的原因。

解答

第 (i) 部分

取 $f(x) = \sin nx$，則 $f'(x) = n\cos nx$。利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ 及 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$，

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\left[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

這是因為對整數 n 有 $\sin 2n\pi = 0$。由於 $n \geq 1$，故 $n^2 \geq 1$，於是 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{n^2\pi}{2}$，$(*)$ 成立（當且僅當 $n = 1$ 時取等號）。

反例（counterexamples）。取 $f(x) = \pi - x$，它滿足 $f(\pi) = 0$，但 $f(0) = \pi \neq 0$。於

是 $f'(x) = -1$，而

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

由於 $\pi^2 > 3$，得 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$，所以 $(*)$ 不成立。同理，$f(x) = x$ 滿足 $f(0) = 0$，但 $f(\pi) = \pi \neq 0$，它給出相同的兩個積分，$\frac{\pi^3}{3} > \pi$，所以 $(*)$ 再次不成立。因此，即使另一個端點條件成立，兩個端點條件都不能省去。

第 (ii) 部分

二次函數(quadratic)。我們需要 $f(0) = c = 0$ 及 $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$，所以 $b = -a\pi$，且 $f(x) = ax(x - \pi)$。若取 $a = 0$，則 $f \equiv 0$，只得到毫無用處的不等式 $0 \leq 0$，所以取 $a \neq 0$。當 f 乘以 a 時，$(*)$ 兩邊都乘以 a^2，所以不妨取 $a = -1$：

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

代入 $x = \frac{\pi}{2} + u$，可使兩個積分都變得對稱：$f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$，$f' = -2u$，而 u 的範圍是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。記 $h = \frac{\pi}{2}$，

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^h \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^h 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

所以 $(*)$ 給出 $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$，兩邊除以正數 $\frac{\pi^3}{30}$，得

$$\pi^2 \leq 10,$$

即為所求。

三角函數（trigonometric function）。現在 $f(0) = q + r$，而 $f(\pi) = p \sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$。兩者同時為零，當且僅當 $p = q = -r$。同樣地，$r = 0$ 會給出 $f \equiv 0$，而縮放並無影響，所以取 $r = -1$：

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

? **想一想** 怎樣把 f 平方，而不弄出一大堆交叉項（cross terms）？

把它組合成 $(s + c) - 1$，其中 $s = \sin\frac{1}{2}x$，$c = \cos\frac{1}{2}x$。於是 $(s + c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$，所以

$$f^2 = (s + c)^2 - 2(s + c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{1}{2}x - 2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

利用 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$、$\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$ 及 $\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$，

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

同樣地，$(c-s)^2 = 1 - \sin x$，所以

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi - 2}{4}.$$

於是 $(*)$ 表示 $2\pi - 6 \le \frac{1}{4}(\pi - 2)$，即 $8\pi - 24 \le \pi - 2$，所以

$$7\pi \le 22, \qquad \text{即} \qquad \pi \le \frac{22}{7}.$$

比較。把第二條不等式平方（兩邊皆為正數），得

$$\pi^2 \le \frac{484}{49} < \frac{490}{49} = 10.$$

所以三角函數的選擇給出較小的上界（upper bound）$\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$，因此是較好的估計。兩者都是上界，所以較小的一個更接近真實值。

驗算

- 真實值為 $\pi^2 \approx 9.8696$，低於 10 及 $\frac{484}{49} \approx 9.8776$，這是必然的。
- 以數值計算，對於三角函數 f，$(*)$ 兩邊分別為 $2\pi - 6 \approx 0.2832$ 及 $\frac{1}{4}(\pi - 2) \approx 0.2854$：兩者非常接近，所以界 $\pi \le \frac{22}{7}$ 才會如此精確。對於二次函數，兩邊分別為 $\frac{\pi^5}{30} \approx 10.20$ 及 $\frac{\pi^3}{3} \approx 10.34$。
- 在第 (i) 部分中，$n = 1$ 時取等號，所以 $\sin x$ 是 $(*)$ 的極端情況。三角函數 f 的形狀與 $\sin x$ 很接近，而 $x(\pi - x)$ 則稍遜一點，這解釋了為何某個界較好。

常見錯誤

- 選取像 $f = 1$ 這樣同時破壞兩個端點條件的反例。這樣做是正確的，但 $\pi - x$ 和 x 說明得更多：每個條件本身都是必需的。
- 在三角函數的情況下計算 f^2 的積分時，忘記 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$（而不是 0）。
- 因為 10 是個「較整齊」的數，便說它是較好的估計。兩者都是上界，所以較小的一個才較好。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 就是 Wirtinger 不等式（Wirtinger's inequality），而最佳常數 1 來自 $\sin x$：它是在 $f(0) = f(\pi) = 0$ 條件下 $-f'' = \lambda f$ 的最小特徵值（eigenvalue）。以選定的函數代入 $(*)$ 來測試，就是瑞利–里茲方法（Rayleigh–Ritz method），它總是給出該特徵值的上界，也是工程師估算振動頻率的基礎。傅里葉級數（Fourier series）則能給出 $(*)$ 本身的一個簡潔證明。有關背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；有關特徵值方面，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

詳細解答

STEP II 2014，第 3 題

純數學 • 切線與包絡線

STEP II 2014，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q3

關鍵思路

在 P 點的切線（tangent）其實只是一條直線，斜率（gradient）為 y'，y 截距（y-intercept）為 $y - xy'$，因此第 (i) 部分把「距離恆定」這個性質化為一條微分方程（differential equation）。把這條方程微分後會出現因子 y''，而令乘積為零的兩種方式，正好給出兩族曲線：直線（$y'' = 0$）和一個圓。第 (iii) 部分則要求我們把這些曲線的片段平滑地拼接起來。

解答

第 (i) 部分

若 $m = 0$，直線為 $y = c$，距離顯然是 c，所以設 $m \neq 0$。直線與 y 軸交於 $A = (0, c)$，並與 x 軸成銳角（acute angle）θ，其中 $\tan\theta = |m|$。設 N 為由 O 到該直線的垂足（foot of the perpendicular）。在直角三角形 ONA 中，直線與 y 軸在 A 點所成的角為 $\frac{\pi}{2} - \theta$，所以角 AON 為 θ，於是

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

（求 $x^2 + (mx+c)^2$ 的最小值也會得到同一結果：這是 x 的二次式（quadratic），在 $x = -\frac{mc}{1+m^2}$ 時取最小值 $\frac{c^2}{1+m^2}$。）

若 $c < 0$，以原點作反射（reflection），直線會變成 $y = mx + |c|$，而與 O 的距離不變，所以一般而言距離為 $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$。

第 (ii) 部分

在 $P=(x,y)$ 點，切線的斜率為 y' 並經過 P，所以以坐標 (X,Y) 表示，其方程為

$$Y=y'X+(y-xy').$$

這是第 (i) 部分那種形式的直線，其中 $m=y'$、$c=y-xy'$（按假設它不是鉛垂線）。因此它與 O 的距離為

$$a=\frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

兩邊平方得

$$(y-xy')^2=a^2\big(1+(y')^2\big). \qquad (*)$$

微分。這裏 a 是常數，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y-xy')=y'-y'-xy''=-xy''$。所以把 $(*)$ 微分得

$$2(y-xy')(-xy'')=2a^2y'y'', \qquad \text{即} \qquad y''\big[\,x(y-xy')+a^2y'\,\big]=0.$$

想一想 乘積為零，怎樣變成曲線的兩種不同情況？

在每一點，要麼 $y''=0$，要麼方括號內的式子為零。在曲線上 $y''=0$ 的一段，曲線是直的；在 $y''\neq 0$ 的一段，方括號必須為零。我們逐一處理這兩種情況。（我們假設 $a>0$；若 $a=0$，每條切線都經過 O，C 就只是一條經過原點的直線。）

情況一：$y''=0$。此時 $y'=m$ 為常數，而 $y=mx+k$，其中 m、k 為常數。代入 $(*)$（此時 $y-xy'=k$），得 $k^2=a^2(1+m^2)$，所以

$$y=mx\pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

情況二：方括號爲零。此時 $xy-x^2y'+a^2y'=0$，所以

$$(x^2-a^2)\,y'=xy.$$

首先，$x^2\neq a^2$：若 $x=\pm a$，則 $xy=0$ 迫使 $y=0$，而 $(*)$ 變成 $a^2(y')^2=a^2\big(1+(y')^2\big)$，這是不可能的。所以我們可以相除：

$$y'=\frac{xy}{x^2-a^2}, \qquad y-xy'=\frac{y(x^2-a^2)-x^2y}{x^2-a^2}=\frac{-a^2y}{x^2-a^2}.$$

把兩者代入 $(*)$，再全式乘以 $(x^2-a^2)^2/a^2$：

$$\begin{aligned} & a^2y^2=(x^2-a^2)^2+x^2y^2 \\ \iff \quad & y^2(a^2-x^2)=(a^2-x^2)^2 \\ \iff \quad & (a^2-x^2)\,(x^2+y^2-a^2)=0. \end{aligned}$$

由於 $a^2 - x^2 \neq 0$，我們得出 $x^2 + y^2 = a^2$。

所以，要麼對某個 m 有 $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，要麼 $x^2 + y^2 = a^2$，正如所求。兩者確實都具有該性質：由第 (i) 部分，這些直線與 O 的距離為 a；而以 O 為圓心、半徑為 a 的圓，其每條切線與 O 的距離都是 a。

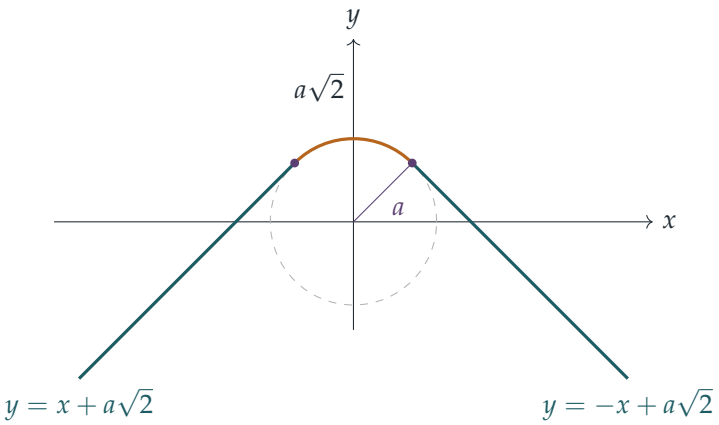
第 (iii) 部分

在直線段與圓弧相接之處，C 必須有切線，所以直線在該點的斜率必須與圓弧相同：每條直線都是圓在圓弧端點處的切線。此外，每條切線都必須不是鉛垂線，所以圓弧不能到達 $(\pm a, 0)$ 兩點；又因為 C 是 x 的函數（function）的圖像，它只能用圓的上半部或只用下半部。

一個例子：取 $x^2 + y^2 = a^2$ 上由 $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 經頂部到 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 的圓弧，兩端再以該處的切線延伸：

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

這兩條直線的 $m = \pm 1$，截距為 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，符合情況一的要求。在 $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ 處，圓弧的斜率為 $-\frac{x}{y} = \mp 1$，與直線吻合，所以斜率處處連續（continuous）且有限。



上半圓（或下半圓）上任何不包含 $(\pm a, 0)$ 的圓弧，兩端以其切線延伸，都同樣可行。

驗算

- 在第 (i) 部分，$m = 0$ 給出距離 c；當 $|m| \to \infty$，直線變得陡峭，距離趨於 0，這對經過 $(0, c)$ 的直線來說理應如此。

- 在圓上，$y' = -x/y$ 給出 $y - xy' = a^2/y$，而 $(*)$ 兩邊都等於 a^4/y^2。
- 對於 $a = 1$ 的例子，我們用電腦在 $x = -5$ 至 $x = 5$ 之間的 1001 個點檢查了 O 到切線的距離，每次都是 1；例如在 $x = 2$，切線為 $y = -x + \sqrt{2}$，距離為 $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$。

常見錯誤

- 把微分後的方程除以 y''，因而遺漏了直線解。
- 忘記 a 是常數，或把 xy' 微分成 y'，而不是 $y' + xy''$。
- 在第 (iii) 部分，直線與圓弧在接駁處形成尖角，或用了整個半圓，而半圓兩端的切線是鉛垂的。

STEP 之外

這裏的圓是直線族 $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ 的包絡線（envelope），而 $(*)$ 是一條克萊羅方程（Clairaut equation）$y = xy' + f(y')$：它的通解（general solution）是一族直線，而它的奇解（singular solution）就是這族直線的包絡線。把 $(*)$ 視為 y' 的二次方程，其判別式（discriminant）為 $4a^2(x^2 + y^2 - a^2)$，所以兩個斜率選擇恰好在圓上重合；這就是為甚麼解可以像第 (iii) 部分那樣在圓上拼接，也是為甚麼解的唯一性（uniqueness）不成立。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了一階方程解的存在性（existence）與唯一性。

詳細解答

STEP II 2014，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2014，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q4

關鍵思路

代換（substitution）$u = 1/x$ 會把區間 $[1/b, b]$ 的兩個端點互換，因此它把積分 I 變回同一範圍上的積分。若新的被積函數（integrand）只是原來的被積函數變了號，便得到 $I = -I$。若新的被積函數與原來的密切相關，把 I 的兩種形式相加，可能得到一個容易積分得多的被積函數。在最後一部分，同樣的技巧（取 $u = a^2/x$，使 $[0, \infty)$ 映射到自身）會給出一條方程，從中可解出所求的積分。

解答

第 (i) 部分

記該積分為 I。令 $x = 1/u$，則 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ 及 $\ln x = -\ln u$。當 $x = 1/b$ 時 $u = b$；當 $x = b$ 時 $u = 1/b$。此外

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

最後這個積分其實就是 I，只是把啞變數（dummy variable）改了名。因此 $I = -I$，得 $I = 0$，即所求。（由於 $b > 0$，被積函數在 $[1/b, b]$ 上連續，所以 I 是一個有限的數，這一步是成立的。）

第 (ii) 部分

記這個積分為 I。同樣的代換給出 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u\cdot\big(-\frac{1}{u^2}\big)\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$，而積分上下限也像之前一樣互換：

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big(-\frac{1}{u}\Big)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

這一次並非單純變號，所以我們把這個形式與原來的形式相加：

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

想一想 當 $u>0$ 時，$\arctan u + \arctan(1/u)$ 等於多少？

設 $\theta = \arctan u$，其中 $u>0$，則 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta = 1/u$。由於 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 亦位於 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內，它就是 $\arctan(1/u)$。所以對所有 $u>0$，$\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$。（當 $u<0$ 時，兩者之和為 $-\frac{\pi}{2}$，但 $[1/b, b]$ 內每個 u 都是正數。）因此

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}\big(\ln b - \ln(1/b)\big) = \pi\ln b,$$

所以 $I = \dfrac{\pi\ln b}{2}$，即所求。無論 $b>1$ 還是 $0<b<1$，此結果均成立。

第 (iii) 部分

設 $J = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$。這個積分收斂（converge），因為被積函數連續，而且當 x 很大時不超過 $1/x^4$。我們想要一個代換，把 $(0,\infty)$ 映射到自身，並把 a^2+x^2 變成 a^2+u^2 的某個倍數，所以取 $u = a^2/x$，即 $k = a^2$。於是 $x = a^2/u$，$\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$，$x\to 0^+$ 對應 $u\to\infty$，而且

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2+a^2)}{u^2}.$$

因此

$$J = \int_{\infty}^{0}\frac{u^4}{a^4(a^2+u^2)^2}\Big(-\frac{a^2}{u^2}\Big)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

現在把分子寫成 $u^2 = (a^2+u^2) - a^2$：

$$\frac{u^2}{(a^2+u^2)^2} = \frac{1}{a^2+u^2} - \frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}.$$

兩部分在 $(0,\infty)$ 上的積分都收斂，所以可以把積分拆開。利用題目給出的結果，

$$J = \frac{1}{a^2}\Big(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\Big) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

因此 $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$，所以

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

即所求。

驗算

- 在 (ii) 中，$b = 1$ 給出長度為零的區間，而 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$ 確實成立。把 b 換成 $1/b$ 會使上下限互換，所以積分應該變號，而 $\ln(1/b) = -\ln b$ 與此吻合。
- 在 (iii) 中，答案應有正確的標度關係：令 $x = at$ 得 $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$，所以 J 必定是某常數乘以 a^{-3}。取 $a = 1$，代換 $x = \tan\theta$ 給出 $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$，與結果相符。
- 以數值計算，(ii) 中的積分在 $b = 2$ 時為 $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$。對於若干隨機選取的 a 和 b，(i) 中的積分計算結果都是 0（準確至多個小數位）。

常見錯誤

- 忘記 $u = 1/x$ 同時會使上下限倒轉。$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ 帶來的負號和上下限的互換，兩者都必須留意。
- 使用 $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ 時沒有說明它需要 $u > 0$。
- 在 (iii) 中，得到 $\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ 後就停下來，沒有發現它可以改寫成以 J 和題目給出的積分表示。

STEP 之外

利用定義域的對稱性把一個積分與其自身聯繫起來，是一個常見技巧。它會在圍道積分（contour integration）以及諸如 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 的積分中再次出現。(iii) 中的積分亦來自一個一般的積分族：把 $\int_0^\infty (\lambda+x^2)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lambda^{-1/2}$ 對 λ 求導，即可立刻得到同樣的答案（「積分號下求導」（differentiation under the integral sign））。實分析（real analysis）課程會解釋這類步驟，以及反常積分（improper integral）的處理，在甚麼情況下是容許的。參見 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）。

詳細解答

STEP II 2014，第 5 題

純數學 • 齊次微分方程

STEP II 2014，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q5

關鍵思路

兩條方程的右方都是兩個線性式之比。在 (i) 中，每一項都是一次項，因此斜率（gradient）只取決於 y/x，代入 $y = xu$ 便可把方程化為可分離變數（separable）的方程。在 (ii) 中，常數項破壞了這個性質，但只要把原點移到分子和分母所代表的兩條直線的交點，便可消去常數項；之後就跟 (i) 完全一樣。

解答

若 $y = xu$，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

第 (i) 部分

把右方的分子和分母同除以 x，方程變為

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{所以} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

分離變數，得

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 不用部分分式（partial fractions），怎樣積分左方？

把分母求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$。因此分子是分母導數的 $-\frac{1}{2}$ 倍，

於是

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

兩邊乘以 -2 再取指數，得 $x^2\,|1+4u-u^2| = A$，其中 A 為正常數；即對某常數 K 有 $x^2(1+4u-u^2) = K$（沿着曲線，符號保持不變）。現代入 $u = y/x$，使得 $x^2(1+4y/x - y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$：

$$x^2+4xy-y^2 = K.$$

在 $(1,1)$ 處得 $K = 1+4-1 = 4$，所以解曲線為

$$\boxed{x^2+4xy-y^2 = 4}$$

（在 $(1,1)$ 處 $u=1$，此時 $1+4u-u^2 = 4 \neq 0$ 且 $u \neq 2$，所以我們除過的式子在起點處都不為零。）

第 (ii) 部分

直線 $x-2y-4=0$ 與 $2x+y-3=0$ 相交於 $y = 3-2x$ 且 $x-2(3-2x)-4=0$ 之處，即 $(2,-1)$。因此取 $a=2$、$b=-1$：$x = X+2$，$y = Y-1$。於是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$，而且

$$x-2y-4 = (X+2)-2(Y-1)-4 = X-2Y,$$
$$2x+y-3 = 2(X+2)+(Y-1)-3 = 2X+Y,$$

所以常數項消失了：

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

這與 (i) 的形式相同，所以代入 $Y = XV$：

$$V + X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$，分子同樣是分母導數的倍數。因此

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

與之前一樣得 $X^2(1-4V-V^2) = K$，即

$$X^2-4XY-Y^2 = K.$$

點 $(1,1)$ 對應 $X=-1$、$Y=2$，得 $K = 1-4(-1)(2)-4 = 5$。換回 x 和 y，

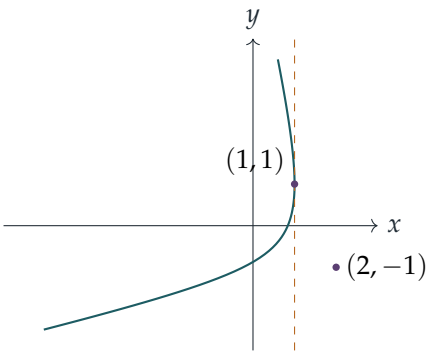
$$(x-2)^2-4(x-2)(y+1)-(y+1)^2 = 5,$$

展開得

$$(x^2-4x+4)-4(xy+x-2y-2)-(y^2+2y+1) = 5$$
$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{x^2-4xy-y^2-8x+6y+6=0}$$

想一想 在 $(1,1)$ 處，分母 $2x+y-3$ 等於零。這個解還有意義嗎？

有：該處的斜率為無窮大，所以曲線在 $(1,1)$ 處有一條鉛垂切線（vertical tangent）。隱方程（implicit equation）完全可以描述這條曲線，只是它在該點附近並非某個函數 $y(x)$ 的圖像而已。換句話說，x 是 y 的光滑函數。把二次方程對 x 求解，在經過 $(1,1)$ 的分支上得 $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$；由於 $5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$，它對所有 y 都有定義，並在 $y=1$ 時取得最大值 $x=1$。



圖中顯示經過 $(1,1)$ 的分支（藍綠色），它在該點與鉛垂線 $x=1$（虛線）相切；$(2,-1)$ 是雙曲線（hyperbola）的中心。

驗算

- 對答案進行隱函數求導（implicit differentiation）。在 (i) 中，由 $2x+4y+(4x-2y)y'=0$ 得 $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$，符合要求。在 (ii) 中，由 $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=0$ 得 $y'=\dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$。
- 兩條曲線都經過 $(1,1)$：$1+4-1=4$ 及 $1-4-1-8+6+6=0$。
- 用電腦從 $(1,1)$ 出發，以數值方法逐步求解每條微分方程（differential equation），方框內方程的左方一直保持等於 4 和 0，誤差約為 10^{-13}。在 (i) 中，$(1,1)$ 處的斜率為 -3。

常見錯誤

- 在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=u+x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 中漏掉 u，結果得到錯誤的可分離方程。
- 在 (ii) 中用錯坐標代入條件：點 $(1,1)$ 會變成 $(X,Y)=(-1,2)$，而不是 $(1,1)$。

► 對 u 貿然使用部分分式：$1 + 4u - u^2$ 的根是 $2 \pm \sqrt{5}$，計算繁複，而被積函數其實已經是 f'/f 的形式。

STEP 之外

右方只取決於 y/x 的方程稱為齊次方程（homogeneous equation），而 (ii) 中平移原點的做法，是處理線性函數之比的標準技巧。這裏的兩條方程同時也是恰當方程（exact equation）：把 (i) 寫成 $(2y + x)\,\mathrm{d}x - (y - 2x)\,\mathrm{d}y = 0$，兩個係數滿足交叉偏導數檢驗，守恆量 $x^2 + 4xy - y^2$ 可以直接讀出。恰當方程、積分因子（integrating factor）以及線性系統的相圖（phase portrait）（這些雙曲線的真正身份正是如此），可參閱 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

詳細解答

STEP II 2014，第 6 題

純數學 • 三角級數

> **STEP II 2014，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q6

關鍵思路

把每個 $\cos rx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，就會變成兩個正弦之差，於是整個和式可以伸縮相消（telescopes）。這個和式正正就是 $S_n'(x)$，這也是題目給出這個恆等式的原因：它告訴我們 S_n 在哪裏有駐點（stationary point）。在這樣的點上，新加的項 $\frac{1}{n}\sin nx$ 原來是非負的，所以加上它不會製造出負的極小值；再從 $S_1 = \sin x$ 開始用歸納法（induction），就可以完成證明。

解答

餘弦之和

利用和差化積公式(factor formula)$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，取 $A = (r+\frac{1}{2})x$、$B = (r-\frac{1}{2})x$，得

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

由 $r = 1$ 加到 n，右邊加起來是 $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$，而左邊除了首項和末項之外全部互相抵消：

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

兩邊除以 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$，即得所求結果。留意逐項微分（differentiating term by term）可得

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

所以這個恆等式就是 S_n' 的閉形式（closed form）。

第 (i) 部分

這裏 $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$，所以

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

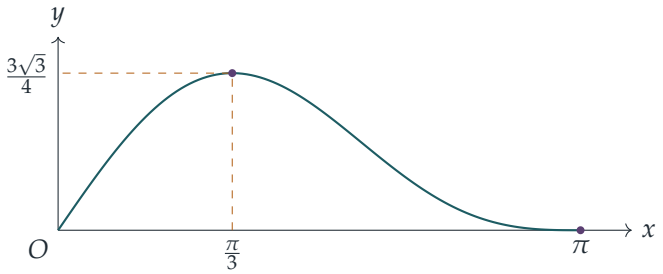
在 $[0, \pi]$ 上，當 $\cos x = \frac{1}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{3}$，以及當 $\cos x = -1$，即 $x = \pi$ 時，它等於零。對應的值為

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

由於 $\cos x + 1 \geq 0$，S_2' 的正負號與 $2\cos x - 1$ 相同：在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 上為正，在 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ 上為負。所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 是極大值（maximum），而 S_2 由此遞減至 $x = \pi$ 時的 0，到達時斜率為零。在 π 附近，設 $x = \pi - t$，

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

所以曲線到達橫軸時會像三次曲線般變得平坦。此外 $S_2(0) = 0$，且 $S_2'(0) = 2$。



第 (ii) 部分

假設 $S_n'(x_0) = 0$，其中 $0 < x_0 < \pi$。那麼 $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$，所以恆等式適用，得 $\sin(n + \frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$。展開左邊，

$$\sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0\sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1 - \cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

由於 $0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$，兩邊除以它得

$$\sin nx_0 = (1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

此即所求。因此，對於 $n \geq 2$，

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1 - \cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

因為 $1 - \cos nx_0 \geq 0$ 且 $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$。所以 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$。

現在假設對所有 $x \in (0, \pi)$ 都有 $S_{n-1}(x) > 0$，並用反證法（proof by contradiction），假設存在某個 $c \in (0, \pi)$ 使得 $S_n(c) \leq 0$。

想一想 我們怎樣知道有駐點可用？

S_n 在閉區間（closed interval）$[0,\pi]$ 上連續（continuous），所以它在那裏取得最小值 m，而且 $m \le S_n(c) \le 0$。若 $m < 0$，由於 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$，最小值不在端點；若 $m = 0$，則 c 本身就是取得最小值的內點。無論哪種情況，都存在 $x_0 \in (0,\pi)$ 使得 $S_n(x_0) = m \le 0$；又由於 S_n 可微（differentiable），內部的最小值必定是駐點：$S_n'(x_0) = 0$。於是前面的結果給出

$$0 \ge S_n(x_0) \ge S_{n-1}(x_0) > 0,$$

矛盾。所以對所有 $x \in (0,\pi)$ 都有 $S_n(x) > 0$。

第 (iii) 部分

我們用歸納法證明當 $0 < x < \pi$ 時 $S_n(x) > 0$。當 $n = 1$ 時，在 $(0,\pi)$ 上 $S_1(x) = \sin x > 0$。若結論對 S_{n-1} 成立，則第 (ii) 部分說明它對 S_n 亦成立。所以結論對每個 $n \ge 1$ 都成立。在端點處，每一項 $\frac{1}{r}\sin rx$ 都是零，所以 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$。因此對所有 $n \ge 1$ 及 $0 \le x \le \pi$，都有 $S_n(x) \ge 0$。

驗算

- 在餘弦之和中代入 $n = 1$：$\dfrac{\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ 應該等於 $\cos x$，而由和差化積公式，它確實如此。
- 第 (i) 部分與恆等式吻合：$S_2' = 0$ 即 $\sin\frac{5}{2}x = \sin\frac{1}{2}x$，它在 $(0,\pi]$ 內的解是 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $x = \pi$。
- 極大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ 與在細密網格上直接計算 S_2 的結果相符。電腦驗算找出了 $2 \le n \le 40$ 時 S_n 在 $(0,\pi)$ 內的每一個駐點，並在每一點確認了第 (ii) 部分的恆等式及 $S_n(x_0) \ge S_{n-1}(x_0)$；亦確認了對於 $n \le 60$，在區間內部 $S_n > 0$。

常見錯誤

- 論證「處處 $S_n \ge S_{n-1}$」。這是錯的（例如在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上 $\sin 2x < 0$）；這個不等式只在 S_n 的駐點成立，所以才需要用最小值的論證。
- 找最小值時忘記端點：必須利用 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$，才能把非正的最小值定位在區間內部。
- 除以 $\cos\frac{1}{2}x_0$ 時沒有說明它為何是正數。

STEP 之外

第 (iii) 部分的結果就是 Fejér–Jackson–Gronwall 不等式。當 $n \to \infty$ 時，$S_n(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上收斂（converges）至 $\frac{1}{2}(\pi - x)$：$\sum \frac{1}{r} \sin rx$ 是鋸齒波（sawtooth wave）的傅里葉級數（Fourier series），而在 $x = 0$ 附近，部分和會出現過衝（吉布斯現象，Gibbs phenomenon）。傅里葉級數，以及它們何時收斂這個微妙的問題，是大學第一門分析或數學方法課程的核心課題。T. W. Körner 的 *Fourier Analysis*（《傅里葉分析》）是一部精彩而涵蓋廣泛的著作。

詳細解答

STEP II 2014，第 7 題

純數學 • 絕對值函數的圖像

> **STEP II 2014，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q7

關鍵思路

若干絕對值函數（modulus function）之和是分段線性（piecewise linear）的：只有在其中某個絕對值內的式子等於零的點，斜率（gradient）才會改變。因此 $|x-a|+|x-b|$ 的圖像是一個「浴缸」：在 a 與 b 之間是平坦的底部，兩旁是斜率為 ± 2 的缸壁。之後各條方程的解的個數，就歸結為比較斜率：斜率為 2 的圖像必定會追上斜率為 1 的圖像，而兩個斜率相同的圖像要麼重合，要麼永不相交。

解答

全文設 $f(x)=|x-a|+|x-b|$，其中 $a<b$。

第 (i) 部分

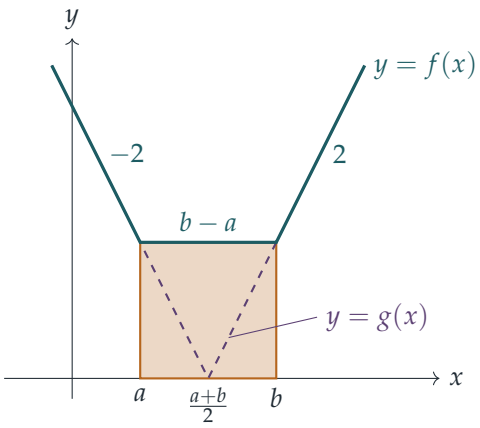
逐個區間去掉絕對值符號：

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

所以當 $x<a$ 時斜率為 -2，當 $a<x<b$ 時為 0，當 $x>b$ 時為 2。圖像是連續（continuous）的，在 $[a,b]$ 上方有一段高度為 $b-a$ 的平坦底部。

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$ 的圖像是一個 V 形，頂點在 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$，斜率為 ± 2。當 $x\ge b$ 時，$2x-a-b\ge b-a>0$，所以 $g(x)=2x-a-b=f(x)$；同理，當 $x\le a$ 時 $g(x)=a+b-2x=f(x)$。因此兩個圖像在 (a,b) 以外重合。在區間內，g 下降至 0，而

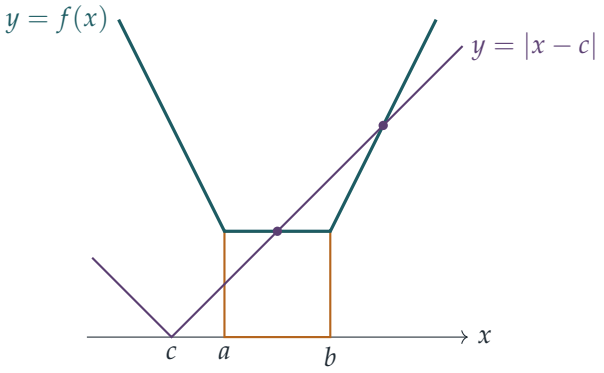
f 則保持在 $b-a$。（事實上 $f(x)=\max\{b-a,\, g(x)\}$。）



利用 $f(a)=f(b)=b-a$，可知該四邊形的頂點為 $(a,0)$、$(b,0)$、$(b,b-a)$ 和 $(a,b-a)$。它的底邊長 $b-a$，兩條鉛垂邊長 $b-a$，而且所有角都是直角。所以它是一個邊長為 $b-a$ 的**正方形**（square）。另外留意，由於 $g(a)=g(b)=b-a$，g 的 V 形從正方形底邊的中點出發，向上穿過它的兩個上方頂點。

第 (ii) 部分

現在比較 $y=f(x)$ 與 $y=|x-c|$；後者是一個頂點 $(c,0)$ 在 x 軸上、兩臂斜率為 ±1 的 V 形。關鍵事實是 f 恆不小於 $b-a>0$，而且它的缸壁（斜率 ±2）比 V 形的兩臂陡。草圖顯示 $c<a$ 的情況，此時 V 形與浴缸相交兩次。



情況 $a<c<b$：無解。在 $[a,b]$ 上，距離 $|x-c|$ 至多為 $\max\{c-a,\, b-c\}<b-a=f(x)$，所以 V 形嚴格位於浴缸底部之下。當 $x\geq b$ 時，

$$f(x)-|x-c|=(2x-a-b)-(x-c)=x-b+(c-a)\geq c-a>0,$$

而同樣的論證（或下文的對稱性（symmetry））可處理 $x \le a$ 的情況。所以 V 形完全處於浴缸之內，方程無解。

情況 $c = a$ 或 $c = b$：一個解。取 $c = a$。在 $[a, b]$ 上，$|x - a| = x - a \le b - a$，等號只在 $x = b$ 時成立。當 $x > b$ 時，$f(x) - (x - a) = x - b > 0$；當 $x < a$ 時，$f(x) - (a - x) = b - x > 0$。所以唯一的解是 $x = b$：V 形的右臂恰好穿過正方形的上方頂點 $(b, b - a)$。同理，當 $c = b$ 時唯一的解是 $x = a$。

情況 $c < a$：兩個解。左臂 $y = c - x$ 位於 $x \le c < a$ 的範圍，而 f 在該處的斜率為 -2。在 $x = c$ 處有 $f(c) > 0 = c - c$，而向左移動時 f 上升得比左臂快，所以對所有 $x \le c$ 都有 $f(x) > c - x$。左臂不給出任何解。

至於右臂 $y = x - c$（$x \ge c$），設 $k(x) = f(x) - (x - c)$。把 f 的各段斜率減去 1，可知 k 在 (c, a) 上斜率為 -3，在 (a, b) 上為 -1，當 $x > b$ 時為 $+1$。所以 k 在 $[c, b]$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），在 $[b, \infty)$ 上嚴格遞增。此外

$$k(c) = f(c) > 0, \qquad k(b) = (b - a) - (b - c) = c - a < 0, \qquad k(x) \to \infty \text{ 當} x \to \infty.$$

因此 k 在 (c, b) 內恰有一個零點，在 (b, ∞) 內也恰有一個零點。具體而言，它們是

$$x = a + b - c \quad \text{及} \quad x = \begin{cases} b - a + c, & 2a - b \le c < a, \\ \frac{1}{3}(a + b + c), & c < 2a - b, \end{cases}$$

其中第二個解分別落在浴缸的底部或其左壁上。

情況 $c > b$：兩個解。關於直線 $x = \frac{a+b}{2}$ 的反射（reflection）$x \mapsto a + b - x$ 使 f 保持不變（它把 $|x - a|$ 與 $|x - b|$ 互換），並把 $|x - c|$ 變為 $|x - c'|$，其中 $c' = a + b - c < a$。所以這個情況是上一個情況的鏡像。

總結：若 $a < c < b$，則有 0 個解；若 $c = a$ 或 $c = b$，則有 1 個解；若 $c < a$ 或 $c > b$，則有 2 個解。

第 (iii) 部分

設 $F(x) = |x - c| + |x - d|$。由第 (i) 部分，F 是第二個浴缸，在 $[c, d]$ 上方的底部高度為 $d - c$，缸壁斜率為 ± 2。由於 $d - c < b - a$，它的底部比 f 的更低也更窄。記

$$m = \tfrac{1}{2}(a + b), \qquad n = \tfrac{1}{2}(c + d)$$

為兩個底部的中點，並設 $h(x) = f(x) - F(x)$。

在最左方（當 $x \le \min\{a, c\}$ 時），兩個圖像都在各自的左壁上，所以 $h(x) = (a + b - 2x) - (c + d - 2x) = 2(m - n)$。在最右方（當 $x \ge \max\{b, d\}$ 時），$h(x) = 2(n - m)$。在兩者之間，h 是連續且分段線性的。

想一想 兩個圖像能否共有一整段線段，從而給出無限多個解？

只有在兩者斜率相同的地方才有可能。兩個底部都是平的，但它們處於不同高度 $b-a \neq d-c$，所以不會重疊。除此之外，斜率只在兩個圖像都位於左壁（$x < \min\{a,c\}$）或都位於右壁（$x > \max\{b,d\}$）時才相同，而在這些地方 $h = \pm 2(m-n)$。所以兩個圖像共有一段線段，當且僅當 $m = n$。

情況 $a+b=c+d$：無限多個解。此時當 $x \leq \min\{a,c\}$ 及 $x \geq \max\{b,d\}$ 時 $h = 0$。由於 $d-c < b-a$ 而兩個中點相同，有 $a < c < d < b$：小浴缸正好位於大浴缸的中央。當 $c \leq x \leq b$ 時，F 的圖像在其底部或右壁上，所以 $F(x) \leq 2b-c-d = b-a = f(x)$，等號只在 $x = b$ 時成立。由對稱性，在 $[a,d]$ 上亦然。所以解集恰好是 $x \leq a$ 連同 $x \geq b$。

情況 $a+b < c+d$：恰有一個解。此時在最左方 $h = 2(m-n) < 0$，在最右方 $h = 2(n-m) > 0$。h 在哪裏會遞減？這需要 f 的斜率小於 F 的斜率，有兩種可能。

- f 在其左壁上而 F 不在，這需要 $c < x < a$。於是 $c < a$，又由於 $d-c < b-a$，亦有 $d < b$，從而 $c+d < a+b$，但這在此情況下不成立。
- f 在其底部而 F 在其右壁上，這需要 $d < x < b$。

所以 h 在 $(-\infty, d]$ 上是非遞減的。在 $[d,\infty)$ 上，h 在 $[d,b]$ 上非遞增（若 $d < b$），然後當 $x \geq \max\{b,d\}$ 時恆等於 $2(n-m)$。所以對所有 $x \geq d$ 都有 $h(x) \geq 2(n-m) > 0$。在 $(-\infty, d]$ 上，h 從值 $2(m-n) < 0$ 不遞減地上升至 $h(d) > 0$，而且（由上面方框的討論）它不會在任何區間上恆等於零。所以 h 在該處恰有一個零點。總共恰有一個解。

情況 $a+b > c+d$：恰有一個解，可由反射 $x \mapsto -x$ 得出；這個反射把 a,b,c,d 換成 $-b,-a,-d,-c$，並使兩個和之間的不等式反向。

總結：在 $a < b$、$c < d$ 及 $d-c < b-a$ 的條件下，若 $a+b = c+d$（兩個區間的中點相同），則有無限多個解，即所有 $x \leq a$ 及所有 $x \geq b$。否則恰有一個解。

驗算

- 第 (ii) 部分取 $a=1$、$b=3$、$c=0$：解 $x = a+b-c = 4$ 及 $x = b-a+c = 2$ 分別給出 $|3|+|1| = 4$ 及 $1+1 = 2$，符合要求。取 $c=-5$ 時，第二個解是 $\frac{1}{3}(1+3-5) = -\frac{1}{3}$，而確實 $\frac{4}{3} + \frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3}+5|$。
- 第 (iii) 部分取 $a=0$、$b=10$、$c=6$、$d=7$：h 在最左方為 -3，在 $[6,7]$ 上升至 9，然後回落至 3 並保持不變。它唯一的零點是 $x = \frac{3}{2}$，此時兩邊都等於 10。
- 以電腦對數以萬計隨機選取的整數 a,b,c,d 作檢驗，每種情況下得到的解的個數都與上述完全一致。

常見錯誤

- 在 (ii) 中遺漏邊界情況 $c = a$ 及 $c = b$；此時 V 形剛好碰到正方形的一個頂點。
- 在 (iii) 中假設 h 是單調（monotonic）的。其實不然：當小浴缸偏離中央地位於大浴缸內時，h 在 (d, b) 上遞減。令解的個數不受影響的是，h 在該處已經是正數。
- 在 (iii) 中遺漏中點重合時的無限多解情況。

STEP 之外

函數 $|x - a| + |x - b|$ 是 x 到兩個點的距離總和。把這類距離之和最小化，正是統計學中中位數（median）以及 ℓ^1（「計程車」）範數（norm）背後的概念。像 f 這樣的函數是凸（convex）的，而這裏關於斜率逐段遞增的論證，正是凸分析（convex analysis）的起點；凸分析是線性規劃（linear programming）和最優化（optimisation）的基礎。Bartle 與 Sherbert 所著的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）把這裏用到的連續性和單調性論證嚴格化。

詳細解答

STEP II 2014，第 8 題

純數學 • 最大二項式係數

> **STEP II 2014，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q8

關鍵思路

要找出一個正項數列（sequence）在哪裏達到最大值，可以把每一項與下一項比較：考慮比值（ratio）c_{r+1}/c_r。對二項式展開（binomial expansion）而言，這個比值是 r 的一個簡單分式，而且穩定遞減，所以當它大於 1 時係數（coefficient）上升，一旦小於 1 係數便下降。最大的係數就在比值越過 1 的位置，而之後各部分都只需讀出某個式子的整數部分（integer part）。

解答

係數及其比值

由二項式定理（binomial theorem），

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

由於 $a, b > 0$，這些係數全部是正數。對 $0 \le r \le n-1$，

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

這裏用了 $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$。記

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

因為 $(r+1)a > 0$，

$$c_{r+1} \ge c_r \iff (n-r)b \ge (r+1)a \iff nb - a \ge r(a+b)$$
$$\iff r \le \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

而把各處換成 $=$ 後，同一串推導依然成立。因此

$$c_{r+1} > c_r \text{ 若} r < L-1, \qquad c_{r+1} = c_r \text{ 若} r = L-1, \qquad c_{r+1} < c_r \text{ 若} r > L-1. \qquad (*)$$

m 的上下界

上界（*upper bound*）。若 $m = 0$，由於 $L > 0$，有 $m \le L$。若 $m \ge 1$，由於 c_m 最大，有 $c_m \ge c_{m-1}$，再由 $(*)$ 取 $r = m-1$，得 $m-1 \le L-1$，即 $m \le L$。

下界（*lower bound*）。若 $m = n$，由於 $L < n+1$（因為 $\frac{b}{a+b} < 1$），有 $m \ge L-1$。若 $m \le n-1$，則 $c_m \ge c_{m+1}$，由 $(*)$ 取 $r = m$，便迫使 $m \ge L-1$。

所以在所有情況下都有

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \le m \le \frac{b(n+1)}{a+b},$$

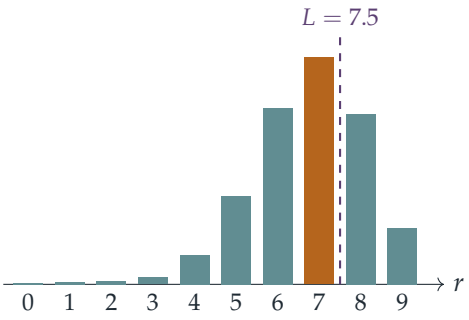
正是所求。

> **想一想** 為甚麼 m 不可能有三個值，或者有兩個不相鄰的值？

區間 $[L-1, L]$ 的長度是 1。若 L 不是整數，這個區間恰好包含一個整數 $\lfloor L \rfloor$，所以 m 是唯一的。若 L 是整數，區間恰好包含兩個相鄰整數 $L-1$ 和 L，所以 m 是其中之一。（事實上，由 $(*)$ 取 $r = L-1$ 可見 $c_{L-1} = c_L$，所以兩者確實都是最大的。）無論哪種情況，唯一的那個值，或兩個值中較大者，都是

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

從此以後，我們只需要這條公式。



按比例繪畫的 $(1+3x)^9$ 各項係數：當 $r < L-1 = 6.5$ 時係數上升，之後下降，在 $r = 7$ 處達到最大。

第 (i) 部分

對 $(n,a,b) = (9,1,3)$，$L = \frac{3\times 10}{4} = 7.5$，所以 $G(9,1,3) = 7$。

對 $(n,a,b)=(9,2,3)$，$L=\frac{3\times10}{5}=6$ 是整數，所以最大係數同時出現在 $r=5$ 和 $r=6$，而 $G(9,2,3)=6$。（驗證：$c_5=126\cdot2^4\cdot3^5=489\,888=84\cdot2^3\cdot3^6=c_6$。）

第 (ii) 部分

當 $a=b$ 時，$L=\frac{n+1}{2}$。

- $n=2k$：$L=k+\frac{1}{2}$，所以 $G(2k,a,a)=k$（即中間的係數，是唯一的）。
- $n=2k-1$：$L=k$ 是整數，所以中間兩個係數 $r=k-1$ 和 $r=k$ 相等，而 $G(2k-1,a,a)=k$。

這與帕斯卡三角形（Pascal's triangle）各行的對稱性（symmetry）吻合。

第 (iii) 部分

固定 n 和 b 時，$L=\frac{b(n+1)}{a+b}$ 是 a 的遞減函數（decreasing function），所以 $\lfloor L\rfloor$ 是 a 的非遞增函數（non-increasing function）。因此在正整數範圍內，它在 $a=1$ 時最大，此時 $G(n,1,b)=\left\lfloor\frac{b(n+1)}{b+1}\right\rfloor$。（其他 a 值可能與之相等，但沒有一個比它更大。）

第 (iv) 部分

現在

$$\frac{b(n+1)}{b+1}=(n+1)-\frac{n+1}{b+1}.$$

由於 $\frac{n+1}{b+1}>0$，此式小於 $n+1$，所以 $G(n,1,b)\le n$。（這亦可由 $m\le n$ 得出。）此外，

$$G(n,1,b)=n\iff(n+1)-\frac{n+1}{b+1}\ge n\iff\frac{n+1}{b+1}\le1\iff b\ge n.$$

所以 $G(n,1,b)$ 的最大可能值是 n，而且恰好在 $b\ge n$ 時達到。當 $b=n$ 時，最後兩個係數相等，因為 $c_{n-1}=n\cdot b^{n-1}=b^n=c_n$；當 $b>n$ 時，最後一個係數 b^n 是唯一的最大者。

驗算

- $(1+3x)^9$ 的係數是 $1,27,324,2268,10206,30618,61236,78732,59049,19683$：最大者在 $r=7$，與 (i) 的結果一致。
- 對 $(1+x)^4$（$n=2k$，$k=2$），係數 $1,4,6,4,1$ 在 $r=2=k$ 處最大；對 $(1+x)^3$（$k=2$），係數是 $1,3,3,1$，在 $r=1,2$ 處相等，較大的值是 $2=k$。
- 在 (iv) 中取 $n=3$：$(1+2x)^3$ 的係數是 $1,6,12,8$，在 $r=2$ 處最大；$(1+3x)^3$ 的係數是 $1,9,27,27$，所以當 $b=3$ 時便達到 $G=3$。

- 用電腦對所有 $n < 30$ 及 $a, b < 15$ 驗證 $G(n,a,b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$，每一種情況都吻合。

常見錯誤

- 證明上下界時忘記處理端點情況 $m = 0$ 和 $m = n$：此時並沒有 c_{-1} 或 c_{n+1} 可供比較。
- 當 L 是整數時，取了兩個相等值中較小的一個：G 定義為較大者，所以 $G(9,2,3) = 6$，而不是 5。
- 在 (iv) 中只答 $b = n$：其實每個 $b \geq n$ 都給出 $G = n$。

STEP 之外

這裏所用的比值檢驗，即比較相鄰兩項，與判斷級數（series）收斂（convergence）的比值檢驗法（ratio test）是同一個想法；它亦可找出二項分佈（binomial distribution）$\mathrm{B}(n,p)$（其中 $p = \frac{b}{a+b}$）的眾數（mode）：眾數是 $\lfloor (n+1)p \rfloor$。像二項式係數這樣先升後降的數列稱為單峯（unimodal）數列，而證明這一點的常用工具是對數凹性（log-concavity）（$c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1}$）。概率方面的內容，可參閱 Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）。

詳細解答

STEP II 2014，第 9 題

力學 • 剛體平衡

STEP II 2014，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q9

關鍵思路

未知的力有三個（張力（tension）、法向反作用力（normal reaction）和 A 處的摩擦力（friction）），而方程也有三條：水平方向分解、鉛垂方向分解，以及取力矩（moments）。關於角 A 取力矩是聰明的選擇，因為牆壁施加的兩個接觸力都作用於該點，因而在方程中消去，只剩下一條把張力和重量聯繫起來的方程。得到這條方程後，摩擦力的方向就只取決於單靠繩子所支撐的力比重量大還是小。

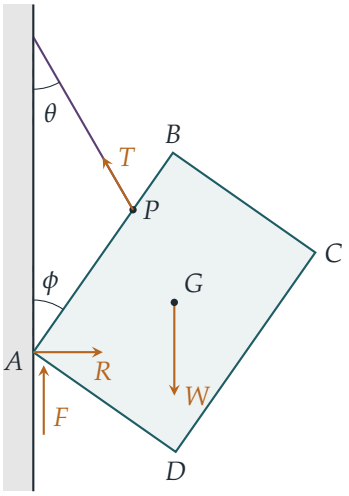
解答

我們把薄板（lamina）模型化為重量 W 的均勻剛體（uniform rigid body），其質心（centre of mass）G 位於長方形的中心；繩子則視為輕而不可伸長（light and inextensible），所以沿繩的張力 T 處處相同。在 A 處，牆壁施加一個法向反作用力 R（水平方向，背離牆壁）及一個摩擦力 F（鉛垂方向）。我們規定 F 以向上為正，所以若 F 為負，即表示摩擦力實際上向下作用。

設坐標軸，以 A 為原點，x 軸水平背離牆壁，y 軸鉛垂向上。邊 AB 與向上的鉛垂線成角 ϕ，所以沿 AB 的單位向量是 $(\sin\phi, \cos\phi)$。邊 AD 與之垂直，並指向背離牆壁的方向，所以其單位向量是 $(\cos\phi, -\sin\phi)$。因此

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

其中 P 是繫繩之點。繩子由 P 向上連到牆壁，與向下的鉛垂線成角 θ，所以作用於薄板的張力是 $T(-\sin\theta, \cos\theta)$。



第 (i) 部分

沿水平及鉛垂方向分解，

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

關於 A 取力矩時，R 和 F 沒有貢獻。一個作用於 (x, y) 的力 (f_x, f_y) 的逆時針力矩是 $xf_y - yf_x$。對於作用於 P 的張力，這是

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

而對於作用於 G 的重量 $(0, -W)$，則是 $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$。所以

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

量 $a\cos\phi + b\sin\phi$ 其實就是 G 與牆壁的水平距離，這是看出重量力矩的快捷方法。

在摩擦力向上的極限平衡（limiting equilibrium）中，$F = \mu R = \mu T\sin\theta$，所以鉛垂方向的方程變成

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

把 W 代入 (1)，並約去 T（由於繩子拉緊，它是正數），得

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

這就是 $(*)$。

第 (ii) 部分

若摩擦力達到極限並向下作用，則 $F = -\mu R = -\mu T\sin\theta$，而鉛垂方向的方程是 $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$。其餘一切不變，所以 $(*)$ 變成

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

即是把 μ 換成 $-\mu$。

第 (iii) 部分

現在我們不假設摩擦力達到極限。方程 (1) 在任何平衡狀態下都成立，並給出

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

而由於 θ 和 ϕ 都是銳角，所以 $\sin(\theta+\phi) > 0$。鉛垂方向的方程於是給出

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

想一想 怎樣把「$F > 0$」轉化為只涉及正切的條件？

摩擦力向上作用，當且僅當 $F > 0$，即是當且僅當

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

因為 $d\sin(\theta+\phi) > 0$。展開 $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$，並把兩邊除以 $\cos\theta\cos\phi$；由於兩個角都是銳角，這個數是正數，所以不等式方向不變：

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

由於 $\tan\theta + \tan\phi > 0$，充分必要條件是

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

（當 d 等於這個值時，完全沒有摩擦力；當 d 較小時，摩擦力向下作用。）

從物理上看，繩子繫在邊 AB 上，所以 $d \le 2b$。若條件成立，則

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

所以 $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$，即 $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$。取逆否命題（contra-positive）：若 $b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$，則繫繩點無論放在任何容許的位置，都不能使摩擦力向上作用，所以該條件不可能成立。證明完畢。

驗算

- 當 $\mu = 0$ 時牆壁光滑，$(*)$ 與其第 (ii) 部分的版本重合，理應如此。兩者都化為第 (iii) 部分的臨界情況 $d\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$。
- 薄板的 AB 鉛垂時（$\phi \to 0$）：臨界情況變成 $d\tan\theta = a$。這表示繩子的作用線（line of action）通過經過 G 的鉛垂線，該線與牆壁的水平距離為 a。這時單靠繩子和重量便能互相平衡，牆壁只需施加水平推力。
- 數值上，取 $a = 1$、$b = 1.5$、$\theta = 30°$、$\phi = 40°$：臨界值是 $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$。改為關於 G 而非 A 取力矩，直接解三條平衡方程，得出在略高於此值時 $F > 0$，略低於此值時 $F < 0$。用電腦檢驗數千個隨機配置，證實了 $(*)$、其第 (ii) 部分的形式，以及 (iii) 中的條件。

常見錯誤

- 關於 P 或 G 取力矩：這樣做可行，但會把 R 和 F 帶進力矩方程，令代數運算繁複得多。
- 弄錯 G 的位置：D 位於背離牆壁的一側，所以 AD 沿 $(\cos\phi, -\sin\phi)$ 方向，而 G 與牆壁的水平距離是 $a\cos\phi + b\sin\phi$。
- 在最後一部分忘記約束條件 $d \le 2b$；這是 AB 的長度唯一出現的地方。

STEP 之外

這是一個小型的靜定(statically determinate)問題：平面上的剛體有三個未知的力和三條獨立的平衡方程。工程師首先就會核對這個數目；若支撐點更多，單靠靜力學便無法求出各力，還需要知道物體如何變形。關於未知力的作用點取力矩這個技巧，是巧妙選取力矩原點的平面版本。如欲深入了解，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP II 2014，第 10 題

力學 • 軌道的包絡線

> **STEP II 2014，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.9 節安全拋物線中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/safety-parabola.html

關鍵思路

消去時間後，軌跡（trajectory）方程是一個關於 $\lambda = \tan\theta$ 的二次方程（*quadratic*），因為 $\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$。固定一點 (x, y)，然後問：是否存在某個發射角，使軌跡經過這一點？這等同於問這個關於 λ 的二次方程是否有實根，所以判別式（discriminant）就給出可到達區域的邊界。至於最後一部分，邊界曲線原來是一條焦點（focus）在 O 的拋物線，這使得計算與 O 的距離變得非常容易。

解答

軌跡

把拋射體（projectile）視為在重力作用下自由運動的質點（particle），不計空氣阻力。經過時間 t 後，

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由於 $\cos\theta \neq 0$（該角小於直角），$t = x/(u\cos\theta)$，代入得

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$，得笛卡兒方程（Cartesian equation）

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

給定 x 上方的最大高度 Y

固定 u，並固定 $x > 0$。此時 y 只是 λ 的函數，可以改寫為

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

想一想 為甚麼要把它看成關於 λ 的方程，而不是關於 y 的方程？

某個值 y 會在這個 x 的上方出現，當且僅當有某個發射角能產生它，即這個二次方程有實根 λ。因此其判別式必須非負：

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

除以 $x^2 > 0$，再乘以 $u^2/(2g) > 0$，這不會改變不等式的方向，得

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

所以

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

而且沒有任何軌跡在這個 x 的上方高於 Y。

我們還需要證明*不超過* Y 的每一個值都能以真正的發射角（即 $\lambda > 0$）達到。作為 λ 的函數，y 是開口向下的二次函數。其頂點（vertex）在 $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$，此處 $y = Y$（代入驗證即可）。當 $\lambda \geq \lambda_0$ 時，y 連續（continuous）且遞減，並且當 $\lambda \to \infty$ 時 $y \to -\infty$。所以由連續性，每個值 $y \leq Y$ 都會在某個 $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ 取得，即在某個 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 取得。因此 y 的取值正是整個區間 $y \leq Y$，符合所求。（當 $x = 0$ 時，我們必須垂直向上拋。此時 y 由 0 變到 $u^2/(2g)$，同樣等於 $Y(0)$。）

若容許向任一方向拋射，則 $x < 0$ 的情況是鏡像，同一公式依然成立，因為 Y 只取決於 x^2。

圖像與可到達區域

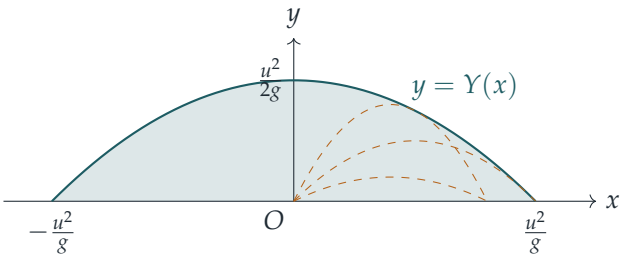
Y 的圖像是一條開口向下的拋物線。其頂點在 $(0, u^2/2g)$，即可能達到的最大高度；它與地面相交於 $x = \pm u^2/g$，即可能達到的最大射程。每一條軌跡都位於這條曲線之下，並在 $\lambda = \lambda_0$ 處與它相切一次。因此它常被稱為*包絡拋物線*（bounding parabola）或*安全拋物線*（parabola of safety）。

質點一碰到地面便停下。取一條 $\lambda > 0$ 的軌跡上一點，其中 $y \geq 0$ 且 $x > 0$。在 O 與該點之間的所有 x，這條軌跡都在地面之上，所以質點確實會在落地前到達該點。因此可

到達的集合是區域

$$0 \le y \le \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \le \frac{u^2}{g},$$

即下圖的陰影部分。圖中以 u^2/g 為單位，虛線是三條示例軌跡。



與 O 的最遠距離

任何可到達的點 P 都位於由 O 到點 Q 的線段上，其中 Q 是射線 OP 與邊界的交點。該區域以包絡拋物線和地面為邊界，而且沿每條射線都包含 O 與邊界之間的所有點。所以 $OP \le OQ$，我們只需在邊界上求距離的最大值。在地面上，最遠的點距離為 u^2/g。在曲線部分，$y = Y(x)$，所以

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

所以 $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$。換句話說，與 O 的距離等於向下到直線 $y = u^2/g$ 的距離：O 是包絡拋物線的焦點，而 $y = u^2/g$ 是它的準線（directrix）。當 Y 最小時這個距離最大，而在曲線的可到達部分上，Y 的最小值是 $Y = 0$，位於 $x = \pm u^2/g$。因此拋射體能到達的與 O 的最遠距離是

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

這正是最大水平射程，在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時達到。邊界上每個高度 $y > 0$ 的點都較近，恰好近 y。

驗算

- 代入 $x = 0$：$Y = u^2/(2g)$，即垂直向上拋時達到的高度（由 $v^2 = u^2 - 2gh$ 得出）。代入 $Y = 0$：$x = u^2/g$，即熟悉的最大射程 $u^2 \sin 2\theta / g$（在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時）。
- 取 $u^2/g = 10$（例如 $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$g = 9.8$）。在 $x = 4$ 時，公式給出 $Y = 5 - 0.8 = 4.2$，在 $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$ 時達到：確實 $2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$。

- 以電腦對大量發射角和時間進行搜索，取 $u = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$，找到與 O 最遠的點距離為 $10.204\ \mathrm{m} = u^2/g$，位於地面上。

常見錯誤

- 只做到判別式便停下。判別式只顯示 $y \leq Y$ 是必要的，但題目還要求每個這樣的值都能以位於地面之上的真正發射角達到。
- 把 $y = Y$ 之下的整個區域都塗上陰影，包括地面以下的點。質點落地便停下，所以可到達的集合還需滿足 $y \geq 0$。
- 以為最遠的點是安全拋物線的頂點。該點與 O 的距離只有 $u^2/(2g)$，是射程的一半。

STEP 之外

包絡拋物線是這族軌跡的包絡線（envelope）：即與族中每一條曲線都相切的曲線。求包絡線的一個標準方法，是在 $F(x,y,\lambda) = 0$ 與 $\partial F/\partial\lambda = 0$ 之間消去參數，而這正是我們所用的重根條件。這裏還有一個與能量的聯繫：每條軌跡都有同一條準線，即直線 $y = u^2/(2g)$，那正是全部動能（kinetic energy）都轉化為勢能（potential energy）時的高度。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）以大學一年級程度講解拋射運動與能量。

詳細解答

STEP II 2014，第 11 題

力學 • 圓周運動

> **STEP II 2014，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q11

關鍵思路

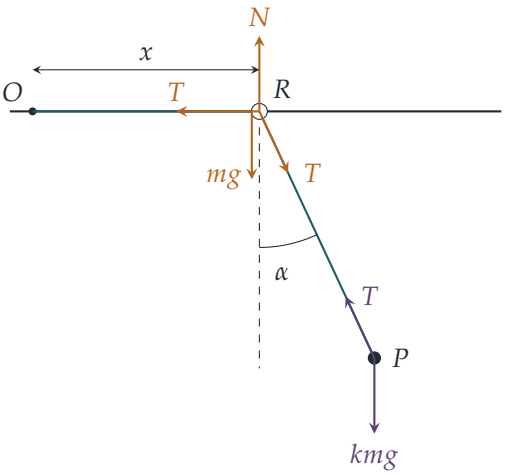
整個問題只由一個變量 x 主導。由於繩子不可伸長（inextensible），而 α 固定不變，P 的位置是 x 的一個簡單函數（function），因此 P 的兩個加速度分量都是 $\ddot{x}$ 的倍數。這樣便得到三條運動方程（equations of motion）（兩條關於 P，一條關於環的水平方向），但未知數只有兩個：$\ddot{x}$ 和 T。超定方程組（overdetermined system）只有在某個特殊條件成立時才相容，而正是這個相容條件（consistency condition）把 α 和 k 聯繫起來。

解答

模型。環和 P 均視為質點（particle），繩子輕而不可伸長，環和軌道均光滑（smooth）。由於環是光滑的，繩子兩段的張力（tension）T 相同。取 O 為原點，x 軸沿軌道、方向由 O 指向環，y 軸豎直向上。

P 的坐標。繩子由 O 到環的一段沿軌道，長度為 x，所以由環到 P 的一段長度為 $L - x$。這一段與向下的鉛垂線成角 α，而 P 懸在環遠離 O 的一側（我們會在第 (i) 部分末尾說明為何如此選取）。因此

$$P = \big(x + (L - x)\sin\alpha,\ -(L - x)\cos\alpha\big).$$



第 (i) 部分

在 α 為常數的情況下，把 P 的坐標對時間微分兩次，得

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

作用於 P 的力有向下的重量 kmg，以及沿繩子指向環的張力 T；張力的水平分量為 $-T\sin\alpha$，豎直分量為 $+T\cos\alpha$。

P，**豎直方向**：$km\,\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$，即

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

與所求相符。

P，**水平方向**：

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

環，水平方向。環兩邊都受到繩子的作用：沿軌道的一段以力 T 把環拉向 O，而往下連到 P 的一段則以水平分量 $T\sin\alpha$ 把環拉離 O。環的重量和軌道的法向反作用力（normal reaction）都是豎直的（軌道光滑）。因此

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

想一想 為甚麼 P 必須在環遠離 O 的一側？

假如 P 懸在靠近 O 的一側，它的 x 坐標便是 $x-(L-x)\sin\alpha$，兩條水平方程會變成 $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$ 和 $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$。第一條使 $\ddot{x}\geq 0$，第二條使 $\ddot{x}\leq 0$，於是 $\ddot{x}=0$ 且 $T=0$；但這樣豎直方程便給出 $0=-kmg$，這是不可能的。所以那種位形不可能在 α 不變的情況下運動，上面的坐標才是正確的。

第 (ii) 部分

首先，$T \neq 0$：若 $T = 0$，則 (2) 給出 $\ddot{x} = 0$，而豎直方程給出 $0 = -kmg$，矛盾。

由 (2)，$m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$。代入 (1)：

$$k\big(-T(1-\sin\alpha)\big)(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

兩邊除以 $-T \neq 0$，

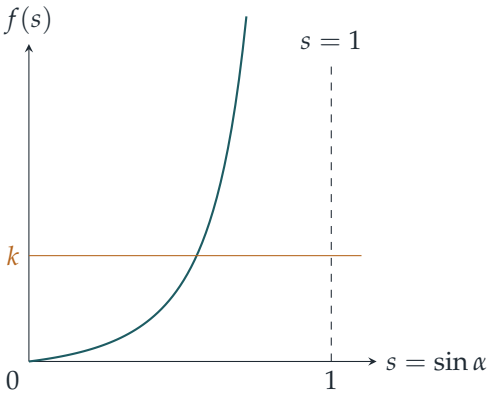
$$\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} = k,$$

與所求相符。（由於 α 是銳角（acute angle），$0 < \sin\alpha < 1$，所以除以 $(1-\sin\alpha)^2$ 是沒有問題的。）

每一個 k 都可以出現。設 $s = \sin\alpha$，並在 $0 < s < 1$ 上定義 $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$，這恰好涵蓋所有 $\alpha \neq 0$ 的銳角 α。由商法則（quotient rule），

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

所以 f 嚴格遞增（strictly increasing）。此外，當 $s \to 0^+$ 時 $f(s) \to 0$，當 $s \to 1^-$ 時 $f(s) \to \infty$，而且 f 連續（continuous）。因此 f 恰好取每個正值一次，即對每個 $k > 0$，恰有一個銳角 α 滿足該條件。



無論水平線 $y = k$ 的高度是多少，它都恰好與曲線相交一次。

第 (iii) 部分

現在利用 (2) 和豎直方程消去 T。由 (2)，$T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$。代入豎直方程並除以 m：

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

再利用第 (ii) 部分替換括號內的 k：

$$k+\frac{1}{1-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2}=\frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

因此

$$\ddot{x}=-\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha}=-\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha}=-g\tan\alpha,$$

這裏再一次用了 $k(1-\sin\alpha)^2=\sin\alpha$。這就是所求的結果。

額外一提，$T=-\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}=\dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha}>0$，所以繩子確實是拉緊的，符合模型的要求。

驗算

- 取 $k=1$，條件 $s=(1-s)^2$ 給出 $\sin\alpha=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\approx 0.382$，所以 $\alpha\approx 22.46°$，$\ddot{x}\approx -0.413g$。把這些代入 (1)、(2) 和豎直方程，三條都成立。
- 我們以數值方法模擬了完整的雙變量運動（以 x 和繩子的角度為變量），從這個角度開始並讓環在運動中：角度在 10^{-10} rad 的誤差內保持不變，而環的減速度恰好是 $g\tan\alpha$。若從稍為不同的角度開始，角度會立即開始改變，可見 α 這個特殊值確實關鍵。
- 極限情況：當 $k\to 0$（質點非常輕），$\alpha\to 0$ 且 $\ddot{x}\to 0$；當 $k\to\infty$，$\alpha\to 90°$，減速度無限增大，因為輕環正被一個重質點拖動。
- 正負號：$\ddot{x}<0$，所以環的加速度總是指向 O。這是合理的：環所受的水平合力 $-T(1-\sin\alpha)$ 指向 O。

常見錯誤

- 忘記環兩邊都受到繩子的作用；正是沿軌道指向 O 的拉力令 (2) 成立。
- 把 P 的水平加速度寫成 $\ddot{x}$；懸垂部分的長度 $L-x$ 也在改變，這會貢獻 $-\ddot{x}\sin\alpha$ 一項。
- 微分時把 α 當作變量。這裏它是常數，而這正是問題得以處理的原因。

STEP 之外

這是一個有兩個自由度（degrees of freedom）的系統（環的位置和繩子的角度），題目要找的是其中一個自由度保持不變的特殊解，頗有相對平衡（relative equilibrium）的意

味。在大學一年級的課程中，你會以 x 和角度寫出拉格朗日量（Lagrangian），並發現只有在這裏求得的那一個 α 值下，角度不變的運動才有可能；接下來自然要問的是，這種運動是否穩定（stable）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這類約束系統（constrained systems）有很好的講解。

詳細解答

STEP II 2014，第 12 題

概率與統計 • 風險函數

> **STEP II 2014，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q12

關鍵思路

風險函數（hazard function）是*對仍然存活者而言*的死亡率。後面各部分全都源於一個觀察：由於 $F'(t) = f(t)$，

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\bigl(1 - F(t)\bigr).$$

所以知道 h，就等於知道 $\ln(1 - F)$ 的導數（derivative）。先積分，再利用壽命開始時 $F = 0$ 這一事實，最後對 F 求導便得到 f。

解答

第 (i) 部分

設 A 為事件 $T \geq t$（蒼蠅在時間 t 仍然存活），B 為事件 $t \leq T \leq t + \delta t$（蒼蠅在接下來的 δt 內死亡）。由於 $B \cap A = B$（對連續隨機變量（continuous random variable）而言 $\mathrm{P}(T = t) = 0$，所以端點是否包括在內並無影響），

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

當 δt 很小時，$F(t + \delta t) - F(t) \approx F'(t)\,\delta t = f(t)\,\delta t$，因此

$$\mathrm{P}(B \mid A) \approx \frac{f(t)\,\delta t}{1 - F(t)} = h(t)\,\delta t,$$

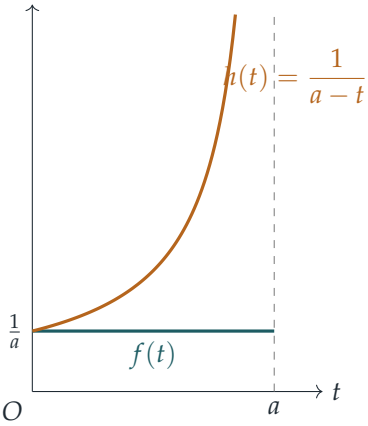
此即所求。（我們需要 $F(t) < 1$，以免以一個不可能事件作為條件；而這正是 h 有定義的範圍。）

第 (ii) 部分

這裏當 $0 < t < a$ 時 $f(t) = F'(t) = \frac{1}{a}$：$T$ 在 $(0, a)$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）。於是

$$h(t) = \frac{1/a}{1 - t/a} = \frac{1}{a - t}, \qquad 0 < t < a.$$

概率密度是平的，但風險函數由 $h(0) = \frac{1}{a}$ 開始遞增，且當 $t \to a^-$ 時 $h(t) \to \infty$。這是合理的：一隻存活至接近時間 a 的蒼蠅，必定會在餘下極短的時間內死亡。



（圖中取 $a = 2$。）

第 (iii) 部分

利用關鍵思路，當 $t > a$ 時 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = \frac{1}{t}$。由 a 積分至 t，並因 T 只取大於 a 的值而有 $F(a) = 0$，得

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = \ln t - \ln a = \ln\frac{t}{a}, \qquad \text{所以} \qquad 1 - F(t) = \frac{a}{t}.$$

因此 $F(t) = 1 - \frac{a}{t}$，且

$$f(t) = \frac{a}{t^2}, \qquad t > a$$

（而當 $t \le a$ 時 $f(t) = 0$）。驗算一下：$\int_a^\infty at^{-2}\,\mathrm{d}t = 1$，且 $f/(1 - F) = (a/t^2)/(a/t) = 1/t$。

第 (iv) 部分

「**若**」**的方向**。設當 $t > b$ 時 $f(t) = k\mathrm{e}^{-k(t-b)}$，其中 $k > 0$。由於 $\int_b^\infty k\mathrm{e}^{-k(t-b)}\,\mathrm{d}t = 1$，全部概率都落在 $t > b$，所以當 $t \le b$ 時 $f(t) = 0$ 及 $F(t) = 0$。因此當 $t \le b$ 時

$h(t) = 0/1 = 0$。當 $t > b$ 時，

$$F(t) = \int_b^t k\mathrm{e}^{-k(s-b)}\,\mathrm{d}s = 1 - \mathrm{e}^{-k(t-b)}, \qquad h(t) = \frac{k\mathrm{e}^{-k(t-b)}}{\mathrm{e}^{-k(t-b)}} = k,$$

這是一個常數。

「**僅當**」**的方向**。設當 $t \le b$ 時 $h(t) = 0$，而當 $t > b$ 時 $h(t) = k$（常數）。

> ? **想一想** 當 $t \le b$ 時 $h(t) = 0$，這告訴我們 $F(b)$ 是甚麼？

在 $h(t) = 0$ 之處，有 $f(t) = h(t)\big(1 - F(t)\big) = 0$。所以對所有 $t \le b$，f 都等於零，從而當 $t \le b$ 時 $F(t) = \int_{-\infty}^t f = 0$；特別地 $F(b) = 0$。（這亦確認了該處 $F < 1$，所以 h 在 $t \le b$ 上確實有定義。）

當 $t > b$ 時，$-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = k$。由 b 積分至 t，並利用 $F(b) = 0$，

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = k(t-b), \qquad F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-k(t-b)},$$

求導後得當 $t > b$ 時 $f(t) = k\mathrm{e}^{-k(t-b)}$。最後，$k$ 必須是正數：因為 $f \ge 0$，所以 $k \ge 0$；而若 $k = 0$，則 F 會永遠停留在 0，於是 $F(t) \not\to 1$，T 便不是一個真正的隨機變量。至此兩個方向都已證明。

第 (v) 部分

同樣地，當 $t > 0$ 時 $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\big(1 - F(t)\big) = \dfrac{\lambda}{\theta^\lambda}t^{\lambda-1}$。由 0 積分至 t，因 $T > 0$ 而有 $F(0) = 0$，並注意 $\lambda > 0$ 使得當 $t \to 0$ 時 $t^\lambda \to 0$，

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\cdot\frac{t^\lambda}{\lambda} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda.$$

所以 $F(t) = 1 - \exp\big(-(t/\theta)^\lambda\big)$，求導得

$$f(t) = \frac{\lambda}{\theta^\lambda}\,t^{\lambda-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\lambda\right), \qquad t > 0.$$

這是一個真正的概率密度函數（probability density function）：它是正的，而且當 $t \to \infty$ 時 $F(t) \to 1$。

驗算

- 每個答案都可以直接計算 $f/(1-F)$ 來驗證。例如在 (v) 中，指數因子互相抵消，剩下 $\lambda\theta^{-\lambda}t^{\lambda-1}$。
- 在第 (v) 部分取 $\lambda = 1$，得常數風險 $1/\theta$ 及 $f(t) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-t/\theta}$，這正是第 (iv) 部分取 $b = 0$、$k = 1/\theta$ 的情況。

- 數值上，取 $\lambda = \frac{1}{2}$、$\theta = 2$，將 f 在 $(0, \infty)$ 上積分得 1.0000，而 $F(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}} \approx 0.5069$ 與直接將 f 由 0 積分至 1 的結果吻合。

常見錯誤

- 忘記壽命開始時 $F = 0$ 這個條件，以致 F 中留下一個任意的積分常數。
- 在 (iv) 中只證明了「當且僅當」（if and only if）的其中一個方向，或者沒有利用當 $t \le b$ 時 $h = 0$ 來推出 $F(b) = 0$。
- 漏掉負號：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(1 - F) = -f/(1 - F)$。

STEP 之外

關係式 $1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s\right)$ 是*存活分析*（survival analysis）及可靠性理論（reliability theory）的基礎。(v) 中的分佈是韋伯分佈（Weibull distribution）：$\lambda < 1$ 給出遞減的風險（早期故障），$\lambda = 1$ 給出具無記憶性（memoryless）的指數分佈（exponential distribution），而 $\lambda > 1$ 則給出遞增的風險（損耗老化）。存活分析的應用範圍極廣，由醫學臨牀試驗到工程學都有。關於其背後的概率論，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

詳細解答

STEP II 2014，第 13 題

概率與統計 • 離散隨機變量

> **STEP II 2014，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q13

關鍵思路

這其實是喬裝了的生日問題（birthday problem）。事件 $X \geq k$ 不過是說首 $k-1$ 個整數互不相同，而 $X = r$ 則是說首 $r-1$ 個互不相同，而第 r 個與其中一個相同。兩個概率（probability）都是一些簡單因子的乘積。至於那兩條奇特的恆等式，則來自以兩種方法計算同一個量：第 (i) 部分是總概率等於 1，第 (iv) 部分是 $\mathrm{E}(X)$ 的兩條公式相等。

解答

全文中記

$$Q_m = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \qquad (m \geq 1),$$

其中 $Q_1 = 1$（空積(empty product)）。由於每個整數都與之前的整數獨立(independent)，並在 $\{1, \ldots, n\}$ 上均勻分佈（uniform），Q_m 就是 $I_1, \ldots, I_m$ 互不相同的概率：已知首 j 個互不相同，下一個避開它們全部的概率是 $1 - \frac{j}{n}$。

$\mathrm{P}(X = 4)$ 的值

我們需要 I_1, I_2, I_3 互不相同，然後 I_4 等於這三個之中的一個：

$$\mathrm{P}(X = 4) = 1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}.$$

第 (i) 部分

同樣地，$X = r$ 表示 $I_1, \ldots, I_{r-1}$ 互不相同（概率為 Q_{r-1}），而 I_r 是這 $r-1$ 個值之一（概率為 $\frac{r-1}{n}$，且獨立）。所以

$$\mathrm{P}(X = r) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-2}{n}\right)\frac{r-1}{n} = Q_{r-1}\,\frac{r-1}{n}, \qquad 2 \le r \le n+1.$$

想一想 為甚麼這些概率加起來等於 1？

X 必定存在，並且介乎 2 與 $n+1$ 之間：第一個整數不可能是重複，所以 $X \ge 2$；而 $I_1, \ldots, I_{n+1}$ 共有 $n+1$ 個整數，卻只取 n 個值，所以由抽屜原理（pigeonhole principle），到第 $n+1$ 個時必有某個值出現了兩次，故 $X \le n+1$。（數列永不重複的機會是零，所以沒有遺漏任何情況。）因此

$$\sum_{r=2}^{n+1} \mathrm{P}(X = r) = 1.$$

把 $r = 2, 3, 4, \ldots$ 的項逐一寫出，得

$$\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{2}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{3}{n} + \cdots = 1,$$

這正是所求的恆等式。級數（series）在 $r = n+1$ 終止，之後的任何項都是零，因為它們含有因子 $1 - \frac{n}{n}$。證畢。令 $m = r - 1$，上式可寫成

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n}\,Q_m = 1. \qquad (*)$$

第 (ii) 部分

由期望值（expectation）的定義，

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{r=2}^{n+1} r\,\frac{r-1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-2}{n}\right) = \sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{n}\,Q_m.$$

第 (iii) 部分

$X \ge k$ 恰好在 $I_1, \ldots, I_{k-1}$ 之中沒有重複時發生，即這 $k-1$ 個整數互不相同。所以

$$\mathrm{P}(X \ge k) = Q_{k-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-2}{n}\right), \qquad 2 \le k \le n+2,$$

而 $\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(X \ge 2) = 1$。（當 $k = n+2$ 時，乘積含有 $1 - \frac{n}{n} = 0$，理應如此。）

第 (iv) 部分

記 $p_r = \mathrm{P}(Y = r)$。由於 $r = \sum_{k=1}^{r} 1$，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{r=1}^{N} r\,p_r = \sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{r} p_r = \sum_{k=1}^{N}\sum_{r=k}^{N} p_r = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(Y \geq k).$$

由於是有限和，交換求和次序並無問題：兩個二重和都遍歷所有滿足 $1 \leq k \leq r \leq N$ 的數對 (k, r)。證畢。

? **想一想** 我們應該比較 $\mathrm{E}(X)$ 的哪兩個表達式？

把這結果應用於 $Y = X$，它在 $\{1, \ldots, N\}$ 中取值，其中 $N = n+1$（取值 1 的概率只是 0 而已）。利用第 (iii) 部分，

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{P}(X \geq k) = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{k-1} = 1 + \sum_{m=1}^{n} Q_m.$$

現在令這式等於第 (ii) 部分的結果，把 $\frac{m(m+1)}{n} = \frac{m^2}{n} + \frac{m}{n}$ 拆開，並利用 $(*)$：

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{m(m+1)}{n} Q_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n} Q_m + \underbrace{\sum_{m=1}^{n} \frac{m}{n} Q_m}_{=1 \text{ 由}(*)}.$$

所以 $1 + \sum_{m=1}^{n} Q_m = \sum_{m=1}^{n} \frac{m^2}{n} Q_m + 1$，即

$$\sum_{m=1}^{n} Q_m \left(1 - \frac{m^2}{n}\right) = 0.$$

$m = 1, 2, 3$ 的項分別是 $\left(1 - \frac{1^2}{n}\right)$、$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2^2}{n}\right)$ 和 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3^2}{n}\right)$，所以這正是所求的恆等式。與第 (i) 部分一樣，$m = n$ 之後的每一項都含有因子 $1 - \frac{n}{n} = 0$。證畢。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，$X = 2$ 必然成立。第 (i) 部分給出 $\frac{1}{1} = 1$，而最後的和只有一項 $1 - 1 = 0$。
- 當 $n = 4$ 時，最後的和是 $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{24-15-9}{32} = 0$，而兩條公式都給出 $\mathrm{E}(X) = \frac{103}{32}$。
- 當 $n = 365$（生日）時，$\mathrm{E}(X) = 1 + \sum Q_m \approx 24.62$。以電腦模擬 10^5 個數列，得平均值 24.61；而對 $n \leq 5$ 作完全窮舉（exact enumeration），亦證實了上述每一條公式。

常見錯誤

- 寫 $\mathrm{P}(X = r)$ 時用了 $r-1$ 個形如 $1 - \frac{j}{n}$ 的因子，而不是 $r-2$ 個。只有第二至第 $(r-1)$ 個整數須避開之前的值。
- 在 $\sum \mathrm{P}(X \geq k)$ 中漏掉 $k = 1$ 的項。這一項貢獻 1，正好與 $(*)$ 互相抵消。

STEP 之外

尾和公式（tail-sum formula）$\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(Y \geq k)$ 對任何取非負整數值的隨機變量（random variable）都成立，而它的連續版本 $\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty \mathrm{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$ 是大學一年級概率論的標準工具。當 n 很大時，$\mathrm{E}(X) \approx \sqrt{\pi n/2}$，這解釋了為何雜湊函數（hash function）的碰撞（collision）只需約 $\sqrt{n}$ 次嘗試便會出現（即「生日攻擊」（birthday attack））。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了這兩個概念。

詳細解答

STEP III 2014，第 1 題

純數學 • 對數級數展開

STEP III 2014，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q1

關鍵思路

三次多項式（cubic）$1+qx^2+rx^3$ 可因式分解為 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$，因此它的對數（logarithm）可拆成三個對數之和，而每個對數的級數（series）我們都已知道。這樣便能以 a、b、c 表示 x^n 的係數（coefficient）。我們亦可把同一個對數直接展開為 $\ln(1+u)$，其中 $u=qx^2+rx^3$，從而以 q 和 r 表示各係數。比較這兩個展開式，便可把關於 q 和 r 的事實轉化為各 S_n 之間的恆等式（identity）。

解答

展開得

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

由於 $a+b+c=0$，x 項消失。兩個對所有實數 x 都相等的多項式，其係數必然相等，因此把 x^2 和 x^3 的係數與 $1+qx^2+rx^3$ 比較，得

$$q=bc+ca+ab,\qquad r=abc,$$

此即所求。

第 (i) 部分

當 $|x|$ 足夠小（具體而言，$|x|<1/\max(|a|,|b|,|c|)$；若 $a=b=c=0$，則任何 x 皆可），每個因子都是正數，而每個對數都有收斂（convergent）的級數。利用 $|t|<1$ 時

$\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$，

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

所以 x^n 的係數是 $(-1)^{n+1}S_n$，此即所求。（當 $n=1$ 時，這是 $S_1 = a+b+c = 0$，與沒有 x 項的事實吻合。）

第 (ii) 部分

現在用第二種方法展開同一個函數。設 $u = qx^2+rx^3$，則

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u 的每一項次數至少為 2，所以 u^k 只涉及 x^{2k} 至 x^{3k} 的冪。要求 x^n 的係數，只需考慮滿足 $2k \leq n \leq 3k$ 的 u^k：

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

因此：

- x^2：只有 u 有貢獻，得 q；
- x^3：只有 u 有貢獻，得 r；
- x^5：只有 $-\frac{1}{2}u^2$ 有貢獻，得 $-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$。

與第 (i) 部分比較，該處的係數分別是 $-S_2$、S_3 和 S_5，故

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

因此 $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$，此即所求。

想一想 為甚麼我們可以比較同一個函數的兩個不同級數的係數？

兩個展開式都是 x 的冪級數（power series），並在 0 附近的某個區間上收斂至 $\ln(1+qx^2+rx^3)$。在 0 附近收斂的冪級數，其係數是唯一的（它們就是函數在 0 處的導數除以 $n!$，正如麥克勞林定理（Maclaurin's theorem）所述），因此兩組係數必然相同。

第 (iii) 部分

對於 x^7，我們需要 $2k \le 7 \le 3k$，這迫使 $k = 3$。用二項式定理（binomial theorem）展開 $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$，

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

所以 $\ln(1+u)$ 中 x^7 的係數是 $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$。由第 (i) 部分，該係數是 $(-1)^8 S_7 = S_7$，所以 $S_7 = q^2r$。利用第 (ii) 部分，

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

此即所求。

第 (iv) 部分

對於 x^9，我們需要 $2k \le 9 \le 3k$，所以 $k = 3$ 或 $k = 4$。

- 來自 $\frac{1}{3}u^3$：u^3 的 x^9 項是 r^3x^9，得 $\frac{1}{3}r^3$。
- 來自 $-\frac{1}{4}u^4$：在 $(qx^2 + rx^3)^4$ 中，x^9 項需要三個 qx^2 因子和一個 rx^3 因子，得 $\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$。這貢獻 $-q^3r$。

所以 x^9 的係數是 $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$，而由第 (i) 部分，它等於 $(-1)^{10}S_9 = S_9$。另一方面，

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

因此

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

而命題 $S_2S_7 = S_9$ 成立當且僅當 $abc = 0$。一般而言它並不成立。

舉一個具體的反例（counterexample），取 $a = b = 1$、$c = -2$（於是 $a+b+c = 0$ 且 $abc = -2 \ne 0$）。則

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

所以 $S_2S_7 = -54 \ne -\frac{170}{3} = S_9$。命題不成立。

想一想 第 (ii) 和 (iii) 部分都行得通，為甚麼規律到了 x^9 就失效？

對於 x^5 和 x^7，只有一個 u 的冪有貢獻，所以每個係數都是 q 和 r 的單一乘積，而這乘積恰好能分解為適當的前面幾個 S 的乘積。到了 x^9，有兩個 u 的冪作出貢獻，而來自 u^3 的額外 r^3 項破壞了這種分解。

驗算

- 取 $a = b = 1$、$c = -2$，則 $q = -3$、$r = -2$。於是 $S_2 = 3 = -q$，$S_3 = (1 + 1 - 8)/3 = -2 = r$，$S_5 = (1 + 1 - 32)/5 = -6 = -qr$，所以 $S_2S_3 = S_5$。此外 $S_7 = -18 = q^2r$，而 $S_9 - S_2S_7 = -\frac{170}{3} + 54 = -\frac{8}{3} = \frac{1}{3}r^3$，與預測完全一致。
- 若 $c = 0$（於是 $b = -a$），所有奇數下標的 S_n 都等於零，(iv) 中命題的兩邊都是 0，與命題在 $abc = 0$ 時成立一致。
- (ii) 至 (iv) 的恆等式以及 $S_9 - S_2S_7$ 的公式，亦已用電腦以精確算術，對 200 組隨機選取的有理數 a 和 b 驗證。

常見錯誤

- 遺漏 u^4 對 x^9 的貢獻：很容易只考慮到 u^3 便停下，得出錯誤的係數 $\frac{1}{3}r^3$。
- $(-1)^{n+1}$ 引起的符號錯誤：x^2 的係數是 $-S_2$，所以 $S_2 = -q$，而不是 q。
- 忘記二項式係數：u^3 的 x^7 項是 $3q^2r$，而不是 q^2r。

STEP 之外

各 S_n（除了因子 $1/n$ 之外）就是三次多項式各根的冪和（power sums），而 q、r 則是它的基本對稱多項式（elementary symmetric polynomials）。取對數再比較係數，是牛頓恆等式（Newton's identities）的一個生成函數（generating function）證明；牛頓恆等式把每個冪和以基本對稱多項式表示，而其背後的定理是：每個對稱多項式都可以用基本對稱多項式表示。關於對稱多項式和多項式的根，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）；若想多做以級數為題材、STEP 風格的練習，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）。

詳細解答

STEP III 2014，第 2 題

純數學 • 雙曲函數積分法

STEP III 2014，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q2

關鍵思路

兩個被積函數（integrand）的分母都是 $\cosh 2x$，而倍角公式（double-angle formula）既可以用 $\cosh^2 x$ 表示，也可以用 $\sinh^2 x$ 表示。選取與分子配合的那個版本，每個積分便會化成標準的有理函數積分。至於最後一部分，竅門是回到指數函數：令 $u = \mathrm{e}^x$，兩個被積函數都會變成分母為 $1 + u^4$ 的 u 的有理函數（rational function），而把它們適當組合，恰好得到 $1/(1 + u^4)$。

解答

第 (i) 部分

我們利用 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$。令 $u = \cosh x$，則 $\mathrm{d}u = \sinh x \, \mathrm{d}x$，所以

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

分母可因式分解為 $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$，而兩個因式相差 2，所以

$$\frac{1}{2u^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

每一項積分後都是對數，並因 u 的係數而多出因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

這就是所求結果。（事實上 $\cosh x \geq 1$ 使得 $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$，所以對實數 x 而言，絕對值符號並非必要。）

第 (ii) 部分

現在分子是 $\cosh x$，即 $\sinh x$ 的導數（derivative），所以相應的代換（substitution）是 $u = \sinh x$，$\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$。寫成 $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$，得

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}\,u\bigr) + C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}\sinh x\bigr) + C,\end{aligned}$$

這裏用了 $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$，其中 $a = \sqrt{2}$。

第 (iii) 部分

乍看之下，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ 裏完全沒有 cosh。

> **想一想** 如果把所有東西都用 $u = \mathrm{e}^x$ 表示，$\cosh x/\cosh 2x$ 會變成甚麼樣子？

由於 $\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$ 及 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$，分子分母同乘 u^2，得

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

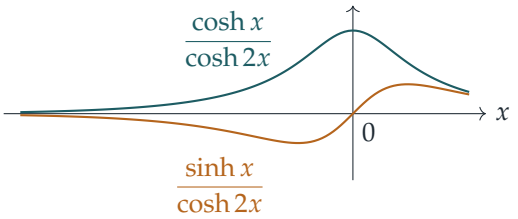
此外 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，所以多出來的因子 u 會約去：

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

第一式減去第二式，剩下 $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$。最後，$u$ 由 0 變到 1，即 $x = \ln u$ 由 $-\infty$ 變到 0。因此

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

右邊兩個積分都收斂（converge），因為當 $x \to -\infty$ 時，每個被積函數都是 $O(\mathrm{e}^x)$。（左邊是普通的積分，所以這其實只是一次變量代換，無窮的那一端來自 $u \to 0$。）



cosh 的積分。由第 (ii) 部分，當 $x \to -\infty$ 時 $\sinh x \to -\infty$，所以 $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$。因此

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh 的積分。由第 (i) 部分，當 $x \to -\infty$ 時 $\cosh x \to \infty$，所以對數內的分數趨向 1，對數則趨向 0。在 $x = 0$ 處，$\cosh 0 = 1$，所以

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

有理化（rationalising）後，$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$，而 $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，所以

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

這個值是負數，理應如此：當 $x < 0$ 時 $\sinh x < 0$（見琥珀色曲線）。

綜合起來。

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

正如所求。

驗算

- 把 (i) 和 (ii) 的答案求導，應還原為被積函數；就 (ii) 而言，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$。
- 最終數值為 ≈ 0.86697，與用辛普森法則（Simpson's rule）計算 $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$ 的結果相符。它合理地介乎 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$（較小的函數 $1/(1+u^2)$ 的積分）與 1 之間。
- 另外，兩個無窮積分亦已用數值方法分別核實：$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$ 及 $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分也用 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$：當 $u = \sinh x$ 時，你需要的是 $\sinh^2$ 的形式，即 $1 + 2\sinh^2 x$。
- 忘記當 $u = \mathrm{e}^x$ 時 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$；正是這個因子約去了分子中多餘的 u。
- 弄錯積分上下限：$u \in [0,1]$ 對應的是 $x \in (-\infty, 0]$，而不是 $[0,1]$。

STEP 之外

同一個積分也可以直接用部分分式（partial fractions）來做，因為 $1+u^4=(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$；而利用 $\frac{1+u^2}{1+u^4}$ 與 $\frac{1-u^2}{1+u^4}$ 的組合，是一條省去大部分代數運算的巧妙捷徑。在大學裏，像 $\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4)=\pi/(2\sqrt{2})$ 這類積分，用圍道積分（contour integration）和留數定理（residue theorem）一行就能完成，而反常積分（improper integral）則會在分析（analysis）課程中以完全嚴謹的方式處理。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是領略複分析這一面的絕佳讀物。

詳細解答

STEP III 2014，第 3 題

純數學 • 到拋物線的距離

STEP III 2014，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q3

關鍵思路

拋物線（parabola）上每一點都可以寫成 $(at^2, 2at)$，因此我們需要的每個距離都變成單一變量 t 的函數；而在兩個部分中，這個函數原來都是二次函數（quadratic）（對直線而言是 t 的二次函數，對點而言是 t^2 的二次函數）。求二次函數的最小值只不過是配方（completing the square），但我們必須留意變量可以取值的範圍：t^2 不可以是負數，而正是這個限制把第 (ii) 部分分成不同情況。至於圓的部分則唾手可得，因為一點到一個圓的距離，就是該點到圓心的距離減去半徑。

解答

第 (i) 部分

把 L 寫成 $mx - y + c = 0$。拋物線上的點 $P = (at^2, 2at)$ 到 L 的垂直距離（perpendicular distance）是

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

設 $f(t) = mat^2 - 2at + c$。由於 $ma > 0$，配方得

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

所以 f 的最小值是 $\dfrac{mc - a}{m}$，在 $t = 1/m$ 時取得。

情況 $mc > a$。此時對每個 t 都有 $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$，因此整條拋物線位於 L 的同一側，永不與之相交。L 與拋物線之間的最短距離，就是拋物線上的點到 L 的最小距離，

即 $|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$ 的最小值：

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

正如所求。最近的點是 $t = 1/m$，該處拋物線切線（tangent）的斜率為 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$：切線與 L 平行，與幾何直覺一致。

情況 $mc \le a$。此時 $f(1/m) \le 0$，而當 $t \to \infty$ 時 $f(t) \to +\infty$。由於 f 是連續（continuous）的，存在某個 t 使 $f(t) = 0$，所以 L 與拋物線相交，最短距離為 0。

第 (ii) 部分：點 $(p, 0)$

由 $C = (p, 0)$ 到 $P = (at^2, 2at)$ 的距離的平方是

$$(at^2 - p)^2 + 4a^2t^2.$$

這只取決於 $u = t^2$，而 u 可取 $[0, \infty)$ 中的每一個值。因此我們要求

$$g(u) = (au - p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

的最小值。配方得

$$g(u) = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + 4a(p-a).$$

想一想 不受限制時，g 的最小值在 $u = (p-2a)/a$ 取得。這個值是否總是可以取到？

不是：$u = t^2$ 必須是非負數，而只有當 $p \ge 2a$ 時才有 $(p-2a)/a \ge 0$。

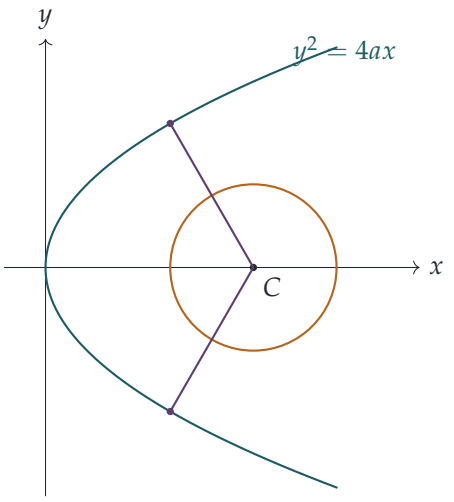
情況 $p/a > 2$。頂點（vertex）$u = p/a - 2$ 是正數，因此可以取到，g 的最小值是 $4a(p-a)$；由於 $p > 2a > a$，這個值是正數。最短距離是

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

在兩點 $\left(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)}\right)$ 取得。

情況 $p/a \le 2$。頂點位於 $u \le 0$，因此 g 在 $u \ge 0$ 上遞增，其在該範圍內的最小值是 $g(0) = p^2$。最短距離是 p，在拋物線的頂點 $(0, 0)$ 取得。

兩個答案在 $p = 2a$ 時吻合，兩者都給出 $2a$。



圖中所示為 $a = 1$、$p = 5$ 的情況：拋物線上最接近 C 的點（紫色）距離為 $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$，而以 C 為圓心、半徑為 $b = 2$ 的圓（琥珀色）與拋物線保持 2 的距離。

第 (ii) 部分：圓

設 d 為剛才求得的由 $C = (p, 0)$ 到拋物線的距離，即

$$d = \begin{cases} p & \text{若} p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{若} p > 2a. \end{cases}$$

該圓的圓心為 C，半徑為 b。

若 $d > b$。在拋物線上任取一點 P，在圓上任取一點 Q。由三角不等式（triangle inequality），

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

當 P 是拋物線上最接近 C 的點，而 Q 是線段 CP 與圓的交點時（由於 $|CP| = d > b$，線段確實與圓相交），等號成立。因此最短距離是 $d - b$。

若 $d \leq b$。當 P 沿拋物線移動時，$|PC|$ 由其最小值 $d \leq b$ 連續地變化至任意大的值，因此在某處有 $|PC| = b$。該點同時位於兩條曲線上，最短距離為 0。

綜合以上，圓與拋物線之間的最短距離是

$$\begin{cases} p - b & \text{若} p \leq 2a \text{ 且} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)} - b & \text{若} p > 2a \text{ 且} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{其他情況（即若} b \geq d\text{）.} \end{cases}$$

驗算

- 取 $m=1$、$c=2$、$a=1$，則 $mc=2>a$。公式給出 $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.7071$；直接計算，$t=1$ 的點是 $(1,2)$，它到 $x-y+2=0$ 的距離是 $|1-2+2|/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}$。若改取 $c=\frac{1}{2}$（使 $mc<a$），直線 $y=x+\frac{1}{2}$ 與 $y^2=4x$ 相交於滿足 $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$ 之處，此方程有實根，確認距離為 0。
- 取 $a=1$、$p=5$：點 $(3,\pm 2\sqrt{3})$ 與 $(5,0)$ 的距離為 $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$，而以電腦在拋物線上搜索，找不到更近的點。
- 當 $p\to 0$ 時距離 $p\to 0$，這是正確的，因為 $(0,0)$ 在拋物線上。當 p 很大時，$2\sqrt{a(p-a)}<p$，這是必然的，因為頂點的距離是 p。
- 所有結果都經電腦以數百組隨機選取的 m、c、a、p 和 b 搜索驗證。

常見錯誤

- 把距離平方對 t 的導數（derivative）設為零時，遺漏了根 $t=0$，或忘記當 $p<2a$ 時 $t^2=p/a-2$ 無解：分情況討論正是第 (ii) 部分的重點所在。
- 在 $mc<a$ 時仍給出 $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$：這個值是負數，而且直線其實與拋物線相交。
- 在圓的部分寫出 $d-b$ 而不檢查其正負；當 $b\geq d$ 時兩條曲線相交，答案是 0。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的最近點，正是 CP 為拋物線法線（normal）之處，而在 $p=2a$ 處的轉變並非偶然：$(2a,0)$ 是拋物線在頂點處的曲率中心（centre of curvature）。在它之外的點，在對稱軸以外有兩個最近點；這類轉變點的軌跡稱為漸屈線（evolute），是曲線微分幾何（differential geometry）中的經典對象。在受限制的範圍內求函數的最小值，而答案可能位於邊界而非駐點（stationary point），正是約束優化（constrained optimisation）的起點。如想做更多同類型的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

詳細解答

STEP III 2014，第 4 題

純數學 • 積分不等式

STEP III 2014，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 4.7 節變分法中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/variations.html

關鍵思路

把 I_1 中的平方展開，再與 I 比較：兩者之差是一個恰當導數（exact derivative）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right)$ 的積分，而由於 $y(1) = 0$ 及 $\tan 0 = 0$，這個積分等於零。一旦把 I 寫成某個平方的積分，它非負就顯而易見了。在第 (ii) 部分，只要選取 b 使 $\sec^2$ 項恰好產生 a^2y^2，同一技巧依然奏效；唯一可能出問題的地方，是 $\tan bx$ 在 $[0,1]$ 內趨於無窮。

解答

如題目所意，我們全程假設 y 在 $[0,1]$ 上有連續導數（continuous derivative）。

第 (i) 部分

由於 $0 \le x \le 1 < \frac{\pi}{2}$，函數 $\tan x$ 在 $[0,1]$ 上連續，所以 I_1 有意義。展開平方，

$$I_1 = \int_0^1 \left((y')^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\begin{aligned} I - I_1 &= -\int_0^1 \left(y^2 + 2yy'\tan x + y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \left(2yy'\tan x + y^2\sec^2 x\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

這裏用了 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$。由乘積法則（product rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right) = 2yy'\tan x + y^2\sec^2 x$，正好就是被積函數。故此

$$I - I_1 = -\Big[y^2\tan x\Big]_0^1 = -\left(y(1)^2\tan 1 - y(0)^2\tan 0\right) = 0,$$

因為 $y(1)=0$ 且 $\tan 0 = 0$。所以 $I = I_1$，得證。

由於 I_1 是一個平方在長度為正的區間上的積分，$I_1 \geq 0$，因此 $I \geq 0$。

現在假設 $I = 0$。那麼 $I_1 = 0$，而被積函數 $(y' + y\tan x)^2$ 連續且非負，所以它必須在 $[0,1]$ 上處處為零（若它在某一點為正，便會在一個小區間上為正，令積分為正）。因此對 $0 \leq x \leq 1$ 有 $y' + y\tan x = 0$。

想一想 怎樣在不除以 y 的情況下解 $y' + y\tan x = 0$？畢竟 y 可能在某處為零。

使用積分因子（integrating factor）。由於在 $[0,1]$ 上 $\cos x > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y'\cos x + y\sin x}{\cos^2 x} = \frac{y' + y\tan x}{\cos x} = 0,$$

所以對某常數 C 有 $y = C\cos x$。條件 $y(1)=0$ 給出 $C\cos 1 = 0$，而 $\cos 1 \neq 0$，所以 $C = 0$。故此，僅當對 $[0,1]$ 中所有 x 都有 $y = 0$ 時，才有 $I = 0$。

第 (ii) 部分

設 $K = \displaystyle\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$，其中 $b > 0$ 有待選取。展開，

$$K = \int_0^1 \left((y')^2 + 2ayy'\tan bx + a^2y^2\tan^2 bx\right)\mathrm{d}x.$$

我們希望出現的導數是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan bx\right) = 2ayy'\tan bx + aby^2\sec^2 bx = 2ayy'\tan bx + aby^2 + aby^2\tan^2 bx.$$

把它與 K 的被積函數比較，$\tan^2$ 項恰好吻合當且僅當 $ab = a^2$，即 $b = a$。作此選擇後，

$$(y' + ay\tan ax)^2 = (y')^2 - a^2y^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

於是

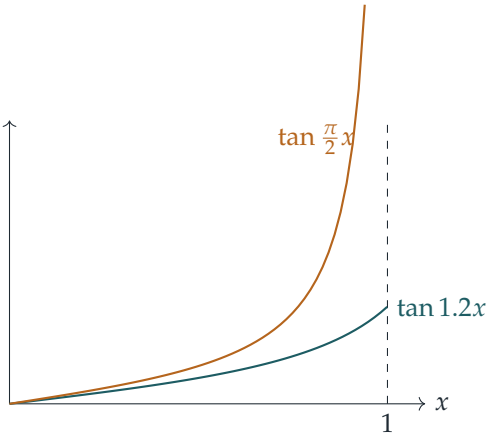
$$K = J + \Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = J + a\,y(1)^2\tan a = J,$$

因為 $y(1)=0$ 且 $\tan 0 = 0$。

這個論證需要 $\tan ax$ 在整個 $[0,1]$ 上有定義且連續，這樣 K 才存在，微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）才適用。由於 $a > 0$，ax 取遍 $[0,a]$，而 tan 在其上連續當且僅當 $a < \frac{\pi}{2}$。所以證明在以下情況成立：

$$a < k = \frac{\pi}{2}.$$

對這樣的 a，我們有 $J = K \geq 0$，因為 K 是一個平方的積分。（事實上，把第 (i) 部分論證中的 $\cos x$ 換成 $\cos ax$，可知 $J = 0$ 會迫使 $y = C\cos ax$ 且 $C\cos a = 0$，所以 $y \equiv 0$；對於不恆為零的 y，我們甚至得到 $J > 0$。）



上圖說明為何 $k = \frac{\pi}{2}$：當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，權函數 $\tan ax$ 在 $[0,1]$ 上保持有界；但當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，它在端點 $x = 1$ 處有一條漸近線（asymptote）。

$a = \frac{\pi}{2}$ 的情況

證明本身提示了該往哪裏找：$K = 0$ 需要 $y' + ay\tan ax = 0$，其解為 $y = C\cos ax$。當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，這些解不滿足條件 $y(1) = 0$；但當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，它們滿足。所以試取

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

它並非處處為零，且 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$。於是

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos \pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

所以當 $a = k$ 時，$y = \cos\frac{\pi x}{2}$（或它的任何非零倍數）給出 $J = 0$。

驗算

- 在第 (i) 部分取 $y = 1 - x$：$I = \int_0^1 (1-(1-x)^2)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$，而以數值方法計算 I_1 也得到 0.6667。
- 對許多隨機選取的 $(1-x)$ 的三次多項式倍數，以及 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中隨機選取的 a，電腦驗算以高精度確認了 $J = K > 0$。

- 界限 $k = \frac{\pi}{2}$ 是最佳的：取 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，可得 $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$，對每個 $a > \frac{\pi}{2}$ 都是負數（例如當 $a = 2$ 時 $J \approx -0.766$）。

常見錯誤

- 忘記 $x = 0$ 處的邊界項為零是因為 $\tan 0 = 0$，而不是因為 $y(0)$ 滿足甚麼條件；題目對 $y(0)$ 沒有任何假設。
- 由 $I_1 = 0$ 推出 $y' + y\tan x = 0$ 時沒有說明理由：關鍵在於被積函數的連續性。
- 選取 b 時沒有檢查 $\tan bx$ 在 $[0,1]$ 上是否保持有限；條件 $a < \frac{\pi}{2}$ 正是由此而來。

STEP 之外

對於 $y(1) = 0$ 的不等式 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$，是 Wirtinger 不等式（Wirtinger's inequality，亦稱龐加萊（Poincaré）不等式）的一種形式，而常數 $\frac{\pi^2}{4}$ 是 $-y'' = \lambda y$ 在 $y'(0) = 0$、$y(1) = 0$ 條件下的最小特徵值（eigenvalue）；極值函數 $\cos\frac{\pi x}{2}$ 就是對應的特徵函數（eigenfunction）。在變分法（calculus of variations）中，借助一個精心選取的導數來配方，正是勒讓德（Legendre）和雅可比（Jacobi）判別法背後的想法，用以判斷一條駐定路徑（stationary path）是否真的是極小值。想找更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於背後的特徵值問題，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*。

詳細解答

STEP III 2014，第 5 題

純數學 • 幾何中的複數

> **STEP III 2014，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q5

關鍵思路

在複平面（complex plane）上，「平行且長度相等」其實就是「作為位移向量（displacement vector）相等」，而逆時針（anticlockwise）旋轉四分之一圈就是乘以 i。因此，本題的每一個幾何條件都可以化為關於頂點的一條簡短線性方程。至於建在各邊上的正方形，我們先走到該邊的中點（midpoint），再沿垂直於該邊的方向向外走半條邊長，就得到正方形的中心。

解答

平行四邊形的判別條件

首先設 $a + c = b + d$。那麼

$$b - a = c - d \qquad 及 \qquad d - a = c - b,$$

所以位移 $\overrightarrow{AB}$ 等於 $\overrightarrow{DC}$，而 $\overrightarrow{AD}$ 等於 $\overrightarrow{BC}$。相等的位移互相平行且長度相等，故兩組對邊均平行且相等：$ABCD$ 是平行四邊形（parallelogram）。

反之，設 $ABCD$ 是平行四邊形。兩條平行且等長的線段，其位移必定相等或相反，所以

$$b - a = \varepsilon(c - d), \qquad d - a = \eta(c - b), \qquad \varepsilon, \eta \in \{1, -1\}.$$

若 $\varepsilon = 1$ 或 $\eta = 1$，相應的方程移項後即得 $a + c = b + d$。餘下唯一的情況是 $\varepsilon = \eta = -1$，即 $b - a = d - c$ 及 $d - a = b - c$。以第一式減去第二式，得 $b - d = d - b$，故 $b = d$，這與頂點互不相同矛盾。因此 $a + c = b + d$，等價關係得證。

正方形的判別條件

設 $ABCD$ 是平行四邊形，並設 $m = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$ 為兩條對角線（diagonal）的公共中點（即其中心）。那麼

$$a-m = \tfrac{1}{2}(a-c), \qquad b-m = \tfrac{1}{2}(b-d), \qquad c-m = -(a-m), \qquad d-m = -(b-m).$$

若 $ABCD$ 是正方形（square），則其對角線長度相等，並互相垂直平分，所以 B 是由 A 繞 m 旋轉四分之一圈得到的。由於頂點按逆時針方向標記，這個旋轉是逆時針的。所以 $b-m = \mathrm{i}(a-m)$，即 $\frac{1}{2}(b-d) = \frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$，也就是 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$。

反之，若 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$，記 $w = a-m \neq 0$。那麼

$$a-m = w, \quad b-m = \mathrm{i}w, \quad c-m = -w, \quad d-m = -\mathrm{i}w,$$

所以四個頂點就是 w 繞 m 依次旋轉 $90°$ 所得。它們是一個正方形的頂點（四條邊長均為 $|w|\sqrt{2}$，而且每條邊都是前一條邊乘以 i）。第二個等價關係得證。

第 (i) 部分

頂點 P, Q, R, S 按逆時針排列，所以當我們由 P 走向 Q 時，$PQRS$ 的內部在我們的左方。因此建在 PQ 外側的正方形位於我們的右方。

從 PQ 的中點 $\frac{1}{2}(p+q)$ 出發，沿垂直於 PQ 的方向向右移動 $\frac{1}{2}|q-p|$（半條邊長），便到達中心 X。把 $q-p$ 乘以 $-\mathrm{i}$ 會使它順時針旋轉 $90°$，即轉向右方，所以這一步是 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$。因此

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p) = \tfrac{1}{2}\big(p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i})\big),$$

即為所求。

> **想一想** 為甚麼是 $-\mathrm{i}$ 而不是 $+\mathrm{i}$？

乘以 $+\mathrm{i}$ 會把 $\overrightarrow{PQ}$ 轉向左方，指向四邊形內部，得到的是建在內側的正方形的中心。由於每個內角都小於 $180°$，內部完全位於每條邊的左方，所以右方確實是外側。

第 (ii) 部分

對每條邊依次應用第 (i) 部分（同樣的推理對每條邊都適用，因為每條邊都是在內部位於左方的情況下走過的），

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

我們比較兩個判別條件中的表達式。

對頂點之和。

$$\begin{aligned}2(x+z)-2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i})+(q+s)(1-\mathrm{i})-(q+s)(1+\mathrm{i})-(p+r)(1-\mathrm{i})\\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s),\end{aligned}$$

所以

$$x+z-(y+t)=\mathrm{i}\big(p+r-(q+s)\big). \tag{1}$$

對角線。

$$2\mathrm{i}(x-z)=\mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i})=(p-r)(\mathrm{i}-1)+(q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t)=(q-s)(1+\mathrm{i})+(r-p)(1-\mathrm{i})=(q-s)(1+\mathrm{i})+(p-r)(\mathrm{i}-1).$$

兩者完全相同，所以

$$\mathrm{i}(x-z)=y-t \tag{2}$$

對每一個這樣的四邊形 $PQRS$ 都成立：線段 XZ 與 YT 總是長度相等且互相垂直。

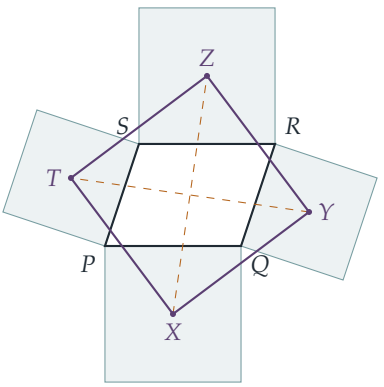
想一想 既然 (2) 總是成立，那麼決定 $XYZT$ 是否正方形的是甚麼？

只有平行四邊形條件。現在我們把各部分結合起來。

若 $PQRS$ 是平行四邊形，則 $p+r=q+s$，所以由 (1) 得 $x+z=y+t$，根據第一個結果，$XYZT$ 是平行四邊形。再結合 (2)，由正方形的判別條件可知 $XYZT$ 是正方形。（該判別條件中「反之」的一半不需要任何關於標記方向的假設；而且 $X\neq Z$，因為若 $x=z$，則 $r-p=\mathrm{i}(s-q)$，即 $\overrightarrow{PR}$ 是 $\overrightarrow{QS}$ *逆時針旋轉四分之一圈所得*；但在按逆時針標記的凸四邊形（convex quadrilateral）中，$\overrightarrow{PR}$ 總是由 $\overrightarrow{QS}$ *順時針旋轉*一個介乎 0° 與 180° 之間的角，再經縮放而得。）

若 $XYZT$ 是正方形，則它特別地是平行四邊形，所以根據第一個結果，$x+z=y+t$。由 (1) 得 $\mathrm{i}(p+r-q-s)=0$，所以 $p+r=q+s$，$PQRS$ 是平行四邊形。

因此，$XYZT$ 是正方形當且僅當 $PQRS$ 是平行四邊形。



驗算

取平行四邊形 $p = 0$、$q = 4$、$r = 5 + 3\mathrm{i}$、$s = 1 + 3\mathrm{i}$（如上圖）。公式給出 $x = 2 - 2\mathrm{i}$、$y = 6 + \mathrm{i}$、$z = 3 + 5\mathrm{i}$、$t = -1 + 2\mathrm{i}$。$XYZT$ 的各邊為 $4 + 3\mathrm{i}$、$-3 + 4\mathrm{i}$、$-4 - 3\mathrm{i}$、$3 - 4\mathrm{i}$，每條都是前一條的 i 倍：這是邊長為 5 的正方形。作為對第 (i) 部分的驗算，$x = 2 - 2\mathrm{i}$ 確實是 PQ 下方、頂點為 0、4、$4 - 4\mathrm{i}$、$-4\mathrm{i}$ 的正方形的中心。以電腦對數以千計的隨機凸四邊形進行檢驗，每次都證實恆等式（identity）(2) 成立，而且 $XYZT$ 是正方形恰好當 $PQRS$ 是平行四邊形。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分使用 $+\mathrm{i}$，結果把正方形放在四邊形內側。
- 在平行四邊形的判別條件中，忘記「平行且相等」也容許 $b - a = -(c - d)$，而這種情況必須排除。
- 對「當且僅當」只證明了一個方向。在第 (ii) 部分，「正方形 $\Rightarrow$ 平行四邊形」這個方向只需用到 (1)。

STEP 之外

恆等式 (2) 就是范奧貝爾定理（van Aubel's theorem）：對任何四邊形，連接相對兩個外接正方形中心的線段長度相等且互相垂直。這是一個普遍原理的小例子：由旋轉和中點構成的幾何作圖，都是作用於頂點上的線性映射（linear map），因此有關它們的定理都可化為代數恆等式（關於等邊三角形的拿破崙定理（Napoleon's theorem）是另一個例子）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）以優美的方式發展了這種看待複數乘法的幾何觀點。

詳細解答

STEP III 2014，第 6 題

純數學 • 以凸性證明不等式

> **STEP III 2014，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q6

關鍵思路

一個函數若在零點處取值為零、斜率（slope）也為零，而且圖像向上彎曲，那麼它必然升到零以上。把題目給出的事實積分兩次，就能把這幅圖像變成嚴謹的證明。之後題中每條不等式，都只需把所有項移到同一邊，得出一個滿足 $f(0) = f'(0) = 0$ 的函數 f，再驗證 f'' 為正即可。真正要花心思的是選擇恰當的整理方式，使 f'' 的形式簡單。

解答

開首的結果

設對 $0 < t < x_0$ 有 $f''(t) > 0$，且 $f(0) = f'(0) = 0$。取定 x，使 $0 < x < x_0$。

取 $h = f''$。由於對 $0 < t < x$ 有 $f''(t) > 0$，由題目給出的結果得

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

這對 $(0, x_0)$ 內每一個 x 都成立，所以對 $0 < t < x_0$ 有 $f'(t) > 0$。

現在再次應用題目給出的結果，這次取 $h = f'$。對 $0 < x < x_0$，我們有：對 $0 < t < x$，$f'(t) > 0$，所以

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

因此對 $0 < t < x_0$ 有 $f(t) > 0$，得證。下文會一直以 $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ 應用這個結果。

第 (i) 部分

設 $f(x) = 1 - \cos x \cosh x$。則 $f(0) = 1 - 1 = 0$，而由乘積法則（product rule）得

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

再求導一次，

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，$\sin x > 0$ 及 $\sinh x > 0$，所以 $f''(x) > 0$。由開首的結果，$f(x) > 0$，即

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{對} 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

第 (ii) 部分

> **想一想** 應該把開首的結果應用到哪個函數上？直接用 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 看來會很繁複。

先消去分數。當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時，x、$\sin x$、$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 全部為正，所以兩邊乘以正數不會改變不等號的方向。於是

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

（第一條兩邊乘以 $x \cosh x > 0$，第二條兩邊乘以 $x \sinh x > 0$。）乘積 $\sin x \cosh x$ 和 $\sin x \sinh x$ 求導後形式整齊，這正是選用這個形式的原因。

*左邊的不等式。*設 $g(x) = \sin x \cosh x - x$。則 $g(0) = 0$，且

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

再求導一次，$\sin x \cosh x$ 項互相抵消：

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時它為正，因為在該區間內 $\cos x > 0$ 及 $\sinh x > 0$。（上限 $\frac{1}{2}\pi$ 正是在這裏起作用。）由開首的結果，$g(x) > 0$，所以 $x < \sin x \cosh x$，從而 $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$。

*右邊的不等式。*設 $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$。則 $k(0) = 0$，且

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

再求導一次，$\sin x \sinh x$ 項互相抵消：

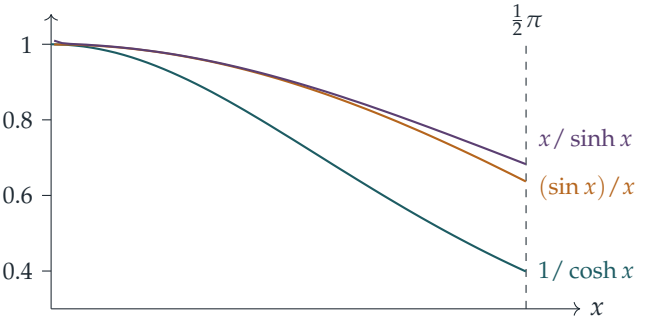
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，當 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 時 $\cos x \cosh x < 1$，所以在該區間內 $k''(x) > 0$。由開首的結果，$k(x) > 0$，所以 $\sin x \sinh x < x^2$，從而 $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$。

兩者合起來，對 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$，

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

得證。



驗算

- 級數（series）：$\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$，所以當 x 很小時它確實略低於 1，與 (i) 一致。同樣，$\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$、$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$ 及 $\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$，所以 x 很小時左邊的不等式顯然成立，而右邊的不等式則由下一項決定（$\frac{\sin x}{x}$ 的 x^4 係數是 $\frac{1}{120}$，而 $\frac{x}{\sinh x}$ 的則是較大的 $\frac{7}{360}$）。
- 在 $x = 1$：$\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$，且 $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$。
- 在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 附近，取 $x = 1.57$：三個值約為 0.399、0.637 和 0.683，而 $\cos x \cosh x \approx 0.002$。

常見錯誤

- 直接把開首的結果應用到 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 本身：它在 0 處根本沒有定義，而且其導數（derivative）十分難處理。應先消去分母，並檢查每個乘上的因子都是正數。

- 只檢查 $f(0) = 0$ 而忘記檢查 $f'(0) = 0$；缺少後者，開首的結果便不適用。
- 沒有察覺第二條不等式需要用到第 (i) 部分：$k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$ 為正，正是因為 (i)。

STEP 之外

開首的結果其實是均值定理（mean value theorem）論證的一種形式：導數為正的函數是遞增（increasing）的，這裏用了兩次。它說明凸函數（convex function）位於其切線（tangent line）之上，這裏的切線就是原點處的 $y = 0$；而這種「比較二階導數」的技巧，是證明初等函數之間不等式的標準方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對均值定理及其推論有細緻的發展。

詳細解答

STEP III 2014，第 7 題

純數學 • 向量與圓內接四邊形

STEP III 2014，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

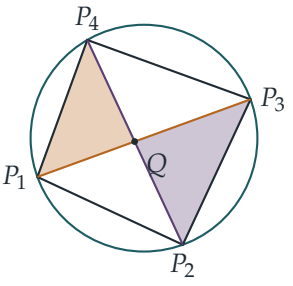
step.maths.org/questions/14-s3-q7

關鍵思路

第 (i) 部分是相交弦定理（intersecting chords theorem），源自同弓形內的圓周角相等（angles in the same segment）。向量部分則從另一途徑再次得出同一事實。平面上的四點是「仿射相關」（affinely dependent）的，而該相關關係中的係數確定了兩條對角線（diagonal）的交點位置，因此它們以已知比例分割每條對角線。把這些比例代入 (i)，便得出最終的關係式。

解答

整個解答都會用到這個構形的兩個事實。第一，P_i 之中任何三點都不共線（collinear），因為一條直線與一個圓最多只相交於兩點。第二，由於各頂點是沿圓周依次標記的，P_1 和 P_3 分別位於弦（chord）P_2P_4 所分出的兩段不同的弧（arc）上。所以它們位於直線 P_2P_4 的兩側，而兩條對角線相交於一點 Q，且 Q 嚴格位於線段 P_1P_3 和 P_2P_4 的內部。



第 (i) 部分

在三角形 P_1QP_4 和 P_2QP_3 中：

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$，因為它們是在 Q 處的對頂角（vertically opposite angles）；
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$ 及 $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$。這兩角相等，因為它們都是弦 P_3P_4 在同一段弧上的點 P_1、P_2 所對的角（該弧由 P_4 經 P_1 和 P_2 到 P_3）。

所以這兩個三角形相似（similar），對應關係為 $P_1 \leftrightarrow P_2$、$Q \leftrightarrow Q$、$P_4 \leftrightarrow P_3$。對應邊成比例：

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{所以} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）位於一個平面上，所以三個向量 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ 都位於一個二維空間中。二維空間中的三個向量必定線性相關（linearly dependent），所以存在不全為零的數 b_2, b_3, b_4，使得

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

（具體來說：由於 P_1, P_2, P_3 不共線，$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 與 $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ 不平行，因此它們張成（span）整個平面，而 $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ 是它們的線性組合。於是可取 $b_4 = -1$。）現設 $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$，並對 $i = 2, 3, 4$ 設 $a_i = b_i$。那麼 $\sum a_i = 0$，各 a_i 不全為零，而且

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

所以 $(*)$ 成立。

第 (iii) 部分

$a_1 + a_3 \neq 0$。假設相反，即 $a_1 + a_3 = 0$。那麼由 $(*)$ 的第一條方程，亦有 $a_2 + a_4 = 0$，所以 $a_3 = -a_1$ 及 $a_4 = -a_2$。第二條方程變成

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

直線 P_1P_3 與 P_2P_4 是不同的直線（否則四點全部共線），而且它們相交於 Q，所以兩者不平行。因此 $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 與 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ 均非零且不平行，這迫使 $a_1 = a_2 = 0$。於是四個 a_i 全為零，產生矛盾。所以 $a_1 + a_3 \neq 0$，同理 $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$。

交點。由 $(*)$ 得 $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$ 及 $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$。兩式相除，

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

第一個形式顯示 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1+a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$，是直線 P_1P_3 上的一點。同樣地，第二個形式顯示它是直線 P_2P_4 上的一點。兩條不平行的直線只相交於一點，所以 $\mathbf{r}$ 就是 Q 的位置向量（position vector）。

想一想 怎樣把這條 Q 的公式轉化為長度 P_1Q 和 QP_3？

相減即可。利用 $\mathbf{q} = \mathbf{r}$，

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1+a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1+a_3}.$$

取長度得 $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1+a_3|}P_1P_3$ 及 $QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1+a_3|}P_1P_3$。同樣地，由 $\mathbf{r}$ 的第二個形式得 $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2+a_4|}P_2P_4$ 及 $QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2+a_4|}P_2P_4$。

正負號。由於 Q 嚴格位於 P_1 與 P_3 之間，分數 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$ 嚴格介乎 0 與 1 之間。於是 $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$ 亦嚴格介乎 0 與 1 之間。兩個正數的積為正，所以

$$\frac{a_1a_3}{(a_1+a_3)^2} > 0, \qquad \text{即} a_1a_3 > 0.$$

對 P_2P_4 作同樣的論證，得 $a_2a_4 > 0$。所以 $|a_1a_3| = a_1a_3$ 及 $|a_2a_4| = a_2a_4$。

推導結論。代入第 (i) 部分：

$$\frac{a_1a_3}{(a_1+a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2+a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

由於 $(a_2+a_4)^2 = (a_1+a_3)^2 \neq 0$，兩邊乘以它，得

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

此即所求結果。

驗算

- 取頂點為 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 的正方形。那麼 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4$，所以 $a = (1,-1,1,-1)$ 滿足 $(*)$。公式給出 Q 位於原點，且 $a_1a_3(P_1P_3)^2 = 4 = a_2a_4(P_2P_4)^2$。
- 對於不對稱的情況，如圖所示，取單位圓（unit circle）上角度為 $200°, 290°, 20°, 120°$ 的點 $P_1, \ldots, P_4$。(iii) 的全部三項結論，包括 $a_1a_3 > 0$ 和 $a_2a_4 > 0$，都已用電腦在這個例子及數以千計的隨機圓內接四邊形上驗證，誤差在 10^{-10} 以內。
- 把所有 a_i 乘以同一因子 λ 後，答案依然成立，這是理所當然的：最終關係式兩邊都乘以 λ^2。

常見錯誤

- 在 (i) 中配錯了角：在 P_1 和 P_2 處的兩個相等的角都是弦 P_3P_4 所對的角，這決定了哪些邊互相對應。
- 在 (iii) 中未加說明便去掉絕對值（absolute value）符號。帶絕對值的關係式很容易得出；真正的功夫在於證明 $a_1a_3 > 0$ 和 $a_2a_4 > 0$，這要用到 Q 位於兩條對角線內部這一事實。
- 證明 $a_1 + a_3 \neq 0$ 時，忘記說明兩條對角線為何不平行。

STEP 之外

量 $(P_1Q)(QP_3)$ 稱為點 Q 關於該圓的冪（power）；對於通過 Q 的每一條弦，它的值都相同。第 (ii) 部分說的是平面上的四點是仿射相關的。數 a_i 是一種類似重心坐標（barycentric coordinates）的東西，而 Q 的公式讓我們初步看到仿射幾何（affine geometry）如何在不用任何坐標的情況下處理點、直線和比例。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）講解了線性相關，以及 (ii) 背後的維數計算。

詳細解答

STEP III 2014，第 8 題

純數學 • 級數的收斂

> **STEP III 2014，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 2.3 節一個發散級數與它的收斂近親中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/kempner.html

關鍵思路

把正整數切成一段段的區間 $[k^n, k^{n+1})$。每段中的每一項都介乎該段起點的值與下一段起點的值之間，所以每段之和都被夾在「項數乘以這兩個值」之間。把各段加起來，一個難以處理的級數（series）便變成幾何級數（geometric series），或者變成每段都貢獻一個常數的級數，於是我們一眼就能看出它是否發散（diverges）。同樣的計數方法也適用於不含數字 2 的整數，只要我們數清楚每段裏有多少個這樣的整數便可。

解答

分段不等式

區間 $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$ 共包含

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

個整數。由於 f 是嚴格遞減（strictly decreasing）的，對該段中的每個 r，

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

第一個不等式成立是因為 $r < k^{n+1}$，第二個成立是因為 $r \geq k^n$（等號只在 $r = k^n$ 時成立）。把這些不等式對 r 的 $k^n(k-1)$ 個值相加，得

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

即為所求。（事實上左邊的不等式是嚴格的。）



$k = 2$ 時的各段，並標示每段的項數。

第 (i) 部分

取 $k = 2$ 及 $\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$，這是嚴格遞減的。分段不等式變成

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{即} \qquad \frac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

$n = 0, 1, \ldots, N$ 的各段恰好拼合起來覆蓋 $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$，因為每段都在下一段開始之前剛好結束。把這 $N+1$ 個不等式相加，

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

至於推論：部分和（partial sums）$H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$ 隨 m 遞增，而 $H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$，只要取 N 足夠大，它便可以大於任何我們指定的數。因此部分和無上界，$\sum \frac{1}{r}$ 不收斂（converge）。

第 (ii) 部分

取 $k = 2$ 及 $\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$，同樣是嚴格遞減的。這次我們只需要右邊的不等式：

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

如前對 $n = 0, 1, \ldots, N$ 相加，

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

想一想 這只為部分的部分和給出了上界。為甚麼它能為整個無窮級數給出上界？

所有項都是正數，所以部分和遞增。任何部分和 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$ 都不大於滿足 $2^{N+1}-1 \geq m$ 的那個部分和，因此小於 $\frac{4}{3}$。一個有上界（bounded above）的遞增數列必定收斂，而且其極限不大於該上界。因此

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

第 (iii) 部分

計算 $S(1000)$ 的元素個數。把 0 至 999 的每個整數寫成三位數字串，不足的在前面補零（例如 7 寫成 007）。補上的零不會引入 2，所以一個整數不含 2，當且僅當其數字串不含 2。三個位置中每一位都可以是 $0, 1, 3, 4, \ldots, 9$ 這九個數字之一，共得 9^3 個數字串，各自對應不同的整數。其中一個是 000，它不是正數，所以 $S(1000)$ 含有 $9^3 - 1$ 個數。

分段計數。以 $n+1$ 個位置作同樣的論證，可知 $S(10^{n+1})$ 中有 $9^{n+1}-1$ 個整數。所以由 $(n+1)$ 位數組成的區間 $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$ 含有

$$(9^{n+1}-1) - (9^n - 1) = 8 \cdot 9^n$$

個不含 2 的整數。（等價地說，首位數字不能是 0 或 2，所以有 8 個選擇，其餘 n 位各有 9 個選擇。）

估計 $\sigma(n)$ 的上界。這就是 $k = 10$ 的分段論證，只不過我們只計算不含 2 的整數。該段中每個 r 都滿足 $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$，所以這一段對總和的貢獻最多是

$$8 \cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

現在固定 n，並選取 M 使得 $n \leq 10^{M+1}$。$S(n)$ 的每個元素都落在 $m = 0, 1, \ldots, M$ 的某一段之中，而且所有倒數都是正數。所以

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

第二個不等式是嚴格的，因為我們略去了 $m > M$ 的正項。因此對所有 n，$\sigma(n) < 80$。

驗算

- 第 (ii) 部分：$\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$（阿培里常數（Apéry's constant)），遠低於 $1\frac{1}{3}$。
- 第 (i) 部分取 $N = 2$：$\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$，介乎 1.5 與 3 之間。

- 第 (iii) 部分：直接點算可證實 1000 以下有 $728 = 9^3 - 1$ 個數，而每段有 $8 \cdot 9^n$ 個。用電腦直接求和得 $\sigma(10^7) \approx 10.28$，遠低於 80。這個上界相當寬鬆，但題目要求的也就只是這麼多。

常見錯誤

- 數錯一段的項數。該段由 k^n 至 $k^{n+1} - 1$，共 $k^{n+1} - k^n$ 項，而不是 $k^{n+1} - k^n - 1$ 項。
- 在 (iii) 中把第 n 段的全部 9^n 個不含 2 的數字串都算進去。首位數字不能是 0，所以只有 $8 \cdot 9^n$ 個。若用 9^{n+1}，所得上界是 90，並不足夠。
- 在 (ii) 中只得出至 $2^{N+1} - 1$ 為止的部分和的上界便停下，沒有說明為甚麼整個無窮級數也有上界。

STEP 之外

這就是柯西（Cauchy）凝聚判別法（Cauchy's condensation test）：對於遞減的正數數列，$\sum a_r$ 收斂當且僅當 $\sum 2^n a_{2^n}$ 收斂。由此可立即看出 $\sum r^{-p}$ 收斂當且僅當 $p > 1$。第 (iii) 部分是 Kempner 級數（Kempner series）：把所有含某個指定數字的整數刪去，原本發散的調和級數（harmonic series）便變成收斂，因為幾乎所有很大的整數都包含每一個數字。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對凝聚判別法及各種比較判別法（comparison tests）有細緻的論述。

詳細解答

STEP III 2014，第 9 題

力學 • 有阻力的拋體

STEP III 2014，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q9

關鍵思路

題目已給出位置，所以速度（velocity）只需求導一次便得到；要驗證運動方程（equation of motion），只需把 $\mathbf{v}$ 和 $\dot{\mathbf{v}}$ 代入 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$。之後的一切都圍繞分量（components）展開：$\mathbf{r}$ 的 $\mathbf{j}$ 分量決定 T，而 $\mathbf{v}$ 在時間 T 時兩個分量之比給出 $\tan\beta$。最後的不等式乍看很繁複，但只要令 $x = kT$ 並消去分母，它便正好化簡為提示中的 $\sinh x > x$。

解答

速度，以及驗證運動

我們把物體視為質點（particle）。牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）給出 $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$，所以運動方程是

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

而初始條件（initial conditions）是在 $t = 0$ 時 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$。

這裏 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{u}$ 都是常向量，所以我們把給定的 $\mathbf{r}$ 逐個係數求導：

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

再求導一次得 $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$。另一方面，

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

兩者相同，所以運動方程成立。在 $t = 0$ 時 $\mathrm{e}^0 = 1$，所以 $\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$。兩個初始條件都成立。

飛行時間

現在取 $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$。$\mathbf{r}$ 的 $\mathbf{j}$ 分量是

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

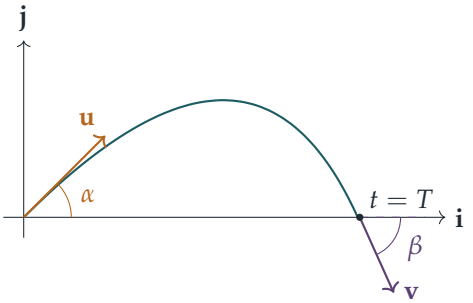
令它在 $t = T$ 時等於零，並乘以 k^2：

$$uk\sin\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right) = \left(kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT}\right)g.$$

由於 $T > 0$ 及 $k > 0$，我們有 $1 - \mathrm{e}^{-kT} > 0$，所以可以除以它。把 $kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - \left(1 - \mathrm{e}^{-kT}\right)$ 代入，得

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

即所求。



時間 T 時的角度

在 $t = T$ 時，$\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$ 的分量是

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

由於 $0 < \alpha < 90°$，所以 $v_x > 0$。我們預期 $v_y < 0$，因為質點正在下降，這一點稍後會證明。因此 $\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{i}$ 之間的銳角（acute angle）滿足 $\tan\beta = -v_y/v_x$。全式除以 v_x：

$$\tan\beta = \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

這裏用了 $\left(1-\mathrm{e}^{-kT}\right)/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$。

證明 $\tan\beta > \tan\alpha$

由上一個結果，$\tan\beta > \tan\alpha$ 等價於

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff \left(\mathrm{e}^{kT}-1\right)g > 2uk\sin\alpha,$$

這是乘以 $uk\cos\alpha > 0$ 所得。現在用飛行時間的結果代替 $uk\sin\alpha$，這樣 u 和 α 便完全消去。

> **想一想** 怎樣把它變成與 $\sinh kT$ 有關的式子？

令 $x = kT > 0$。那麼 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$，除以 $g > 0$ 之後，所需的不等式變為

$$\mathrm{e}^x - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - 2.$$

乘以 $\mathrm{e}^x - 1 > 0$（因此不等號方向不變）並展開：

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 > 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^x \\
&\iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\text{除以} \mathrm{e}^x > 0) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

每一步都可逆，而且當 $kT > 0$ 時 $\sinh kT > kT$（題目容許我們假設這一點）。所以 $\tan\beta > \tan\alpha$。

這也確定了 v_y 的正負：我們已證明 $-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$ 且 $v_x > 0$，所以 $v_y < 0$。質點在時間 T 時確實正在下降，$\tan\beta$ 的公式因而成立。

最後，α 和 β 都在 $(0°, 90°)$ 之內，而 tan 在此區間上嚴格遞增（strictly increasing）。所以由 $\tan\beta > \tan\alpha$ 得 $\beta > \alpha$。有阻力（resistance）時，質點落下的路徑比上升時更陡。

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，利用 $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$，得 $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$，這正是一般的拋射體（projectile）運動。此外，當 x 很小時 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$，所以飛行時間的結果給出 $T \to 2u\sin\alpha/g$。同理 $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$，即對稱的拋物線。
- 取 $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$、$u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ 及 $\alpha = 45°$。以數值方法解 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$ 得 $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$，比沒有阻力時的 $1.414\,\mathrm{s}$ 短。落地角為 $\beta \approx 65.7° > 45°$，兩條公式都吻合至小數點後很多位。用電腦對 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ 作逐步數值積分(numerical integration)，也能重現給定的 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$。

常見錯誤

- 取 $\tan\beta = v_y/v_x$ 而漏掉負號：落地時 v_y 是負數，而 β 是銳角。
- 除以或乘以 $1 - \mathrm{e}^{-kT}$ 或 $\mathrm{e}^{kT} - 1$ 時沒有說明它是正數。正是這一點保證不等號方向正確。

► 停在 $\tan\beta > \tan\alpha$：要推出 $\beta > \alpha$，需要用到 tan 在銳角範圍內遞增這個事實。

STEP 之外

給定的 $\mathbf{r}$ 是線性微分方程（linear differential equation）$\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ 的解，你可以用積分因子（integrating factor）e^{kt} 直接解出它。線性阻力（linear drag）是唯一一種能使 $\mathbf{i}$ 方向與 $\mathbf{j}$ 方向的運動分離的阻力定律。若採用更貼近現實的二次阻力（quadratic drag）$-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$，兩個方向的運動便會耦合（coupled），而且不存在閉式解（closed form）。至於軌跡不對稱、下降時較陡這一特點，在兩種情況下都成立。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種思路討論受阻力作用的運動。

詳細解答

STEP III 2014，第 10 題

力學 • 耦合振動

> **STEP III 2014，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.2 節簡正模式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/normal-modes.html

關鍵思路

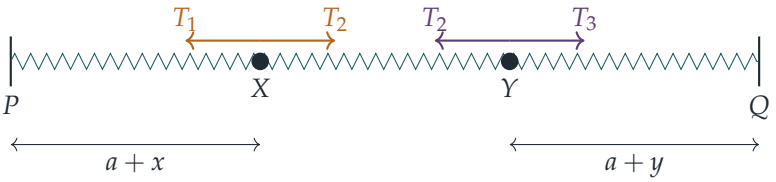
把所有東西放在同一條直線上，只用一個坐標，以 x 和 y 表示每條彈簧的伸長量（extension），然後由牛頓（Newton）第二定律（Newton's second law）得出兩條耦合方程（coupled equations）。具有這種對稱性的耦合方程，只要相加和相減就可以分離：$x-y$ 和 $x+y$ 各自滿足一條簡單的簡諧方程，而且頻率不同。Y 會否回到原處，就取決於這兩個頻率之比是否有理數（rational）。

解答

運動方程

把 X 和 Y 視為質點，彈簧視為輕彈簧並遵守胡克定律（Hooke's law）；桌面光滑，所以唯一的水平力就是彈簧的張力（tension）。所有力都沿直線 PQ 作用，運動亦一直在這條直線上。

沿直線從 P 起，以指向 Q 的方向量度位置，於是 P 位於 0，Q 位於 $3a$。這樣 X 位於 $a+x$，而 Y 位於 $3a-(a+y)=2a-y$。



三條彈簧的長度和張力如下（由胡克定律，張力 $=$ $\lambda \times$ 伸長量$/a$，負值表示推力（thrust））：

$$PX:\ \text{長度}a+x, \qquad T_1 = \frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{長度}(2a-y)-(a+x) = a-x-y, \qquad T_2 = -\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{長度}a+y, \qquad T_3 = \frac{\lambda y}{a}.$$

受張力的彈簧會把兩端互相拉近。所以 X 受到指向 P 的 T_1 和指向 Y 的 T_2；取 $P \to Q$ 方向為正，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -T_1 + T_2 = -\frac{\lambda}{a}x - \frac{\lambda}{a}(x+y) = -\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

正是所求。（正負號會自動處理好：若 $T_2 < 0$，彈簧 XY 受壓縮，會把 X 推向 P。）

至於 Y，它的位置是 $2a-y$，所以它在正方向的加速度是 $-\ddot{y}$。它受到指向 X 的 T_2（負方向）和指向 Q 的 T_3（正方向）：

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -T_2 + T_3 = \frac{\lambda}{a}(x+y) + \frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{所以} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

這就是把第一條方程中的 x 和 y 互換，正如裝置的對稱性（對 PQ 的中點作反射）所要求的一樣。

組合 $x-y$

把兩條方程相減，

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right] = -\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

設 $\omega^2 = \lambda/(ma)$，上式就是 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y) = -\omega^2(x-y)$，即簡諧運動（simple harmonic motion），所以

$$x - y = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

起初 $XP = a$ 而 $YQ = \frac{1}{2}a$，所以在 $t = 0$ 時 $x = 0$、$y = -\frac{1}{2}a$，得 $x - y = \frac{1}{2}a$，因此 $A = \frac{1}{2}a$。兩質點由靜止釋放，所以在 $t = 0$ 時 $\dot{x} = \dot{y} = 0$；求導後得 $\omega B = 0$，所以 $B = 0$。因此

$$x - y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

組合 $x+y$

改為把兩條方程相加，

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y)=-\frac{\lambda}{a}(3x+3y),\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y)=-3\omega^2(x+y).$$

這是角頻率（angular frequency）為 $\sqrt{3}\,\omega$ 的簡諧運動，所以 $x+y=C\cos\sqrt{3}\,\omega t+D\sin\sqrt{3}\,\omega t$。在 $t=0$ 時，$x+y=-\frac{1}{2}a$ 且其導數為 0，所以 $C=-\frac{1}{2}a$、$D=0$：

$$x+y=-\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

Y 永不回到原處

取兩個結果之差的一半，得

$$y=\tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big]=-\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

（同理 $x=\frac{1}{4}a(\cos\omega t-\cos\sqrt{3}\,\omega t)$。）$Y$ 回到初始位置，當且僅當 $y=-\frac{1}{2}a$，即

$$\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t=2.$$

想一想 兩個餘弦函數都是周期函數，那麼它們終究總會再次對齊吧？

每個餘弦值最多是 1，所以兩者之和等於 2 只有在某一時刻 $t>0$ 兩者同時等於 1 時才會發生。這需要

$$\omega t=2\pi n\quad\text{及}\quad\sqrt{3}\,\omega t=2\pi k$$

其中 n,k 為整數，且因 $t>0$ 而有 $n\geq 1$。兩式相除，$\sqrt{3}=k/n$ 便會是有理數，但它並不是。所以不存在這樣的 $t>0$，Y 永遠不會回到初始位置。兩個周期 $2\pi/\omega$ 和 $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$ 是不可公度（incommensurable）的，所以兩個振動永遠不會再次同步，儘管它們可以任意接近同步。

驗算

- 在 $t=0$ 時，公式給出 $x=\frac{1}{4}a(1-1)=0$ 及 $y=-\frac{1}{4}a(1+1)=-\frac{1}{2}a$，與起始位置吻合，而且兩個導數在該處都等於零。
- 彈簧 XY 的長度是 $a-x-y=a+\frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$，一直介乎 $\frac{1}{2}a$ 與 $\frac{3}{2}a$ 之間，所以兩質點永不相撞；同樣 $PX=a+x\geq\frac{1}{2}a$ 及 $YQ=a+y\geq\frac{1}{2}a$。整個過程中模型在物理上都合理。
- 取 $m=a=1$、$\lambda=2$ 以數值方法逐步模擬運動，直至 $t=20$，結果與 x 和 y 的公式相差少於 10^{-10}。以電腦在 $0<\omega t\leq 20\,000$ 範圍內搜尋，發現 $\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t$ 最接近 2 時可達 1.999995，但從未到達 2。

常見錯誤

- 弄錯 Y 方程的正負號：y 是從 Q 起量度的，所以 y 增加會使 Y 向負方向移動。
- 把 XY 的長度寫成 $a+x+y$ 而不是 $a-x-y$；x 和 y 增加都會令中間的彈簧變短。
- 只論證兩個周期不同。單是周期不同並不足夠（周期 1 和 2 在 $t=2$ 時會再次對齊）；關鍵在於兩者之比 $\sqrt{3}$ 是無理數（irrational）。

STEP 之外

組合 $x-y$ 和 $x+y$ 是這個系統的簡正模（normal modes）：它們是矩陣 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特徵向量（eigenvectors），對應的特徵值（eigenvalues）1 和 3 給出頻率的平方 ω^2 和 $3\omega^2$。耦合系統的每個微小振動都可以這樣分解為簡正模，而只有當所有頻率之比都是有理數時，運動才是周期的；否則運動是准周期（quasi-periodic）的，永不重複，但會任意接近其起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）講述耦合振子，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）則解釋背後的特徵向量方法。

詳細解答

STEP III 2014，第 11 題

力學 • 圓周運動

STEP III 2014，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q11

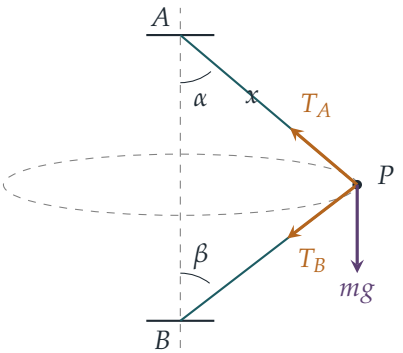
關鍵思路

質點受三個力作用（兩條繩的張力（tension）及其重量），三者合起來必須恰好提供圓周運動所需的向心力（centripetal force）。分別沿鉛垂及水平方向分解，便得到關於兩個張力的兩條線性方程。繩只能拉不能推，故 $T_B \geq 0$，由此得出所求的不等式。在臨界情況下，下方的繩變得鬆弛，而在三角形 ABP 中應用餘弦定理（cosine rule），便可知道 α 可以取哪些角度。

解答

建立模型

把 P 視為質點，兩條繩視為輕而不可伸長。P 在一個以直線 AB 上一點為圓心的水平圓上運動，半徑為 $r = x\sin\alpha$，所以其加速度為 $\omega^2 x\sin\alpha$，方向水平指向軸線。張力 T_A 沿 PA 作用，與向上的鉛垂線成角 α。張力 T_B 沿 PB 作用，與向下的鉛垂線成角 β。



求張力

沿鉛垂方向（鉛垂方向沒有加速度）及沿水平指向軸線的方向分解：

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

即使 β 是鈍角，即 P 位於 B 之下，這兩條方程仍然成立，因為此時 $\cos\beta < 0$，T_B 的鉛垂分量指向上方，正合實際情況。

要消去 T_B，把 (1) 乘以 $\sin\beta$，(2) 乘以 $\cos\beta$，然後相加。利用 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$，得

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

要消去 T_A，把 (2) 乘以 $\cos\alpha$，(1) 乘以 $\sin\alpha$，然後相減：

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

這裏 α 和 β 是三角形 ABP 的兩個內角，所以 $0 < \alpha+\beta < \pi$，從而 $\sin(\alpha+\beta) > 0$。此外 $\sin\alpha > 0$。拉緊的繩滿足 $T_B \geq 0$，因此

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

即所求。

情況 $\omega^2 x\cos\alpha = g$

此時 $T_B = 0$：下方的繩剛好拉直，但沒有張力。於是方程 (1) 給出

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

這與 (2) 一致，因為此時 (2) 給出 $T_A = m\omega^2 x$。另外注意 $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$，所以 α 是銳角。

想一想 一條只涉及 h、d 和 α 的不等式，究竟從何而來？

它來自幾何，而不是力學。在三角形 ABP 的頂點 A 處應用餘弦定理：

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

長度 x 是這個二次方程（quadratic equation）的實根，所以其判別式（discriminant）非負：

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

由於 α 是銳角且 $h > d$，$h\cos\alpha$ 和 $\sqrt{h^2-d^2}$ 均為正數，因此可以兩邊開平方，得

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

T_A 的上下界

質點確實不在軸線上，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，從而 $0 < \cos\alpha < 1$。因此 $T_A = mg/\cos\alpha > mg$。至於另一個界，由上一個結果得 $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2-d^2}/h$，所以

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2-d^2}}.$$

何時取得上界

等號成立需要 $h\cos\alpha = \sqrt{h^2-d^2}$，即判別式為零，此時二次方程有重根

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2-d^2}.$$

於是 $x^2+d^2 = h^2$，即 $AP^2 + BP^2 = AB^2$。根據畢氏定理的逆定理（converse of Pythagoras' theorem），角 APB 是直角：兩條繩互相垂直，而 P 位於以 AB 為直徑的圓上。換一個說法，AP 是以 B 為圓心、半徑為 d 的圓的切線（tangent），這正是 α 在此位置取得最大可能值的原因。在這個位置，$\sin\alpha = d/h$，而 P 位於 B 之上 d^2/h 的高度。對於不等式容許的其他任何銳角 α，都有兩個可能的三角形（兩個 x 值），而兩者在這個位置合而為一。

驗算

- 若 ω 非常大，則 $T_B \approx m\omega^2 x\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$ 以 ω^2 的量級增長，因為此時兩條繩都必須提供很大的向心力。
- 在極端位置取 $h=3$、$d=2$：$\cos\alpha = \sqrt{5}/3$，$x=\sqrt{5}$，且 $x^2+d^2 = 5+4 = 9 = h^2$。於是 $T_A/(mg) = 3/\sqrt{5} \approx 1.342$，等於 $h/\sqrt{h^2-d^2}$。
- 以電腦檢查多個隨機構形，把 T_A 和 T_B 的公式代回向量形式的運動方程，所得殘差均為零。

常見錯誤

- 把圓的半徑當成 x，而不是 $x\sin\alpha$。
- 把 T_B 的鉛垂方向弄反。由於 β 是從 BA 量起，繩 PB 把 P 向下拉（當 β 是銳角時）。
- 沒有先確認兩邊都是正數，便把不等式兩邊平方或開平方。

STEP 之外

臨界情況 $T_B = 0$ 是一個約束變成非作用（inactive）的例子：繩是一種單邊約束（one-sided constraint），只能拉、不能推。這類帶有不等式約束的問題，在力學和最優化中會引出帶符號條件的拉格朗日（Lagrange）乘數（Lagrange multipliers）。圓錐擺（conical pendulum）及其相關問題，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）中有很好的論述。

詳細解答

STEP III 2014，第 12 題

概率與統計 • 對數正態分佈

> **STEP III 2014，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q12

關鍵思路

由於 $y = \mathrm{e}^x$ 是嚴格遞增（strictly increasing）的，只要取對數（logarithm），關於 Y 的命題便可化為關於 X 的命題：$Y \leq y$ 當且僅當 $X \leq \ln y$。這樣便能立即得出 Y 的中位數（median）和密度。至於平均值（mean），技巧在於把指數部分配方（complete the square），使被積函數變成另一個正態分佈的密度函數，而我們早已知道它的積分等於 1。

解答

第 (i) 部分

由於 e^x 嚴格遞增，事件 $\{Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\}$ 與事件 $\{X \leq x_m\}$ 是同一個事件。因此

$$\mathrm{P}\left(Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\right) = \mathrm{P}(X \leq x_m) = \tfrac{1}{2},$$

所以 Y 的中位數是

$$y_m = \mathrm{e}^{x_m}.$$

（中位數可以這樣經過任何遞增函數而保持對應；平均值卻不可以，第 (iv) 部分會說明這一點。）

第 (ii) 部分

Y 只取正值。對於 $y > 0$，設 G 為 Y 的累積分佈函數（cumulative distribution function）。利用與前面相同的等價關係，

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \ln y) = F(\ln y).$$

利用連鎖法則（chain rule）求導，並使用 $F' = f$，得

$$g(y) = G'(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(\ln y)}{y}, \qquad y > 0,$$

此即所求（而當 $y \le 0$ 時 $g(y) = 0$）。

眾數（mode）λ 是 g 取最大值之處。它位於開區間 $(0, \infty)$ 內，而 g 在該區間上可導，所以 $g'(\lambda) = 0$。由商法則（quotient rule），

$$g'(y) = \frac{f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot y - f(\ln y)}{y^2} = \frac{f'(\ln y) - f(\ln y)}{y^2}.$$

由於 $y^2 \neq 0$，令 $g'(\lambda) = 0$ 便得

$$f'(\ln \lambda) = f(\ln \lambda),$$

這正是所求的條件。

第 (iii) 部分

函數

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$$

正好是一個 $\mathrm{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ 隨機變量（random variable）的概率密度函數（probability density function）：它就是題目給出的正態密度，只是把 μ 換成 $\mu + \sigma^2$。任何概率密度函數在整條實數線上的積分都等於 1，這便解釋了題目所述的積分。

現在

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^X\big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x.$$

我們把合併後的指數配方。展開 $(x - \mu - \sigma^2)^2 = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$，得

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

常數 $\mathrm{e}^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ 可提到積分號外，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

這裏用到了上面解釋過的積分。這就是所求的結果。

第 (iv) 部分

我們把三個量都明確求出來。

中位數。正態密度關於 μ 對稱，所以 $x_m = \mu$，再由第 (i) 部分得 $y_m = \mathrm{e}^{\mu}$。

眾數。對正態密度求導，

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

想一想 當 f 永不為零時，我們該如何運用第 (ii) 部分的條件？

由於對每個 x 都有 $f(x) > 0$，我們可以把條件 $f'(\ln\lambda) = f(\ln\lambda)$ 除以 $f(\ln\lambda)$，得到

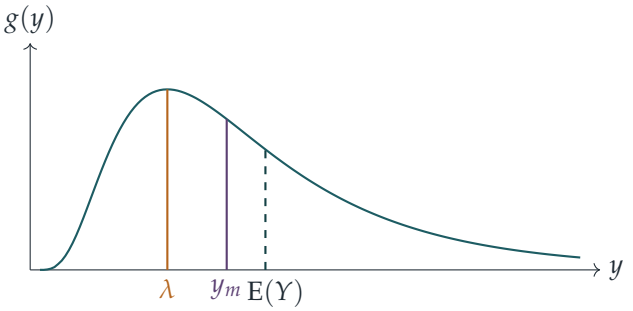
$$-\frac{\ln\lambda - \mu}{\sigma^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\lambda = \mu - \sigma^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}.$$

這是 g 唯一的駐點（stationary point），而題目已告訴我們 Y 有唯一的眾數，所以它就是眾數。

比較。由於 $\sigma > 0$，我們有 $\mu - \sigma^2 < \mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$，而 e^t 嚴格遞增，所以

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2} \;<\; y_m = \mathrm{e}^{\mu} \;<\; \mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

此即所求。這些嚴格不等式（inequality）依賴於 $\sigma^2 > 0$，而這對任何真正的正態分佈（normal distribution）都成立。



上圖顯示 $\mu = 0$、$\sigma = 0.6$ 時 Y 的密度：右邊長長的尾部把平均值拉到最右，中位數居中，而峯值則在兩者的左邊。

驗算

- 當 $\sigma \to 0$ 時，Y 集中於 e^{μ}，三個值都趨向 e^{μ}，理應如此。
- 取 $\mu = 0$、$\sigma = 1$：$\lambda = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$，$y_m = 1$，而 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{1/2} \approx 1.649$。對 $\mathrm{e}^x f(x)$ 作數值積分，以及以數值方法搜尋 g 的最大值，結果都與這些數值吻合。

- 比值 $\mathrm{E}(Y)/\lambda = \mathrm{e}^{3\sigma^2/2}$ 只取決於 σ，這是合理的：改變 μ 只是把 Y 乘以因子 e^{μ} 作縮放。

常見錯誤

- 把 Y 的密度寫成 $f(\ln y)$，忘記了連鎖法則帶來的因子 $1/y$。缺少這個因子，眾數便會算成 e^{μ}，與中位數相同。
- 誤以為 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$。這對中位數成立，但對平均值不成立。
- 配方時出現正負號錯誤：要小心展開 $(x-\mu-\sigma^2)^2$，並檢查剩下的常數。

STEP 之外

這裏的 Y 服從對數正態（lognormal）分佈，常用來為收入、股價和粒子大小建立模型。不等式 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{X}) \geq \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$ 是凸函數（convex function）的琴生不等式（Jensen's inequality）的一個特例，而第 (iii) 部分的計算其實就是正態分佈的矩母函數（moment generating function）$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ 在 $t = 1$ 時的值。Blitzstein 與 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）涵蓋了隨機變量的變換、矩母函數以及對數正態分佈。

詳細解答

STEP III 2014，第 13 題

概率與統計 • 概率生成函數

> **STEP III 2014，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q13

關鍵思路

就第一回合的結果作條件分析。這個遊戲沒有記憶：在任何一個遊戲得以繼續的回合之後，接下來的進程就是同一個遊戲的全新副本，因此從那一刻起的額外得分與 N 本身具有相同的分佈（distribution）。這樣便得到一條以 G 自身表示 G 的方程，我們解出這條方程，再把結果展開成幾何級數（geometric series）。

解答

記 $p_n = P(N = n)$，於是 $G(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n$。設 E_1、E_2、E_3 分別為第一回合結果是 1、2 或 3 的事件，因此 $P(E_1) = a$、$P(E_2) = b$、$P(E_3) = c$。

第 (i) 部分

在 E_1 發生的條件下，遊戲以得分 0 結束，所以 $P(N = 0 \mid E_1) = 1$，而當 $n \geq 1$ 時 $P(N = n \mid E_1) = 0$。因此條件生成函數（conditional generating function）為

$$\sum_{n\geq 0} P(N = n \mid E_1)\, t^n = 1 \cdot t^0 = 1.$$

第 (ii) 部分

在 E_2 發生的條件下，第一回合後得分仍是 0，遊戲繼續。由於每個回合的概率相同，而且不受之前的結果影響，從第二回合起的各回合便構成一個從得分 0 開始的全新遊戲。設 N' 為這個新遊戲所產生的得分，它與 N 同分佈。最終得分為 $0 + N' = N'$，所以

$$P(N = n \mid E_2) = P(N' = n) = p_n \quad \text{對所有} n \geq 0,$$

而條件生成函數為 $\sum p_n t^n = G(t)$。

第 (iii) 部分

同理，在 E_3 發生的條件下，第一回合後得分為 1，其餘部分是一個得分為 N' 的全新遊戲，所以最終得分為 $1 + N'$。因此 $P(N = 0 \mid E_3) = 0$，而當 $n \geq 1$ 時 $P(N = n \mid E_3) = p_{n-1}$；條件生成函數為 $\sum_{n\geq 1} p_{n-1} t^n = tG(t)$。

根據全概率定律（law of total probability），

$$p_n = a\,P(N = n \mid E_1) + b\,P(N = n \mid E_2) + c\,P(N = n \mid E_3).$$

$G(t)$ 中 t^n 的係數是 p_n。在右邊，1、$G(t)$ 和 $tG(t)$ 中 t^n 的係數恰好就是第 (i)–(iii) 部分所得的 $P(N = n \mid E_1)$、$P(N = n \mid E_2)$ 和 $P(N = n \mid E_3)$。所以對所有 $n \geq 0$，$G(t)$ 與 $a + bG(t) + ctG(t)$ 中 t^n 的係數都相等，這就證明了

$$G(t) = a + bG(t) + ctG(t).$$

想一想 我們可以除以 $1 - b - ct$ 嗎？把它展開成幾何級數又是否合理？

移項得 $G(t)(1 - b - ct) = a$。由於 $1 - b = a + c > c > 0$，只要 $|t| < (1 - b)/c$，便有 $1 - b - ct \neq 0$；又因為 $(1 - b)/c = 1 + a/c > 1$，這個範圍包含 $|t| \leq 1$。對於這樣的 t，

$$G(t) = \frac{a}{1 - b - ct} = \frac{a}{1 - b} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{ct}{1 - b}} = \frac{a}{1 - b} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{c}{1 - b}\right)^n t^n,$$

因為 $|ct/(1 - b)| < 1$。讀出 t^n 的係數，得

$$P(N = n) = \frac{ac^n}{(1 - b)^{n+1}}, \qquad n \geq 0.$$

（等價地，比較係數可得 $p_0 = a + bp_0$，以及當 $n \geq 1$ 時 $p_n = bp_n + cp_{n-1}$，即 $p_0 = a/(1 - b)$ 及 $p_n = \frac{c}{1-b} p_{n-1}$，同樣得出上述公式。）

第 (iv) 部分

平均值（mean）為 $\mu = G'(1)$。對 $G(t) = a(1 - b - ct)^{-1}$ 求導，

$$G'(t) = \frac{ac}{(1 - b - ct)^2}, \qquad \text{因此} \qquad \mu = G'(1) = \frac{ac}{(1 - b - c)^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a},$$

這裏用了 $1 - b - c = a$。於是 $1 + \mu = \dfrac{a + c}{a} = \dfrac{1 - b}{a}$，所以

$$\frac{\mu^n}{(1 + \mu)^{n+1}} = \frac{c^n}{a^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{(1 - b)^{n+1}} = \frac{ac^n}{(1 - b)^{n+1}} = P(N = n),$$

得證。

驗算

- 概率總和為 1：$\sum_n p_n = G(1) = a/(1-b-c) = a/a = 1$。
- 直接論證：忽略那些「白費」的結果 2 回合。餘下的每個回合，以概率 $a/(a+c)$ 結束遊戲，或以概率 $c/(a+c)$ 得一分，所以 N 是第一次結束之前所得的分數，而 $P(N=n) = \left(\frac{c}{a+c}\right)^n \frac{a}{a+c}$；由於 $a+c = 1-b$，這與上述公式相同。
- 取 $a = \frac{1}{5}$、$b = \frac{3}{10}$、$c = \frac{1}{2}$，得 $\mu = \frac{5}{2}$，以及 $P(N=0) = \frac{2}{7} \approx 0.2857$、$P(N=1) = \frac{10}{49} \approx 0.2041$。以電腦模擬 2×10^5 局遊戲，得到 0.2855、0.2038，平均得分為 2.498。

常見錯誤

- 把情況 3 的條件生成函數寫成 $G(t)$ 而不是 $tG(t)$：已經得到的那一分會令 t 的每個冪次都提高一次。
- 忘記說明爲何第一回合之後的遊戲是原遊戲的副本：這有賴每個回合的概率都相同，而且與過去獨立。

STEP 之外

就第一步作條件分析，是馬可夫鏈（Markov chain）理論的基本工具，在該理論中稱為首步分析（first-step analysis）；而這裏的答案其實是一個經過偽裝的幾何分佈（geometric distribution）。第 (iv) 部分說明，在 $\{0,1,2,\dots\}$ 上的幾何分佈單憑其平均值便可確定。同樣的「為 G 建立方程」技巧也可處理分支過程（branching process），並由此導出關於一個姓氏最終消失的概率的著名結果。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對生成函數和分支過程的講解非常易讀。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2014 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。