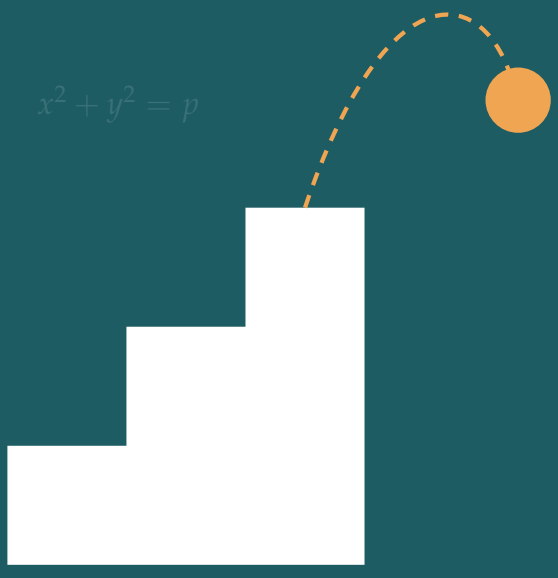
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2012 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2012 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2012 年詳細解答

2012 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 以微積分求最優值 純數學 . . . 3

第 2 題 曲線描繪與根 純數學 . . . 7

第 3 題 由面積推導不等式 純數學 . . . 12

第 4 題 切線與法線 純數學 . . . 16

第 5 題 代換積分法 純數學 . . . 20

第 6 題 三角不等式 純數學 . . . 23

第 7 題 周期性遞推關係 純數學 . . . 27

第 8 題 齊次微分方程 純數學 . . . 31

第 9 題 拋體運動 力學 . . . 35

第 10 題 由落體與聲音 力學 . . . 39

第 11 題 滑輪與摩擦力 力學 . . . 42

第 12 題 條件概率 概率與統計 . . . 46

第 13 題 以指示變量求期望值 概率與統計 . . . 49

STEP II

第 1 題 二項式級數的係數 純數學 . . . 52

第 2 題 多項式的複合 純數學 . . . 55

第 3 題 代換積分法 純數學 . . . 59

第 4 題 對數級數不等式 純數學 . . . 62

第 5 題 倒數函數的描繪 純數學 . . . 66

第 6 題 圓內接四邊形的面積 純數學 . . . 71

第 7 題 向量與圓 純數學 . . . 75

第 8 題 非線性遞推關係 純數學 . . . 78

第 9 題 拋體運動 力學 . . . 82

第 10 題 摩擦力與力矩 力學 86
第 11 題 非彈性碰撞 力學 90
第 12 題 條件概率 概率與統計 93
第 13 題 追逐松過程的最近距離 概率與統計 97

STEP III

第 1 題 非線性微分方程 純數學 100
第 2 題 無窮乘積與級數 純數學 104
第 3 題 相切曲線與四次方程 純數學 108
第 4 題 無窮級數求和 純數學 113
第 5 題 圓錐曲線上的有理點 純數學 117
第 6 題 複數根的軌跡 純數學 121
第 7 題 耦合微分方程 純數學 126
第 8 題 斐波那契裂項級數 純數學 130
第 9 題 轉動滑輪的動力學 力學 134
第 10 題 圓周運動 力學 138
第 11 題 墮落的對摺繩 力學 142
第 12 題 幾何概率 概率與統計 146
第 13 題 截尾正態分佈 概率與統計 150

詳細解答

STEP I 2012，第 1 題

純數學 • 以微積分求最優值

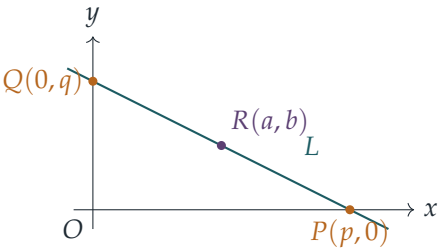
> **STEP I 2012，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q1

關鍵思路

一切都由一個數控制：斜率（gradient）。一旦規定 L 必須經過 R，截距（intercepts）p 和 q 便是 m 的簡單函數（function），而兩個要求最小化的距離也都變成只依賴 m 的函數。和 $p+q$ 可拆成一個常數加上形如 $am+b/m$ 的項，這正是算術－幾何平均不等式（AM–GM）的典型用武之地（或者求一次導數也可以）。至於長度 PQ，留意到 $q=mp$ 會很有幫助，因為這樣在求導之前 PQ^2 就能漂亮地因式分解。

解答

求 p 和 q



由於 $R(a,b)$ 在 $y=c-mx$ 上，我們有 $b=c-ma$，所以 $c=b+ma$。直線在 $x=0$ 處與 y 軸相交，所以 $q=c$；在 $y=0$ 處與 x 軸相交，所以 $p=c/m$（因為 $m>0$，這是可以的）。因此

$$p=a+\frac{b}{m}, \qquad q=b+ma.$$

對每個 $m > 0$，兩者都是正數，符合題目要求。另外留意

$$q = b + ma = m\left(a + \frac{b}{m}\right) = mp,$$

這其實只是說 L 的斜率是 $-q/p$。下面會用到這一點。

最小化 $OP + OQ$

由於 $p, q > 0$，P 和 Q 到 O 的距離就是 p 和 q 本身，所以當 R 固定而 m 在 $m > 0$ 範圍內變化時，我們要最小化

$$S(m) = p + q = a + b + \left(am + \frac{b}{m}\right).$$

括號內是兩個正數之和，而它們的積 ab 與 m 無關。由算術－幾何平均不等式，

$$am + \frac{b}{m} \geq 2\sqrt{am \cdot \frac{b}{m}} = 2\sqrt{ab},$$

等號成立當且僅當 $am = b/m$，即 $m = \sqrt{b/a}$（這是正數，所以這條直線是容許的）。因此

$$S(m) \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2,$$

而且這個下界可以達到。所以距離之和的最小值是 $(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2$，正如所求。

（如果你偏好用微積分：$S'(m) = a - b/m^2$，它只在 $m = \sqrt{b/a}$ 處為零，代入後得到相同的值。）

最小化 PQ

由畢氏定理（Pythagoras），並利用 $q = mp$，

$$PQ^2 = p^2 + q^2 = p^2(1 + m^2) = \left(a + \frac{b}{m}\right)^2 (1 + m^2).$$

由於 $PQ > 0$，最小化 PQ 等同於最小化 $f(m) = PQ^2$。用乘積法則（product rule）和鏈式法則（chain rule）求導，

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(-\frac{b}{m^2}\right)(1 + m^2) + 2m\left(a + \frac{b}{m}\right)^2 \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left[-\frac{b}{m^2} - b + am + b\right] \\ &= 2\left(a + \frac{b}{m}\right)\left(am - \frac{b}{m^2}\right). \end{aligned}$$

想一想 $-b$ 在哪裏被抵消了？

在方括號內，$-\frac{b}{m^2}(1 + m^2) = -\frac{b}{m^2} - b$，而 $m(a + \frac{b}{m}) = am + b$；兩個 b 互相抵消。正是因為這個抵消，我們才把 PQ^2 寫成 $p^2(1 + m^2)$，而不是直接展開 $p^2 + q^2$。

第一個因子是正數，所以 $f'(m)=0$ 當且僅當 $am=b/m^2$，即 $m^3=b/a$，得到唯一的駐點（stationary point）

$$m=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

（題目說我們可以假設它是極小值；事實上，m 較小時 $f'<0$，m 較大時 $f'>0$，所以它是 $m>0$ 上的全局最小值（global minimum）。）

現在代入。取這個 m，

$$a+\frac{b}{m}=a+b\cdot\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=a+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}),\qquad 1+m^2=1+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

因此

$$PQ^2=a^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^2\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3,$$

所以 P 與 Q 之間的最短距離是

$$PQ_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

這就是題目所要求的「相似形式」：第一個答案括號內的指數是 $\frac{1}{2}$、括號外是 2，這個則是括號內 $\frac{2}{3}$、括號外 $\frac{3}{2}$。

驗算

- 對稱性：交換 a 和 b（即對 $y=x$ 作反射）必須令兩個最小值都不變，而事實確實如此。
- 數值例子：取 $a=1$、$b=8$。第二個結果預測 $m=2$，得 $p=5$、$q=10$ 及 $PQ=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11.180$，而 $(1+4)^{3/2}=5\sqrt{5}$，果然吻合。至於距離之和，$m=\sqrt{8}$ 給出 $p+q=9+4\sqrt{2}\approx 14.657=(1+2\sqrt{2})^2$。
- 我們對 2000 組隨機的 (a,b)，把兩個最小值與對 m 的暴力搜尋結果比較；兩者相差約 10^{-8}。

常見錯誤

- 把 p^2+q^2 完全展開再求導：這樣做沒有錯，但很繁瑣，而且容易看漏因子 $am-b/m^2$。先看出 $q=mp$ 可以省下大量功夫。
- 忘記最小化 PQ 與最小化 PQ^2 之所以等價，只是因為 $PQ>0$；以及在化簡 $a+b/m$ 時把分數指數弄錯。

STEP 之外

第二個結果其實是經典的「梯子轉角」問題的變身：$(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ 是能夠水平地搬過寬度分別為 a 和 b 的兩條走廊之間轉角的最長梯子長度。長度固定的線段 PQ 所成的族的包絡線（envelope）是一條星形線（astroid）$x^{2/3}+y^{2/3}=\ell^{2/3}$，而 R 恰好在包絡線上，當且僅當 ℓ 等於這個最小值。包絡線和約束最佳化（constrained optimisation）（以及之後的拉格朗日乘數（Lagrange multipliers））都會在大學一年級的微積分課程中出現；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多同類型的題目。

詳細解答

STEP I 2012，第 2 題

純數學 • 曲線描繪與根

STEP I 2012，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q2

關鍵思路

數 $p(x) = 0$ 的實根（real roots）個數，等同於數 $y = p(x)$ 的圖像與 x 軸相交多少次；又或者把常數項移到另一邊之後，數一條固定曲線與一條水平直線相交多少次。因此整道題的關鍵在於掌握一條四次曲線（quartic）的形狀：它在哪裏轉向，以及轉向時有多高或多低。第 (i) 部分中，這個四次多項式是一個完全平方；第 (ii) 部分中，關於導數的條件令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以因式分解並帶有一個重根（repeated root），結果只剩下一個轉向點（turning point）。

解答

第 (i) 部分

首先留意

$$y = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2 - 3)^2,$$

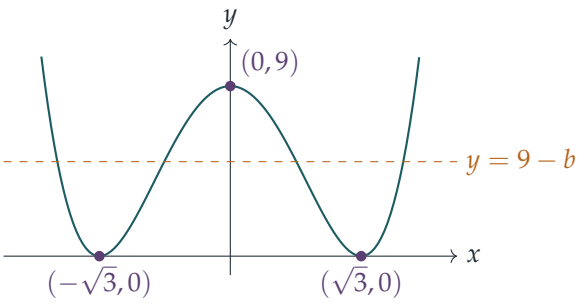
所以處處都有 $y \geq 0$，而且 $y = 0$ 恰好在 $x = \pm\sqrt{3}$ 時成立。這條曲線是偶函數（even function）的圖像（關於 y 軸對稱），並在 $(0, 9)$ 與 y 軸相交。求導，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3),$$

它在 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{3}$ 時等於零。因此駐點（stationary points）為

$$(0, 9)\text{（局部極大值）}, \qquad (\sqrt{3}, 0) \text{ 及 } (-\sqrt{3}, 0)\text{（極小值）}.$$

極小值是顯然的，因為 $y \geq 0$ 而在這兩點 $y = 0$；又 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 12x^2 - 12$ 在 $x = 0$ 時等於 $-12 < 0$，所以該點是極大值。當 $x \to \pm\infty$ 時，$y \to +\infty$。這條曲線是一個「W」形，在 $x = \pm\sqrt{3}$ 處與 x 軸相切。



至於根的個數，在等式兩邊同時加上 9：

$$x^4 - 6x^2 + b = 0 \iff (x^2 - 3)^2 = 9 - b.$$

因此 n 就是水平直線 $y = 9 - b$ 與剛才所繪曲線的交點個數。讓這條直線由高至低移動，從圖中讀出：

- $9 - b > 9$，即 $b < 0$：直線在極大值之上，只與外側兩支相交，所以 $n = 2$。
- $9 - b = 9$，即 $b = 0$：直線穿過極大值點，得到 $x = 0$ 及外側兩點；事實上 $x^2(x^2 - 6) = 0$ 給出 $x = 0, \pm\sqrt{6}$。所以 $n = 3$。
- $0 < 9 - b < 9$，即 $0 < b < 9$：直線與四段單調（monotonic）部分各相交一次，所以 $n = 4$。
- $9 - b = 0$，即 $b = 9$：直線只在兩個極小值點 $x = \pm\sqrt{3}$ 處與曲線相切，所以 $n = 2$。
- $9 - b < 0$，即 $b > 9$：直線位於曲線下方，所以 $n = 0$。

綜合以上：

(a) $n = 0 \iff b > 9$; (b) $n = 1$：不存在這樣的b; (c) $n = 2 \iff b < 0$ 或$b = 9$;

(d) $n = 3 \iff b = 0$; (e) $n = 4 \iff 0 < b < 9$.

$n = 1$ 不可能出現，也可由對稱性得出：若 x 是根，則 $-x$ 也是根，所以唯一的根必須是 $x = 0$，這迫使 $b = 0$，但此時共有三個根。

第 (ii) 部分

現在 $y = x^4 - 6x^2 + ax + b$，所以

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x + a, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12.$$

二階導數只在 $x = \pm 1$ 時等於零。在 $x = 1$ 時一階導數為 $a - 8$，在 $x = -1$ 時則為 $a + 8$。所以兩者在同一點同時等於零，當且僅當

$$a = 8 \text{ (在} x = 1\text{)} \qquad \text{或} \qquad a = -8 \text{ (在} x = -1\text{)}.$$

情況 $a = 8$。此時

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4(x^3 - 3x + 2) = 4(x-1)^2(x+2),$$

我們之所以找到因式 $(x-1)^2$，是因為我們刻意令 $x = 1$ 同時是 y' 和 y'' 的根，即 y' 的重根。

> ? **想一想** 這條曲線實際上有多少個轉向點？

由於 $(x-1)^2 \geq 0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的正負號與 $x+2$ 的正負號相同。所以 y 在 $x < -2$ 時嚴格遞減，在 $x > -2$ 時嚴格遞增（斜率在 $x = 1$ 時為零，但不變號：那是一個駐拐點（stationary point of inflection），而不是轉向點）。曲線只有一個轉向點，就是在 $x = -2$ 處的全局極小值（global minimum），其值為

$$y(-2) = 16 - 24 - 16 + b = b - 24.$$

一條先下降到唯一的極小值再上升的曲線，若極小值在 x 軸之下，便與 x 軸相交兩次；若極小值剛好在軸上，便相交一次（相切）；若在軸之上，則完全不相交。因此相異實根的個數為

$$\begin{cases} 2 & \text{若} b < 24, \\ 1 & \text{若} b = 24, \\ 0 & \text{若} b > 24. \end{cases}$$

（當 $b = 24$ 時，可以直接看到重根：$x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = (x+2)^2(x^2 - 4x + 6)$，而該二次式的判別式（discriminant）為 $16 - 24 < 0$。）

情況 $a = -8$。以 $-x$ 代替 x，可把 $x^4 - 6x^2 - 8x + b$ 變成 $x^4 - 6x^2 + 8x + b$，所以這條曲線是前一條曲線關於 y 軸的反射。唯一的極小值現在位於 $x = 2$，其值為 $b - 24$，而根的個數相同：$b < 24$ 時為 2，$b = 24$ 時為 1，$b > 24$ 時為 0。

第 (iii) 部分

取 $y = x^4 - 6x^2 + ax$，其中 $a > 8$。

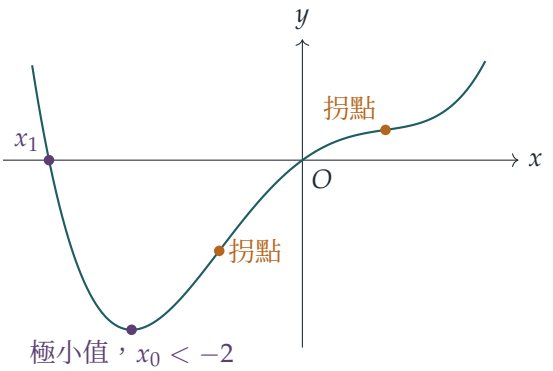
駐點。 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 即 $x^3 - 3x = -\frac{a}{4}$。三次函數 $g(x) = x^3 - 3x$ 有局部極大值 $g(-1) = 2$ 及局部極小值 $g(1) = -2$，而且 $g(-2) = -2$。由於 $-\frac{a}{4} < -2$，高度為 $-\frac{a}{4}$ 的水平直線位於 g 的局部極小值之下，所以它與 g 恰好相交一次，交點在 $x < -2$ 的左支上。因此恰好有一個駐點，位於某個 $x_0 < -2$。該點左邊斜率為負，右邊斜率為正，所以它是極小值。

與 x 軸的交點。 $y = x(x^3 - 6x + a)$，所以 $x = 0$ 是其中一個交點，其餘交點是 $h(x) = x^3 - 6x + a$ 的根。這個三次函數在 $x = \sqrt{2}$ 處取局部極小值，而 $h(\sqrt{2}) = a - 4\sqrt{2} > 0$，因為 $a > 8 > 4\sqrt{2}$。所以 h 只有一個實根，又因 $h(0) = a > 0$，這個根是負數。事實上

$h(-2) = a + 4 > 0$，而 h 在 $x < -\sqrt{2}$ 時遞增，所以這個根 x_1 滿足 $x_1 < -2$。曲線在 x_1 和原點與 x 軸相交，兩者之間曲線取負值；極小值就位於這個區間內。

其他特徵。在原點處斜率為 $a > 0$。二階導數 $12(x^2 - 1)$ 在 $x = \pm 1$ 處變號，所以在 $(-1, -a - 5)$ 及 $(1, a - 5)$ 有拐點（points of inflection）；這兩點的斜率分別為 $a + 8$ 及 $a - 8$，均為正數，所以曲線經過這兩點時仍在上升。曲線在 $-1 < x < 1$ 上向下凹（concave down），在此區間以外向上凹。當 $x \to \pm\infty$ 時，$y \to +\infty$。

下圖展示 $a = 10$ 的情況，此時 $x_0 \approx -2.05$，極小值約為 -28，而 $x_1 \approx -3.05$。



驗算

- 在第 (i) 部分，$b = 5$ 應給出四個根：$x^2 = 3 \pm 2$，所以 $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$。結果吻合。
- 在第 (ii) 部分，$b = 24$ 給出因式分解 $(x + 2)^2(x^2 - 4x + 6)$，證實在極小值處只有一個（二重）根。
- 數值上，我們對 0、9 及 24 兩側的許多 b 值求出這些四次多項式的全部複數根，並數出其中相異的實根；每一個結果都吻合。對於 8 與 200 之間的隨機 a，第 (iii) 部分的曲線總是只有一個駐點及兩個與 x 軸的交點，並且 $x_1 < x_0 < -2$。當 $a = 10$ 時，$x_0 \approx -2.054$，$y(x_0) \approx -28.05$。

常見錯誤

- 把 $x = \pm\sqrt{3}$ 處的重根（當 $b = 9$ 時）算作四個根：題目問的是相異的 x 值。
- 把第 (ii) 部分中 $y' = y'' = 0$ 的點當作轉向點。由於 y' 在該處有一個平方因式，其正負號不會改變，所以它是駐拐點。
- 遺漏 $a = -8$：$y'' = 0$ 有兩個解，每個解都給出一個 a 值。

STEP 之外

當 b 經過 0、9 或 24 時實根個數的跳變，是分岔（bifurcation）的一個小例子：只有當水平直線經過某個駐值時，答案才會改變。第 (ii) 部分中 $y' = y'' = 0$ 這個特殊情況，正是兩個駐點合併並消失之處，這是最簡單的「突變」（catastrophe），即摺疊型突變（fold），也是為甚麼一旦 $a > 8$，第 (iii) 部分的四次曲線便只有一個轉向點。同樣的推理，借助介值定理（intermediate value theorem）和單調性加以嚴格化，就是實分析（real analysis）的起點；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是看到這套推理被仔細展開的好地方。

詳細解答

STEP I 2012，第 3 題

純數學 • 由面積推導不等式

STEP I 2012，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q3

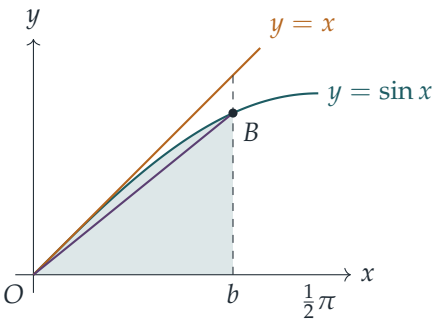
關鍵思路

一條始終朝同一方向彎曲的曲線，總是位於它每一條切線（tangent）的同一側，並位於它每一條弦（chord）的另一側。因此，曲線下的面積被夾在切線下的面積與弦下的面積之間，而這兩個面積都不過是三角形或梯形（trapezium）的面積。把每個面積準確地寫出來，不等式便自然得出；真正需要花心思的，只是決定該用哪一條切線和哪一條弦。

解答

第 (i) 部分

在 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 上，我們有 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\sin x = -\sin x < 0$，所以曲線 $y = \sin x$ 在該區間上是凹（concave）的：它向下彎曲。原點處的切線斜率（gradient）為 $\cos 0 = 1$，所以切線就是直線 $y = x$。由 O 到 $B = (b, \sin b)$ 的弦是直線 $y = \dfrac{\sin b}{b}\,x$。



凹性的意思是：在 O 與 B 之間，曲線嚴格位於弦的上方；而當 $x > 0$ 時，曲線嚴格位於 O 處切線的下方。所以，當 $0 < x < b$ 時，

$$\frac{\sin b}{b}\, x \;<\; \sin x \;<\; x.$$

現在比較在 $0 \le x \le b$ 上的三個面積。

- 曲線下的面積（陰影部分）：$\displaystyle\int_0^b \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos b.$
- 切線下的面積：一個底為 b、高為 b 的直角三角形，面積為 $\frac{1}{2}b^2$。
- 弦下的面積：一個底為 b、高為 $\sin b$ 的三角形，面積為 $\frac{1}{2}b\sin b$。

由於在 $0 < x < b$ 上曲線嚴格位於兩條直線之間（而且三者都是連續的），這些面積滿足嚴格不等式：

$$\tfrac{1}{2}b\sin b \;<\; 1 - \cos b \;<\; \tfrac{1}{2}b^2.$$

右邊的不等式可整理為 $\cos b > 1 - \frac{1}{2}b^2$，左邊的則可整理為 $\cos b < 1 - \frac{1}{2}b\sin b$。合起來便得

$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 < \cos b < 1 - \tfrac{1}{2}b\sin b,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

設 $k = \ln a$；由於 $a > 1$，所以 $k > 0$，而且 $a^x = \mathrm{e}^{kx}$。於是

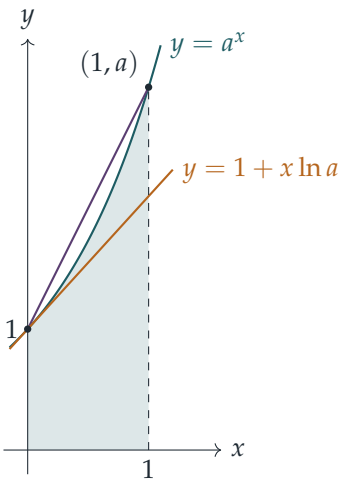
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = k\,\mathrm{e}^{kx}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}a^x = k^2\mathrm{e}^{kx} > 0,$$

所以這條曲線是凸（convex）的：它向上彎曲。現在兩者的角色對調：曲線嚴格位於它的弦的下方，並嚴格位於它的切線的上方（切點除外）。

想一想 我們應該在哪個區間上比較面積？

答案應該只涉及 $\ln a$ 和 a，而不涉及其他量。區間 $0 \le x \le 1$ 恰好做到這一點：曲線的兩個端點是 $(0,1)$ 和 $(1,a)$，而曲線下的面積是

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^k - 1}{k} = \frac{a-1}{\ln a}.$$



下界（弦）。由 $(0,1)$ 到 $(1,a)$ 的弦在 $0<x<1$ 上位於曲線上方，而它下方的區域是一個寬為 1、兩條平行邊分別為 1 和 a 的梯形，面積為 $\frac{1}{2}(1+a)$。因此

$$\frac{a-1}{\ln a} < \frac{a+1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \ln a > \frac{2(a-1)}{a+1},$$

這裏我們兩邊同乘正數 $2\ln a/(a+1)$，所以不等號方向不變。

上界（切線）。$(0,1)$ 處的切線斜率為 $k=\ln a$，所以切線是 $y=1+kx$。當 $x>0$ 時它位於曲線下方，而它在 $[0,1]$ 上的下方面積是一個兩條平行邊分別為 1 和 $1+k$ 的梯形，面積為 $1+\frac{1}{2}k$。因此

$$1+\tfrac{1}{2}k < \frac{a-1}{k}.$$

兩邊乘以 $2k>0$：

$$2k+k^2<2a-2 \quad\Longleftrightarrow\quad k^2+2k+1<2a-1 \quad\Longleftrightarrow\quad (k+1)^2<2a-1.$$

? **想一想** 我們可以直接開平方嗎？

可以，但只因為兩邊都是正數：$2a-1>1>0$，而且由於 $k>0$，所以 $k+1>0$。對正數而言，$u^2<v^2$ 可推出 $u<v$，所以 $k+1<\sqrt{2a-1}$，即

$$\frac{2(a-1)}{a+1} < \ln a < -1+\sqrt{2a-1},$$

證明完畢。

驗算

- 第 (i) 部分取 $b=1$：$1-\frac{1}{2}=0.5$，$\cos 1\approx 0.5403$，而 $1-\frac{1}{2}\sin 1\approx 0.5793$。大小次序正如所述。

- 第 (ii) 部分取 $a = 2$：$\frac{2}{3} \approx 0.6667$，$\ln 2 \approx 0.6931$，而 $\sqrt{3} - 1 \approx 0.7321$。次序同樣正確。
- 當 $a \to 1$ 時，第 (ii) 部分的三個式子都趨於 0，而且彼此愈夾愈緊：在 $a = 1.01$ 時，它們準確至小數點後五位都相同。這很合理，因為在很短的範圍內，一條光滑曲線幾乎是直的。
- 我們在數以千計的隨機值上驗算了兩串不等式，並用辛普森法則（Simpson's rule）驗算了面積公式。

常見錯誤

- 把位置的上下弄反：正弦曲線是凹的（位於切線下方、弦上方），而 a^x 是凸的（情況相反）。應該用二階導數（second derivative）而不是草圖來證明這一點。
- 用 $\ln a$ 乘或除不等式時，忘記 $\ln a > 0$ 這一條件。
- 對 $(k+1)^2 < 2a - 1$ 開平方時，沒有檢查 $k + 1 > 0$。

STEP 之外

這些弦的界是一個一般原理的特例：對於凸函數，它在一個區間上的平均值介乎區間中點的函數值與兩端點函數值的平均之間（這就是埃爾米特（Hermite）–阿達馬（Hadamard）不等式；若改用中點處而非端點處的切線，便可得到更精確的下界）。第 (ii) 部分的下界說明，a 與 1 的對數平均（logarithmic mean）$(a-1)/\ln a$ 小於它們的算術平均（arithmetic mean）；這個事實在整個分析學以至物理學中都屢屢出現。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對凸函數和積分估計有細緻的論述。

詳細解答

STEP I 2012，第 4 題

純數學 • 切線與法線

> **STEP I 2012，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q4

關鍵思路

一切都源於 $y = \frac{1}{2x}$ 的斜率（gradient），再加上細心的消元（elimination）。當我們求兩條只差在把 p 與 q 互換的直線的交點時，把兩條方程相減，總會得出一個因子 $p - q$；由於兩點相異，我們可以把它約去。在特殊情況下，值得留意條件對 Q 的影響：它令 Q 成為 P 關於直線 $y = x$ 的鏡像（mirror image），而這種對稱性（symmetry）正好解釋了為何 T 和 N 都落在這條直線上。

解答

點 T

在 C 上有 $y = \dfrac{1}{2x}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{2x^2}$。因此 P 點的切線（tangent）斜率為 $-\frac{1}{2p^2}$，方程為

$$y - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{2p^2}(x - p).$$

兩邊乘以 $2p^2$，得 $2p^2y - p = -x + p$，即

$$x + 2p^2y = 2p. \tag{1}$$

同理，Q 點的切線為

$$x + 2q^2y = 2q. \tag{2}$$

以 (1) 減去 (2)，

$$2(p^2 - q^2)\,y = 2(p - q).$$

由於兩點相異，$p \neq q$，所以可以除以 $2(p-q)$，得 $(p+q)y = 1$。因為 $p, q > 0$，所以 $p+q \neq 0$，故

$$y = \frac{1}{p+q}.$$

代入 (1)，

$$x = 2p - \frac{2p^2}{p+q} = \frac{2p(p+q) - 2p^2}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

所以 T 是點 $\left(\frac{2pq}{p+q}, \frac{1}{p+q}\right)$，正如所求。

當 $pq = \frac{1}{2}$ 時的點 N

P 點的法線（normal）與切線垂直，所以其斜率為 $2p^2$，方程為

$$y = 2p^2 x - 2p^3 + \frac{1}{2p}. \tag{3}$$

同樣地，Q 點的法線為 $y = 2q^2 x - 2q^3 + \frac{1}{2q}$。令兩個 y 的表達式相等：

$$2(p^2 - q^2)\, x = 2(p^3 - q^3) - \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}\right) = 2(p^3 - q^3) + \frac{p-q}{2pq}.$$

除以 $2(p-q) \neq 0$，

$$(p+q)\, x = p^2 + pq + q^2 + \frac{1}{4pq}.$$

這對任何相異的 p 和 q 都成立。現在運用 $pq = \frac{1}{2}$，於是 $\frac{1}{4pq} = \frac{1}{2} = pq$，右邊變成

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2.$$

因此 $x = p + q$。代入 (3)，

$$y = 2p^2(p+q) - 2p^3 + \frac{1}{2p} = 2p^2 q + \frac{1}{2p} = p\,(2pq) + q = p + q,$$

這裏兩次用到 $2pq = 1$：$2p^2 q = p(2pq) = p$，以及 $\frac{1}{2p} = q$。因此

$$N = (p+q,\ p+q).$$

（注意 $p \neq q$ 加上 $pq = \frac{1}{2}$，意味着 $p \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$，這是對 p 的唯一限制。）

想一想 為甚麼 T 和 N 偏偏會落在 $y = x$ 上？

當 $pq = \frac{1}{2}$ 時，有 $\frac{1}{2q} = p$ 及 $\frac{1}{2p} = q$，所以 $P = (p, q)$、$Q = (q, p)$。曲線 $xy = \frac{1}{2}$ 在關於 $y = x$ 的反射下保持不變，而這個反射把 P 和 Q 互換。因此它把兩條切線互換，也把兩條法線互換，於是每個交點都被映射到自身；而被這個反射固定的點必定在 $y = x$ 上。代數計算正好印證了這一點。

T 與 N 在 $y = x$ 上，以及距離之積

由於 $2pq = 1$，T 的結果給出

$$T = \left(\frac{1}{p+q}, \frac{1}{p+q} \right),$$

它在 $y = x$ 上；而我們已求得 $N = (p+q, p+q)$，它同樣在 $y = x$ 上。

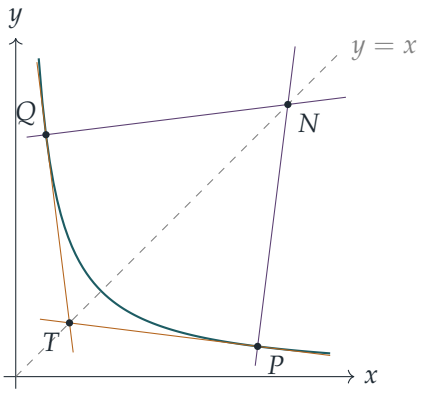
一點 (a, a)（其中 $a > 0$）與原點的距離為 $\sqrt{2}\,a$。由於 $p + q > 0$，

$$OT = \frac{\sqrt{2}}{p+q}, \qquad ON = \sqrt{2}\,(p+q),$$

所以

$$OT \cdot ON = 2,$$

這是常數（與 p 無關），正如所求。



圖中顯示 $p = 2$、$q = \frac{1}{4}$ 的情況：琥珀色為切線，梅紫色為法線。

驗算

取 $p = 2$、$q = \frac{1}{4}$，則 $pq = \frac{1}{2}$。切線為 $x + 8y = 4$ 和 $8x + y = 4$，交於 $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$，與 $\frac{1}{p+q} = \frac{4}{9}$ 吻合。法線為 $y = 8x - \frac{63}{4}$ 和 $y = \frac{x}{8} + \frac{63}{32}$，交於 $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$，與 $p + q = \frac{9}{4}$ 吻合。於是 $OT \cdot ON = \frac{4\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = 2$。我們亦以精確的有理數運算，對 2000 組隨機選取的 p 和 q 驗證了 T 的一般公式，以及特殊情況下的兩個結果。

常見錯誤

- 除以 $p - q$ 時沒有說明為何可以這樣做：「相異的點」這個條件正是用在這裏。

- 求 N 時，在 $\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p} = \frac{p-q}{2pq}$ 中弄錯正負號。
- 在聲稱 T 位於 $y = x$ 上之前，忘記用 $pq = \frac{1}{2}$ 化簡 T。

STEP 之外

直角雙曲線（rectangular hyperbola）$xy = c^2$ 是一種圓錐曲線（conic）；而 $OT \cdot ON$ 為常數這一事實，說明了 T 和 N 是關於圓 $x^2 + y^2 = 2$ 的反演點（inverse points）。關於圓的反演（inversion）是幾何學以及複分析（complex analysis）中一種威力強大的變換；在複分析中，它以映射 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 的形式出現。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）對反演及其幾何性質有精彩的論述。

詳細解答

STEP I 2012，第 5 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 2012，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q5

關鍵思路

頭兩個積分都可以用標準方法處理。把 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 寫出來，便看出 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的導數（derivative）的相反數，所以代換（substitution）$u = \cos x$ 行得通。至於第二個積分，對數（logarithm）是麻煩的因子，因此我們用分部積分（integration by parts），透過求導把它消去。最後一個積分中，$\cos x + \sin x$ 其實是一個「喬裝」的餘弦：$\sqrt{2}\cos(x - \frac{1}{4}\pi)$。把變量平移 $\frac{1}{4}\pi$，積分區間便變成 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，而被積函數（integrand）則變成剛才求得的兩個積分的組合。

解答

第一個積分

記第一個積分為 I_1。由於 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，代入 $u = \cos x$，於是 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$。當 $x = 0$ 時 $u = 1$；當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$。所以

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} 2\cos x \ln(\cos x)\,\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} 2u\ln u\,\mathrm{d}u,$$

其中 $\mathrm{d}u$ 帶來的負號已用來對調上下限。用分部積分（對 $\ln u$ 求導，對 $2u$ 積分），

$$\int 2u\ln u\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \int u^2\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = u^2\ln u - \tfrac{1}{2}u^2.$$

在 $u = 1$ 處，其值為 $-\frac{1}{2}$。在 $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 處，有 $u^2 = \frac{1}{2}$ 及 $\ln u = -\frac{1}{2}\ln 2$，所以其值為 $-\frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}$。因此

$$I_1 = -\tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(\ln 2 - 1),$$

與所求相符。

第二個積分

記第二個積分為 I_2。我們用分部積分，對 $\ln(\cos x)$ 求導，對 $\cos 2x$ 積分。$\cos 2x$ 的一個方便的原函數（antiderivative）是 $\frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cos x$，而 $\ln(\cos x)$ 的導數是 $-\sin x / \cos x$。所以

$$\begin{aligned} I_2 &= \Big[\sin x \cos x \, \ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} - \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 0 + \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

想一想 為甚麼選用 $\sin x \cos x$，而不直接寫成 $\frac{1}{2}\sin 2x$？

兩者是同一個函數，但寫成 $\sin x \cos x$ 的形式時，因子 $\cos x$ 會與 $\ln(\cos x)$ 的導數分母中的 $\cos x$ 互相抵消，剩下容易計算的 $\sin^2 x$ 的積分。

邊界項（boundary term）是 $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}\ln 2) = -\frac{1}{4}\ln 2$。利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$，

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \Big[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}.$$

所以

$$I_2 = -\tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) = \tfrac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2),$$

與所求相符。

最後一個積分

記最後一個積分為 I。由複角公式（compound-angle formula），

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \tfrac{1}{4}\pi + \sin x \sin \tfrac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

這提示我們使用代換 $t = x - \frac{1}{4}\pi$，它把區間 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ 變成 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，即 I_1 和 I_2 的積分區間。由 $2x = 2t + \frac{1}{2}\pi$，

$$\cos 2x = \cos\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin 2t, \qquad \sin 2x = \sin\left(2t + \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos 2t,$$

以及

$$\ln(\cos x + \sin x) = \ln\left(\sqrt{2}\cos t\right) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t),$$

這是成立的，因為在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $\cos t > 0$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln(\cos t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 2 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\, \mathrm{d}t + I_2 - I_1. \end{aligned}$$

餘下的積分等於零：

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

所以，利用上面兩個結果，

$$I = I_2 - I_1 = \tfrac{1}{8}(\pi - 2\ln 2 - 2) - \tfrac{1}{8}(2\ln 2 - 2) = \frac{\pi - 4\ln 2}{8} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

驗算

用辛普森法則（Simpson's rule）算得 $I_1 \approx -0.076713$、$I_2 \approx -0.030588$ 及 $I \approx 0.046125$，與 $\frac{1}{4}(\ln 2 - 1)$、$\frac{1}{8}(\pi - \ln 4 - 2)$ 及 $\frac{1}{8}(\pi - 4\ln 2)$ 吻合至小數點後十位。對第一個積分作一個快速的正負號檢查：在 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 上有 $\sin 2x > 0$ 及 $\ln(\cos x) < 0$，所以 I_1 必定是負數，而 $\ln 2 - 1 < 0$ 正好如此。

常見錯誤

- 在 I_2 的分部積分中漏掉邊界項。它在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處並不為零。
- 把 $\cos(2t + \frac{1}{2}\pi)$ 和 $\sin(2t + \frac{1}{2}\pi)$ 的正負號弄反，結果得到 $I_1 - I_2$ 或 $I_1 + I_2$，而不是 $I_2 - I_1$。
- 把 $\ln\sqrt{2}$ 帶來的常數 $\frac{1}{2}\ln 2$ 直接丟掉，卻沒有檢查它的係數積分後是否為零。

STEP 之外

$\ln(\cos x)$ 和 $\ln(\sin x)$ 的積分是經典題材：同樣的對稱技巧可以得出著名的結果 $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$；而在一般的積分區間上，它們會引出克勞森函數（Clausen function）和卡塔蘭常數（Catalan's constant）。在大學一年級的分析（analysis）課程中，你還要檢查當對數在端點處趨於無窮時，這類積分是否有定義，這使它們成為反常積分（improper integral）。如想多做這類練習，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）。

詳細解答

STEP I 2012，第 6 題

純數學 • 三角不等式

STEP I 2012，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q6

關鍵思路

這裏每個仰角（angle of elevation）的對邊都是同一條旗桿，所以每個餘切（cotangent）都只是一段水平距離除以旗桿高度。這樣，第一個結果就變成關於圓中線段長度的事實：$DC^2 = AD \cdot DB$，因為半圓上的圓周角（angle in a semicircle）是直角。三角恆等式（trigonometric identity）把 $\cot p \cot q - \cot^2 \frac{1}{2}(p+q)$ 化成一個能直接看出正負號的式子。得到這個不等式後，幾何部分幾乎不費吹灰之力就給出最後的結果。

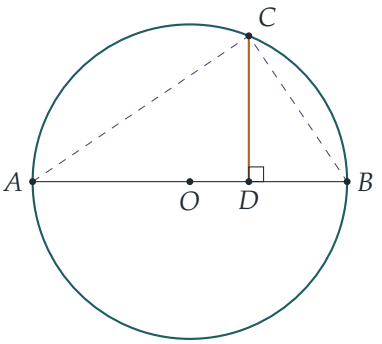
解答

幾何結果

設旗桿高度為 $h > 0$，頂端為 T，因此 DT 是鉛垂的。A、B、C 都在地面上，所以三角形 TDA、TDB、TDC 在 D 處都是直角。因此

$$\cot\alpha = \frac{AD}{h}, \qquad \cot\beta = \frac{DB}{h}, \qquad \cot\phi = \frac{DC}{h}.$$

由於 α 和 β 都是銳角，D 既不是 A 也不是 B（從這兩點中任何一點看，仰角都會是直角），所以 D 嚴格位於 A 與 B 之間，且 $DC > 0$。



現在看地面平面圖。設 O 為圓心，r 為半徑，$x = OD$（以指向 B 的方向為正，所以 $-r < x < r$）。於是 $AD = r + x$，$DB = r - x$，而在三角形 ODC 中應用畢氏定理（Pythagoras' theorem），得 $DC^2 = OC^2 - OD^2 = r^2 - x^2$。因此

$$AD \cdot DB = (r+x)(r-x) = r^2 - x^2 = DC^2.$$

（等價地說：$\angle ACB$ 是半圓上的圓周角，所以是直角，而 CD 是直角三角形 ACB 的高（altitude）。）兩邊除以 h^2，

$$\cot\alpha \cot\beta = \frac{AD \cdot DB}{h^2} = \frac{DC^2}{h^2} = \cot^2\phi,$$

得證。

恆等式

記 $s = \frac{1}{2}(p+q)$，並利用二倍角公式（double-angle formulae）的形式 $\sin^2 s = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(p+q)\big)$ 及 $\cos^2 s = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(p+q)\big)$。左邊變成

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\cos p\cos q\big(1-\cos(p+q)\big) - \tfrac{1}{2}\sin p\sin q\big(1+\cos(p+q)\big)\\
&\quad= \tfrac{1}{2}\big(\cos p\cos q - \sin p\sin q\big) - \tfrac{1}{2}\cos(p+q)\big(\cos p\cos q + \sin p\sin q\big)\\
&\quad= \tfrac{1}{2}\cos(p+q) - \tfrac{1}{2}\cos(p+q)\cos(p-q),
\end{aligned}$$

這裏用了 $\cos(p+q)$ 和 $\cos(p-q)$ 的複角公式（compound-angle formulae）。此式對所有 p 和 q 都成立。

不等式

把恆等式的右邊因式分解：

$$\cos p\cos q\sin^2 s - \sin p\sin q\cos^2 s = \tfrac{1}{2}\cos(p+q)\big(1-\cos(p-q)\big).$$

現設 $p, q > 0$ 且 $p + q \le \frac{1}{2}\pi$。於是 $0 < p + q \le \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos(p+q) \ge 0$；而 $1 - \cos(p-q) \ge 0$ 永遠成立。所以右邊非負，從而

$$\cos p\cos q\sin^2 s \;\ge\; \sin p\sin q\cos^2 s.$$

想一想 我們可以放心地把兩邊除以 $\sin p \sin q \sin^2 s$ 嗎？

可以：由於 p 和 q 都是正數，且兩者之和不超過 $\frac{1}{2}\pi$，所以 p、q 和 s 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內，因此 $\sin p$、$\sin q$ 和 $\sin s$ 都嚴格為正。除以正數 $\sin p \sin q \sin^2 s$ 不會改變不等號的方向：

$$\cot p \cot q \ \geq \ \cot^2 s = \cot^2 \tfrac{1}{2}(p+q).$$

等號成立當且僅當 $p = q$ 或 $p + q = \frac{1}{2}\pi$。

最後結果

取 $p = \alpha$、$q = \beta$。兩者都是正數（它們是一條高度為正的旗桿的仰角），且 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$，所以上述不等式適用。結合第一個結果，

$$\cot^2 \phi = \cot \alpha \cot \beta \ \geq \ \cot^2 \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

ϕ 和 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 都在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內（ϕ 是因為 $DC > 0$ 且 $h > 0$），所以兩個餘切都是正數，可以開平方：$\cot \phi \geq \cot \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

想一想 為甚麼這給出的是 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，而不是 $\geq$？

因為 cot 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上是嚴格遞減（decreasing）的：餘切越大，角就越小。因此

$$\phi \leq \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad \text{只要} \alpha+\beta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

驗算

- 若 $D = O$，則 $AD = DB = DC = r$，所以 $\alpha = \beta = \phi$：第一個結果的兩邊相等，而最後的不等式取等號，與 $p = q$ 的情況吻合。
- 數值測試：取 $r = 1$、$OD = \frac{1}{2}$、$h = 1$，得 $\cot \alpha = 1.5$、$\cot \beta = 0.5$、$\cot^2 \phi = 0.75$，與預期一致。這裏 $\alpha + \beta \approx 0.588 + 1.107 = 1.695 > \frac{1}{2}\pi$，所以最後結果不一定適用；事實上 $\phi \approx 0.857 > \frac{1}{2}(\alpha+\beta) \approx 0.848$，說明條件是必要的。
- 我們在 10^5 組隨機的 (p, q) 上驗證了恆等式，在容許範圍內 2×10^5 組隨機數對上驗證了不等式，並在約 8×10^4 個滿足 $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2}\pi$ 的隨機配置中驗證了 $\phi \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$，全部沒有出錯。

常見錯誤

- 忘記 cot 是遞減的，因而得出 $\phi \geq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。

- 把不等式除以 $\sin p \sin q \sin^2 s$，卻沒有說明它為何是正數。
- 忽略條件 $p + q \leq \frac{1}{2}\pi$：正是這個條件保證 $\cos(p+q) \geq 0$；沒有它，不等式可以不成立。

STEP 之外

這個不等式說明 $\ln \cot t$ 在 $(0, \frac{1}{4}\pi]$ 上是凸函數（convex function），因為它表示 $\ln \cot p$ 與 $\ln \cot q$ 的平均值不小於兩者平均值處的 $\ln \cot$ 值。凸性與琴生不等式（Jensen's inequality）是大學一年級分析學中不等式的一個強大來源。關係式 $DC^2 = AD \cdot DB$ 正是歐幾里得（Euclid）作幾何平均數（geometric mean）的方法：$\cot \phi$ 是 $\cot \alpha$ 與 $\cot \beta$ 的幾何平均數。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）討論了凸函數，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）則有更多這類風格的題目。

詳細解答

STEP I 2012，第 7 題

純數學 • 周期性遞推關係

STEP I 2012，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q7

關鍵思路

一個以週期（period）1、2 或 3 重複的數列（sequence），由其首幾項完全決定，所以遞推關係（recurrence relation）只需對一個週期內少數幾組連續三項成立（再加上首尾相接的那幾組）。把這些條件逐一寫出，便得到一組關於 x、y、z 的小型聯立線性方程（simultaneous linear equations）。這組方程有一個不全為零的解，正是這一點迫使 p 和 q 必須滿足所求的條件。整個過程中，$x \neq 0$ 這個事實是我們能夠約去的關鍵。

解答

第 (i) 部分

若對每個 n 都有 $t_n = x$，則遞推關係給出 $x = px + qx$，即 $(p+q-1)x = 0$。由於 $x \neq 0$，得 $p+q=1$。

反過來，若 $p+q=1$ 且 $t_0 = t_1 = x$，則 $t_2 = (p+q)x = x$，由歸納法（induction）可知每一項都等於 x。x 不受任何限制，因此它可以是任何非零實數。

第 (ii) 部分

模式 $x, y, x, y, \ldots$ 滿足遞推關係，當且僅當兩組連續三項 (x, y, x) 和 (y, x, y) 滿足遞推關係：

$$x = py + qx, \qquad \text{即} \quad (1-q)x = py, \tag{1}$$

$$y = px + qy, \qquad \text{即} \quad (1-q)y = px. \tag{2}$$

把 (1) 和 (2) 相加及相減，得

$$(1-q-p)(x+y)=0, \qquad (1-q+p)(x-y)=0.$$

$x+y$ 和 $x-y$ 不可能同時為零，否則 $x=0$。若 $x+y\neq 0$，則 $p+q=1$；若 $x-y\neq 0$，則 $q-p=1$。因此 $q+p=1$ 和 $q-p=1$ 之中至少有一個成立，得證。

接着推導 x 與 y 之間的關係。

- 若 $q+p=1$，則 $1-q=p$，(1) 變成 $px=py$。所以 $x=y$，前提是 $p\neq 0$。
- 若 $q-p=1$，則 $1-q=-p$，(1) 變成 $-px=py$。所以 $x=-y$，同樣前提是 $p\neq 0$。

唯一的例外是 $p=0$，此時兩種情況都給出 $q=1$。當 $p=0$ 且 $q=1$ 時，遞推關係為 $t_{n+2}=t_n$，任何模式 $x,y,x,y,\ldots$ 都滿足它，因此 x 與 y 之間沒有任何關係。故除非 $p=0$ 且 $q=1$，否則 $x=y$ 或 $x=-y$。

第 (iii) 部分

現在模式是 $x,y,z,x,y,z,\ldots$，我們需要三組連續三項 (x,y,z)、(y,z,x) 和 (z,x,y)：

$$z=py+qx, \tag{3}$$
$$x=pz+qy, \tag{4}$$
$$y=px+qz. \tag{5}$$

利用 (3) 從另外兩條方程中消去 z：

$$\begin{aligned}
&(4):\quad x=p(py+qx)+qy &&\Longrightarrow\quad (pq-1)x+(p^2+q)y=0,\\
&(5):\quad y=px+q(py+qx) &&\Longrightarrow\quad (p+q^2)x+(pq-1)y=0.
\end{aligned}$$

把第一條方程乘以 $pq-1$，第二條乘以 p^2+q，然後相減。含 y 的項互相抵消，剩下

$$\left[(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)\right]x=0.$$

想一想 為甚麼括號內的式子必須為零？這組方程會不會根本沒有解？

它們確實有解：數列存在，所以 x 和 y 同時滿足兩條方程。而 $x\neq 0$，所以可以除以 x。展開括號，

$$\begin{aligned}
(pq-1)^2-(p^2+q)(p+q^2)&=p^2q^2-2pq+1-\left(p^3+p^2q^2+pq+q^3\right)\\
&=1-3pq-p^3-q^3,
\end{aligned}$$

所以 $p^3+q^3+3pq-1=0$，得證。

因式分解(factorisation)。這個式子是 $a^3+b^3+c^3-3abc$，其中 $a=p$、$b=q$、$c=-1$，而標準恆等式（identity）

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\tfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

給出

$$p^3+q^3+3pq-1=\tfrac{1}{2}(p+q-1)\left[(p-q)^2+(q+1)^2+(p+1)^2\right].$$

（如果記不起這個恆等式，可以展開來驗證：方括號等於 $2(p^2+q^2+1-pq+p+q)$，再乘以 $p+q-1$ 便還原為原來的三次式。）乘積為零，所以 $p+q=1$ 或 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$。

情況 $(p-q)^2+(p+1)^2+(q+1)^2=0$。實數平方之和為零，當且僅當每個平方都為零，所以 $p=q=-1$。此時 (3) 變成 $z=-y-x$，即 $x+y+z=0$。

情況 $p+q=1$。把 $q=1-p$ 代入 (3)、(4) 和 (5)，並把每條整理成差的形式：

$$z-x=p(y-x),\qquad x-y=p(z-y),\qquad y-z=p(x-z).$$

設 $a=y-x$、$b=z-y$、$c=x-z$，於是 $a+b+c=0$。第一條和第三條方程表示 $c=-pa$ 及 $b=-pc=p^2a$。於是

$$0=a+b+c=a(1-p+p^2).$$

> ? **想一想** $1-p+p^2$ 可以為零嗎？

不可以：對每個實數 p，$1-p+p^2=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$。所以 $a=0$，由此 $c=-pa=0$，進而 $b=0$。即 $x=y=z$。

兩種情況不會重疊，因為 $p=q=-1$ 給出 $p+q=-2\neq 1$。所以 $x=y=z$（當 $p+q=1$ 時）或 $x+y+z=0$（當 $p=q=-1$ 時）。兩者都確實會出現：在第二種情況中，遞推關係 $t_{n+2}=-t_{n+1}-t_n$ 對任何初始值都給出 $x,\ y,\ -x-y,\ x,\ y,\ \ldots$。

驗算

- 取 $p=q=-1$、$t_0=2$ 及 $t_1=5$，數列為 $2,5,-7,2,5,-7,\ldots$，而 $2+5-7=0$。
- 取 $p=3$ 及 $q=4$（所以 $q-p=1$），由 $1,-1$ 開始得 $t_2=-3+4=1$ 及 $t_3=3-4=-1$，正如第 (ii) 部分所預測般交替出現。
- 當 $p=2$、$q=-1$ 時，三次式給出 $8-1-6-1=0$，與 $p+q=1$ 一致。我們亦在 1000 組隨機 (p,q) 上驗證了展開式、因式分解，以及三次式與 (3)–(5) 的 3×3 行列式（determinant）一致。模擬遞推關係亦證實了上述每一種情況。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分斷定 $p+q=1$ 及 $q-p=1$ 同時成立。論證只表明至少有一個成立；兩者同時成立只在例外情況 $p=0$、$q=1$ 中發生。
- 在第 (ii) 部分除以 p，卻沒有察覺 $p=0$ 正是題目所問的例外情況。
- 忘記首尾相接的方程 (4) 和 (5)。每個週期只用一條方程，不足以迫出所求的條件。

STEP 之外

處理 $t_{n+2}=pt_{n+1}+qt_n$ 的標準方法是透過**特徵方程**（characteristic equation）$\lambda^2=p\lambda+q$：一般而言 $t_n=A\alpha^n+B\beta^n$，其中 α 和 β 是它的根。一個數列每 k 步重複一次，當且僅當它所用到的根滿足 $\lambda^k=1$。常數數列需要根 1（所以 $p+q=1$），交替數列需要根 -1（所以 $q-p=1$）。情況 $p=q=-1$ 給出 $\lambda^2+\lambda+1=0$，其根是複數單位立方根（cube roots of unity），這正是為甚麼它們的和 $1+\omega+\omega^2=0$ 會以 $x+y+z=0$ 的形式重現。這其實是喬裝了的線性代數（linear algebra）（作用於數列上的移位映射（shift map）），而斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是以這種方式，透過特徵值（eigenvalues）來處理遞推關係。

詳細解答

STEP I 2012，第 8 題

純數學 • 齊次微分方程

> **STEP I 2012，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q8

關鍵思路

兩條方程都是齊次（homogeneous）的：除了一個整體的 x 冪次之外，每一項關於 x 和 y 的總次數都相同。若設 $y = xv$，那個 x 的冪次便會消去，方程隨即分離成 v 的部分和 x 的部分。第 (i) 部分會一步步帶你完成這個過程。第 (ii) 部分則留給你自己處理：把方程除以 x，便可看出它是同一類方程，而之後關於 v 的積分需要用到部分分式（partial fractions）。

解答

第 (i) 部分

若 $y = xv$，由乘積法則（product rule）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。代入，得

$$x(xv)\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + x^2v^2 - 2x^2 = x^3v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2x^2v^2 - 2x^2 = 0.$$

由於 $x \neq 0$，我們可以除以 x^2，得

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + 2v^2 - 2 = 0,$$

此即所求。

接着我們分離變數（separate the variables）。方程表明 $xv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2(1 - v^2)$。只要 $v^2 \neq 1$，

$$\int \frac{v}{1 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1 - v^2| = 2\ln|x| + c.$$

兩邊乘以 -2 再取指數，得 $|1 - v^2| = Ax^{-4}$，其中 $A > 0$ 為某常數，因此

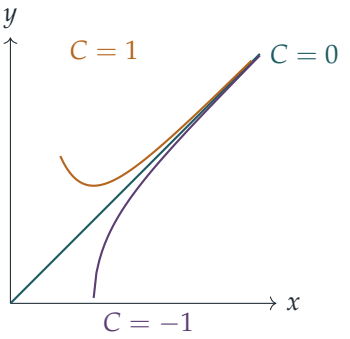
$$x^4(v^2 - 1) = C,$$

其中 $C = \pm A$ 是非零常數。先前擱置的情況 $v = \pm 1$（即 $y = \pm x$）也是解：此時 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = 0$ 且 $2v^2 - 2 = 0$。它們恰好就是 $C = 0$ 的情況，所以 C 可以是任何常數。

最後，代入 $v = y/x$：

$$x^4\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = x^2(y^2 - x^2) = C,$$

這正是所要求的形式。



上圖展示了第一象限中的幾條解曲線。正如 $y^2 = x^2 + C/x^2$ 所提示，當 $x \to \infty$ 時，它們都趨近直線 $y = x$。

第 (ii) 部分

$6x + 5y$ 中每一項的次數都是 1，$y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的次數也是 1。這提示我們用同樣的代換 $y = xv$：

$$xv\left(v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + 6x + 5xv = 0.$$

除以 $x \neq 0$ 並整理各項，得

$$xv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -(v^2 + 5v + 6) = -(v+2)(v+3).$$

想一想 怎樣求 $\dfrac{v}{(v+2)(v+3)}$ 的積分？

用部分分式。設 $v = P(v+3) + Q(v+2)$。代入 $v = -2$ 得 $P = -2$，代入 $v = -3$ 得 $Q = 3$。所以

$$\frac{v}{(v+2)(v+3)} = \frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}.$$

只要 $v \neq -2, -3$，分離變數得

$$\int\left(\frac{3}{v+3} - \frac{2}{v+2}\right)\mathrm{d}v = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad\Longrightarrow\quad 3\ln|v+3| - 2\ln|v+2| = -\ln|x| + c.$$

因此 $|x|\,|v+3|^3/(v+2)^2$ 是常數。去掉絕對值符號（在一條 $v \neq -3$ 的解曲線上，$x(v+3)^3$ 的正負號不會改變），得

$$\frac{x(v+3)^3}{(v+2)^2} = K.$$

現在代入 $v = y/x$。分子是 $x(y+3x)^3/x^3$，分母是 $(y+2x)^2/x^2$，所以 x 的冪次完全消去：

$$\boxed{(y+3x)^3 = K(y+2x)^2},$$

其中 K 是常數。

我們排除了的直線也是解。若 $y = -3x$，則 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 9x$ 而 $6x+5y = -9x$，所以方程成立。這條直線就是方框中形式在 $K = 0$ 時的情況。若 $y = -2x$，則 $y\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x$ 而 $6x+5y = -4x$，所以這條直線也是解。它不對應任何有限的 K，而是對應 $K \to \infty$。若把解寫成 $(y+2x)^2 = k(y+3x)^3$，則可改為以 $k = 0$ 涵蓋它。

驗算

- 第 (i) 部分：對 $x^2y^2 - x^4 = C$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得 $2xy^2 + 2x^2y\,y' - 4x^3 = 0$。除以 $2x$ 便還原為原方程。
- 第 (ii) 部分：我們從多個隨機起點，以數值方法（Runge–Kutta 方法）逐步求解方程。沿每條解曲線，$(y+3x)^3/(y+2x)^2$ 這個量都保持不變，誤差約為 10^{-14}。例如，通過 $(1,1)$ 的曲線有 $K = 64/9$。
- 每條方程中通過原點的直線解 $y = \pm x$ 和 $y = -2x, -3x$，分別來自 $2v^2 - 2 = 0$ 和 $v^2 + 5v + 6 = 0$ 的根。這是一個好跡象，顯示關於 v 的方程是正確的。

常見錯誤

- 忘記乘積法則：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $v + x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，而不是 $x\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。
- 部分分式算錯（例如寫成 $2/(v+2) - 3/(v+3)$）。可以代入一個值（例如 $v = 0$）檢驗分解是否正確。
- 除以 $1 - v^2$ 或 $(v+2)(v+3)$ 時沒有指出這樣會遺失某些直線解。

STEP 之外

形如 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = F(y/x)$ 的方程稱為齊次方程。縮放變換 $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ 會把它的解曲線互相映射，這正是 $v = y/x$ 奏效的原因。這是索菲斯・李（Sophus Lie）提出的一個深刻思想的最簡單例子：微分方程（differential equation）的對稱性（symmetry）可以

用來降低方程的階（order）。直線解 $y = mx$ 就是在縮放下保持不變的曲線。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講解了齊次方程及其他一階方程。

詳細解答

STEP I 2012，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP I 2012，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

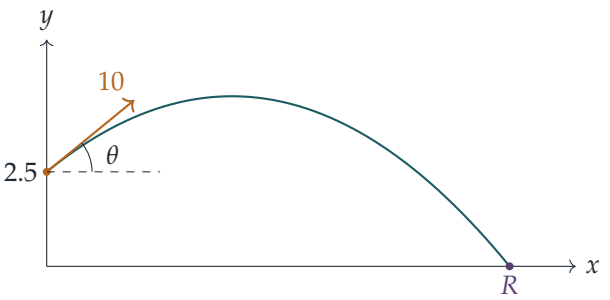
step.maths.org/questions/12-s1-q9

關鍵思路

這是一個從高處拋出的拋射體(projectile)，所以飛行時間(time of flight)由一條關於 t 的二次方程 (quadratic equation) 給出，而題目的重點其實是把它的根改寫成以 $c = \cos 2\theta$ 表示。倍角公式（double-angle formulae）$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-c)$ 和 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$ 包辦了所有工作。一旦射程（range）寫成單一變量 c 的函數（function），求它的最大值就只是普通的微積分，只需在平方時稍加小心。

解答

我們把鉛球模擬為只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力（air resistance）。取原點在拋射點正下方的地面上，x 軸水平，y 軸鉛直向上，並假設 $0 \leq \theta < 90°$（鉛球向前及向上拋出），因此 $\sin\theta \geq 0$ 而 $\cos\theta > 0$。



飛行時間

水平速度保持為 $10\cos\theta$，而鉛直方向的運動初速為 $10\sin\theta$、加速度為 -10，所以在時間 t 時

$$x = 10t\cos\theta, \qquad y = 2.5 + 10t\sin\theta - 5t^2.$$

鉛球在 $y = 0$ 時落地，即當

$$5t^2 - 10t\sin\theta - 2.5 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t^2 - 2t\sin\theta - \tfrac{1}{2} = 0.$$

兩根之積為 $-\frac{1}{2} < 0$，所以恰有一個正根，就是取加號的那一個：

$$T = \sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \tfrac{1}{2}}.$$

現在利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) = \frac{1}{2}(1-c)$。由於 $\sin\theta \geq 0$，我們可以寫 $\sin\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1-c)}$，而 $\sin^2\theta + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2-c)$。因此

$$T = \sqrt{\frac{1-c}{2}} + \sqrt{\frac{2-c}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right),$$

這就是所求的時間（以秒為單位）。

射程

同樣地，$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+c)$，且 $\cos\theta > 0$，所以 $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+c)}$。射程為

$$\begin{aligned} R = 10T\cos\theta &= 10\sqrt{\frac{1+c}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1-c} + \sqrt{2-c}\right) \\ &= 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{(1+c)(2-c)}\right) = 5\left(\sqrt{1-c^2} + \sqrt{2+c-c^2}\right)\ \text{m}. \end{aligned}$$

當 θ 取遍 $[0°, 90°)$ 時，$c = \cos 2\theta$ 取遍 $(-1, 1]$，所以我們要在這個區間上求 R 的最大值。

求射程的最大值

對於 $-1 < c < 1$，求導得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}c} = 5\left(\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}\right).$$

駐點（stationary point）須滿足

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-2c}{2\sqrt{2+c-c^2}}. \qquad (*)$$

想一想 我們可以直接把 $(*)$ 平方嗎？可能會出甚麼問題？

平方可能會引入增根（extraneous roots），因為它丟失了正負號的資訊。兩個分母都是正數，所以在 $(*)$ 中，c 與 $1-2c$ 必須同號（或同時為零，但這是不可能的）。這迫使 $0<c<\frac{1}{2}$，我們要記住這一點。平方並去分母：

$$\begin{aligned}4c^2(2+c-c^2) &= (1-2c)^2(1-c^2)\\ 8c^2+4c^3-4c^4 &= 1-4c+3c^2+4c^3-4c^4\\ 5c^2+4c-1 &= 0\\ (5c-1)(c+1) &= 0.\end{aligned}$$

根 $c=-1$ 不在 $0<c<\frac{1}{2}$ 之內（它對應鉛直向上拋），所以唯一的駐點是 $c=\frac{1}{5}$。它確實滿足 $(*)$：由於 $\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 及 $\sqrt{2+\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$，兩邊都等於 $\frac{1}{2\sqrt{6}}$。

在這一點

$$R\left(\tfrac{1}{5}\right)=5\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)=5\sqrt{6}\approx 12.25.$$

要確認這是最大值，可與區間的端點比較：當 $c\to -1$ 時 $R\to 0$，而 $R(1)=5\sqrt{2}\approx 7.07$。由於 R 在 $[-1,1]$ 上連續（continuous），並在區間內部可微（differentiable），其最大值必在端點或駐點取得；而唯一的駐點給出這些值中最大的一個。所以當 $c=\frac{1}{5}$ 時射程最大，得證。（這對應 $\theta=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\approx 39.2^\circ$，比 45° 略小。）

多出的距離

在 45° 時，$c=\cos 90^\circ=0$，所以

$$R(0)=5\left(1+\sqrt{2}\right).$$

因此多出的距離是

$$5\sqrt{6}-5\left(1+\sqrt{2}\right)=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1\right)\ \text{m},$$

得證。

驗算

- 在 $\theta=0(c=1)$時，時間為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，與一個從 2.5 m 高的平台滾落的球所滿足的 $2.5=5t^2$ 吻合。
- 當 $c\to -1$（鉛直向上拋）時，射程趨向 0，理應如此。

- 以數值計算，多出的距離為 $5(2.4495 - 1.4142 - 1) \approx 0.176\,\text{m}$，只有約 18 cm：最佳點附近非常平坦。對飛行過程作逐步數值模擬，以及對 $R(c)$ 作精細的網格搜尋（grid search），兩者都與公式吻合，並得出最大值位於 $c = 0.2$。

常見錯誤

- 在二次公式中取了減號，得出負的時間。
- 把 $(*)$ 平方後保留了 $c = -1$ 而沒有驗證，或者忘記論證 $c = \frac{1}{5}$ 是最大值而非最小值。
- 假設最佳角度是 45°：這只在拋出點與落地點高度相同時才成立。

STEP 之外

從高處拋出時，最佳角度總是低於 45°；一般而言，最佳角度滿足 $\tan\theta = u/\sqrt{u^2 + 2gh}$，在本題中給出 $\tan\theta = \sqrt{2/3}$，與 $\cos 2\theta = \frac{1}{5}$ 等價。對帶參數的函數求最優值，並留意最大值附近有多平坦，是敏感度分析（sensitivity analysis）的初步體驗：在最大值附近，參數的微小誤差只會造成二階（second-order）的損失。若想進一步了解有空氣阻力及無空氣阻力的拋射體運動，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP I 2012，第 10 題

力學 • 自由落體與聲音

STEP I 2012，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q10

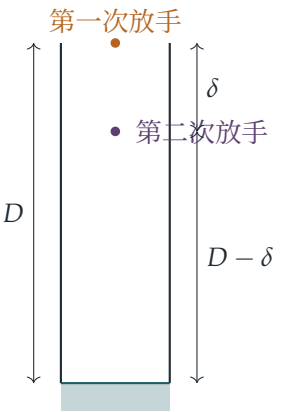
關鍵思路

每個量得的時間都由兩部分組成：石頭由靜止開始自由下落的時間，以及水花聲以等速傳回上方的時間。把兩次的時間都寫出來再相減，便立即得到 t。至於「由此」(hence) 部分，兩個平方根正是兩次的下落時間；我們知道它們的差，而它們的平方差又很簡單，所以因式分解（factorisation）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 便把它們的和也交到我們手上，於是兩者都可以分別求出。

解答

t 的公式

我們把石頭模型化為只受重力作用、由靜止開始下落的質點（particle）（不計空氣阻力（air resistance)），並假設聲音以等速 u 沿井筆直向上傳播。



由靜止放下的石頭在時間 τ 內下落距離 h，其中 $h = \frac{1}{2}g\tau^2$，所以 $\tau = \sqrt{2h/g}$。之後聲音要走同樣的距離 h 傳回我這裏，需時 h/u。所以從水面以上高度 h 處放下石頭時，我量得的時間是

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{u}.$$

從井口放下時，$h = D$；爬下去之後，我（以及石頭的起點）位於水面以上高度 $D - \delta$ 處，而聲音只需傳到那裏便會被我聽到。因此

$$\begin{aligned} t &= \left(\sqrt{\frac{2D}{g}} + \frac{D}{u}\right) - \left(\sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{D-\delta}{u}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2D}{g}} - \sqrt{\frac{2(D-\delta)}{g}} + \frac{\delta}{u}, \end{aligned}$$

得證。

D 的公式

記兩次的下落時間為 $a = \sqrt{2D/g}$ 及 $b = \sqrt{2(D-\delta)/g}$。剛才證得的結果說明

$$a - b = t - \frac{\delta}{u} = \beta.$$

由於 $\delta > 0$，我們有 $a > b$，所以 $\beta > 0$；特別地，$\beta \neq 0$。此外

$$a^2 - b^2 = \frac{2D}{g} - \frac{2(D-\delta)}{g} = \frac{2\delta}{g}.$$

想一想 我們知道 $a - b$。怎樣才能單獨求出 a？

因式分解：$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = \beta(a+b)$，而由於 β 是正數，我們可以除以 β。所以

$$a + b = \frac{2\delta}{\beta g}.$$

把此式與 $a - b = \beta$ 相加再除以二，得

$$a = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\delta}{\beta g} = T.$$

最後，$a = \sqrt{2D/g}$ 表示 $D = \frac{1}{2}ga^2$，所以

$$D = \tfrac{1}{2}gT^2,$$

得證。（所以 T 其實就是石頭從井口下落整個深度所需的時間。）

數值情況

取 $u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$t = \frac{1}{5}\,\mathrm{s}$ 及 $\delta = 10\,\mathrm{m}$，

$$\beta = \frac{1}{5} - \frac{10}{300} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s},$$
$$T = \frac{1}{12} + \frac{10}{\frac{1}{6}\cdot 10} = \frac{1}{12} + 6 = \frac{73}{12}\,\mathrm{s},$$
$$D = \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot\left(\frac{73}{12}\right)^2 = \frac{5\times 5329}{144} = \frac{26645}{144} \approx 185.03\ \mathrm{m}.$$

所以這口井深約 185 m。

驗算

- 把 $D = 26645/144$ 及 $\delta = 10$ 代回 t 的公式：兩次下落時間分別是 $73/12 \approx 6.083\,\mathrm{s}$ 及 $\sqrt{2(175.03)/10} \approx 5.917\,\mathrm{s}$，相差 $1/6\,\mathrm{s}$，再加上 $\delta/u = 1/30\,\mathrm{s}$，恰好得到 $t = 0.2\,\mathrm{s}$。
- 若聲音瞬間傳到（$u \to \infty$），則 $\beta = t$，理應如此：只有下落時間才有影響。
- 以數值方法逐步模擬石頭下落，再加上聲音的延遲，可重現 t 的公式至 $10^{-4}\,\mathrm{s}$ 的精度；而反求公式 $D = \frac{1}{2}gT^2$ 在 10^4 個隨機情況中都能還原 D。

常見錯誤

- 忘記了我爬下去之後聲音只需傳播 $D - \delta$，因而漏掉 δ/u 這一項。
- 試圖直接把方程 $a - b = \beta$ 平方；這會導致繁瑣的代數運算，而 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ 只需一行便給出 $a + b$。
- 完全忽略聲音：取 $\beta = t = 0.2$，同一方法會給出 $T = 5.1\,\mathrm{s}$ 及 $D \approx 130\,\mathrm{m}$，錯得很遠。

STEP 之外

這裏所用的方法是一種*差分測量*（differential measurement）：我們不依賴單一次計時，而是比較兩個相差已知量的實驗，使未知量互相抵消。最後一個常見錯誤顯示答案對數據的微小變化有多敏感，因為 t 是兩個大時間之間的微小差；物理學家和工程師會用誤差傳播（error propagation）和條件數（condition number）來量化這種敏感度，這些內容會在大學一年級的實驗方法及數值分析（numerical analysis）課程中學到。如想進一步了解如何仔細地為簡單運動建立模型，可閱讀 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP I 2012，第 11 題

力學 • 滑輪與摩擦力

> **STEP I 2012，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q11

關鍵思路

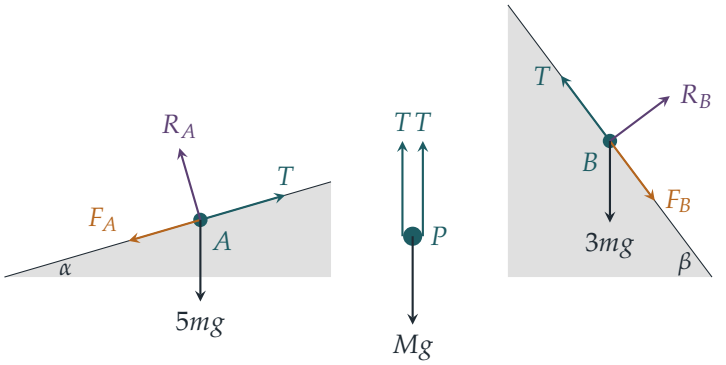
由於每個滑輪都是光滑（smooth）的，而繩子是輕（light）的，繩上各處的張力（tension）都相同。因此每個質點（particle）各給出一條把張力和摩擦力（friction）聯繫起來的方程，滑輪 P 則給出第三條。題中的角度取自 $7, 24, 25$ 和 $3, 4, 5$ 三角形，所以所有正弦和餘弦都是準確的分數。至於運動的情況，我們還需要多一樣東西：繩長固定如何把 A、B 和 P 的加速度聯繫起來。

解答

我們把 A、B 視為質點，把繩子視為輕而不可伸長（inextensible）的。滑輪 Q 和 R 光滑、輕且固定，而 P 光滑，質量為 M。設 $\alpha = \arctan\frac{7}{24}$ 及 $\beta = \arctan\frac{4}{3}$。由邊長為 $7, 24, 25$ 和 $3, 4, 5$ 的直角三角形，

$$\sin\alpha = \frac{7}{25}, \quad \cos\alpha = \frac{24}{25}, \qquad \sin\beta = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}.$$

設 T 為張力。由於所有滑輪都光滑，每段繩子中的 T 都相同。



在兩部分中，質點都是即將或正在沿斜面向上運動，所以摩擦力如圖所示沿各斜面向下。沿垂直於斜面的方向分解（resolve），

$$R_A = 5mg\cos\alpha = \tfrac{24}{5}mg, \qquad R_B = 3mg\cos\beta = \tfrac{9}{5}mg.$$

第 (i) 部分

兩個質點都即將滑動，所以摩擦力達到極限（limiting）：$F_A = \mu R_A$ 及 $F_B = \mu R_B$。沿各斜面分解（平衡）：

$$\begin{aligned} A: \quad & T = 5mg\sin\alpha + \mu R_A = \tfrac{mg}{5}(7 + 24\mu), \\ B: \quad & T = 3mg\sin\beta + \mu R_B = \tfrac{mg}{5}(12 + 9\mu). \end{aligned}$$

兩式相等，得 $7 + 24\mu = 12 + 9\mu$，所以

$$\mu = \tfrac{1}{3},$$

於是 $T = \frac{mg}{5}(7 + 8) = 3mg$。

滑輪 P 處於平衡，有兩段豎直的繩子把它向上拉，而其重量把它向下拉，所以

$$2T = Mg \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2 \cdot 3mg}{g} = 6m,$$

此即所求。

第 (ii) 部分

現在 $M = 9m$，比剛好能保持極限平衡（limiting equilibrium）的 $6m$ 更重，所以我們預期 P 會下降，並把兩個質點沿各自的斜面向上拉。

想一想 三個加速度之間有甚麼關係？

設 A 和 B 沿各自斜面向上的加速度分別為 a 和 b，並設 P 向下的加速度為 p。繩長 $AQ+QP+PR+RB$ 固定不變。若 A 沿其斜面向上移動距離 x，B 沿其斜面向上移動距離 y，則 AQ 和 RB 分別縮短 x 和 y；若 P 下降 z，則 QP 和 PR 各伸長 z。因此在任何時刻都有 $2z=x+y$，求導兩次，得

$$2p=a+b.$$

由於 $\mu=\frac{1}{3}$，向上滑動時 A 所受的摩擦力為 $\frac{1}{3}R_A=\frac{8}{5}mg$，$B$ 所受的為 $\frac{1}{3}R_B=\frac{3}{5}mg$。對兩個質點沿各自斜面、對 P 沿豎直方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} A:&\quad T-\tfrac{7}{5}mg-\tfrac{8}{5}mg=5ma, && \text{故}T-3mg=5ma,\\ B:&\quad T-\tfrac{12}{5}mg-\tfrac{3}{5}mg=3mb, && \text{故}T-3mg=3mb,\\ P:&\quad 9mg-2T=9mp. \end{aligned}$$

設 $T=3mg+X$。於是 $a=\dfrac{X}{5m}$、$b=\dfrac{X}{3m}$，而繩子的條件給出

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{4X}{15m}.$$

代入 P 的方程：

$$3mg-2X=\frac{12X}{5}\quad\Longrightarrow\quad X=\frac{15mg}{22}.$$

因此

$$a=\frac{3g}{22}\text{ 沿斜面向上},\qquad b=\frac{5g}{22}\text{ 沿斜面向上},\qquad p=\frac{2g}{11}\text{ 豎直向下},$$

而張力為 $T=\frac{81}{22}mg$。

想一想 我們怎樣知道兩個質點真的都向上運動，而不是其中一個保持不動？

由上面的方程可見，質點只有在 $T>3mg$ 時才會沿斜面向上滑動，而只有在 $T\le 3mg$ 時才會保持靜止（或會向下滑）。兩個質點的臨界值同樣是 $3mg$，所以要麼兩者都向上運動，要麼兩者都不向上運動。若兩者都不向上運動，則 $a+b\le 0$，所以 $p\le 0$；但 $T\le 3mg$ 給出 $9mg-2T\ge 3mg>0$，迫使 $p>0$。這是矛盾，所以兩者都向上運動，而我們的解（其中 $a,b>0$）是自洽的。

驗算

- 在第 (i) 部分，把 $\mu=\frac{1}{3}$ 代入兩個質點的方程，得出相同的張力 $3mg$。
- 在第 (ii) 部分，$2p=\frac{4g}{11}=\frac{3g}{22}+\frac{5g}{22}=a+b$，符合繩子的要求；而 $T=\frac{81}{22}mg\approx 3.68mg$ 介乎 $3mg$（滑動的臨界值）與 $4.5mg$（P 沒有加速度時的值）之間。
- 以數值模擬逐步推進三條運動方程，繩長在捨入誤差範圍內保持不變，且 $p\approx 0.182g$。

- 若 M 再次為 $6m$，同樣的方法給出 $X = 0$，所以所有加速度都為零，與第 (i) 部分吻合。

常見錯誤

- 以為 $a = b = p$：滑輪 P 的移動速率是兩個質點移動速率總和的一半，因為有兩段繩子分擔它的運動。
- 把摩擦力定為沿斜面向上：兩個質點都正被拉向上，所以摩擦力與此相反，沿斜面向下。
- 忘記 P 上的兩段繩子都帶有張力 T，所以作用在它上面的向上力是 $2T$。

STEP 之外

關係式 $2p = a + b$ 是一個約束（constraint）：它把獨立坐標的數目由三個減至兩個。在大學一、二年級會學到的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中，你會選取自動滿足約束的坐標，從而根本不必求張力。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）透過約束方程仔細處理了許多滑輪系統，是通往這種觀點的良好橋樑。

詳細解答

STEP I 2012，第 12 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP I 2012，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s1-q12

關鍵思路

一切取決於滅火筒在哪一年出現故障，所以先把概率密度函數（probability density function）化為累積分布函數（cumulative distribution function），從而讀出故障在第一、第二及第三年出現的概率。一旦知道是哪一年，各次測試就只是一連串互相獨立（independent）的「通過」，最後接一次「不通過」。最後一部分是條件概率（conditional probability），而「在 18 個月時已有故障」這個事件，同樣是關於 T 落在哪個區間的陳述。

解答

T 的分布

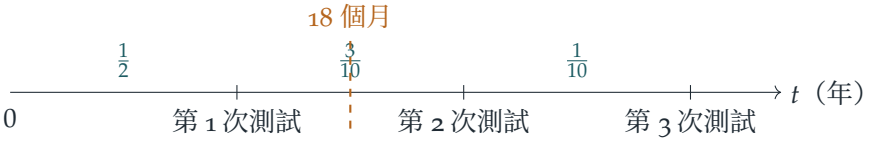
對 $t \geq 0$，代入 $u = 1 + s^2$（於是 $\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$），

$$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = \int_0^t \frac{2s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

所以 $F(1) = \frac{1}{2}$，$F(2) = \frac{4}{5}$，$F(3) = \frac{9}{10}$，而

$$\mathrm{P}(0 < T < 1) = \tfrac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(1 < T < 2) = \tfrac{4}{5} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{10}, \qquad \mathrm{P}(2 < T < 3) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}.$$

由於 T 是連續（continuous）隨機變量，故障恰好在測試當日出現的概率為零，所以不必擔心端點處用的是 $<$ 還是 $\leq$。



恰好在製造後三年被銷毀

設 D 為滅火筒在製造後三年的測試中被銷毀這個事件。要發生這件事，滅火筒必須在第三次測試前已有故障（即 $T < 3$），在此之前處於故障狀態時所接受的每次測試都必須通過，而第三次測試則必須不通過。沒有故障的滅火筒必定通過測試，所以只有時間 T 之後的測試才有影響，而這些測試互相獨立，每次不通過的概率為 p。

- 若 $0 < T < 1$：它在第 1、2、3 次測試時都有故障，所以必須通過、通過、不通過：概率為 $(1-p)^2 p$。
- 若 $1 < T < 2$：它自動通過第 1 次測試，然後必須通過第 2 次測試，並在第 3 次測試不通過：概率為 $(1-p)p$。
- 若 $2 < T < 3$：它自動通過第 1 及第 2 次測試，並必須在第 3 次測試不通過：概率為 p。

若 $T > 3$，它在第 3 次測試時並無故障，因此不會在那時被銷毀。根據全概率定律（law of total probability），

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2 p + \tfrac{3}{10}(1-p)p + \tfrac{1}{10}p \\ &= \frac{p}{10}\Big(5(1-2p+p^2) + 3(1-p) + 1\Big) \\ &= \frac{p\,(5p^2 - 13p + 9)}{10}, \end{aligned}$$

此即所求。

已知在三年時被銷毀，求在 18 個月時已有故障的概率

設 E 為滅火筒在製造後 18 個月時已有故障這個事件，即 $T < \frac{3}{2}$。我們要求

$$\mathrm{P}(E \mid D) = \frac{\mathrm{P}(E \cap D)}{\mathrm{P}(D)}.$$

想一想 區間 $(0, \frac{3}{2})$ 橫跨了一次測試。我們該如何把它分拆？

對測試而言，重要的是故障在哪一年出現，所以把 E 分拆為 $0 < T < 1$ 和 $1 < T < \frac{3}{2}$。我們有 $F(\frac{3}{2}) = \dfrac{9/4}{13/4} = \dfrac{9}{13}$，所以

$$\mathrm{P}\big(1 < T < \tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{9}{13} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{26}.$$

已知 $0 < T < 1$ 時，D 的概率與之前一樣是 $(1-p)^2 p$；已知 $1 < T < \frac{3}{2}$ 時，故障仍然

在第二年出現，所以 D 的概率是 $(1-p)p$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E\cap D) &= \tfrac{1}{2}(1-p)^2p + \tfrac{5}{26}(1-p)p \\ &= \frac{p(1-p)}{26}\big(13(1-p)+5\big) = \frac{p(1-p)(18-13p)}{26}.\end{aligned}$$

除以 $\mathrm{P}(D)$（當 $0<p\le 1$ 時它是正數，因為 $5p^2-13p+9$ 的判別式（discriminant）為 $169-180<0$，故此式恆為正），因子 p 約去，得

$$\mathrm{P}(E\mid D) = \frac{10(1-p)(18-13p)}{26(5p^2-13p+9)} = \frac{5(1-p)(18-13p)}{13(5p^2-13p+9)}.$$

驗算

- 當 $p=1$ 時，每個有故障的滅火筒都會在故障後的第一次測試中被銷毀，所以在第 3 年被銷毀即表示故障在 $(2,3)$ 內出現：$\mathrm{P}(D)=\frac{1}{10}$ 而 $\mathrm{P}(E\mid D)=0$。兩條公式都吻合。
- 當 $p\to 0$ 時，$\mathrm{P}(E\mid D)\to\dfrac{5\cdot 18}{13\cdot 9}=\dfrac{10}{13}$，這正是 $\mathrm{P}(T<\frac{3}{2}\mid T<3)=\dfrac{9/13}{9/10}$：當測試幾乎檢測不到故障時，被銷毀這件事除了 $T<3$ 之外，幾乎沒有告訴我們任何資訊。
- 以 $p=0.4$ 對 10^6 個滅火筒進行模擬（simulation），得到 $\mathrm{P}(D)\approx 0.1838$（準確值 0.184）及 $\mathrm{P}(E\mid D)\approx 0.642$（準確值 $\frac{192}{299}\approx 0.642$）。

常見錯誤

- 忘記有故障的滅火筒在第三次測試不通過之前，必須先通過較早的測試。
- 在最後一部分把 $\mathrm{P}(T<\frac{3}{2})=\frac{9}{13}$ 當作單一整體使用：在第一年出現的故障與在第二年上半年出現的故障，所要經歷的測試次數並不相同。

STEP 之外

這裏的 T 是一個連續的壽命，但我們只能透過離散而不完美的檢查來觀察它。這正是生存分析（survival analysis）和可靠性理論（reliability theory）中區間設限（interval-censored）數據的情境，而最後一部分則是一次小型的貝葉斯更新（Bayesian update）：T 的先驗分布（prior distribution）因觀察到的一次失效而得到修正。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了連續分布以及這類條件化的內容。

詳細解答

STEP I 2012，第 13 題

概率與統計 • 以指示變量求期望值

STEP I 2012，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s1-q13

關鍵思路

首先要把條件樣本空間（conditional sample space）弄清楚：一旦知道哪些數字被排除，這個數就只是一串五個數字，每個數字都從 $\{1,2,3,4,5\}$ 中選取，而每一串出現的可能性都相同。接着，與其求出「不同數字的個數」的整個分佈（distribution），不如把這個個數寫成指示變量（indicator variable）之和，每個可能出現的數字對應一個。期望值的線性性質（linearity of expectation）把問題化為求一個概率，而這個概率考慮其補事件（complement）便很容易求得。

解答

條件樣本空間

由 10000 至 99999 的每個整數都是一串五個數字 $d_1d_2d_3d_4d_5$，其中 $d_1 \neq 0$，而每一串都恰好出現一次。條件說明每個數字都屬於 $\{1,2,3,4,5\}$。由於 0 本來就已被排除，限制 $d_1 \neq 0$ 並沒有增加任何約束，因此符合條件的整數恰好對應於

$$5^5 = 3125$$

串由 $\{1,2,3,4,5\}$ 中數字組成的五位數字串。

原本的選取是均勻的。以某事件為條件時，該事件內的各個結果仍然等可能，所以在給定條件下，這 3125 串中每一串的概率都是 $\frac{1}{3125}$。換句話說，這五個數字互相獨立（independent），而且每個都在 $\{1,2,3,4,5\}$ 上均勻分佈（uniform）：這 3125 個結果中，每一個的概率都是五個因子 $\frac{1}{5}$ 的乘積。

指示變量

設 N 為所選的數中不同數字的個數。對 $j = 1,2,3,4,5$，定義

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{若數字} j \text{ 至少出現一次，} \\ 0 & \text{否則。} \end{cases}$$

每個出現了的數字對總和恰好貢獻 1，因此

$$N = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

想一想 各個 I_j 並不互相獨立。我們仍然可以把它們的期望值相加嗎？

可以。期望值的線性性質 $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ 對任何隨機變量（random variable）都成立，不論它們是否獨立。因此

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{j=1}^{5} \mathrm{E}(I_j) = \sum_{j=1}^{5} \mathrm{P}(\text{數字} j \text{ 出現}).$$

數字 j 不出現，當且僅當五個獨立的數字每一個都是其餘四個值之一，而每個數字發生這情況的概率都是 $\frac{4}{5}$。因此

$$\mathrm{P}(\text{數字} j \text{ 出現}) = 1 - \left(\tfrac{4}{5}\right)^5 = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{2101}{3125}.$$

由對稱性，這個概率對 j 的五個值都相同，所以

$$\mathrm{E}(N) = 5 \cdot \frac{2101}{3125} = \frac{2101}{625} = 3.3616,$$

即為所求。

另一方法：完整分佈

如果你較喜歡直接計數，恰好使用 k 個不同數字的字串數目，等於 $\binom{5}{k}$（選出那些數字）乘以填滿五個位置而使所選的 k 個數字全部出現的方法數。後者可由容斥原理（inclusion–exclusion）求得。例如當 $k = 3$ 時，它等於 $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 = 150$。

k	1	2	3	4	5	總數
字串數	$5 \cdot 1$	$10 \cdot 30$	$10 \cdot 150$	$5 \cdot 240$	$1 \cdot 120$	
	5	300	1500	1200	120	3125

於是

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 300 + 3 \cdot 1500 + 4 \cdot 1200 + 5 \cdot 120}{3125} = \frac{10505}{3125} = 3.3616.$$

這方法行得通，但較長，出錯的地方也較多。指示變量的方法只需要求一個概率。

驗算

- 表中各數目之和為 $3125 = 5^5$，證實每一串都恰好被計算了一次。
- 答案合理：N 介乎 1 與 5 之間，而從五個值中抽取五次，預期會有相當多重複，因此一個略大於 3 的值是可信的。作為一般性的驗算，若從 m 個值中抽取 n 次，同樣的論證給出 $m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right)$，當 $n=1$ 時它等於 1，正如所料。
- 用電腦列舉由 10000 至 99999 的所有整數，保留只使用數字 1–5 的那 3125 個，再求不同數字個數的平均值，得到的恰好是 $\frac{2101}{625} = 3.3616$。

常見錯誤

- 把樣本空間當作全部 90000 個整數。條件把它縮減為 5^5 串等可能的字串。
- 以為期望值的線性性質需要獨立性。其實不需要，而這正是指示變量如此有用的原因。
- 以對五個位置各加 $\frac{1}{5}$ 的方式計算 P(數字j 出現)，結果得出 1，因為這樣會把 j 出現多於一次的字串重複計算了多次。應該使用補事件。

STEP 之外

這是經典的「佔位」(occupancy) 問題，又稱集券問題 (coupon-collector problem)：把 n 個球隨機投進 m 個盒子，N 為最終有球的盒子數目。指示變量的技巧 $\mathrm{E}(N) = m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right)$ 是大學一年級概率論中，以至分析雜湊 (hashing) 等算法時最有用的工具之一。精確的分佈牽涉第二類斯特靈數 (Stirling numbers of the second kind)，它們已在上面的容斥計數中出現過。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）全書貫徹使用指示隨機變量，是絕佳的下一步讀物。

詳細解答

STEP II 2012，第 1 題

純數學 • 二項式級數的係數

> **STEP II 2012，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q1

關鍵思路

每個因子 $(1-x^k)^{-1}$ 都是以 x^k 為公比的幾何級數（geometric series），所以把這些因子相乘，再讀出 x^n 的係數（coefficient），實際上就是在數算把 n 寫成若干容許部分之和的方法數。一旦把係數看成計數，分情況討論便會自然理順；而乘以 $(1-x)^{-1}$，只不過是把一列係數變成它的累積和（running totals）。

解答

通項

由二項式展開（binomial expansion），當 $|y|<1$ 時，$(1-y)^{-2}=\sum_{r\geq 0}(r+1)y^r$（係數為 $\binom{-2}{r}(-1)^r=r+1$）。令 $y=x^6$，

$$(1-x^6)^{-2}=\sum_{r=0}^{\infty}(r+1)\,x^{6r},$$

因此通項（general term）是 $(r+1)x^{6r}$，而每個指數不是 6 的倍數的 x 冪，其係數都是 0。

第 (i) 部分

另外，$(1-x^3)^{-1}=\sum_{s\geq 0}x^{3s}$。把兩個級數相乘，每一對滿足 $6r+3s=n$ 的非負整數（non-negative integers）(r,s) 都會產生一項 x^n，貢獻為 $(r+1)\cdot 1$。所以

$$\text{係數，對應}x^n=\sum_{\substack{r,s\geq 0\\ 6r+3s=n}}(r+1).$$

當 $n = 24$ 時，我們需要 $2r + s = 8$，所以 r 可以是 $0, 1, 2, 3, 4$（每個 r 都恰好對應一個 $s = 8 - 2r \geq 0$）。x^{24} 的係數為

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

一般的 n。由於 $6r + 3s$ 必定是 3 的倍數，除非 $3 \mid n$，否則係數為 0。若 $n = 3m$，我們需要 $2r + s = m$，而對每個滿足 $0 \leq 2r \leq m$ 的 r，都恰好有一個合適的 s。因此 r 由 0 取到 $\lfloor m/2 \rfloor$，係數為

$$1 + 2 + \cdots + (\lfloor m/2 \rfloor + 1).$$

按 n 除以 6 的餘數分類：

- $n = 6k$（即 $m = 2k$，$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：係數為 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$；
- $n = 6k + 3$（即 $m = 2k + 1$，$\lfloor m/2 \rfloor = k$）：係數同樣是 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$；
- $n \not\equiv 0 \pmod 3$：係數為 0。

驗算一下：$n = 24 = 6 \times 4$ 給出 $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$，與上面所得相同。

第 (ii) 部分

以 b_n 表示第 (i) 部分求得的 x^n 係數，以 c_n 表示現在要求的係數。由於 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$，

$$\Big(\sum_j b_j x^j\Big)(1 + x + x^2 + \cdots) = \sum_n \Big(\sum_{j=0}^{n} b_j\Big) x^n,$$

所以 $c_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$，即第 (i) 部分係數的累積和。

想一想 為甚麼乘以 $(1-x)^{-1}$ 會得到累積和？

要在乘積中得到 x^n，我們從第一個級數取 x^j，再從 $1 + x + x^2 + \cdots$ 取 x^{n-j}，而後者的係數永遠是 1。所以每個滿足 $0 \leq j \leq n$ 的 b_j 都恰好在 c_n 中出現一次，權重為 1。

只有 $3 \mid j$ 的 b_j 才不為零，而由第 (i) 部分可知它們成對相等：$b_{6k} = b_{6k+3} = T_{k+1}$，其中 $T_p = \frac{1}{2}p(p+1)$ 是第 p 個三角形數（triangular number）。所以當 $n = 24$ 時，

$$\begin{aligned} c_{24} &= (b_0 + b_3) + (b_6 + b_9) + (b_{12} + b_{15}) + (b_{18} + b_{21}) + b_{24} \\ &= 2(1 + 3 + 6 + 10) + 15 = 40 + 15 = 55, \end{aligned}$$

正如題目所要求。

當 $n = 25$ 時，由於 $3 \nmid 25$，多出來的一項 b_{25} 為 0，所以 $c_{25} = c_{24} = 55$。

當 $n = 66 = 6 \times 11$ 時，同樣的規律給出

$$c_{66} = 2\,(T_1 + T_2 + \cdots + T_{11}) + T_{12}.$$

首 p 個三角形數之和是四面體數（tetrahedral number）$\frac{1}{6}p(p+1)(p+2)$（可用歸納法（induction）證明，或由曲棍球棒恆等式（hockey-stick identity）得 $T_1 + \cdots + T_p = \binom{p+2}{3}$）。所以 $T_1 + \cdots + T_{11} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 286$，而 $T_{12} = 78$。因此

$$c_{66} = 2 \times 286 + 78 = 650.$$

同樣的論證可得出一般公式：若 $n = 6K + r$ 且 $0 \le r \le 2$，則 $c_n = 2\binom{K+2}{3} + \binom{K+2}{2}$；若 $3 \le r \le 5$，則 $c_n = 2\binom{K+3}{3}$。取 $K = 4$，第一條公式給出 $40 + 15 = 55$；取 $K = 11$，則給出 $572 + 78 = 650$。

驗算

第 (ii) 部分中 x^n 的係數，數算的是 $6a + 6b + 3c + d = n$ 的非負整數解的個數（每個因子對應一個幾何級數，$(1 - x^6)^{-2}$ 算作兩個）。用電腦直接數算這些解，對 $n = 24, 25, 66$ 分別得出 55、55 和 650。把級數逐項乘開至 x^{80}，亦證實了兩部分的公式。用人手驗算小的情況也很快：在第 (ii) 部分中，$c_0 = c_1 = c_2 = 1$，$c_3 = c_4 = c_5 = 2$，與 $K = 0$ 時的一般公式吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分遺漏 $n = 6k + 3$ 的情況：3 的奇數倍確實會出現，來自奇數個 x^3 因子。
- 把 $(1 - x^6)^{-2}$ 的通項寫成 $r\,x^{6r}$ 而非 $(r+1)x^{6r}$；常數項是 1，不是 0。
- 把 x^{25} 當作全新的計算：它等於 x^{24} 的係數，因為第 (i) 部分的級數中沒有指數為 25 的項。

STEP 之外

像這樣用作計數工具的冪級數稱為*生成函數*（generating functions）；這裏的乘積數算的是用面值 6、6（另一款設計）、3 和 1 的硬幣支付 n 便士（pence）的方法數。整數分拆（partitions）理論正是從這個想法發展出來的；而答案是隨 n 模 6 而定的分段多項式（piecewise polynomials），這是一個普遍現象（「擬多項式」（quasi-polynomials））。若想讀一本生動的入門書介紹這個方法，可閱讀 Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函數學》）。

詳細解答

STEP II 2012，第 2 題

純數學 • 多項式的複合

STEP II 2012，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q2

關鍵思路

在複合(composition)之下，次數(degree)會相乘，所以把 p 迭代幾次，次數很快就大得無法與右方相配。比較次數就能確定 p 的次數；之後把 p 寫成帶未知係數(coefficient)的形式，每一部分都只剩下一小段代數運算。第 (ii) 部分有一條巧妙的捷徑：$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 本身就是一個關於 $\mathrm{p}(x)$ 的二次式，因此整個左方是 $\mathrm{p}(x)$ 的二次式，用配方法(completing the square）便可完成。

解答

複合函數的次數

設 $\mathrm{p}(x) = a_m x^m + \ldots$ 及 $\mathrm{q}(x) = b_n x^n + \ldots$，其中 $a_m, b_n \neq 0$。在 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = a_m[\mathrm{q}(x)]^m + a_{m-1}[\mathrm{q}(x)]^{m-1} + \ldots$ 中，項 $a_m[\mathrm{q}(x)]^m$ 的次數為 mn，首項係數為 $a_m b_n^m \neq 0$，而其餘每一項的次數至多為 $(m-1)n < mn$（當 $n \geq 1$ 時）。所以沒有任何項能抵消最高次項，故

$$\deg \mathrm{p}(\mathrm{q}(x)) = mn.$$

(若 $n = 0$，則 $\mathrm{p}(\mathrm{q}(x))$ 是常數，而 $mn = 0$ 亦同樣成立。)

第 (i) 部分

設 p 的次數為 m。

若 $m \geq 2$，則由上述結果，$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)))$ 的次數為 m^3，而 $3\mathrm{p}(x)$ 的次數為 $m < m^3$。所以左方的次數為 $m^3 \geq 8$，但右方 $-2x$ 的次數為 1。這是不可能的。

若 $m = 0$，則對某常數 c 有 $\mathrm{p}(x) = c$，左方是常數 $c - 3c = -2c$，不可能對所有 x 都等

於 $-2x$。這也是不可能的。

所以 $m = 1$。設 $\mathrm{p}(x) = ax + b$，其中 $a \neq 0$。於是

$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (a + 1)b,$$
$$\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = a^3x + (a^2 + a + 1)b,$$

而方程變為

$$(a^3 - 3a)x + (a^2 + a + 1 - 3)b = -2x \quad \text{對所有} x.$$

兩個多項式（polynomial）對所有 x 都相等，當且僅當它們的係數相等，所以

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \qquad \text{及} \qquad (a^2 + a - 2)\, b = 0.$$

由於 $a = 1$ 是第一式的根，它可因式分解為 $(a - 1)^2(a + 2) = 0$，得 $a = 1$ 或 $a = -2$。第二個條件是 $(a - 1)(a + 2)b = 0$，對這兩個值都自動成立，不論 b 是甚麼。因此解恰好是

$$\mathrm{p}(x) = x + b \qquad \text{及} \qquad \mathrm{p}(x) = -2x + b, \qquad b \text{ 為任意常數.}$$

驗算第二族：$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = 4x - b$ 及 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))) = -8x + 3b$，所以左方為 $-8x + 3b + 6x - 3b = -2x$。

第 (ii) 部分

設 p 的次數為 m。左方三項的次數分別為 m^2、$2m$ 及 m。

- 若 $m \geq 3$，則 $m^2 > 2m > m$，所以左方的次數為 $m^2 \geq 9 \neq 4$。
- 若 $m = 1$，左方的次數至多為 2；若 $m = 0$，左方是常數。兩者都不可能等於 x^4。

所以 $m = 2$。（此時 $m^2 = 2m = 4$，故 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 與 $3[\mathrm{p}(x)]^2$ 的最高次項次數相同，我們必須檢查它們的係數。）

設 $\mathrm{p}(x) = ax^2 + bx + c$，其中 $a \neq 0$；為了少寫一點，以 P 代表 $\mathrm{p}(x)$。

想一想 我們真的要把 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 完全展開嗎？

不必。按定義 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = aP^2 + bP + c$，所以左方為

$$2(aP^2 + bP + c) + 3P^2 - 4P = (2a + 3)P^2 + (2b - 4)P + 2c,$$

這是 P 的二次式。它的 x^4 係數是 $(2a + 3)a^2$，因為 P^2 的首項（leading term）是 a^2x^4，而 P 的次數只有 2。與 x^4 比較，得

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0, \qquad \text{即} \qquad (a + 1)^2(2a - 1) = 0,$$

（看出根 $a=-1$ 後再作除法），所以 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{2}$。

現在我們用一個簡單的事實：若 $S(x)$ 是多項式，且對某常數 K 有 $S(x)^2=x^4+K$，則 $(S-x^2)(S+x^2)=K$。當 S 的首項為 $\pm x^2$ 時，若兩個因式都不是零多項式，則至少其中一個的次數為 2，乘積便不可能是常數。所以對首項為 $\pm x^2$ 的 S，必有一個因式為零，即恰好 $S=\pm x^2$。

情況 $a=-1$。此時 $2a+3=1$，配方得

$$P^2+(2b-4)P+2c=\big(P+b-2\big)^2-(b-2)^2+2c=x^4.$$

所以 $S=P+b-2=-x^2+bx+(c+b-2)$ 滿足 $S^2=x^4+K$，其中 K 為常數，且首項為 $-x^2$。於是 $S+x^2=bx+(c+b-2)$ 的次數小於 2，而 $S-x^2$ 的次數為 2，所以上述事實迫使 $S+x^2=0$：即 $b=0$ 及 $c+b-2=0$。所以 $b=0$、$c=2$，於是 $K=(b-2)^2-2c=0$，前後一致。這給出

$$\mathrm{p}(x)=2-x^2.$$

情況 $a=\frac{1}{2}$。此時 $2a+3=4$，而

$$4P^2+(2b-4)P+2c=\left(2P+\tfrac{b-2}{2}\right)^2-\tfrac{(b-2)^2}{4}+2c=x^4.$$

現在 $S=2P+\frac{b-2}{2}=x^2+2bx+2c+\frac{b-2}{2}$ 的首項為 x^2，所以同理 $S-x^2=0$：$b=0$ 及 $2c-1=0$。所以 $b=0$、$c=\frac{1}{2}$，而 $K=\frac{(b-2)^2}{4}-2c=1-1=0$，前後一致。這給出

$$\mathrm{p}(x)=\tfrac{1}{2}(x^2+1).$$

由於每一步都可以逆推，兩者確實都是解，但直接驗算一下會更安心。對 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$，$\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=2-(2-x^2)^2=-x^4+4x^2-2$，而

$$2(-x^4+4x^2-2)+3(x^4-4x^2+4)-4(2-x^2)=x^4.$$

對 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$，設 $u=x^2+1$；則 $2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))=\frac{1}{4}u^2+1$，而左方為 $\frac{1}{4}u^2+1+\frac{3}{4}u^2-2u=(u-1)^2=x^4$。

所以滿足 (ii) 中方程的多項式恰好是 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$ 及 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$。

驗算

- 在 (i) 中試 $b=1$：$\mathrm{p}(x)=x+1$ 給出 $(x+3)-3(x+1)=-2x$。
- 在 (ii) 中代入 $x=1$：對 $\mathrm{p}(x)=2-x^2$，得 $\mathrm{p}(1)=1$、$\mathrm{p}(\mathrm{p}(1))=1$，而 $2+3-4=1=1^4$。對 $\mathrm{p}(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)$，取 $x=3$：$\mathrm{p}(3)=5$、$\mathrm{p}(5)=13$，而 $26+75-20=81=3^4$。

- 我們亦用精確運算驗證了 (i) 中兩族解對許多隨機的 b 都成立，並在一個以 $\frac{1}{4}$ 為步長取 b, c 的二次式網格上搜尋，結果只找到 (ii) 的兩個解。

常見錯誤

- 在 (ii) 中假設左方的次數就是 m^2：當 $m = 2$ 時，$2\mathrm{p}(\mathrm{p}(x))$ 與 $3[\mathrm{p}(x)]^2$ 兩項的次數都是 4，正正因為它們有可能互相抵消，所以 a 必須由 $2a^3 + 3a^2 = 1$ 求得。
- 在 (i) 中解釋為何次數必須是 1 時，漏掉 $m = 0$ 的情況。
- 在 (i) 中求得 $a = 1$ 或 $a = -2$ 後便停下，並把 b 定為某個特定值：常數項的條件對每個 b 都成立。

STEP 之外

法則 $\deg(\mathrm{p} \circ \mathrm{q}) = \deg \mathrm{p} \cdot \deg \mathrm{q}$，與 $\deg(\mathrm{pq}) = \deg \mathrm{p} + \deg \mathrm{q}$ 一樣，依賴於係數之間沒有零因子（zero divisors）：在一個兩個非零數相乘可以得零的環（ring）中，首項可能消失，這兩條法則都會失效。像 $\mathrm{p}(\mathrm{p}(x)) = \ldots$ 這樣的函數方程（functional equation）亦會引向迭代映射（iterated maps）與動力系統（dynamics）的研究。關於多項式環以及次數論證何時適用，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP II 2012，第 3 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2012，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q3

關鍵思路

$x+\sqrt{1+x^2}$ 這個麻煩的式子，明顯應該設為 t。令這個代換（substitution）奏效的關鍵，在於它的倒數（reciprocal）是 $\sqrt{1+x^2}-x$，因此把 t 與 $1/t$ 相減和相加，便可把 x 與 $\sqrt{1+x^2}$ 都寫成 t 的簡單函數（function）。之後，兩個積分（integral）各自的重點，就是看出如何把被積函數（integrand）寫成只含 $x+\sqrt{1+x^2}$ 的函數。

解答

恆等式

設 $t=x+\sqrt{1+x^2}$。乘以共軛式（conjugate），得

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}-x}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

把這兩條方程相減及相加，得

$$x=\tfrac{1}{2}\Big(t-\frac{1}{t}\Big),\qquad \sqrt{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\Big(t+\frac{1}{t}\Big).$$

第一條式直接把 x 表示為 t 的函數，因此

$$\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t.$$

至於積分上下限：當 $x=0$ 時，$t=1$；而當 $x\to\infty$ 時，$t\to\infty$。此外，t 是 x 的嚴格遞增函數（strictly increasing function）（當 $x\geq 0$ 時，x 與 $\sqrt{1+x^2}$ 皆遞增），所以這個代換在 $[0,\infty)$ 上是一一對應（one-to-one）的。因此

$$\int_0^\infty f\big(x+\sqrt{1+x^2}\big)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^\infty\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

得證。

第一個積分

想一想 分母 $2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$ 怎樣才能寫成 $x+\sqrt{1+x^2}$ 的函數？

試試平方：$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2 = x^2+2x\sqrt{1+x^2}+(1+x^2) = 2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}$，恰好就是分母。因此被積函數是 $f\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，其中 $f(t)=1/t^2$，由恆等式得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty \left(t^{-2}+t^{-4}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}-\frac{1}{3t^3}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

第二個積分

設 $x=\tan\theta$，則 $\mathrm{d}x=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，即 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。當 θ 由 0 變到 $\frac{1}{2}\pi$ 時，x 由 0 變到 ∞。由於 $0\le\theta<\frac{1}{2}\pi$，故 $\cos\theta>0$，所以 $\sec\theta=\sqrt{1+x^2}$，且

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\qquad 1+\sin\theta=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}},$$

其中同樣有 $t=x+\sqrt{1+x^2}$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2)^{3/2}}{t^3}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{t^3}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 被積函數中仍有一個 $\sqrt{1+x^2}$。怎樣把它寫成 t 的式子？

我們在第一部分已經求得：$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(t+1/t)$。所以被積函數是

$$\frac{t+t^{-1}}{2t^3}=\tfrac{1}{2}\left(t^{-2}+t^{-4}\right),$$

只是 $t=x+\sqrt{1+x^2}$ 的函數。取 $f(t)=\frac{1}{2}(t^{-2}+t^{-4})$ 應用恆等式，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta)^3} &= \frac{1}{2}\int_1^\infty\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_1^\infty\left(t^{-2}+2t^{-4}+t^{-6}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{28}{15} = \frac{7}{15}.\end{aligned}$$

驗算

- 用一個簡單的 f 測試恆等式：取 $f(t)=1/t^3$，右方為 $\frac{1}{2}\int_1^\infty(t^{-3}+t^{-5})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$，而用數值求積（numerical quadrature）計算左方，同樣得 0.375。

- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算原來的兩個積分，得 0.666667 及 0.466667，與 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{7}{15}$ 吻合。
- 數量級的合理性檢查：在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上，被積函數 $1/(1+\sin\theta)^3$ 由 1 降至 $\frac{1}{8}$，所以積分值介乎 $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi \approx 0.20$ 與 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.57$ 之間。$\frac{7}{15} \approx 0.47$ 穩穩落在這個範圍內。

常見錯誤

- 先求 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$，再費力地把它化成 t 的式子。先把 x 寫成 t 的函數，然後對它求導，會快得多。
- 在第二個積分中，漏掉了來自 $\mathrm{d}\theta$ 的因子 $1/(1+x^2)$，或者把 $\sqrt{1+x^2}$ 留在被積函數中，而沒有把它化成 $\frac{1}{2}(t+1/t)$。

STEP 之外

代換 $t = x + \sqrt{1+x^2}$ 其實就是在 $x = \sinh u$ 時的 $t = \mathrm{e}^u$：事實上 $\sinh^{-1} x = \ln\bigl(x + \sqrt{1+x^2}\bigr)$，而公式 $x = \frac{1}{2}(t - 1/t)$、$\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}(t+1/t)$ 不過是用指數寫出的 $\sinh u$ 與 $\cosh u$。這類雙曲代換（hyperbolic substitution）是大學一年級處理含 $\sqrt{1+x^2}$ 的積分的標準工具。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）收錄了更多同類風格的 STEP 積分題。

詳細解答

STEP II 2012，第 4 題

純數學 • 對數級數不等式

STEP II 2012，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q4

關鍵思路

一切都源自 $\ln(1+x)$ 的級數（series），以及 e^t 是遞增函數（increasing function）這個事實。要比較 $(1+\frac{1}{n})^n$ 與 e，可以先取對數（logarithm）：我們需要比較 $n\ln(1+\frac{1}{n})$ 與 1。一個各項逐漸縮小的交錯級數（alternating series）可以兩項兩項地加上括號，從而證明它小於首項；而組合 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 則把所有負項都消去，所以它大於首項。把數列夾在這兩個界之間，便得出極限（limit）。

解答

第 (i) 部分

由於 $n > 1$ 且 $k \geq 1$，我們有 $(k+1)n > n > 1$，當然亦有 $(k+1)n > k$。兩邊乘以 $n^k > 0$，得

$$(k+1)n^{k+1} > kn^k > 0,$$

對這些正數取倒數（reciprocal），不等號方向會反轉：

$$\frac{1}{(k+1)n^{k+1}} < \frac{1}{kn^k}.$$

現在在級數中代入 $x = \frac{1}{n}$；這是容許的，因為 $n > 1$ 給出 $0 < x < 1$。把首項之後的各項兩兩分組，

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) - \left(\frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5}\right) - \cdots.$$

每個括號都具有 $\frac{1}{kn^k} - \frac{1}{(k+1)n^{k+1}}$ 的形式，其中 k 為偶數，因此由剛才證明的不等式可知它嚴格為正。

想一想 我們可以這樣為一個無窮級數加上括號嗎？

可以，因為這個級數收斂（converges）。項數為奇數的部分和（partial sums）構成全體部分和的一個子數列（subsequence），所以它們趨向同一個極限，即 $\ln(1+\frac{1}{n})$。加上括號後的級數，正正就是這些奇數項部分和組成的數列。

加括號後級數的部分和為 $\frac{1}{n}-b_1$、$\frac{1}{n}-b_1-b_2$、...，其中每個 $b_j>0$。它們遞減，所以全部都不大於 $\frac{1}{n}-b_1$，因此它們的極限亦然：

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le\frac{1}{n}-b_1<\frac{1}{n},\qquad b_1=\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}>0.$$

（把 b_1 單獨留出來，正是令最後的不等式成為嚴格不等式（strict inequality）的關鍵；否則一列小於 $\frac{1}{n}$ 的數，其極限有可能等於 $\frac{1}{n}$。）

兩邊乘以 $n>0$，得 $n\ln(1+\frac{1}{n})<1$，即 $\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)<1$。由於指數函數（exponential function）是遞增的，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}.$$

第 (ii) 部分

設 $x=\frac{1}{2y}$。由於 $y>\frac{1}{2}$，我們有 $0<x<1$，所以 x 與 $-x$ 都落在級數成立的範圍內：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$
$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots.$$

逐項相減（對兩個收斂級數而言這是合理的），偶次冪互相抵消，奇次冪則加倍：

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

而

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2y}}{1-\frac{1}{2y}}=\frac{2y+1}{2y-1},$$

所以，利用 $2x=\frac{1}{y}$，

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)=\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}+\frac{2}{5(2y)^5}+\cdots=\frac{1}{y}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2y)^{2r}}.$$

首項之後的每一項都嚴格為正（因為 $y>0$），所以由第二個起的部分和全部都不小於 $\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}$，因此

$$\ln\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right)\ge\frac{1}{y}+\frac{2}{3(2y)^3}>\frac{1}{y},$$

此即所求。

至於推論，選取 y 使分數變成 $1+\frac{1}{n}$。取 $y=n+\frac{1}{2}$（對每個正整數 n，它都大於 $\frac{1}{2}$），

$$\frac{2y+1}{2y-1}=\frac{2n+2}{2n}=1+\frac{1}{n},$$

所以

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

兩邊乘以 $n+\frac{1}{2}>0$，得 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(1+\frac{1}{n})>1$，再取指數（同樣是遞增函數），

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

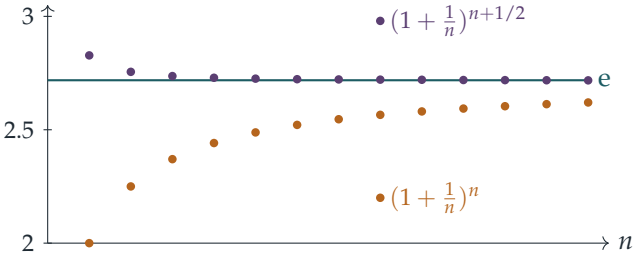
第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的結果除以 $(1+\frac{1}{n})^{1/2}>0$，並與第 (i) 部分結合，對每個整數 $n\geq 2$ 都有

$$\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}.$$

當 $n\to\infty$ 時，$1+\frac{1}{n}\to 1$，所以 $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$（平方根函數是連續（continuous）的），於是左邊趨向 e。右邊是常數 e。由夾逼定理（squeeze／sandwich theorem），

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\to\mathrm{e}.$$



驗算

當 $n=10$：$(1.1)^{10}\approx 2.5937$，$(1.1)^{10.5}\approx 2.7203$，兩者確實分處 e ≈ 2.7183 的兩側。當 $n=1000$，下界 $\mathrm{e}/\sqrt{1.001}\approx 2.7169237$ 僅僅略低於 $(1.001)^{1000}\approx 2.7169239$，可見這個夾逼有多緊。我們亦對直至數千的每個 n 驗證了兩條嚴格不等式，並以數值方法驗證了對隨機選取的 $y>\frac{1}{2}$，第 (ii) 部分的級數之和等於 $\ln\frac{2y+1}{2y-1}$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分代入 $x = 1$：題目只給出 $|x| < 1$ 時的級數，這正是那裏需要 $n > 1$ 的原因（第 (iii) 部分只用到很大的 n，所以並無損失）。
- 直接由一列嚴格不等式的極限得出嚴格不等式。極限只保持 $\leq$；要得到 $<$，須把一個正項單獨留出來。
- 忘記取指數之所以保持不等式，只是因為 e^t 是遞增的；應當明確寫出這一點。

STEP 之外

這些界所顯示的不止於極限：由於 $(1+\frac{1}{n})^{n+1/2}/(1+\frac{1}{n})^n = \sqrt{1+1/n} \approx 1+\frac{1}{2n}$，誤差 $\mathrm{e} - (1+\frac{1}{n})^n$ 的大小約為 $\mathrm{e}/(2n)$，所以這個數列收斂得頗慢。重排收斂級數、比較部分和以及夾逼定理，都是大學第一門分析（analysis）課程的基本功；在那裏你亦會遇到其中的微妙之處（重排條件收斂（conditionally convergent）級數可以改變其和！）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對這一切有精彩的論述。

詳細解答

STEP II 2012，第 5 題

純數學 • 倒數函數的描繪

STEP II 2012，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q5

關鍵思路

兩條曲線都是倒數（reciprocal）形式，所以我們在腦中先想像分母的圖像，再把它「倒過來」：分母為零之處會出現垂直漸近線（vertical asymptote），分母很大之處 y 接近 0，而分母的轉向點（turning point）亦是曲線的轉向點。在第 (ii) 部分，兩個二次因式關於 a 與 b 的中點互為鏡像，因此把原點移到該中點，g 便成為新變量的偶函數（even function），而駐點（stationary point）則可從一條關於 t^2 的二次方程直接得出。

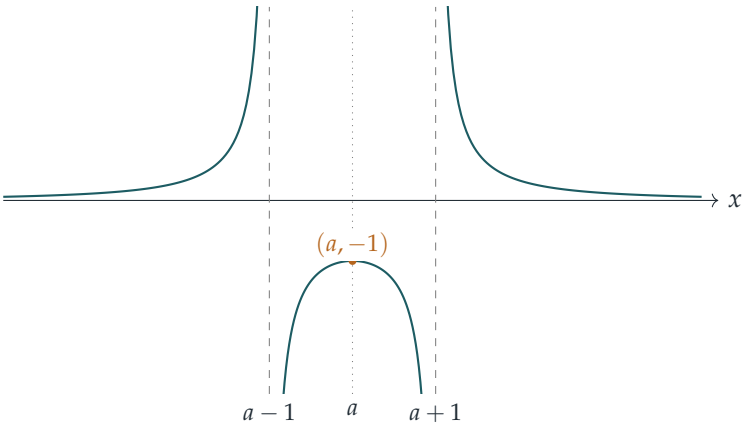
解答

第 (i) 部分

設 $D(x) = (x-a)^2 - 1$，於是 $f = 1/D$。分母 D 是一條拋物線，關於 $x = a$ 對稱，在 $x = a$ 取最小值 -1，零點為 $x = a \pm 1$。由此讀出倒數的性質：

- 曲線關於 $x = a$ 對稱，垂直漸近線為 $x = a \pm 1$。
- 當 $|x - a| < 1$ 時，$-1 \le D < 0$，所以 $f \le -1$，等號只在 $x = a$ 成立。因此 $(a, -1)$ 是局部極大點（local maximum），而當 x 從內側趨近 $a \pm 1$ 時，$f \to -\infty$。
- 當 $|x - a| > 1$ 時，$D > 0$，且 D 隨 $|x - a|$ 增大而遞增，所以 f 為正，並由 $+\infty$（在漸近線旁）遞減趨向 0。x 軸是水平漸近線（horizontal asymptote），當 $|x|$ 很大時 $f \approx 1/x^2$。

事實上 $f'(x) = -2(x-a)/D^2$ 只在 $x = a$ 處為零。曲線與 y 軸相交於 $1/(a^2 - 1)$（當 $a \neq \pm 1$ 時），但其位置取決於 a，所以我們以 $x = a$ 為參照來作圖。



第 (ii) 部分

設 $p=(x-a)^2-1$ 及 $q=(x-b)^2-1$，於是 $g=1/(pq)$。令

$$c=\tfrac{1}{2}(a+b), \qquad d=\tfrac{1}{2}(b-a)>0, \qquad t=x-c,$$

使得 $x-a=t+d$ 及 $x-b=t-d$。利用 $(t+d)(t-d)=t^2-d^2$ 及 $(t+d)^2+(t-d)^2=2t^2+2d^2$，得

$$\begin{aligned} pq &= \big((t+d)^2-1\big)\big((t-d)^2-1\big) \\ &= (t^2-d^2)^2-(2t^2+2d^2)+1. \end{aligned}$$

這只取決於 t^2，所以 g 關於 $x=c$ 對稱，即關於 a 與 b 的中點對稱。記 $u=t^2$ 及 $h(u)=(u-d^2)^2-2u-2d^2+1$，則

$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}t}=2t\,h'(u)=2t\big(2(u-d^2)-2\big)=4t\,(t^2-d^2-1).$$

由於 $g'=-(pq)'/(pq)^2$，g 的駐點就是 $(pq)'=0$ 之處：

$$t=0 \qquad \text{或} \qquad t=\pm\sqrt{d^2+1},$$

前提是這些點不是漸近線。漸近線位於 $t=\pm(d+1)$ 及 $t=\pm(d-1)$，而由於 $d<\sqrt{d^2+1}<d+1$，外側的兩個駐點必定是真正的駐點。以 a 和 b 表示，候選點為

$$x=\frac{a+b}{2} \qquad \text{及} \qquad x=\frac{a+b\pm\sqrt{(b-a)^2+4}}{2}.$$

在這些點上的值為 $h(0)=(d^2-1)^2$ 及 $h(d^2+1)=1-2(d^2+1)-2d^2+1=-4d^2$。

想一想 這些候選點中哪些真正成立？它們是極大點還是極小點？

這取決於 $t=0$ 是否與漸近線重合，即是否有 $d=1$；這正好對應 $b>a+2$（即 $d>1$）與 $b=a+2$（即 $d=1$）兩種情況的區分。至於每個點的性質，我們不再求二階導數，而是觀察 g 在漸近線之間每個區間上的正負號，以及它在區間兩端的行為。

情況 $b > a+2$。　此時 $d > 1$，四條漸近線依次為

$$t = -(d+1),\ -(d-1),\ d-1,\ d+1, \quad \text{即} \quad x = a-1,\ a+1,\ b-1,\ b+1,$$

四者互不相同，且 c 嚴格位於 $a+1$ 與 $b-1$ 之間。

- 外側，$|t| > d+1$：此處 $|x-a| > 1$ 且 $|x-b| > 1$，所以 $p, q > 0$，$g > 0$。這裡沒有駐點，所以 g 由漸近線處的 $+\infty$ 下降至無窮遠處的 0，行為類似 $1/x^4$。
- 中間，$|t| < d-1$，即 $a+1 < x < b-1$：同樣 $p, q > 0$，所以 $g > 0$，且在兩端 $g \to +\infty$。唯一的駐點是 $t = 0$，因此它必定是極小點，其值為

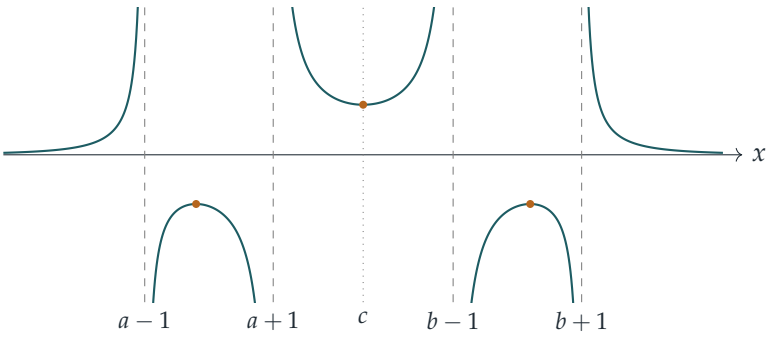
$$g(c) = \frac{1}{(d^2-1)^2} = \frac{16}{\big((b-a)^2-4\big)^2}.$$

- 兩個間隙，$d-1 < |t| < d+1$：對於 $(d-1, d+1)$ 中的 t，有 $|x-b| < 1$，但 $x - a > 2d - 1 > 1$，所以 $q < 0 < p$，$g < 0$，且在兩端 $g \to -\infty$。該處唯一的駐點是 $t = \sqrt{d^2+1}$，它必定是極大點，其值為

$$g = \frac{1}{-4d^2} = -\frac{1}{(b-a)^2}.$$

  間隙 $-(d+1) < t < -(d-1)$ 的情況與此成鏡像。

因此共有三個駐點：在 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ 的一個局部極小點，以及在 $x = \frac{1}{2}\big(a+b \pm \sqrt{(b-a)^2+4}\big)$ 的兩個局部極大點，兩者均有 $y = -1/(b-a)^2$。下圖取 $b - a = 4.8$，並把 y 方向拉伸，使轉向點清楚可見。



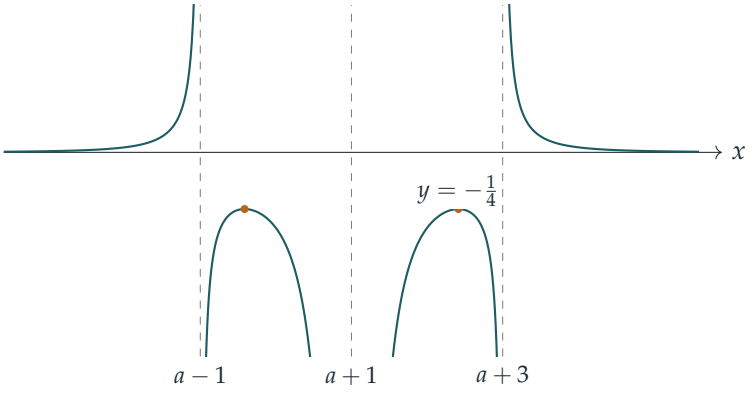
情況 $b = a+2$。　此時 $d = 1$，所以 $a+1 = b-1 = c$，中間兩條漸近線合而為一，位於 $x = a+1$。設 $t = x - a - 1$，

$$pq = h(t^2) = t^4 - 4t^2 = t^2(t^2-4), \qquad g = \frac{1}{t^2(t^2-4)},$$

所以共有三條漸近線：$x = a-1$、$a+1$、$a+3$。候選點 $t = 0$ 現在是漸近線，而不是駐點，只剩下 $t = \pm\sqrt{2}$。

- 當 $|t| > 2$ 時，$g > 0$，且 g 由 $+\infty$ 下降至 0，與前相同。
- 當 $0 < |t| < 2$ 時，$g < 0$，且無論 $t \to 0$（此處 $g \approx -1/(4t^2)$，所以兩側都向下）還是 $|t| \to 2$，都有 $g \to -\infty$。因此在 $t = \sqrt{2}$ 的駐點是極大點，其值為 $g = 1/\big(2\cdot(-2)\big) = -\frac{1}{4}$；在 $t = -\sqrt{2}$ 亦然。

因此駐點位於 $x = a + 1 \pm \sqrt{2}$，兩者都是局部極大點，且 $y = -\frac{1}{4}$。（這與一般公式吻合：當 $b - a = 2$ 時，公式給出 $x = \frac{1}{2}(2a + 2 \pm \sqrt{8})$，以及 $-1/(b-a)^2 = -\frac{1}{4}$。）此時曲線在 $x = a - 1$ 與 $x = a + 3$ 之間從不升到 x 軸以上。



驗算

- 取 $a = 0$、$b = 5$：$g(2.5) = 1/\big((6.25-1)^2\big) = 1/27.5625$，而公式 $16/(25-4)^2 = 16/441$ 給出相同結果，約為 0.0363。在 $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{29}) \approx 5.193$，直接代入計算得 $g \approx -0.04 = -1/25$。
- 在第一種情況中令 $b \to a + 2$，極小值 $16/\big((b-a)^2 - 4\big)^2$ 趨向無窮大，與中間那一支消失於合併後的漸近線的情況相符。
- 對隨機的 a 和 b 以數值方法掃描 g' 的變號位置，發現當 $b > a + 2$ 時恰有三個駐點，當 $b = a + 2$ 時恰有兩個，位置與上文一致。

常見錯誤

- 把 pq 展開成關於 x 的四次多項式（quartic），再嘗試直接把三次式 $(pq)'$ 因式分解（factorise）：這樣做行得通，但對稱代換（substitution）$t = x - c$ 能令因式分解一目了然。
- 忘記在 $b = a + 2$ 的情況中，點 $x = a + 1$ 是漸近線（分母的二重零點），而不是轉向點。

► 弄錯 g 在間隙中的正負號：在該處 p、q 中恰有一個為負，所以 $g < 0$。

STEP 之外

由 D 描繪 $1/D$ 的圖像，是定性地思考函數的初步體驗：正負號、零點、對稱性及在無窮遠處的行為，在動用任何微積分之前已幾乎告訴你一切。平移 $t = x - \frac{1}{2}(a+b)$ 是利用對稱性把四次式化為關於 t^2 的二次式，這個技巧在代數和分析中反覆出現。若想了解這類作圖背後對極限和漸近線的嚴謹處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；若想做更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

詳細解答

STEP II 2012，第 6 題

純數學 • 圓內接四邊形的面積

STEP II 2012，第 6 題

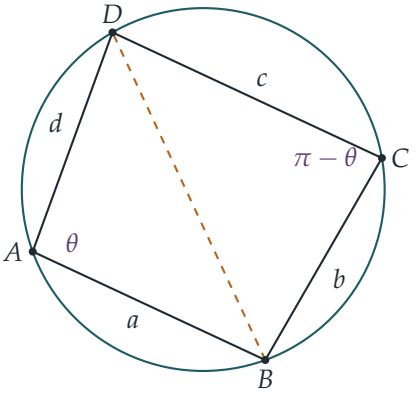
繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s2-q6

關鍵思路

對角線（diagonal）BD 把四邊形分成兩個三角形，而 BD 可以用餘弦定理（cosine rule）以兩種方式表示。圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）的特別之處在於對角之和為 π，所以 C 處的角是 $\pi - \theta$。於是 $\cos C = -\cos\theta$ 而 $\sin C = \sin\theta$，餘弦定理和面積公式 $\frac{1}{2}xy\sin(\text{夾角})$ 都只涉及同一個角 θ。之後，利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 再加上細心的因式分解（factorising），便可完成餘下的工作。

解答



求 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$

由於 $ABCD$ 是圓內接四邊形，對角 DAB 與 BCD 之和為 π，所以 $\angle BCD = \pi - \theta$。因此

$$\cos\angle BCD = -\cos\theta, \qquad \sin\angle BCD = \sin\theta.$$

對對角線 BD 應用餘弦定理，先在三角形 ABD 中（兩邊為 a、d，夾角為 θ），再在三角形 CBD 中（兩邊為 b、c，夾角為 $\pi-\theta$）：

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta = b^2 + c^2 + 2bc\cos\theta.$$

把含 $\cos\theta$ 的項歸在一起，得 $2(ad+bc)\cos\theta = a^2+d^2-b^2-c^2$，所以

$$\cos\theta = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}.$$

對角線 BD 把四邊形分成這兩個三角形，所以它們的面積之和為 Q：

$$Q = \tfrac{1}{2}ad\sin\theta + \tfrac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta) = \tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad \sin\theta = \frac{2Q}{ad+bc}.$$

（由於所有邊長都是正數，我們可以除以 $ad+bc$。）

$16Q^2$ 的公式

把兩個表達式代入 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$：

$$\frac{4Q^2}{(ad+bc)^2} + \frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)^2}{4(ad+bc)^2} = 1.$$

兩邊乘以 $4(ad+bc)^2$，

$$16Q^2 = 4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2,$$

此即所求。

婆羅摩笈多公式

右方是平方差（difference of two squares）$X^2 - Y^2$，其中 $X = 2(ad+bc)$，$Y = a^2+d^2-b^2-c^2$。

> ? **想一想** 怎樣把 $X-Y$ 和 $X+Y$ 化成一次因式的乘積？

把各項分組，使每一組再次成為平方差。把含 a,d 的項放在一起，含 b,c 的項放在一起：

$$X - Y = (b^2+2bc+c^2) - (a^2-2ad+d^2) = (b+c)^2 - (a-d)^2,$$
$$X + Y = (a^2+2ad+d^2) - (b^2-2bc+c^2) = (a+d)^2 - (b-c)^2.$$

再把兩者各自因式分解，

$$\begin{aligned}16Q^2 &= (X-Y)(X+Y)\\ &= (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c).\end{aligned}$$

設 $2s = a+b+c+d$，則每個括號都等於 $2s$ 減去某一邊的兩倍：例如 $b+c+d-a = 2s-2a$。所以四個括號分別是 $2(s-a)$、$2(s-d)$、$2(s-b)$ 和 $2(s-c)$，而

$$16Q^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d), \qquad \text{即} \qquad Q^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

這就是婆羅摩笈多（Brahmagupta）公式。

三角形的面積

每個三角形都是圓內接的，因為它的三個頂點都在其外接圓(circumcircle)上。現在讓邊 DA 縮短至零，即 D 沿圓周滑向 A。這時 $ABCD$ 變成邊長為 a、b、c 的三角形 ABC，而 $d = 0$。公式兩邊都隨 D 連續變化，所以在極限下公式仍然成立。設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，則三角形的面積 Δ 滿足

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \qquad \text{所以} \qquad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

這就是海倫公式（Heron's formula）。

驗算

- 單位正方形是圓內接四邊形，$s = 2$，而 $(2-1)^4 = 1$ 正是它的面積。對於 3–4–5 三角形，$s = 6$，而 $\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$。
- 對於長方形，$a = c$ 且 $b = d$，所以 $\cos\theta = 0$；這是對的，因為長方形的每個角都是 $\frac{\pi}{2}$。
- 我們在圓上隨機放置了 20 000 個圓內接四邊形，把 $\cos\theta$、$\sin\theta$ 和 Q^2 的公式與實際的角及鞋帶公式（shoelace formula）算出的面積比較，兩者相差不超過 3×10^{-12}。海倫公式亦與 1000 個隨機三角形的結果吻合。

常見錯誤

- 忘記 $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$。這會把 $+2bc\cos\theta$ 變成減號，之後的一切都會出錯。
- 試圖把 $4(ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ 完全展開。把它當作平方差分解兩次，快得多，也不容易出錯。

STEP 之外

對於一般的（不一定是圓內接的）四邊形，Bretschneider 公式可給出其面積。該公式減去一項 $abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$，其中 α 和 γ 是一對對角，所以在邊長固定時，圓內接四邊形的面積最大。海倫公式的因式分解形式亦即時顯示：三角形面積為零，當且僅當三角不等式（triangle inequality）取等號。如想看更多這種風格的幾何，可參閱考克斯特（Coxeter）與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何的新探索》）。

詳細解答

STEP II 2012，第 7 題

純數學 • 向量與圓

STEP II 2012，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

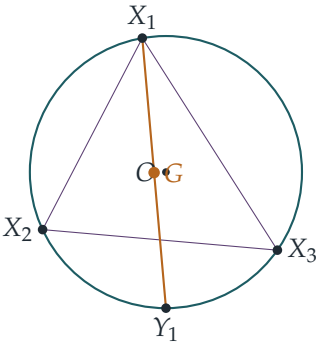
step.maths.org/questions/12-s2-q7

關鍵思路

點 Y_1 位於通過 X_1 和 G 的直線上，所以它的位置向量（position vector）是 $\mathbf{x}_1$ 與 $\mathbf{g}$ 的簡單組合，只含一個未知純量（scalar）。關於 Y_1，我們唯一知道的另一件事是它在單位圓（unit circle）上，因此 $|\overrightarrow{OY_1}|^2 = 1$ 給出一條關於 λ_1 的方程。這是一條二次方程（quadratic equation），但其中一個根事先已顯而易見：該直線在 X_1 本身與圓相交，所以這個根可以先因式分解出來。

解答

設 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$ 及 $\lambda = \lambda_1$。由於每個 $\mathbf{x}_i$ 都是單位向量（unit vector），所以 $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1$。



Y_1 的位置向量

由 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda\overrightarrow{GX_1}$ 得 $\mathbf{y}_1 - \mathbf{g} = -\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{g})$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OY_1} = \mathbf{y}_1 &= (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}(1+\lambda)(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) - \lambda\mathbf{x}_1 \\ &= \tfrac{1}{3}\big((1-2\lambda)\mathbf{x}_1 + (1+\lambda)(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3)\big),\end{aligned}$$

因為 $\frac{1}{3}(1+\lambda) - \lambda = \frac{1}{3}(1-2\lambda)$。這就是所求的表達式。

求 λ_1

因為 Y_1 在圓上，$|\mathbf{y}_1|^2 = 1$，所以 $|3\mathbf{y}_1|^2 = 9$。我們需要

$$|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 1+2\alpha+1 = 2+2\alpha, \qquad \mathbf{x}_1\cdot(\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3) = \beta+\gamma.$$

因此，把 $|3\mathbf{y}_1|^2$ 展開為它與自身的點積（dot product），得

$$(1-2\lambda)^2 + (1+\lambda)^2(2+2\alpha) + 2(1-2\lambda)(1+\lambda)(\beta+\gamma) = 9.$$

按 λ 的冪整理，再除以 2：

$$(3+\alpha-2\beta-2\gamma)\lambda^2 + (2\alpha-\beta-\gamma)\lambda - (3-\alpha-\beta-\gamma) = 0.$$

為了簡潔，設

$$A = 3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad B = 3-\alpha-\beta-\gamma,$$

並留意中間的係數正好是 $A-B$。所以方程為 $A\lambda^2 + (A-B)\lambda - B = 0$，可因式分解為：

$$(\lambda+1)(A\lambda - B) = 0.$$

想一想 為甚麼 $\lambda = -1$ 會是一個根？為甚麼可以捨去它？

把 $\lambda = -1$ 代入 $\mathbf{y}_1 = (1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$，得 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$。通過 X_1 和 G 的直線上每一點都具有 $(1+\lambda)\mathbf{g} - \lambda\mathbf{x}_1$ 的形式，而這條直線除了在 Y_1 之外，也在 X_1 與圓相交，所以這條二次方程必然以 $\lambda = -1$ 為根。題目給出 $\lambda_1 > 0$，所以 $\lambda_1 \neq -1$，因此 $A\lambda_1 = B$。

還須確認可以除以 A。若 $A = 0$，則 $A\lambda_1 = B$ 迫使 $B = 0$。但

$$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2 = 3+2(\alpha+\beta+\gamma), \qquad \text{所以} \qquad B = \tfrac{1}{2}\big(9 - |\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2\big) = \tfrac{9}{2}\big(1-|\mathbf{g}|^2\big).$$

由三角不等式（triangle inequality），$|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3| \le 3$，而等號只在三個單位向量相等時成立；由於三點互不相同，所以 $B > 0$。因此 $A \neq 0$，且

$$\lambda_1 = \frac{B}{A} = \frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3+\alpha-2\beta-2\gamma},$$

得證。

最後一部分

由於 $\overrightarrow{GY_1} = -\lambda_1 \overrightarrow{GX_1}$ 且 $\lambda_1 > 0$，長度滿足 $GY_1 = \lambda_1 GX_1$，所以

$$\frac{GX_1}{GY_1} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{3+\alpha-2\beta-2\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

把標號輪換（$1 \to 2 \to 3 \to 1$，這會把 $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），用同樣的論證便得到另外兩個比。分母 $B = 3-\alpha-\beta-\gamma$ 是對稱的，所以三者的分母相同，而分子分別為

$$3+\alpha-2\beta-2\gamma, \qquad 3+\beta-2\gamma-2\alpha, \qquad 3+\gamma-2\alpha-2\beta.$$

三者之和為 $9+(1-2-2)(\alpha+\beta+\gamma) = 9-3(\alpha+\beta+\gamma) = 3B$。因此

$$\frac{GX_1}{GY_1} + \frac{GX_2}{GY_2} + \frac{GX_3}{GY_3} = \frac{3B}{B} = 3.$$

驗算

- 等邊三角形：此時 $G = O$，每條通過 G 的弦都是直徑，所有比都等於 1。在公式中，$\alpha = \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$，得 $\lambda_1 = \frac{9/2}{9/2} = 1$。
- 這裏有一個幾何解讀：$A = \frac{1}{2}|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-2\mathbf{x}_1|^2 = \frac{9}{2}GX_1^2$ 及 $B = \frac{9}{2}(1-OG^2)$，所以 $\lambda_1 = B/A$ 表示 $GX_1 \cdot GY_1 = 1-OG^2$，即相交弦定理（intersecting chords theorem），亦即圓冪（power of a point）定理。
- 數值驗算：取 X_1, X_2, X_3 位於角度 0、1 和 2.5 弧度處，三個比 GX_i/GY_i 約為 1.13、0.31 和 1.57，其和在機器精度內等於 3。我們用同樣方法測試了 20 000 個隨機三角形。

常見錯誤

- 忘記 $|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3|^2$ 含有交叉項 2α，而不只是 $1+1$。
- 硬套二次方程求根公式，而沒有看出根 $\lambda = -1$。
- 除以 $3+\alpha-2\beta-2\gamma$ 時沒有說明它為何不等於零。

STEP 之外

這道題中隱藏的恆等式 $GX_1 \cdot GY_1 = 1-OG^2$，就是一點對於圓的圓冪，而上述點積計算正是它的向量證明。用內積來表述幾何，讓長度和角度全都由 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ 得出，這是大學第一個線性代數（linear algebra）課程中內積空間（inner-product space）的起點。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）就是從這個觀點展開的。

詳細解答

STEP II 2012，第 8 題

純數學 • 非線性遞推關係

> **STEP II 2012，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q8

關鍵思路

遞推關係（recurrence）$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2$ 是非線性（non-linear）的，但它對每一個 n 都成立，所以把它寫成兩個相鄰 n 值的形式再相減，就能消去那個麻煩的常數 q^2。剩下的式子說明比值 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ 永遠不變，於是數列便化為一個常係數為 p 的線性遞推關係（linear recurrence）。開首的不等式正正就是 $p > 2$ 這個命題，而它正是推動數列增長的原因。

解答

不等式

把所有項化為公分母（common denominator）$\alpha\beta$，

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

由於 $\beta - \alpha > q > 0$，兩邊平方（兩邊皆為正）得 $(\beta - \alpha)^2 > q^2$，所以分子為正。因為 $\alpha, \beta > 0$，分母 $\alpha\beta$ 亦為正。因此該式為正，得證。

第一個恆等式

把遞推關係兩邊乘以 u_{n-1}：對每一個 $n \geq 1$，

$$u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 - q^2.$$

以 $n+1$ 代替 n（這仍然容許，因為 $n+1 \geq 1$），

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2 - q^2.$$

以第二式減去第一式，消去 q^2：

$$u_n u_{n+2} - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

移項整理後得

$$u_n^2 + u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_{n-1}u_{n+1}, \qquad \text{即} \qquad u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_{n+1})$$

對所有 $n \geq 1$ 成立，這就是所求的恆等式（identity）。

線性遞推關係

想一想 剛證明的恆等式含有四個不同的項。它怎樣能給出只含單一常數 p 的遞推關係？

把它除以 $u_n u_{n+1}$；由於數列沒有任何一項為零，這是容許的：

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} \qquad (n \geq 1).$$

所以量 $v_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$ 對所有 $n \geq 1$ 滿足 $v_{n+1} = v_n$：它是常數。設其公共值為 p；則 $u_{n+1} + u_{n-1} = pu_n$，即

$$u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1).$$

要求 p，取 $n = 1$。由遞推關係得 $u_2 = (\beta^2 - q^2)/\alpha$，所以

$$p = \frac{u_2 + u_0}{u_1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2 - q^2}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - q^2}{\alpha\beta}.$$

這正是第一部分中的式子，所以當 $\beta - \alpha > q$ 時，我們已經知道 $p > 2$。

當 $\beta > \alpha + q$ 時數列遞增

設 $d_n = u_{n+1} - u_n$。利用線性遞推關係的形式 $u_{n+1} = pu_n - u_{n-1}$，

$$d_n - d_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = (p-2)u_n.$$

想一想 我們知道 $p - 2 > 0$，但為甚麼 $(p-2)u_n$ 會是正數？我們還未知道 $u_n > 0$。

正值性與增長必須一併證明，方法是歸納法（induction）。命題：對每一個 $n \geq 1$，$u_n > 0$ 且 $d_{n-1} > 0$。

當 $n = 1$：$u_1 = \beta > 0$ 且 $d_0 = \beta - \alpha > q > 0$。

假設對某個 $n \geq 1$ 有 $u_n > 0$ 及 $d_{n-1} > 0$。那麼由於 $p > 2$，

$$d_n = d_{n-1} + (p-2)u_n > 0, \qquad u_{n+1} = u_n + d_n > 0,$$

這就是 $n+1$ 的情況。由歸納法，對每一個 $n \geq 0$ 都有 $d_n = u_{n+1} - u_n > 0$，所以數列嚴格遞增（strictly increasing）。（事實上，差本身也在遞增，所以增長比線性更快。由於每一項都是正數，在這情況下「沒有任何一項為零」這個條件自動成立。）

$\beta = \alpha + q$ 的情況

此時 $(\beta - \alpha)^2 - q^2 = 0$，所以 $p = 2$ 剛好成立，且 $d_n - d_{n-1} = 0$。所有差都等於 $d_0 = \beta - \alpha = q$，所以數列是等差數列（arithmetic progression）

$$u_n = \alpha + nq.$$

由於 $q > 0$，它仍然嚴格遞增，但現在只是線性增長。直接驗證：$(\alpha + (n+1)q)(\alpha + (n-1)q) = (\alpha + nq)^2 - q^2$，所以這個數列確實滿足原來的遞推關係。

驗算

- 取 $\alpha = 1$、$\beta = 4$、$q = 2$（於是 $\beta > \alpha + q$）。遞推關係給出 $1, 4, 12, 35, \frac{407}{4}, \ldots$，而 $p = \frac{1+16-4}{4} = \frac{13}{4}$；確實 $\frac{13}{4} \cdot 4 - 1 = 12$ 及 $\frac{13}{4} \cdot 12 - 4 = 35$。
- 取 $\alpha = 1$、$q = 2$、$\beta = 3$，各項為 $1, 3, 5, 7, \ldots$，即最後一部分的等差數列。
- 我們以精確的有理數運算，對數百組隨機的 α, β, q 驗證了兩個恆等式，並驗證了每當 $\beta > \alpha + q$ 時數列都是遞增的。

常見錯誤

- 未先知道 $u_n > 0$，便由 $p > 2$ 推出 $d_n > d_{n-1}$：這兩個事實必須放在同一個歸納法中。
- 除以 $u_n u_{n+1}$ 時沒有指出它不等於零。
- 忘記相減那一步用到的是指標為 $n+1$ 的遞推關係，而這需要 $n+1 \geq 1$。

STEP 之外

一個暗中滿足某線性遞推關係的非線性遞推關係，我們說它具有一個隱藏的不變量（invariant）：這裏是 $(u_{n+1} + u_{n-1})/u_n$，或等價地 $u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = q^2$，它是力學中守恆

量（conserved quantity）的離散類比。線性遞推關係 $u_{n+1} - pu_n + u_{n-1} = 0$ 的解為 $u_n = A\lambda^n + B\lambda^{-n}$，其中 $\lambda + \lambda^{-1} = p$；當 $p > 2$ 時它是實數且呈指數增長，而在重根（repeated root）的情況 $p = 2$ 下則變為 $A + Bn$，正正就是上面的二分情況（dichotomy）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了更多 STEP 風格的遞推關係題目，而與微分方程（differential equations）的平行關係，則在 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）中有所發展。

詳細解答

STEP II 2012，第 9 題

力學 • 拋體運動

STEP II 2012，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

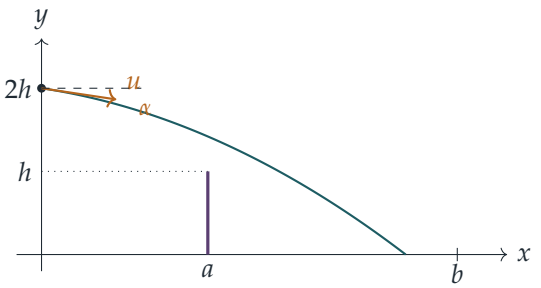
step.maths.org/questions/12-s2-q9

關鍵思路

把球的高度寫成它與拋出點之間水平距離 x 的函數，也就是軌跡方程（trajectory equation）。這樣，「越過球網」就是 $x = a$ 處的一個不等式，而「在 b 之前着地」則是關於飛行時間（time of flight）的一個不等式。最後一部分之所以行得通，是因為兩個條件原來都是同一個量 $1/u^2$ 的界：一個是上界（upper bound），一個是下界（lower bound）。因此下界必須小於上界，u 便隨之消去。

解答

我們把球視為只受重力作用而自由運動的質點（particle），忽略空氣阻力（air resistance）和自旋（spin），並設 $0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$。取原點為拋出點正下方的地面，$x$ 軸水平指向球網，y 軸鉛直向上。



越過球網

初速度的水平分量為 $u\cos\alpha$，鉛直分量為 $u\sin\alpha$，方向向下。經過時間 t 後，

$$x = ut\cos\alpha, \qquad y = 2h - ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = x/(u\cos\alpha)$ 消去 t，得軌跡

$$y = 2h - x\tan\alpha - \frac{gx^2\sec^2\alpha}{2u^2}.$$

水平速度是正的常數，所以球恰好一次到達 $x = a$，而當該處 $y > h$ 時，球便越過球網：

$$2h - a\tan\alpha - \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} > h \iff \frac{ga^2\sec^2\alpha}{2u^2} < h - a\tan\alpha.$$

兩邊乘以正數 $2/(ga^2\sec^2\alpha)$，得

$$\frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha},$$

此即所求。

在 b 之前着地

球下降了 $2h$ 時便着地，即 $\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\alpha - 2h = 0$ 之時。這個關於 t 的二次方程（quadratic equation）的兩個根（roots）異號（兩根之積為 $-4h/g < 0$），而着地時間是正根：

$$T = \frac{-u\sin\alpha + \sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh}}{g}.$$

球在水平距離 b 之前着地，當且僅當 $uT\cos\alpha < b$，即 $T < \dfrac{b}{u\cos\alpha}$（因為 $u\cos\alpha > 0$）。兩邊乘以 g 再加上 $u\sin\alpha$，得

$$\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4gh} < \frac{bg}{u\cos\alpha} + u\sin\alpha,$$

這就是第二個結果。

最後的不等式

想一想 兩個涉及 u 的條件，怎樣才能得出一個不含 u 的條件？

第一個結果是 $1/u^2$ 的上界。如果能把第二個結果化為 $1/u^2$ 的下界，那麼無論 u 是多少，下界都必須小於上界。

第二個不等式兩邊皆為正（右邊為正，是因為 $\sin\alpha \geq 0$ 且 $\cos\alpha > 0$），所以兩邊平方後不等號方向不變：

$$u^2\sin^2\alpha + 4gh < \frac{b^2g^2}{u^2\cos^2\alpha} + 2bg\tan\alpha + u^2\sin^2\alpha.$$

$u^2\sin^2\alpha$ 項互相抵消，剩下 $2g(2h - b\tan\alpha) < b^2g^2\sec^2\alpha/u^2$，即

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2}.$$

與第一個結果合併，得

$$\frac{2(2h - b\tan\alpha)}{gb^2\sec^2\alpha} < \frac{1}{u^2} < \frac{2(h - a\tan\alpha)}{ga^2\sec^2\alpha}.$$

約去正因子 $2/(g\sec^2\alpha)$，再整條乘以 $a^2b^2 > 0$，

$$\begin{aligned} & a^2(2h - b\tan\alpha) < b^2(h - a\tan\alpha) \\ \iff\quad & (ab^2 - a^2b)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2) \\ \iff\quad & ab(b - a)\tan\alpha < h(b^2 - 2a^2). \end{aligned}$$

想一想 可以除以 $b - a$ 嗎？

可以，但正負號很重要。在 $x = a$ 處，球仍高於高度 $h > 0$，所以它的着地距離大於 a；而它又在 b 之前着地。因此 $b > a$，故 $ab(b - a) > 0$，相除後不等號方向保持不變：

$$\tan\alpha < \frac{h(b^2 - 2a^2)}{ab(b - a)}.$$

驗算

- 單位（units）：$a\tan\alpha$ 與 h 一樣是長度，ga^2/u^2 也是長度，所以 $1/u^2$ 的每個界的單位都是 $\mathrm{s}^2\,\mathrm{m}^{-2}$，理應如此。
- 當 $\alpha = 0$ 時，最終結果變成 $b^2 > 2a^2$。事實上，水平拋出的球到 $x = a$ 時下降少於 h；由於下降量與 x^2 成正比，到 $x = \sqrt{2}\,a$ 時它下降少於 $2h$，所以它在 $\sqrt{2}\,a$ 之外着地，故 $b > \sqrt{2}\,a$。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$u = 12$、$\alpha = 0.2$、$h = 1.5$，逐步模擬運動得着地距離為 6.7759，與 $uT\cos\alpha$ 吻合。在 20 000 個隨機情況中，首兩個不等式與「越過球網」及「在 b 之前着地」完全對應，而每當兩者同時成立時，最後的不等式亦成立。

常見錯誤

- 把初速度的鉛直分量當成 $+u\sin\alpha$：球是在水平線以下拋出的。
- 未檢查兩邊是否皆為正，便把不等式平方。
- 除以 $b-a$ 時沒有說明它為何是正數。

STEP 之外

最後一部分是在不等式之間消去參數（eliminating a parameter）的一個小例子：若 L 和 U 不含 u，則不等式組 $L<1/u^2<U$ 有解當且僅當 $L<U$。把同一想法系統地應用於大量線性不等式，便是 Fourier–Motzkin 消去法（Fourier–Motzkin elimination），它是線性規劃（linear programming）的基礎之一。至於力學方面，包括考慮空氣阻力、軌跡不再是拋物線（parabola）的拋射體（projectile）運動，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP II 2012，第 10 題

力學 • 摩擦力與力矩

> **STEP II 2012，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q10

關鍵思路

桿是圓形橫截面（cross-section）的一條弦（chord），所以每個法向反作用力（normal reaction）都直指圓心 O，而桿與每條半徑之間的夾角 ϕ 由幾何關係決定：$\cos\phi = a/r$。桿唯一可能的運動是繞 O 轉動，因此兩端會一同滑動，而我們也知道每一端的摩擦力（friction）朝哪個方向。對中點取力矩（moments）可消去重量，立即得出第一條關係式；再對 O 取力矩並分解（resolve）一次，便可求得 $\tan\theta$。

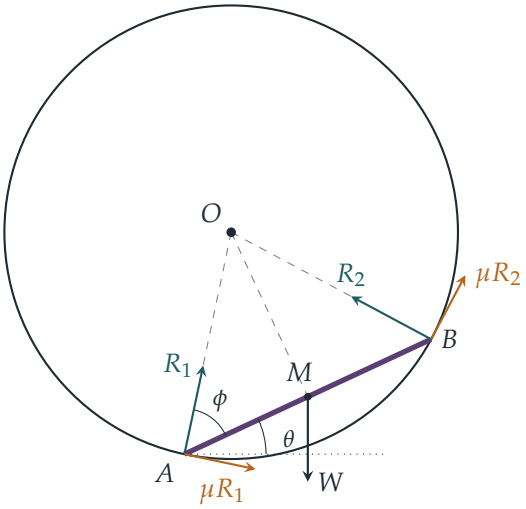
解答

建立模型

把桿視為重量為 W 的均勻剛性桿（uniform rigid rod），只在兩端 A（較低）及 B（較高）與粗糙圓柱接觸。設 O 為圓形橫截面的圓心，M 為 AB 的中點。由於 $OA = OB = r$，三角形 OAB 是等腰三角形（isosceles triangle），所以 OM 垂直於 AB，且

$$\cos\phi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\phi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \qquad OM = \sqrt{r^2 - a^2} = r\sin\phi,$$

其中 $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$。桿與半徑之間的夾角在兩端都是 ϕ。



想一想 每一端的摩擦力朝哪個方向？

兩端始終留在圓上，而 AB 的長度不變，所以 OM 的長度保持不變，並一直垂直於桿：唯一可能的運動是繞 O 的轉動。由於 $\theta \neq 0$，M 並不在 O 的正下方，因此重量對 O 有一個力矩，使桿轉向水平（在圖中為順時針：A 會沿壁向上移動，B 則向下移動）。反作用力都經過 O，所以只有摩擦力能抵抗這個轉動。兩端會一同移動，所以在即將滑動時，兩端的摩擦力都達到極限（limiting friction）：μR_1 和 μR_2 分別沿 A 和 B 的切線（tangent）方向作用，兩者相對於 O 都是逆時針方向，如圖所示。

R_1 與 R_2 之間的關係

對 M 取力矩，從而消去重量。R_1 的作用線（line of action）是 AO，它與 AM 成角 ϕ，所以它與 M 的垂直距離是 $a\sin\phi$。A 處的摩擦力沿切線作用，而切線垂直於 OA，所以它與 M 的距離是 $a\cos\phi$。B 處的情況相同。在圖中，R_1 使桿繞 M 順時針轉動，而 R_2 及兩個摩擦力則使桿逆時針轉動，所以

$$R_1\, a\sin\phi = R_2\, a\sin\phi + \mu R_1\, a\cos\phi + \mu R_2\, a\cos\phi.$$

除以 $a\cos\phi$ 並移項整理，得

$$\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi,$$

此即所求。特別地，$R_1 > R_2$：較低的一端壓得較用力。

求 $\tan\theta$

對 O 取力矩。反作用力都經過 O，而每個摩擦力的力臂都是 r。重量作用於 M，由於 OM 垂直於桿，它與鉛垂線成角 θ，所以 M 與 O 的水平距離是 $OM\sin\theta = r\sin\phi\sin\theta$。

因此

$$\mu(R_1+R_2)\,r = Wr\sin\phi\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \mu(R_1+R_2) = W\sin\phi\sin\theta. \tag{1}$$

沿垂直於桿的方向分解（指向 O 所在的一側）。每個反作用力與桿成角 ϕ，所以貢獻 $R_i\sin\phi$。每個摩擦力與這個垂直方向成角 ϕ；在 A 處它指離桿上 O 所在的一側，在 B 處則指向該側。重量貢獻 $-W\cos\theta$。所以

$$(R_1+R_2)\sin\phi - \mu(R_1-R_2)\cos\phi = W\cos\theta. \tag{2}$$

記 $S = R_1+R_2$。由第一個結果得 $R_1-R_2 = \mu S\cot\phi$，所以 (2) 變為

$$S\,\frac{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}{\sin\phi} = W\cos\theta,$$

而 (1) 表示 $\dfrac{\mu S}{\sin\phi} = W\sin\theta$。兩式相除（桿是傾斜而非鉛垂的，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 且 $\cos\theta\neq 0$），得

$$\tan\theta = \frac{\mu}{\sin^2\phi-\mu^2\cos^2\phi}.$$

分子分母同乘 r^2，並利用 $r^2\sin^2\phi = r^2-a^2$、$r^2\cos^2\phi = a^2$：

$$\tan\theta = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2-\mu^2a^2} = \frac{\mu r^2}{r^2-a^2(1+\mu^2)},$$

此即所求。

推導 $\lambda<\phi$

> ? **想一想** 手上只有一條等式，不等式從何而來？

來自正負號。桿與水平成角 θ，且 $\theta\neq 0$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\tan\theta>0$。由於 $\mu>0$，分子 μr^2 為正，所以分母也必須為正：

$$r^2\sin^2\phi-\mu^2r^2\cos^2\phi>0 \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\phi>\mu^2=\tan^2\lambda.$$

ϕ 和 λ 都在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內，而 tan 在此區間為正且遞增，所以由 $\tan\phi>\tan\lambda$ 得 $\lambda<\phi$。

驗算

- 光滑極限：當 $\mu\to 0$ 時，$\tan\theta\to 0$，所以光滑的桿只能水平靜止，且 M 在 O 的正下方。正確。
- 數值：取 $r=5$、$a=3$、$\mu=\frac{1}{2}$，得 $\tan\phi=\frac{4}{3}>\frac{1}{2}$，以及 $\tan\theta=\frac{12.5}{25-11.25}=\frac{10}{11}$。在這個角度（以及數以千計隨機選取的 r,a,μ）下，以向量形式解兩條力的方程

求 R_1, R_2，所得結果使對 O 的力矩為零，並在 10^{-12} 的誤差內滿足 $\mu(R_1 + R_2) = (R_1 - R_2)\tan\phi$。

- $\lambda < \phi$ 的物理意義：λ 是摩擦角（angle of friction）。若 $\lambda \geq \phi$，摩擦力足以在任何傾角下支撐着桿，所以桿永遠不會處於即將滑動的狀態，也就不存在這樣的 θ。

常見錯誤

- 把反作用力取為垂直於桿，而不是沿半徑方向：接觸面是圓柱，所以法線是圓柱的法線。
- 把兩個摩擦力沿桿取為相反方向。兩端繞 O 的轉動方向相同，所以兩端的摩擦力相對於 O 都是逆時針方向。
- 為求第一個結果而沿桿及垂直於桿分解：兩條方程都含有 W。對 M 取力矩則可避開它。

STEP 之外

推導 $\lambda < \phi$ 用的正是摩擦錐（friction cone）的概念：粗糙接觸點的總反作用力必須落在與法線成角 λ 的範圍之內。這裏桿在兩點接觸，問題在於兩個摩擦錐是否留有空間，讓三個力交於一點。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）更全面地討論摩擦力及剛體靜力學（rigid-body statics），其中包括需要先判斷即將發生的運動方向的題目。

詳細解答

STEP II 2012，第 11 題

力學 • 非彈性碰撞

STEP II 2012，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

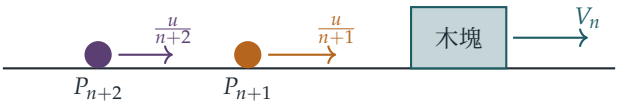
step.maths.org/questions/12-s2-q11

關鍵思路

留意每粒粒子所帶的動量（momentum）：質量 im 乘以速率 u/i 等於 mu，每粒粒子都一樣。因此吸收了 n 粒粒子之後，木塊的動量就是 nmu，而動量守恆（conservation of momentum）立即給出它的速率。下一粒粒子會否到達，就只是比較兩個速率；而能量損失則是「進入的動能減去最終的動能」。

解答

我們把木塊和各粒子視為在光滑表面上沿同一直線運動的質點，因此沒有水平方向的外力作用，每次碰撞中沿該直線的動量都守恆。由於粒子嵌入木塊，每次碰撞都是完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）。



第 n 次碰撞後的速率

粒子 P_i 的動量為 $im \cdot \frac{u}{i} = mu$，與 i 無關。

假設第 n 粒粒子與木塊相撞。那麼粒子 $P_1, \ldots, P_{n-1}$ 必定已在它之前相撞：各粒子按次序射出，而且每粒都比前一粒慢（u/i 遞減），所以較後的粒子永遠追不上較前的粒子，而任何粒子都不可能不撞上木塊而越過它。因此在第 n 次碰撞剛完成時，木塊包含了

$P_1, \ldots, P_n$，其質量為

$$km + m(1 + 2 + \cdots + n) = m\Big(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big).$$

木塊起初靜止，而每粒被吸收的粒子帶來動量 mu，所以由動量守恆，此時總動量為 nmu。因此第 n 次碰撞後木塊的速率 V_n 滿足

$$m\Big(k + \tfrac{1}{2}n(n+1)\Big)V_n = nmu \quad \Longrightarrow \quad V_n = \frac{2nu}{2k + n(n+1)},$$

此即所求。

當 $2k = N(N+1)$ 時的碰撞次數

經過 n 次碰撞後，木塊以恆定速率 V_n 運動（表面光滑）。位於木塊後方的粒子 P_{n+1} 能追上木塊，當且僅當它嚴格地較快：

$$\frac{u}{n+1} > \frac{2nu}{2k + n(n+1)} \iff 2k + n(n+1) > 2n(n+1) \iff 2k > n(n+1),$$

其中我們兩邊乘以正數 $n+1$ 及 $2k + n(n+1)$。（當 $n = 0$ 時，此式為 $2k > 0$，這是成立的：P_1 必定會撞上靜止的木塊。）

> **想一想** 一旦有一粒粒子追不上，較後的粒子還有可能撞上木塊嗎？

不可能。若 P_{n+1} 追不上木塊，木塊便永遠保持速率 $V_n \geq \frac{u}{n+1}$，而之後的每粒粒子都更慢，因為對 $i > n+1$ 有 $\frac{u}{i} < \frac{u}{n+1}$。所以發生碰撞的正好是 $P_1, P_2, \ldots$，直至第一粒追不上的粒子為止。

現在取 $2k = N(N+1)$。P_{n+1} 撞上木塊的條件變為 $n(n+1) < N(N+1)$，即 $n < N$，因為 $n(n+1)$ 在 $n \geq 0$ 時嚴格遞增。所以 $P_1, \ldots, P_N$ 全部撞上木塊，而 P_{N+1} 則不會：當 $n = N$ 時等號成立，而事實上

$$V_N = \frac{2Nu}{N(N+1) + N(N+1)} = \frac{u}{N+1},$$

恰好等於 P_{N+1} 的速率，因此它與木塊之間始終保持固定距離。故此恰好有 N 次碰撞。

損失的動能

只有 $P_1, \ldots, P_N$ 參與碰撞，所以總損失等於這些粒子射出時的動能（kinetic energy）（木塊起初靜止）減去木塊最終的動能。

起初，

$$\sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2}(im)\Big(\frac{u}{i}\Big)^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}.$$

最終木塊的質量為 $m\big(k+\frac{1}{2}N(N+1)\big) = mN(N+1)$，速率為 $\frac{u}{N+1}$，所以其動能為

$$\tfrac{1}{2}\,mN(N+1)\,\frac{u^2}{(N+1)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2\,\frac{N}{N+1} = \tfrac{1}{2}mu^2\Big(1-\frac{1}{N+1}\Big).$$

相減得

$$\begin{aligned}\text{損失的動能} &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{N+1}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

此即所求結果。

驗算

- $N=1$（$k=1$）：一粒質量為 m、速率為 u 的粒子撞上質量為 m 的木塊，得速率 $\frac{1}{2}u$，損失為 $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{4}mu^2 = \frac{1}{4}mu^2$，與 $\frac{1}{2}mu^2\cdot\frac{1}{2}$ 吻合。之後 P_2 的速率同樣是 $\frac{1}{2}u$，永遠不會到達。
- $N=2$（$k=3$）：公式給出損失 $\frac{1}{2}mu^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{12}mu^2 \approx 0.4167\,mu^2$。以分數精確地逐步模擬運動（位置及碰撞時刻），得到相同的數值、恰好兩次碰撞，以及與公式吻合的速率 V_n；模擬亦確認了對每個不超過 11 的 N，都恰好有 N 次碰撞，且損失公式成立。
- 單位：損失是質量乘以速率的平方，正是能量應有的單位。

常見錯誤

- 只用第 n 粒粒子的動量，忘記木塊已包含 $P_1,\ldots,P_{n-1}$（或忘記木塊本身的質量 km）。
- 數成 $N+1$ 次碰撞：P_{N+1} 的速率恰好與木塊相同，所以永遠不會接觸木塊。
- 把 $P_{N+1}, P_{N+2},\ldots$ 的動能計入損失；它們從不碰撞，所以並無損失任何動能。

STEP 之外

這木塊是一個在掃集物質時質量不斷增加的物體，與火箭、以及穿過雲層下落的雨點屬同類問題。對於這類變質量系統（variable-mass systems），我們把牛頓（Newton）第二定律以「動量的變化率等於力」的形式應用於整個系統，正如我們逐次碰撞所做的一樣。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）仔細地討論了變質量系統和火箭運動。

詳細解答

STEP II 2012，第 12 題

概率與統計 • 條件概率

> **STEP II 2012，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q12

關鍵思路

按一下開關會把它*切換*（toggle），所以泳池在走廊的開關最終處於「開」，要麼是它本來就開着而沒有被按，要麼是它本來關着而被按了一下。廚房那一半其實是障眼法（red herring）：一個以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」的開關，無論有沒有被切換，仍然以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」。第 (i) 部分得出一個條件概率（conditional probability）之後，七個星期一就構成一個二項（binomial）試驗，而「最可能的值是 3」就轉化為相鄰二項概率之間的一對不等式。

解答

第 (i) 部分

定義以下事件（events）：

- H：客人按了走廊中泳池的開關，故 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{4}$；
- A：走廊的開關一開始全部處於「開」，故 $\mathrm{P}(A) = p$；
- L：最終泳池的燈亮着。

客人是隨機選擇開關的，所以 H 與 A 互相獨立（independent）。

走廊。按過開關之後，泳池在走廊的開關處於「開」，當且僅當 A 發生而 H 不發生（它本來開着而沒有被碰），或 A 不發生而 H 發生（它本來關着而被切換成開）。所以

$$\mathrm{P}(\text{走廊的泳池開關最終為開}) = p \cdot \tfrac{3}{4} + (1-p) \cdot \tfrac{1}{4} = \frac{1+2p}{4}.$$

廚房。泳池在廚房的開關一開始以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」。若它沒有被按，它保持原狀；若它

被按，它就翻轉，而一個以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「關」的開關翻轉後以概率 $\frac{1}{2}$ 處於「開」。無論客人在廚房做甚麼，它最終處於「開」的概率都是 $\frac{1}{2}$。

廚房的開關以及客人在廚房的選擇，與走廊的一切都互相獨立，所以

$$\mathrm{P}(L) = \frac{1+2p}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+2p}{8}.$$

至於條件概率，$H \cap L$ 要求客人按了泳池在走廊的開關、該開關原本處於「關」（這樣按下去才會變成「開」），以及廚房的開關最終處於「開」：

$$\mathrm{P}(H \cap L) = \frac{1}{4} \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-p}{8}.$$

因此

$$\mathrm{P}(H \mid L) = \frac{(1-p)/8}{(1+2p)/8} = \frac{1-p}{1+2p},$$

得證。

第 (ii) 部分

記 $q = \dfrac{1-p}{1+2p}$。每個星期一我們都已知燈是亮着的，所以由第 (i) 部分，泳池在走廊的開關被按的概率是 q，而且每星期之間互相獨立（客人各自獨立行事，而每個星期一的初始狀態都是重新產生的）。所以開關被按的日數 X 滿足

$$X \sim \mathrm{B}(7, q).$$

我們也需要 $1-q$：

$$1-q = \frac{(1+2p)-(1-p)}{1+2p} = \frac{3p}{1+2p}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}.$$

（這裏 $p > 0$；若 $p = 0$，則 $q = 1$，而 $X = 7$ 必然成立，所以 3 不可能是最可能的值。）

想一想 怎樣把「3 是最可能的值」變成可以計算的東西？

比較相鄰的概率。對於 $1 \le k \le 7$，

$$\frac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k-1)} = \frac{\binom{7}{k} q^k (1-q)^{7-k}}{\binom{7}{k-1} q^{k-1} (1-q)^{8-k}} = \frac{8-k}{k} \cdot \frac{q}{1-q}.$$

因子 $\frac{8-k}{k}$ 隨 k 增大而嚴格遞減，所以當這個比值大於 1 時概率上升，一旦比值小於 1 概率便下降。因此 3 是（唯一的）最可能值，當且僅當概率由 $k=2$ 到 $k=3$ 上升，並由 $k=3$ 到 $k=4$ 下降：

$$\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)} = \frac{5}{3} \cdot \frac{q}{1-q} > 1 \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=3)} = \frac{4}{4} \cdot \frac{q}{1-q} < 1.$$

（單憑這兩個條件已足夠證明我們需要的方向：若 3 是最可能的值，則必然有 $\mathrm{P}(X = 3) > \mathrm{P}(X = 2)$ 及 $\mathrm{P}(X = 3) > \mathrm{P}(X = 4)$。）

代入 $\frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{3p}$，並在兩邊乘以正數 $3p$：

- 第二個條件給出 $1 - p < 3p$，即 $p > \frac{1}{4}$；
- 第一個條件給出 $\frac{5}{3}(1 - p) > 3p$，即 $5 - 5p > 9p$，所以 $p < \frac{5}{14}$。

因此 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$，得證。

驗算

- 當 $p = 0$ 時，走廊的開關全部處於「關」，所以燈要亮，泳池的開關就必須被按過：第 (i) 部分給出 $\mathrm{P}(H \mid L) = 1$，正如所料。當 $p = 1$ 時，燈要亮，該開關就必須沒有被按，而公式給出 0。
- 兩個端點分別對應 $q = \frac{1}{2}$（在 $p = \frac{1}{4}$）及 $q = \frac{3}{8}$（在 $p = \frac{5}{14}$）。當 $q = \frac{1}{2}$ 時，$\mathrm{B}(7, \frac{1}{2})$ 是對稱的，所以 3 與 4 打和；當 $q = \frac{3}{8}$ 時，$(n + 1)q = 3$，2 與 3 打和。所以嚴格不等式恰到好處。
- 我們以分數精確地列舉所有初始狀態及所有開關選擇，驗證了第 (i) 部分；又以步長 $\frac{1}{2800}$ 的網格取 p 值，計算 $\mathrm{B}(7, q)$ 的概率，驗證了第 (ii) 部分：唯一的眾數（mode）是 3，當且僅當 $\frac{1}{4} < p < \frac{5}{14}$。

常見錯誤

- 忘記按一個已經處於「開」的開關會把它關掉：走廊的計算需要考慮通往「開」的兩條途徑。
- 明明答案就是 $\frac{1}{2}$，卻把廚房分情況計算；分情況討論雖然無害，卻很容易出現算術錯誤。
- 在第 (ii) 部分用 p 而不是 q 作為二項分佈的參數：正是「已知燈亮着」這個條件，把按該開關的概率由 $\frac{1}{4}$ 改變為 q。

STEP 之外

第 (i) 部分正是貝葉斯定理（Bayes' theorem）的實際應用：一個觀察結果（燈亮着）把客人按了該開關的概率由 $\frac{1}{4}$ 更新為 $\frac{1-p}{1+2p}$。第 (ii) 部分則把這個想法倒過來運用，問未知參數 p 取甚麼值時，才會與給定的最可能結果相符，這正是統計推斷（statistical inference）

和最大似然估計（maximum likelihood estimation）的萌芽。用相鄰項之比來找出眾數的技巧，適用於許多離散分佈（泊松分佈（Poisson）、超幾何分佈（hypergeometric））。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對條件概率及這些分佈有詳盡的論述。

詳細解答

STEP II 2012，第 13 題

概率與統計 • 泊松過程的最近距離

> **STEP II 2012，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s2-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 12.19 節平面上的隨機點中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/spatial-poisson.html

關鍵思路

「最近的超級市場距離至少為 y」這件事，恰好等同於「以我們所在點為圓心、半徑為 y 的圓內沒有任何超級市場」，而泊松模型（Poisson model）直接給出這件事的概率。由此得到 Y 的累積分佈函數（cumulative distribution function），再求導便得到概率密度函數（probability density function）。之後各階矩（moments）都是高斯（Gauss）型積分（Gaussian-type integrals）：一次分部積分法（integration by parts）就能把 $\mathrm{E}(Y)$ 化為題目容許我們假設的積分，而代換（substitution）$u = y^2$ 則使 $\mathrm{E}(Y^2)$ 變得十分初等。

解答

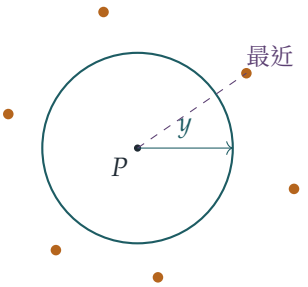
在整個解答中，我們把區域視為足夠大，可以忽略邊界效應（edge effects），因此對所有相關的 y，以所選點為圓心、半徑為 y 的圓都位於區域之內。

圓內沒有超級市場

設 N 為半徑為 y 的圓內超級市場的數目。該圓的面積為 πy^2，所以 $N \sim \mathrm{Po}(\pi k y^2)$，並且

$$\mathrm{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

Y 的分佈



設 P 為隨機選取的點。最近的超級市場與 P 的距離至少為 y，當且僅當以 P 為圓心、半徑為 y 的開圓內沒有超級市場。因此，對 $y \geq 0$，

$$\mathrm{P}(Y \geq y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}, \qquad \text{因此} \qquad \mathrm{P}(Y < y) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}.$$

（由於 Y 是連續隨機變量（random variable），寫 $<$ 還是 $\leq$ 並無分別。）這就是 Y 的累積分佈函數 $F(y)$；而當 $y < 0$ 時 $F(y) = 0$，因為距離不可能是負數。對 $y \geq 0$ 求導，

$$f(y) = F'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right) = 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2},$$

這正是所求的概率密度函數。簡單驗證一下：當 $y \to \infty$ 時 $F(y) \to 1$，所以 f 的積分等於 1。

期望值

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty y \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y.$$

想一想 指數函數前面有一個 y^2，我們怎樣才能利用題目給出的積分？

把被積函數拆成 $y \times \left(2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right)$：第二個因子正是 $-\mathrm{e}^{-\pi k y^2}$ 的導數。取 $u = y$ 進行分部積分，

$$\mathrm{E}(Y) = \left[-y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\, \mathrm{d}y,$$

因為當 $y \to \infty$ 時 $y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2} \to 0$（指數函數佔上風），而且它在 $y = 0$ 時等於零。現在把指數配成 $-\frac{1}{2}x^2$：設 $\pi k y^2 = \frac{1}{2}x^2$，即 $y = x/\sqrt{2\pi k}$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\sqrt{2\pi k}$。積分上下限仍然是 0 和 ∞，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

方差

計算 $\mathrm{E}(Y^2)$ 時完全不需要題目給出的積分，因為 y 的奇次冪讓我們可以代換 $u = \pi k y^2$，$\mathrm{d}u = 2\pi k y\,\mathrm{d}y$：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot 2\pi k y\, \mathrm{e}^{-\pi k y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{u}{\pi k}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k}\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi k},$$

這裏用到 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（可用分部積分求得，或者認出它是參數為 1 的指數分佈（exponential distribution）的期望值）。因此

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{1}{\pi k} - \frac{1}{4k} = \frac{4-\pi}{4\pi k},$$

正如所求。

驗算

- *標度。*若超級市場的密度變為 k 倍，長度應縮小 $\sqrt{k}$ 倍，所以 $\mathrm{E}(Y) \propto k^{-1/2}$，而 $\mathrm{Var}(Y) \propto k^{-1}$。兩個答案都符合這個形式。
- *正值。*$4 - \pi > 0$，所以方差是正數，理應如此。
- *數值。*取 $k = 1$，對概率密度函數作中點求積法（midpoint quadrature）得出 $\mathrm{E}(Y) = 0.5000$ 及 $\mathrm{Var}(Y) = 0.06831$，與 $(4-\pi)/(4\pi) \approx 0.06831$ 吻合。對某點周圍超級市場的泊松隨機散佈進行 10^5 次模擬，得出平均值 0.4996 及方差 0.0681。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{e}^{-\pi k y^2}$：這其實是距離 y 以內*沒有*超級市場的概率，即 $\mathrm{P}(Y \geq y)$。
- 代換時用了 $x = \sqrt{\pi k}\,y$ 而不是 $x = \sqrt{2\pi k}\,y$，結果得到 e^{-x^2} 而非題目假設的 $\mathrm{e}^{-x^2/2}$，答案相差 $\sqrt{2}$ 倍。

STEP 之外

這裏的超級市場構成平面上的一個*泊松點過程*（Poisson point process），這是「完全空間隨機性」（complete spatial randomness）的基本模型，可用於描述森林中的樹木、天上的星星以及流動電話發射站。Y 的分佈是*瑞利分佈*（Rayleigh distribution），它也是兩個分量均為獨立正態隨機變量的向量之長度所服從的分佈；而我們的分部積分所揭示的簡潔尾部公式 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y \geq y)\,\mathrm{d}y$，對任何非負隨機變量都成立。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了泊松過程以及這些尾部積分的概念。

詳細解答

STEP III 2012，第 1 題

純數學 • 非線性微分方程

> **STEP III 2012，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q1

關鍵思路

兩條微分方程（differential equation）都是二階（second order）而且非線性（non-linear）的，所以沒有現成的標準解法。竅門在於：只要適當地選取 n，$\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 中的括號就可以與每條方程的左邊吻合。這樣，方程便表示 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$ 等於某個可以立即積分的式子，從而得到一條可以分離變數（separation of variables）的一階（first-order）方程。

解答

預備結果

記 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 及 $y'' = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$。由乘積法則（product rule），並對 y^n 及 $(y')^2$ 使用鏈式法則（chain rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} &= ny^{n-1}y'\,(y')^2 + y^n \cdot 2y'y'' \\ &= y^{n-1}y'\big(n(y')^2 + 2yy''\big),\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

第 (i) 部分

左邊是 $(y')^2 + 2yy''$，即 $n = 1$ 時的括號。因此取 $z = y(y')^2$，則

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y'\big((y')^2 + 2yy''\big) = y'\sqrt{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right).$$

積分得 $y(y')^2 = \frac{2}{3}y^{3/2} + C$。在 $x = 0$ 時有 $y = 1$ 及 $y' = 0$，所以 $0 = \frac{2}{3} + C$，於是

$$y\,(y')^2 = \tfrac{2}{3}\big(y^{3/2} - 1\big). \qquad (*)$$

想一想 $(*)$ 只告訴我們 $(y')^2$。開平方時應取哪個符號？而 $y \equiv 1$（它使兩邊都等於零）又是否可能？

常數 $y \equiv 1$ 並不是原方程的解：代入會得到 $0 = 1$。事實上，把 $x = 0$ 代入方程得 $0 + 2y''(0) = 1$，所以 $y''(0) = \frac{1}{2} > 0$。因此 y 在 $x = 0$ 處取極小值，而對細小的 $x > 0$ 有 $y' > 0$。此外，方程在 $x \mapsto -x$ 下保持不變，所以解是偶函數（even function），我們可以只考慮 $x > 0$、$y' > 0$、$y > 1$ 的情況。

把 $(*)$ 乘以 y，取正平方根，再分離變數：

$$\frac{\sqrt{y}\,y'}{\sqrt{y^{3/2} - 1}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

代換 $w = y^{3/2} - 1$，則 $\mathrm{d}w = \frac{3}{2} y^{1/2}\,\mathrm{d}y$。左邊變成 $\frac{2}{3} w^{-1/2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$，由 $x = 0$（此時 $w = 0$）起積分，

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{w} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{9}{16} \cdot \tfrac{2}{3}\,x^2 = \tfrac{3}{8}x^2.$$

所以 $y^{3/2} = \frac{3}{8}x^2 + 1$，而由偶函數性質，此式對 $x < 0$ 亦成立。因此

$$y = \left(\tfrac{3}{8}x^2 + 1\right)^{2/3},$$

得證。

直接驗算：設 $u = \frac{3}{8}x^2 + 1$，則 $y' = \frac{2}{3}u^{-1/3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}xu^{-1/3}$，所以 $y(y')^2 = u^{2/3} \cdot \frac{1}{4}x^2u^{-2/3} = \frac{1}{4}x^2$。另一方面 $\frac{2}{3}(y^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{4}x^2$，所以 $(*)$ 成立。

第 (ii) 部分

現在左邊是 $(y')^2 - yy''$。我們需要 $n(y')^2 + 2yy''$ 是它的倍數，所以 $n : 2 = 1 : -1$，得 $n = -2$。取 $z = y^{-2}(y')^2$（這是可以的，因為 y 接近 1，故不為零），

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{-3}y'\left(-2(y')^2 + 2yy''\right) = -2y^{-3}y'\left((y')^2 - yy''\right) = -2y^{-3}y'\left(-y^2\right) = \frac{2y'}{y},$$

這裏用了方程的形式 $(y')^2 - yy'' = -y^2$。積分得 $z = 2\ln y + C$，而 $x = 0$ 給出 $0 = 0 + C$。所以

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 2\ln y.$$

設 $v = \ln y$，則 $v' = y'/y$，方程變成 $(v')^2 = 2v$，且 $v(0) = 0$。

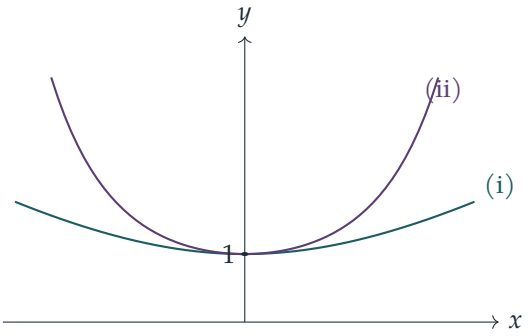
與第 (i) 部分一樣，$v \equiv 0$（即 $y \equiv 1$）滿足這條一階方程，卻不滿足原方程（代入會得到 $1 = 0$）。在 $x = 0$ 時，原方程給出 $0 - y''(0) + 1 = 0$，所以 $y''(0) = 1 > 0$。方程同樣在 $x \mapsto -x$ 下不變，所以我們取 $x > 0$，此時 $v' > 0$。於是

$$\frac{v'}{\sqrt{2v}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2v} = x \quad \Longrightarrow \quad v = \tfrac{1}{2}x^2,$$

而由偶函數性質，此式對所有 x 成立。因此

$$y = \mathrm{e}^{x^2/2}.$$

驗算：$y' = xy$ 及 $y'' = (1+x^2)y$，所以 $(y')^2 - yy'' + y^2 = y^2\left(x^2 - 1 - x^2 + 1\right) = 0$。此外 $y(0) = 1$ 及 $y'(0) = 0$。



驗算

- 兩個解都是偶函數，並在 $x = 0$ 處取極小值 1，與 $y''(0)$ 的值所預示的一致。
- 第 (ii) 部分有一條更快的途徑：直接把 $y = \mathrm{e}^v$ 代入方程，得 $y' = v'\mathrm{e}^v$ 及 $y'' = (v'' + (v')^2)\mathrm{e}^v$，所有項消去後只剩 $v'' = 1$。所以立即得 $v = \frac{1}{2}x^2$。
- 數值上，以龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）由 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ 求解 (i)，得 $y(2) \approx 1.842016$，與 $(\frac{5}{2})^{2/3}$ 吻合。對 (ii) 則得 $y(1) \approx 1.648721 = \mathrm{e}^{1/2}$。

常見錯誤

- 忘記 z 的積分常數（constant of integration）。在第 (i) 部分，初始條件（initial conditions）使它不為零：$C = -\frac{2}{3}$。
- 在第 (ii) 部分照搬類比而選 $n = 1$。$(y')^2$ 與 yy'' 的係數之比必須吻合，這就迫使 $n = -2$。
- 從一階方程接受 $y \equiv 1$，卻沒有用原方程加以檢驗。

STEP 之外

這裏的方法是二階方程的積分因子（integrating factor）。把 $(y')^2 + 2yy''$ 乘以 y'，就變成一個恰當導數（exact derivative），正如把 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 乘以 $\dot{x}$ 便得到能量守恆（conser-

vation of energy）一樣。像這兩條不顯含 x 的方程，總可以把 $p = y'$ 看成 y 的函數，從而降為一階。對 $y \equiv 1$ 的顧慮，讓我們窺見解的非唯一性（non-uniqueness）：$v' = \sqrt{2v}$ 在 $v = 0$ 處不滿足利普希茨條件（Lipschitz condition）。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋了降階法（reduction of order）以及存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）。

詳細解答

STEP III 2012，第 2 題

純數學 • 無窮乘積與級數

STEP III 2012，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q2

關鍵思路

第 (i) 部分的乘積可以利用平方差(difference of two squares)逐個括號地合併，因此會像伸縮（telescoping）一樣化簡成非常簡單的式子。把 $\frac{1}{1-x}$ 寫成無窮乘積（infinite product）之後，取對數（logarithm）就把乘積變成和，再把這個和逐項微分（differentiate term by term），便得到分式組成的級數（series）。第 (ii) 部分是同一技巧的變奏：$1+x+x^2$ 是兩個 $1-t$ 形式的式子之商，所以第 (i) 部分的結果可以分別應用到兩者身上。

解答

全文假設 $|x|<1$，而且按題目所允許，我們不理會收斂（convergence）的問題。

第 (i) 部分

從左邊開始合併括號，每次都用 $(1-a)(1+a)=1-a^2$：

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)&=1-x^2,\\(1-x^2)(1+x^2)&=1-x^4,\\(1-x^4)(1+x^4)&=1-x^8,\end{aligned}$$

如此類推。每一步都令冪次加倍，而最後一個括號 $1+x^{2^n}$ 把 $1-x^{2^n}$ 變成 $1-x^{2^{n+1}}$。所以

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}.$$

由於 $x\neq 1$，我們可以除以 $1-x$：

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

移項後即得題目所要求的 $\frac{1}{1-x}$ 的表達式。

現在令 $n \to \infty$。因為 $|x| < 1$，所以 $x^{2^{n+1}} \to 0$，餘項消失，於是

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{r=0}^{\infty}(1+x^{2^r}).$$

每個因子都是正數（因為 $x^{2^r} > -1$），$1-x$ 亦然，所以可以取對數。乘積的對數等於各對數之和：

$$-\ln(1-x) = \sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^r}\right),$$

兩邊乘以 -1 即得所求結果。

想一想 怎樣由對數之和得到分式之和？

兩邊對 x 求導。根據連鎖法則（chain rule），$\ln(1+x^{2^r})$ 的導數（derivative）是

$$\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}}.$$

左邊則有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln(1-x)\right) = \frac{1}{1-x}$。逐項微分（這正是題目叫我們不必理會的收斂問題）得

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}}{1+x^{2^r}} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \cdots,$$

其中列出的是 $r = 0, 1, 2$ 的項。這就是所要求的級數。

第 (ii) 部分

左邊是 $\ln(1+x+x^2)$ 的導數，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = 1+2x$。因此我們要為 $1+x+x^2$ 找一個對數和的表達式，而因式分解 $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ 正好提供了一個：

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x).$$

由於 $|x^3| < 1$ 同樣成立，第 (i) 部分的對數結果在以 x^3 代替 x 後仍然成立。記 $y_r = x^{2^r}$，使得 $(x^3)^{2^r} = y_r^3$，則

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+y_r^3\right) + \sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1+y_r\right) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\frac{1+y_r^3}{1+y_r}.$$

立方和（sum of cubes）可分解為 $1+y^3 = (1+y)(1-y+y^2)$，所以每個分式都等於 $1-y_r+y_r^2$，從而

$$\ln(1+x+x^2) = -\sum_{r=0}^{\infty}\ln\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right).$$

（每個 $1-y+y^2 = (y-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 都是正數，所以這些對數都有意義。）

想一想 求導時，負號到哪裏去了？

連鎖法則給出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right)=\frac{-2^r x^{2^r-1}+2^{r+1}x^{2^{r+1}-1}}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}=-\frac{2^r x^{2^r-1}\left(1-2x^{2^r}\right)}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}},$$

而這個負號正好抵消和式前面的負號。兩邊逐項微分，得

$$\frac{1+2x}{1+x+x^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r x^{2^r-1}\left(1-2x^{2^r}\right)}{1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}}.$$

首三項為

$$\begin{aligned}
r=0:&\quad \frac{1-2x}{1-x+x^2},\\
r=1:&\quad \frac{2x(1-2x^2)}{1-x^2+x^4}=\frac{2x-4x^3}{1-x^2+x^4},\\
r=2:&\quad \frac{4x^3(1-2x^4)}{1-x^4+x^8}=\frac{4x^3-8x^7}{1-x^4+x^8},
\end{aligned}$$

這正是題目要我們證明的級數。

*另一途徑。*恆等式 $(1+y+y^2)(1-y+y^2)=1+y^2+y^4$ 直接為 $1+x+x^2$ 提供一個伸縮乘積，就像第 (i) 部分那個一樣：$1+x+x^2=\left(1+x^{2^{n+1}}+x^{2^{n+2}}\right)/\prod_{r=0}^{n}\left(1-x^{2^r}+x^{2^{r+1}}\right)$，而分子趨向 1。

驗算

- 代入 $x=0$：每條級數的兩邊都等於 1。
- 當 $x=\frac{1}{2}$ 時，第 (ii) 部分的左邊是 $\frac{2}{7/4}=\frac{8}{7}\approx 1.142857$。右邊首四項之和為 1.142369，而由於冪 x^{2^r} 縮小得極快，誤差也縮小得極快。
- 我們用分數精確驗證了伸縮後的乘積，並取 30 項，在 $(-0.95,0.95)$ 內隨機抽取 1000 個 x，以數值方法驗證了兩條級數及各對數恆等式。

常見錯誤

- 用連鎖法則時漏掉因子：x^{2^r} 的導數是 $2^r x^{2^r-1}$，而不是 $2^r x^{2^r}$。
- 第 (ii) 部分的整體符號弄錯：$1-y+y^2$ 的導數是 $-1+2y$，正是這個負號抵消了和式前面的負號。

STEP 之外

乘積 $\prod(1+x^{2^r})$ 表明每個正整數都可以唯一地寫成若干個不同的 2 的冪之和，這就是以生成函數（generating function）表達的二進制（binary）記數法。「不理會收斂」其實掩蓋了一些真正的問題：甚麼時候可以對無窮乘積取對數？甚麼時候可以把級數逐項微分？大學第一個分析（analysis）課程會用一致收斂（uniform convergence）來回答這些問題，而在 $|x| \leq c < 1$ 上，這裏的一切都是一致收斂的。清晰的講解可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

詳細解答

STEP III 2012，第 3 題

純數學 • 相切曲線與四次方程

STEP III 2012，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q3

關鍵思路

把 $y = 4 - x^2$ 代入第二條方程，得到一條關於 x 的四次方程（quartic），它的根就是兩曲線交點的 x 坐標。「相切」即是有一個重根（repeated root）。與其把 m 和 k 當作未知數，不如用切點的 x 坐標 a 來標記一切：這樣 m、k 以及其餘所有交點，結果都是 a 的簡單函數。由此可以準確知道四幅草圖各自的樣子，而第 (ii) 部分就是 $m = 12$ 的特殊情況。

解答

準備工作：兩曲線可在哪裏相切？

把兩條曲線記作 $C_1\colon y = 4 - x^2$ 和 $C_2\colon mx = k - y^2$。C_1 是大家熟悉的開口向下的拋物線（parabola），經過 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, 4)$。C_2 即 $x = (k - y^2)/m$：這是一條關於 x 軸對稱、開口向左（因為 $m > 0$）的拋物線，頂點（vertex）為 $(k/m, 0)$。當 $k > 0$ 時，它與 y 軸相交於 $(0, \pm\sqrt{k})$；當 $k < 0$ 時，它與 y 軸完全不相交。

C_1 上每一點都是 $(x, 4 - x^2)$，因此它在 C_2 上當且僅當

$$F(x) = x^4 - 8x^2 + mx + 16 - k = 0,$$

因為 $(4 - x^2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$。

? **想一想** 為甚麼「相切」意味着 F 有重根？

在公共點上，C_1 的方向為 $(1, -2x)$，而 C_2（即 $mx + y^2$ 的等值曲線（level curve））的法向量（normal）為 $(m, 2y)$。當方向與法向量垂直時，兩曲線相切：$m - 4xy = 0$，即 $m - 4x(4 - x^2) = 0$。而 $F'(x) = 4x^3 - 16x + m$ 正好就是這個式子。所以兩曲線在 $x = a$

相切，當且僅當 $F(a) = F'(a) = 0$，即重根。

由 $F'(a) = 0$ 得 $m = 4a(4 - a^2)$。代入 $F(a) = 0$，

$$k = a^4 - 8a^2 + 4a^2(4 - a^2) + 16 = -3a^4 + 8a^2 + 16 = (4 - a^2)(3a^2 + 4),$$

因此

$$\frac{k}{m} = \frac{3a^2 + 4}{4a}.$$

由於 $m > 0$，我們需要 $0 < a < 2$ 或 $a < -2$。把二重因式除去，

$$F(x) = (x - a)^2\left(x^2 + 2ax + 3a^2 - 8\right),$$

這可以展開驗證：x^3 項互相抵消，x^2 的係數是 $3a^2 - 8 - 4a^2 + a^2 = -8$，$x$ 的係數是 $2a^3 - 2a(3a^2 - 8) = 4a(4 - a^2) = m$，常數項是 $a^2(3a^2 - 8) = 16 - k$。這個二次因式的判別式（discriminant）為 $8(4 - a^2)$，所以只有當 $0 < a < 2$ 時才有其他交點，它們位於

$$x_\pm = -a \pm \sqrt{8 - 2a^2}.$$

現在可以按 a 把四種情況分類：

- $k < 0$ 當且僅當 $a^2 > 4$，故 $a < -2$。
- 當 $0 < a < 2$ 時，$k - 16 = a^2(8 - 3a^2)$，故 $k > 16$ 當且僅當 $a < \sqrt{8/3}$。
- 當 $0 < a < 2$ 時，$\frac{k}{m} < 2$ 當且僅當 $3a^2 - 8a + 4 < 0$，即 $(3a - 2)(a - 2) < 0$，即 $a > \frac{2}{3}$。

所以 (a) 對應 $a < -2$，(c) 對應 $0 < a < \frac{2}{3}$，(d) 對應 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$，(b) 對應 $\sqrt{8/3} < a < 2$。（沒有任何相切的情形同時滿足 $0 < k < 16$ 和 $k/m > 2$，這就是題目沒有列出這種情況的原因。）

第 (i) 部分

在每種情況下，C_1 與坐標軸的交點都是 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, 4)$；C_2 與坐標軸的交點是 $(k/m, 0)$，當 $k > 0$ 時還有 $(0, \pm\sqrt{k})$。

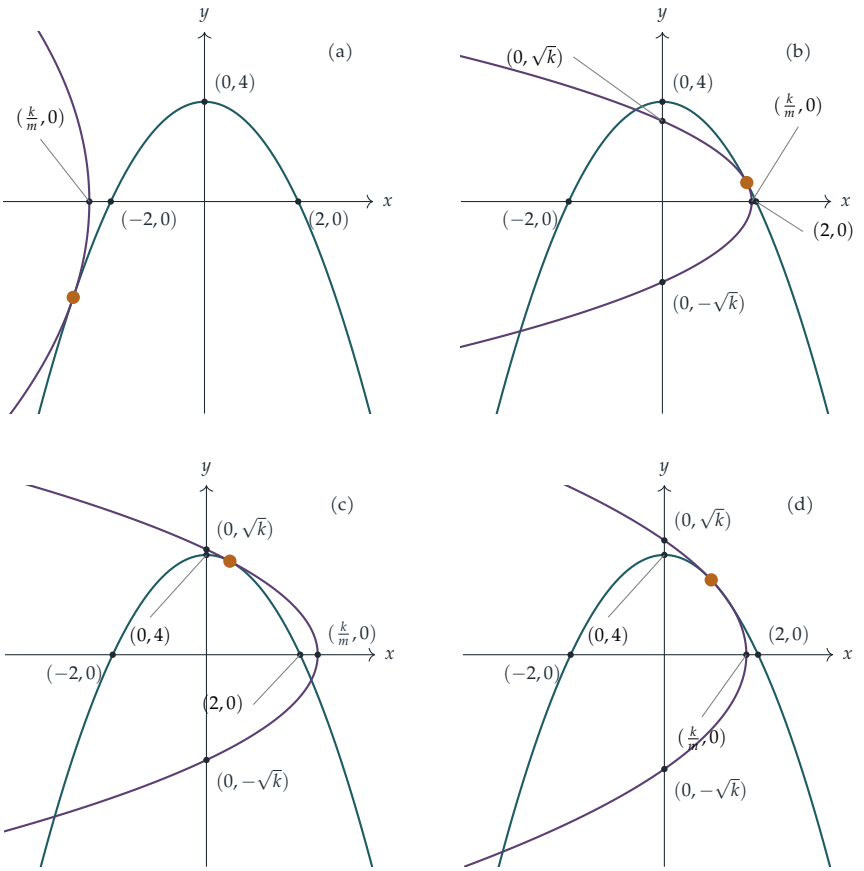
(a) 這裏 $a < -2$，所以兩曲線在第三象限（quadrant）的 $(a, 4 - a^2)$ 相切，而且在其他地方沒有交點。頂點位於 $k/m = -(3a^2 + 4)/(4|a|)$，它小於 -2，因為 $(3|a| - 2)(|a| - 2) > 0$。所以 C_2 整條位於 $(-2, 0)$ 的左方，它的下半支貼靠在 C_1 的左支上。

(b) 現在 $\sqrt{8/3} < a < 2$，所以切點在第一象限，靠近 $(2, 0)$。頂點滿足 $\sqrt{3} \leq k/m < 2$（由算術–幾何平均不等式（AM–GM），$3a^2 + 4 \geq 4\sqrt{3}\,a$），而且 $\sqrt{k} < 4$，所以 C_2 的頂點和兩個 y 截距都位於 C_1 之下。上半支從下方與 C_1 相切，然後在 x_+ 與它相交，其中 $-2 < x_+ < 0$（第二象限中的一點）。下半支在 $x_- < -2$ 與 C_1 相交，位於第三象限。

(c) 這裏 $0 < a < \frac{2}{3}$。頂點在 $(2,0)$ 的右方，而且 $\sqrt{k} > 4$，所以 C_2 繞過 C_1 的頂部，在第一象限從外側與它相切。此外 $x_+ > 2$，因為 $\sqrt{8-2a^2} > 2+a \iff (3a-2)(a+2) < 0$，而 $x_- < -2$。所以下半支在第四象限與 C_1 相交，在第三象限再相交一次。

(d) 這裏 $\frac{2}{3} < a < \sqrt{8/3}$。頂點在 0 與 2 之間，位於 C_1 之下，但 $\sqrt{k} > 4$，所以上半支從 $(0,4)$ 上方經過。它在第一象限與 C_1 相切，並且也在第一象限於 $x_+ \in (0,2)$ 與它相交（因為 $x_+ > 0 \iff a^2 < \frac{8}{3}$）。下半支在 $x_- < -2$ 相交。

對 $0 < a < 2$，每種情況都有 $x_- < -2$，因為 $a + \sqrt{8-2a^2} > 2$（把 $\sqrt{8-2a^2} > 2-a$ 兩邊平方即可）。各草圖分別取 $a = -2.8,\ 1.8,\ 0.5,\ 1$。C_1 為青色，C_2 為梅紫色，切點為琥珀色。



第 (ii) 部分

當 $m = 12$ 時，把 $y = 4 - x^2$ 代入 $12x = k - y^2$，得 $12x = k - 16 + 8x^2 - x^4$，即

$$x^4 - 8x^2 + 12x + 16 - k = 0,$$

正如所求。

在切點 $x=a$，這條四次方程有重根（見上面的方框），所以它的導數在該處也等於零：

$$4a^3-16a+12=0 \quad\Longrightarrow\quad a^3-4a+3=0.$$

由於 $a=1$ 是一個根，$a^3-4a+3=(a-1)(a^2+a-3)$，因此

$$a=1 \qquad \text{或} \qquad a=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

為求 k，在四次方程中代入 $x=a$，並利用 $a^3=4a-3$ 化簡，從而 $a^4=4a^2-3a$：

$$k=a^4-8a^2+12a+16=(4a^2-3a)-8a^2+12a+16=-4a^2+9a+16.$$

現在逐一看三種情況：

- $a=1$：$k=21$，所以 $k>16$ 且 $k/m=\frac{7}{4}<2$。這是情況 **(d)**。
- $a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{13})\approx 1.303$：這裏 $a^2=3-a$，所以 $k=-4(3-a)+9a+16=13a+4=\frac{1}{2}(13\sqrt{13}-5)\approx 20.94$。它大於 16，因為 $13\sqrt{13}>37$（平方：$2197>1369$）；它小於 24，因為 $13\sqrt{13}<53$（$2197<2809$）。所以 $k>16$ 且 $k/m<2$，又是情況 **(d)**。
- $a=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{13})\approx -2.303$：$k=13a+4=-\frac{1}{2}(5+13\sqrt{13})\approx -25.94<0$。這是情況 **(a)**。

所以只會出現草圖 (a) 和 (d)。這與上面按 a 所作的分類一致：1 和 1.303 位於 $(\frac{2}{3},\sqrt{8/3})\approx(0.667,1.633)$ 之內，而 $-2.303<-2$。注意 $a^3-4a+3=0$ 其實就是 $m=4a(4-a^2)$ 取 $m=12$ 的情形。

兩幅 (d) 圖略有不同。對 $a=1$，其他交點為 $x=-1\pm\sqrt{6}$；在 $x\approx 1.45$ 的交點位於切點的*右方*，上半支從上方與 C_1 相切（如草圖所示）。對 $a\approx 1.303$，交點在 $x\approx 0.84$，位於切點左方，上半支從下方相切。

驗算

- 當 $m=12$、$k=21$ 時，四次式可因式分解為 $(x-1)^2(x^2+2x-5)$。展開得 $x^4-8x^2+12x-5$，正是 $16-k=-5$ 時的四次式。
- 在 $(1,3)$，C_1 的斜率為 -2；對 $12x=21-y^2$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-6/y=-2$。所以兩曲線確實在該處相切。
- 數值上，對 $(0,2)$ 內及 $a<-2$ 的隨機 a，公式 $m=4a(4-a^2)$ 和 $k=(4-a^2)(3a^2+4)$ 均令 $F(a)$ 和 $F'(a)$ 等於零，而各情況的分界正好落在 $a=\frac{2}{3}$ 和 $a=\sqrt{8/3}$。對 $a\approx 1.3028$，求根程序找到其他交點位於 $x\approx 0.8433$ 和 $x\approx -3.4488$，與 $x_\pm$ 的預測相符。

常見錯誤

- 要求四次方程只有一個根。「恰好相切一次」並不排除其他交點：在 $m = 12$ 的情況 (d) 中就有兩個。
- 把 C_2 畫成開口向右。當 $m > 0$ 時，$x = (k - y^2)/m$ 隨 $|y|$ 增大而減小。
- 在 (a) 中，忘記 C_2 沒有 y 截距，或把它的頂點放在 -2 與 0 之間。頂點必須在 -2 的左方。

STEP 之外

用切點 a 來標記各種構形，讓我們初步窺見判別式和包絡線（envelope）。使 F 有重根的 (m, k) 所組成的集合，就是曲線 $\big(4a(4 - a^2),\ (4 - a^2)(3a^2 + 4)\big)$；穿越這條曲線時，實交點的數目會改變二。這是平面曲線的代數幾何（algebraic geometry）的起點，也是奇點理論（singularity theory，又稱「突變理論」（catastrophe theory））的起點，後者用來研究解如何隨參數變化。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）收錄了許多同類風格、STEP 式的曲線題目。

詳細解答

STEP III 2012，第 4 題

純數學 • 無窮級數求和

STEP III 2012，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q4

關鍵思路

一切都建基於兩個標準級數（series）：$\sum x^n/n! = \mathrm{e}^x$ 及 $\sum x^n/n = -\ln(1-x)$。在第 (i) 部分，竅門是把每個關於 n 的多項式（polynomial）改寫成能與 $n!$ 相消的形式，即使用 $n(n-1)$ 和 $n(n-1)(n-2)$ 這類乘積，而不是 n 的冪。在第 (ii) 部分，部分分式（partial fractions）把那個棘手的有理因子拆成 $1/(n+k)$ 形式的若干項，而每一項都是一個平移了的對數級數。

解答

第 (i) 部分

兩個事實便足以完成所有工作。第一，$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = \mathrm{e}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

第二，對任何整數 $k \geq 1$，當 $n < k$ 時，項 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n!$ 等於零；當 $n \geq k$ 時，它等於 $1/(n-k)!$。所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \mathrm{e} \qquad (k \geq 1). \tag{$*$}$$

這裏所有級數都絕對收斂（absolutely converge）（每一個都是關於 n 的多項式除以 $n!$），因此我們可以隨意把它們拆開再重新組合。

第一個和。 由於 $n+1=n+1$，利用 $(*)$ 並取 $k=1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=2\mathrm{e}-1,$$

正如所求。

第二個和。 我們寫成 $(n+1)^2=n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$。於是由 $(*)$ 取 $k=2$ 及 $k=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}+(\mathrm{e}-1)=5\mathrm{e}-1,$$

正如所求。

第三個和。

? **想一想** 怎樣把 $(2n-1)^3$ 化成下降乘積 $n(n-1)(n-2)$、$n(n-1)$、n？

展開得 $(2n-1)^3=8n^3-12n^2+6n-1$。接着我們利用

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n,\qquad n^2=n(n-1)+n.$$

你可以展開右邊來驗證，或者代入 $n=0,1,2,3$ 檢查。代入後，

$$\begin{aligned}(2n-1)^3&=8\big[n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n\big]-12\big[n(n-1)+n\big]+6n-1\\&=8\,n(n-1)(n-2)+12\,n(n-1)+2n-1.\end{aligned}$$

（快速驗證：當 $n=1$ 時兩邊都是 1，當 $n=2$ 時兩邊都是 27。）現在由 $(*)$ 取 $k=3,2,1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^3}{n!}=8\mathrm{e}+12\mathrm{e}+2\mathrm{e}-(\mathrm{e}-1)=21\mathrm{e}+1.$$

第 (ii) 部分

部分分式。 分子與分母的次數相同，所以先做除法：

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{3n+1}{(n+1)(n+2)}.$$

設 $\dfrac{3n+1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n+1}+\dfrac{B}{n+2}$，利用遮蓋法（cover-up rule）得 $A=\dfrac{-2}{1}=-2$（取 $n=-1$）及 $B=\dfrac{-5}{-1}=5$（取 $n=-2$）。因此

$$\frac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{2}{n+1}-\frac{5}{n+2}.$$

三個部分。 我們令 $x=\frac{1}{2}$，並利用對於 $|x|<1$ 成立的 $-\ln(1-x)=\sum_{m=1}^{\infty} x^m/m$。下面三個級數各自收斂（各項縮小的速度至少與 2^{-n} 一樣快），所以把和拆開是合理的。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)}{x} = 2\ln 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = \frac{-\ln(1-x)-x}{x^2} = 4\left(\ln 2-\tfrac{1}{2}\right) = 4\ln 2-2.$$

在第二行和第三行中，我們分別令 $m=n+1$ 及 $m=n+2$。第三行是完整的對數級數減去其 $m=1$ 項，即 x。

> ? **想一想** 為甚麼第三部分需要額外的 $-x$？

平移 $m=n+2$ 令求和由 $m=2$ 開始，所以這個級數是缺了首項的 $-\ln(1-x)$。忘記這一點是這裏最容易出錯的地方。

合併。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+1)2^{-n}}{(n+1)(n+2)} = 2+2(2\ln 2)-5(4\ln 2-2) = 12-16\ln 2.$$

驗算

- 計算至 $n=60$ 的部分和（partial sums），(i) 中三個和分別得 4.436564、12.591409 及 58.083918。它們在機器精度內與 $2e-1$、$5e-1$ 及 $21e+1$ 吻合。
- 在 (ii) 中，$12-16\ln 2\approx 0.909645$，與部分和一致。首幾項是 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{5}{48}$、$\frac{1}{16}$，所以總和略小於 1 是合理的。
- (ii) 的答案必須是正數，而它的確是：$16\ln 2\approx 11.09<12$。

常見錯誤

- 使用 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n! = e$，忘記了缺少 $n=0$ 這一項。
- 把 $\sum n^2/n!$ 寫成 $\sum n/(n-1)!$ 便停下來。你仍須拆開 $n=(n-1)+1$。
- 在 (ii) 中，為 $\sum x^n/(n+2)$ 平移指標時漏掉了 $-x$。

STEP 之外

下降乘積 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 稱為下降階乘（falling factorials），而用它們來表示多項式就要用到第二類斯特林數（Stirling numbers of the second kind）。$(*)$ 中的和表明，平均值為 1 的泊松分佈（Poisson distribution）的第 k 階階乘矩（factorial moment）等於 1。正因如此，例如 $\sum n^k/n!$ 等於 e 乘以第 k 個貝爾數（Bell number）。這裏的重新排列之所以合理，是基於絕對收斂，這是大學一年級分析（analysis）的一個重要主題：參見 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。至於概率方面，參見 Blitzstein 與 Hwang，*Introduction to Probability*（《概率導論》）。

詳細解答

STEP III 2012，第 5 題

純數學 • 圓錐曲線上的有理點

STEP III 2012，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q5

關鍵思路

(i)(b) 中的恆等式（identity）其實是一個經過偽裝的旋轉（rotation）：點 $(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta,\ \sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)$ 正是把點 $(1, -\sqrt{m})$ 旋轉角度 θ 後所得的點，因此它仍然位於半徑為 $\sqrt{1+m}$ 的圓上。若 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都是有理數（例如 (i)(a) 中得到的 $\frac{3}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$），這個旋轉就會把一個「好」點變成另一個「好」點。第 (ii) 部分的所有內容都是同一個技巧，只是從一個合適的整數點出發；至於雙曲線（hyperbola），我們則把旋轉換成它的雙曲版本。

解答

第 (i) 部分

(a) 點 $(1,0)$ 是 $x^2 + y^2 = 1$ 上的一個整數有理點（integer rational point）。要找非整數的有理點，我們利用 3, 4, 5 三角形：$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$，所以 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 符合要求，而且兩個坐標都不是整數。

(b) 點 $(1,1)$ 是 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一個整數有理點。

展開後，交叉項（cross terms）為 $+2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$ 和 $-2\sqrt{m}\sin\theta\cos\theta$，兩者互相抵消，所以

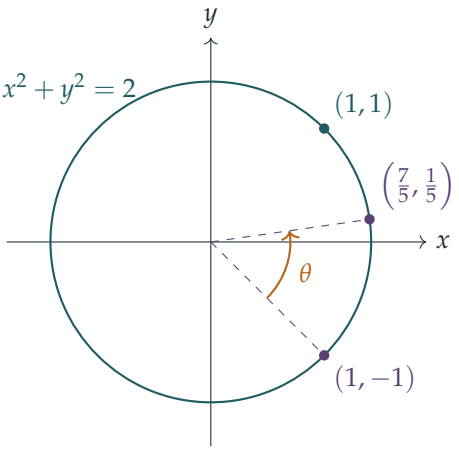
$$\begin{aligned}(\cos\theta + \sqrt{m}\sin\theta)^2 + (\sin\theta - \sqrt{m}\cos\theta)^2 &= \cos^2\theta + m\sin^2\theta + \sin^2\theta + m\cos^2\theta \\ &= (1+m)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1 + m.\end{aligned}$$

取 $m = 1$，使右方等於 2，並選取 θ 使 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$（這是可行的，因為 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

位於單位圓（unit circle）上）。於是

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{7}{5}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5} = \tfrac{1}{5}$$

滿足 $x^2 + y^2 = 2$；事實上 $\frac{49+1}{25} = 2$。所以 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 是 $x^2 + y^2 = 2$ 上的一個非整數有理點。



上圖顯示了箇中過程：把 $(1, -1)$ 沿逆時針方向旋轉 θ（其中 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$），便落在 $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ 上。

第 (ii) 部分

(a) 由於 $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$，點 $(1, \sqrt{2})$，即 $p = 1$、$q = 0$、$r = 0$、$s = 1$，是 $x^2 + y^2 = 3$ 上的一個整數 2-有理點。

要找非整數的點，就用 (i)(b) 的恆等式，取 $m = 2$ 使 $1 + m = 3$，並再次取 $\cos\theta = \frac{3}{5}$、$\sin\theta = \frac{4}{5}$：

$$x = \tfrac{3}{5} + \tfrac{4}{5}\sqrt{2}, \qquad y = \tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

這裏 $p = \frac{3}{5}$、$q = \frac{4}{5}$、$r = \frac{4}{5}$、$s = -\frac{3}{5}$，全都不是整數，而由恆等式可知 $x^2 + y^2 = 3$。直接驗證：$x^2 = \frac{9+32+24\sqrt{2}}{25}$，$y^2 = \frac{16+18-24\sqrt{2}}{25}$，兩者相加得 $\frac{75}{25} = 3$。

> ? **想一想** 恆等式只給出 $1 + m$，而 m 又必須與 $\sqrt{2}$ 有關，那麼我們怎樣才能得到 11？

把起點放大。恆等式源自旋轉 $(1, -\sqrt{m})$；我們同樣可以旋轉任何點 $(a, -b\sqrt{2})$。交叉項同樣會抵消，得到

$$(a\cos\theta + b\sqrt{2}\sin\theta)^2 + (a\sin\theta - b\sqrt{2}\cos\theta)^2 = (a^2 + 2b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + 2b^2.$$

所以我們需要滿足 $a^2+2b^2=11$ 的整數，而 $a=3$、$b=1$ 正好可行（$9+2=11$）。換句話說，我們從 $x^2+y^2=11$ 上的整數 2-有理點 $(3,\sqrt{2})$ 出發。

(b) 取 $a=3$、$b=1$、$\cos\theta=\frac{3}{5}$、$\sin\theta=\frac{4}{5}$：

$$x=\tfrac{9}{5}+\tfrac{4}{5}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{12}{5}-\tfrac{3}{5}\sqrt{2}.$$

所以 $p=\frac{9}{5}$、$q=\frac{4}{5}$、$r=\frac{12}{5}$、$s=-\frac{3}{5}$，全都不是整數，且 $x^2+y^2=11$。直接驗證：$x^2=\frac{81+32+72\sqrt{2}}{25}$，$y^2=\frac{144+18-72\sqrt{2}}{25}$，兩者相加得 $\frac{275}{25}=11$。

(c) 對於雙曲線，我們需要一個保持 x^2-y^2 而非 x^2+y^2 不變的「旋轉」。若 $c^2-s^2=1$（可以想像 $c=\cosh t$、$s=\sinh t$），則

$$\begin{aligned}(ac+b\sqrt{2}\,s)^2-(as+b\sqrt{2}\,c)^2&=a^2c^2+2b^2s^2-a^2s^2-2b^2c^2\\&=(a^2-2b^2)(c^2-s^2)=a^2-2b^2,\end{aligned}$$

因為交叉項 $2\sqrt{2}\,abcs$ 再次互相抵消。我們需要 $a^2-2b^2=7$：取 $a=3$、$b=1$（所以 $(3,\sqrt{2})$ 是雙曲線上的一個整數 2-有理點）。

接着我們需要有理數 c、s 使 $c^2-s^2=(c-s)(c+s)=1$。選取 $c+s=2$ 及 $c-s=\frac{1}{2}$，得 $c=\frac{5}{4}$、$s=\frac{3}{4}$。於是

$$x=\tfrac{15}{4}+\tfrac{3}{4}\sqrt{2},\qquad y=\tfrac{9}{4}+\tfrac{5}{4}\sqrt{2},$$

其中 $p=\frac{15}{4}$、$q=\frac{3}{4}$、$r=\frac{9}{4}$、$s=\frac{5}{4}$，全都不是整數。直接驗證：$x^2=\frac{225+18+90\sqrt{2}}{16}$，$y^2=\frac{81+50+90\sqrt{2}}{16}$，所以 $x^2-y^2=\frac{112}{16}=7$。這就是 $x^2-y^2=7$ 上的一個非整數 2-有理點。

驗算

每一個點都可以像上文那樣用分數準確驗證，也可以用數值驗證：對於 (ii)(c)，$x\approx 4.81066$、$y\approx 4.01777$，得 $x^2-y^2\approx 7.0000$；對於 (ii)(b)，$x\approx 2.93137$、$y\approx 1.55147$，得 $x^2+y^2\approx 11.0000$。最後務必逐一檢查 p,q,r,s，確認沒有一個是整數。

常見錯誤

- 忘記 0 是整數：像 $\left(\frac{7}{5}\sqrt{2},\ldots\right)$ 這樣的點有 $p=0$，所以它不是非整數 2-有理點。
- 在 (c) 中，一個看似無害的選擇也可能失敗：$c=\frac{5}{3}$、$s=\frac{4}{3}$ 同樣滿足 $c^2-s^2=1$，但會得出 $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{2}$，其中 $p=5$ 是整數。每個係數都要檢查。

STEP 之外

形如 $p + q\sqrt{2}$ 的數構成一個域（field）$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，而這道題其實是在該域上尋找圓錐曲線（conic）上的點。把已知點旋轉一個有理角度的技巧，是一套優美理論的起點：只要一條圓錐曲線上有一個有理點，經過該點的直線便能把其餘所有有理點參數化（parametrise）；而 $x^2 - 2y^2 = 1$（佩爾方程（Pell's equation））上的有理點，在 (c) 所用的那種雙曲「旋轉」之下正好構成一個羣（group）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）講述了佩爾方程與平方和，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）則介紹了像 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 這樣的域。

詳細解答

STEP III 2012，第 6 題

純數學 • 複數根的軌跡

> **STEP III 2012，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q6

關鍵思路

一個複數（complex number）為零，當且僅當其實部（real part）與虛部（imaginary part）同時為零。因此，關於 $z = x + \mathrm{i}y$ 的一條複數方程，會變成關於 x、y 和 p 的兩條實數方程。虛部方程總能因式分解（factorise）出因子 y，於是每個軌跡（locus）都分成「實根」和「非實根」兩部分。在每種情況下，我們先消去（eliminate）p，得到 (x, y) 平面上的一條曲線，然後檢驗該曲線上哪些點確實來自某個實數 p。

解答

第一條方程 $z^2 + pz + 1 = 0$

設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數。則

$$z^2 + pz + 1 = (x^2 - y^2 + px + 1) + \mathrm{i}\,(2xy + py).$$

由於 p 是實數，兩個括號分別是實部和虛部，兩者都必須為零：

$$x^2 - y^2 + px + 1 = 0, \qquad (2x + p)y = 0,$$

此即所求。

由第二條方程，得 $p = -2x$ 或 $y = 0$。若 $y = 0$，第一條方程變為 $x^2 + px + 1 = 0$。此時 $x \neq 0$，因為 $x = 0$ 會得出 $1 = 0$，所以可以除以 x，得 $p = -(x^2 + 1)/x$。因此，要麼 $p = -2x$，要麼 $p = -(x^2 + 1)/x$ 且 $x \neq 0$（而在第二種情況下 $y = 0$）。

根的軌跡。情況 $p = -2x$。代入實部方程，得 $x^2 - y^2 - 2x^2 + 1 = 0$，即

$$x^2 + y^2 = 1.$$

反過來（converse），在單位圓（unit circle）上任取一點 $x+\mathrm{i}y$，並設 $p=-2x$，這是實數。則 $(2x+p)y=0$，且 $x^2-y^2+px+1=1-x^2-y^2=0$，所以該點是一個根。因此整個單位圓都在軌跡之內。

情況 $y=0$，$p=-(x^2+1)/x$。對每個實數 $x\neq 0$，這個 p 都是實數，而且 x 是 $x^2+px+1=0$ 的根。點 $x=0$ 永遠不是根，因為 $0^2+p\cdot 0+1=1$。

所以根的軌跡是去掉原點的實軸，連同單位圓 $|z|=1$。（點 ± 1 同時位於兩者之上。）

第二條方程 $pz^2+z+1=0$

設 $z=x+\mathrm{i}y$，由實部和虛部得

$$p(x^2-y^2)+x+1=0, \qquad (2px+1)y=0.$$

原點永遠不是根，因為 $z=0$ 會得出 $1=0$。

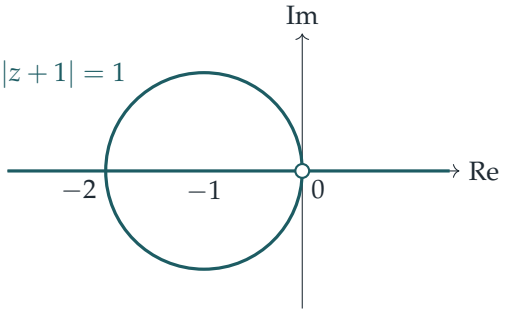
情況 $y=0$。此時 $px^2+x+1=0$ 且 $x\neq 0$，所以 $p=-(x+1)/x^2$。對每個實數 $x\neq 0$，這都是實數，所以實軸上除原點外的每一點都在軌跡之內。（當 $x=-1$ 時得 $p=0$，方程變成一次方程 $z+1=0$，其根的確是 -1。）

情況 $2px+1=0$。此時 $x\neq 0$ 且 $p=-1/(2x)$。代入實部方程並乘以 $-2x$：

$$(x^2-y^2)-2x^2-2x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+y^2+2x=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x+1)^2+y^2=1.$$

反過來，對這個圓上除原點以外的任何一點，都有 $x\neq 0$，所以 $p=-1/(2x)$ 是實數，而把步驟倒推回去，便可證明兩條方程都成立。

所以根的軌跡是實軸連同圓 $|z+1|=1$（圓心 -1，半徑 1），但要去掉同時位於兩者之上的原點。



空心圓表示缺失的點 $z=0$。

想一想 為甚麼這個軌跡看起來像是把第一個軌跡「裏外翻轉」了？

若 z 是 $pz^2+z+1=0$ 的根，則 $w=1/z$ 滿足 $w^2+w+p=0$。映射 $z\mapsto 1/z$ 把實軸（不含 0）映到自身，又把直線 $\operatorname{Re} w=-\frac{1}{2}$（即 $w^2+w+p=0$ 的非實根所在之處）映到通過原點的圓 $|z+1|=1$。原點之所以缺失，是因為它對應於 $w=\infty$。

第三條方程 $pz^2+p^2z+2=0$

若 $p=0$，方程變為 $2=0$，沒有根，所以下文始終有 $p\neq 0$。由實部和虛部得

$$p(x^2-y^2)+p^2x+2=0,\qquad p(2x+p)y=0,$$

由於 $p\neq 0$，第二條化為 $(2x+p)y=0$。

情況 $p=-2x$。由於 $p\neq 0$，故 $x\neq 0$。代入得

$$-2x(x^2-y^2)+4x^3+2=0\quad\Longleftrightarrow\quad x(x^2+y^2)=-1.$$

反過來，這條曲線上任何一點都有 $x\neq 0$，所以 $p=-2x$ 是非零實數，而把步驟倒推回去，便可證明該點是一個根。由於 $x^2+y^2>0$，曲線上 $x<0$。把它寫成

$$y^2=-\frac{1}{x}-x^2,$$

我們需要 $-1/x\geq x^2$；乘以 $x<0$ 會令不等式（inequality）反向，得 $-1\leq x^3$，所以 $-1\leq x<0$。曲線通過 -1（該處 $y=0$），關於實軸對稱，而且當 $x\to 0^-$ 時 $y^2\to\infty$，所以虛軸是一條漸近線（asymptote）。此外，對 $x<0$ 有 $\mathrm{d}(y^2)/\mathrm{d}x=x^{-2}-2x>0$，所以當 x 由 -1 增至 0 時，$|y|$ 一直遞增。以極坐標形式（polar form）表示，曲線為 $r^3\cos\theta=-1$。

情況 $y=0$。此時，實數 x 在軌跡之內，當且僅當存在實數 p 使 $xp^2+x^2p+2=0$。當 $x=0$ 時，這就是 $2=0$，所以 0 不在軌跡之內。當 $x\neq 0$ 時，這是關於 p 的二次方程，它有實數解當且僅當其判別式（discriminant）非負：

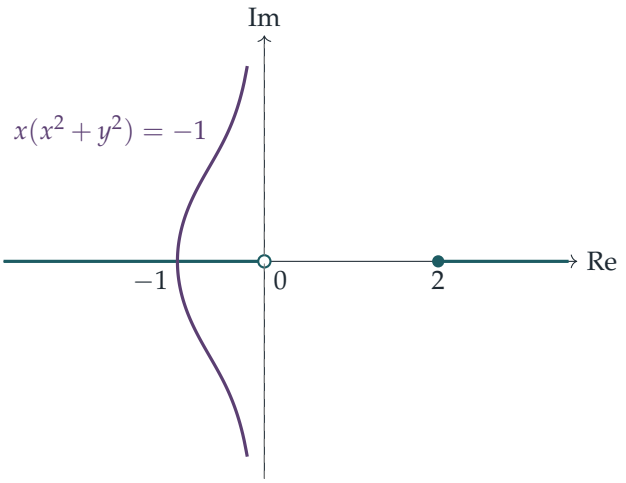
$$x^4-8x=x(x^3-8)\geq 0.$$

當 $x<0$（兩個因子皆為負）或 $x\geq 2$（兩個因子皆非負）時成立，而當 $0<x<2$ 時不成立。以這種方法求得的任何實數 p 必然非零，因為 $p=0$ 會得出 $2=0$。例如 $x=2$ 需要 $2p^2+4p+2=0$，故 $p=-1$，而確實有 $-z^2+z+2=-(z-2)(z+1)$。

想一想 為甚麼這裏要解出 p，而不是解出 x？

我們想知道哪些點 x 可以達到，所以 x 是已知的，而 p 才是未知數。這條方程是關於 p 的二次方程，而存在實根恰好就是關於 x 的判別式條件。

所以根的軌跡是負實軸、實軸上的射線 $x\geq 2$，以及曲線 $x(x^2+y^2)=-1$；這條曲線從 -1 出發，向上下兩個方向伸展，趨近虛軸。



曲線只在 -1 處與實軸相交，該處的切線是鉛垂的；當 $|y|\to\infty$ 時，曲線趨近虛軸。

驗算

- 對於 $z^2+pz+1=0$，兩根之積為 1，所以非實根是一對共軛（conjugate）複數 $z,\bar{z}$，且 $|z|^2=1$：再次得到單位圓。
- 在第三條方程中，$p=-1$ 給出根 2 和 -1，分別是射線的端點和曲線的頂點。取 $p=1$ 得 $z^2+z+2=0$，其根為 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$，而 $x(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$，正如所料。
- 在數值上，我們以 10^5 個隨機 p 值求解全部三條方程，確認每個根都位於所述的軌跡上。我們亦確認了各軌跡上的隨機點都能以所述的 p 達到；而對 p 作精細掃描後，並未發現第三條方程在 $(0,2)$ 內有任何實根，最小的正實根是 2.0。

常見錯誤

- 忘記檢驗反方向：消去 p 只得到一條包含軌跡的曲線，你仍須證明每一點都能由某個實數 p 達到。在第三條方程中，$(0,2)$ 內的實數點雖然滿足 $y=0$，卻永遠不能達到。
- 除以 x 或 p 時沒有說明它為何非零。缺失的原點正是由此而來。
- 草率處理 $p=0$：在第二條方程中它給出真正的根 -1，但在第三條方程中它完全沒有根。

STEP 之外

根軌跡（root locus）是控制工程（control engineering）中的標準工具：當增益（gain）參數改變時，系統的極點（poles）沿着曲線移動，而系統的穩定性（stability）取決於這些極點會否越過進入右半平面（right half-plane）。這道題亦暗示了映射 $z \mapsto 1/z$ 的幾何性質：它把直線和圓映成直線和圓。這正是莫比烏斯變換（Möbius transformations）理論的開端，Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對此有精彩的圖解。

詳細解答

STEP III 2012，第 7 題

純數學 • 耦合微分方程

STEP III 2012，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q7

關鍵思路

兩條耦合的一階方程（coupled first-order equations），只要消去一個變量，就會變成一條二階方程（second-order equation）：先對 $\dot{y}$ 的方程求導，再利用第一條方程本身，把 z 寫成 y 和 $\dot{y}$ 的式子。之後，每一部分都只是選取常數 A 和 B 而已。在第 (iii) 部分，無窮和是兩個幾何級數（geometric series），把結果與第 (ii) 部分對比，就能確定 c。從物理角度看，z_2 是每隔一個單位時間注射同一劑量後所達到的穩態（steady state）。

解答

通解

對 $\dot{y} = -2y + 2z$ 求導，再以第二條方程代入 $\dot{z}$，得

$$\ddot{y} = -2\dot{y} + 2\dot{z} = -2\dot{y} + 2(-\dot{y} - 3z) = -4\dot{y} - 6z.$$

由第一條方程可把 z 用 y 表示：

$$z = y + \tfrac{1}{2}\dot{y}, \qquad \text{所以} \qquad 6z = 6y + 3\dot{y}.$$

代入後得

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = 0.$$

輔助方程（auxiliary equation）$m^2 + 7m + 6 = (m+1)(m+6) = 0$ 的根為 $m = -1$ 和 $m = -6$，因此

$$y = Ae^{-t} + Be^{-6t}$$

其中 A 和 B 為任意常數。然後由 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ 得出 z：

$$z = Ae^{-t}\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + Be^{-6t}(1 - 3) = \tfrac{1}{2}Ae^{-t} - 2Be^{-6t},$$

此即所求。

想一想 我們用了兩條方程來得出 y 的方程，但求 z 時只用了第一條。我們找到的這一對函數，真的滿足第二條方程嗎？

確實滿足。由 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$，有 $\dot{z} = \dot{y} + \frac{1}{2}\ddot{y} = \dot{y} + \frac{1}{2}(-7\dot{y} - 6y) = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$。另一方面，$-\dot{y} - 3z = -\dot{y} - 3y - \frac{3}{2}\dot{y} = -\frac{5}{2}\dot{y} - 3y$，兩者相同。所以方程組的每個解都具有這個形式，而每對具有這個形式的函數都是解。

第 (i) 部分

在 $t = 0$ 時，$y(0) = A + B$，$z(0) = \frac{1}{2}A - 2B$。由條件得

$$\tfrac{1}{2}A - 2B = 0, \qquad A + B = 5,$$

所以 $A = 4B$，於是 $5B = 5$。因此 $B = 1$，$A = 4$：

$$y = 4\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-6t}, \qquad z_1(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-6t}.$$

藥物起初在血液中，腦內的藥量由零開始上升，然後隨着被吸收而衰減。

第 (ii) 部分

設 $a = \frac{1}{2}A$ 及 $b = 2B$，使 $z = a\mathrm{e}^{-t} - b\mathrm{e}^{-6t}$。條件為

$$a - b = c, \qquad a\mathrm{e}^{-1} - b\mathrm{e}^{-6} = c.$$

以第一式減第二式，得 $a(1 - \mathrm{e}^{-1}) = b(1 - \mathrm{e}^{-6})$。把這個共同的值記作 k，於是

$$a = \frac{k}{1 - \mathrm{e}^{-1}}, \qquad b = \frac{k}{1 - \mathrm{e}^{-6}}, \qquad \text{及} \qquad c = a - b = kC,$$

其中

$$C = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-1}} - \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-6}}.$$

由於 $\mathrm{e}^{-1} > \mathrm{e}^{-6}$，有 $1 - \mathrm{e}^{-1} < 1 - \mathrm{e}^{-6}$，所以 $C > 0$。特別地，$C \neq 0$，因此可以除以它：$k = c/C$。（等價地說，這兩條線性方程的行列式（determinant）為 $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-6} \neq 0$，所以解是唯一的。）因此

$$z_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} - \frac{\mathrm{e}^{-6t}}{1 - \mathrm{e}^{-6}}\right),$$
$$y_2(t) = \frac{c}{C}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}} + \frac{\mathrm{e}^{-6t}}{2(1 - \mathrm{e}^{-6})}\right),$$

其中 y_2 由 $A = 2a$ 及 $B = \frac{1}{2}b$ 得出。

第 (iii) 部分

設 $m = -n$，則 m 取遍 $0, 1, 2, \ldots$，且 $t - n = t + m$。利用第 (i) 部分，

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(2\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-1})^m - 2\mathrm{e}^{-6t}(\mathrm{e}^{-6})^m\right).$$

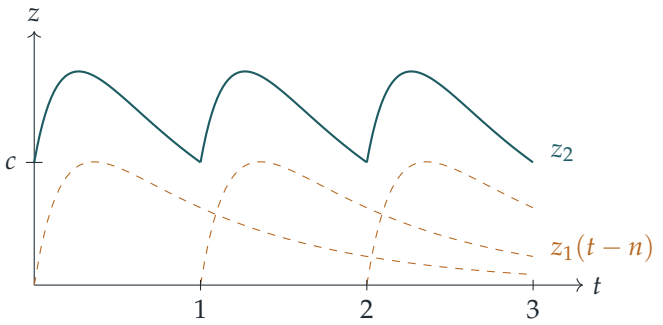
兩部分都是幾何級數，公比分別為 e^{-1} 和 e^{-6}，都嚴格介於 0 與 1 之間，所以兩者各自收斂（converge），可以分開求和：

$$\sum_{n=-\infty}^{0} z_1(t-n) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2\mathrm{e}^{-6t}}{1-\mathrm{e}^{-6}}.$$

這正好是 $z_2(t)$ 中括號內的式子乘以 2。所以該恆等式在 $0 \le t \le 1$ 上成立，當且僅當 $c/C = 2$，即

$$c = 2C = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1}} - \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-6}} \approx 1.159.$$

（若 c 取其他值，兩邊相差同一個非零函數的非零倍數，所以這個值是唯一的。）



這幅圖展示了其中的含義。在時間 n 向血液注射劑量 5，會產生腦內曲線 $z_1(t-n)$（虛線）。若從遙遠的過去開始，每個整數時間都注射一劑，腦內的藥量就是所有這些響應之和。這個和每隔一個單位時間重複一次（實線），而在 $[0,1]$ 上，它就是 c 取這個值時的 z_2。

驗算

- 在第 (i) 部分，$z_1(0) = 2 - 2 = 0$，$y(0) = 4 + 1 = 5$。
- 在第 (iii) 部分，$z_2(0)$ 和 $z_2(1)$ 都應等於 c。在求和式中，$t = 1$ 的級數就是 $t = 0$ 的級數去掉首項，而該項為 $z_1(0) = 0$。這樣不用任何代數運算就能確認 $z(0) = z(1)$。
- 當 $c = 2C$ 時，$y_2(0) - y_2(1) = 4 + 1 = 5$：每個週期內血液恰好損失一劑，而下一次注射正好補回。

- 數值上，$c \approx 1.15898$。在 $t = 0.37$ 處把 $z_1(t+m)$ 的 200 項相加，得 1.967693…，與 $z_2(0.37)$ 吻合至小數點後 12 位。

常見錯誤

- 忘記 z 已經透過 $z = y + \frac{1}{2}\dot{y}$ 由 y 決定，反而另外解一條 z 的方程，並引入新的、獨立的常數。
- 在第 (iii) 部分弄錯平移的方向：$n \leq 0$ 意味着 $t - n \geq t$，所以只有過去的劑量才有貢獻。

STEP 之外

這是一個線性房室模型（linear compartment model），可寫成 $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}$，其中 M 是一個 2×2 矩陣。衰減率 1 和 6 是 M 的特徵值（eigenvalue）的相反數，這正是你會在大學一年級課程中遇到的、以矩陣指數（matrix exponential）看待線性系統的觀點。第 (iii) 部分是疊加原理（superposition）的一個簡單例子：對重複脈衝的響應，是同一個脈衝響應（impulse response）的多個平移副本之和。這個想法引向格林函數（Green's function）和卷積（convolution）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋了線性方程組和脈衝響應。

詳細解答

STEP III 2012，第 8 題

純數學 • 斐波那契裂項級數

> **STEP III 2012，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q8

關鍵思路

第 (ii) 部分的式子每當 n 增加一，就會改變正負號，而第 (i) 部分正是在提示我們去尋找這種規律。一旦知道它在 n 為奇數時的值，第 (iii) 部分的反正切恆等式（identity）其實只是 $\tan(A-B)$ 公式換了個樣子。把這條恆等式重新整理，就能把級數（series）的每一項寫成兩個反正切的*差*，於是求和便可以伸縮相消（telescope）。

解答

首幾項為

$$F_0, F_1, \ldots, F_8 = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21.$$

第 (i) 部分

利用這些數值，

$$F_0F_3 - F_1F_2 = 0\cdot 2 - 1\cdot 1 = -1, \qquad F_2F_5 - F_3F_4 = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1,$$

所以兩個式子相等，正如所求。

第 (ii) 部分

設 $G_n = F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2}$。第 (i) 部分說明 $G_0 = G_2$，這啟發我們比較 G_{n+1} 與 G_n。把遞推關係（recurrence）寫成 $F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2}$ 的形式，得

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= F_{n+1}F_{n+4} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}F_{n+3} \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}\left(F_{n+2} - F_{n+1}\right) \\ &= F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+3}F_n \\ &= -G_n, \end{aligned}$$

其中第四行再次用了遞推關係 $F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$。

所以 G_n 每一步都改變正負號。由於第 (i) 部分給出 $G_0 = -1$，可得（對 n 用歸納法（induction））$G_n = (-1)^{n+1}$。兩種情況為

$$F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = \begin{cases} -1 & \text{若 } n \text{ 為偶數，} \\ 1 & \text{若 } n \text{ 為奇數。} \end{cases}$$

例如，$n = 1$ 給出 $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$，而 $n = 4$ 給出 $3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$。

第 (iii) 部分

固定 $r \geq 1$，並設

$$\alpha = \arctan \frac{1}{F_{2r}}, \qquad \beta = \arctan \frac{1}{F_{2r+1}}.$$

所有 $k \geq 1$ 的 F_k 都是正整數，所以這兩個量都有定義。由複角公式（compound-angle formula），

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\dfrac{1}{F_{2r}} - \dfrac{1}{F_{2r+1}}}{1 + \dfrac{1}{F_{2r}F_{2r+1}}} = \frac{F_{2r+1} - F_{2r}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1} = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}F_{2r+1} + 1},$$

這裏用了 $F_{2r+1} - F_{2r} = F_{2r-1}$。現在以奇數值 $n = 2r - 1$ 應用第 (ii) 部分：

$$F_{2r-1}F_{2r+2} - F_{2r}F_{2r+1} = 1, \qquad \text{所以} \qquad F_{2r}F_{2r+1} + 1 = F_{2r-1}F_{2r+2}.$$

由於 $F_{2r-1} \geq 1$，它不為零，可以約去：

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{F_{2r-1}}{F_{2r-1}F_{2r+2}} = \frac{1}{F_{2r+2}}.$$

想一想 正切相等不一定代表角相等。為甚麼我們可以斷定 $\alpha - \beta = \arctan(1/F_{2r+2})$？

由於 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一一對應的（one-to-one），只需驗證兩個角都在這個區間內。這裏 $0 < \beta \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$，因為 $1 \le F_{2r} \le F_{2r+1}$，所以 $0 \le \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$。另外，按定義 $\arctan(1/F_{2r+2})$ 位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內。因此

$$\arctan\frac{1}{F_{2r}} = \arctan\frac{1}{F_{2r+1}} + \arctan\frac{1}{F_{2r+2}} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots),$$

這就是所求的恆等式。

求和。把恆等式重新整理，得

$$\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \arctan\frac{1}{F_{2r}} - \arctan\frac{1}{F_{2r+2}},$$

所以部分和（partial sums）伸縮相消：

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} &= \left(\arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_4}\right) + \left(\arctan\frac{1}{F_4} - \arctan\frac{1}{F_6}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\arctan\frac{1}{F_{2N}} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\ &= \arctan\frac{1}{F_2} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}} = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{F_{2N+2}},\end{aligned}$$

因為 $F_2 = 1$。當 $n \ge 2$ 時，有 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \ge F_n + 1$，所以 $F_n \to \infty$。於是 $1/F_{2N+2} \to 0$，而由於 arctan 連續（continuous）且 $\arctan 0 = 0$，令 $N \to \infty$ 便得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{F_{2r+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

驗算

- $r = 1$：恆等式說 $\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$。這是經典的 $\frac{\pi}{4}$ 恆等式，因為右方的 tan 為 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)/\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1$。
- 首三項 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{13} \approx 0.4636 + 0.1974 + 0.0768 = 0.7378$，與 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{21} \approx 0.7378$ 吻合。
- 數值上，級數的 89 項給出 0.785398163…，在機器精度內與 $\frac{\pi}{4}$ 一致。第 (ii) 部分的公式對每個 $n < 150$ 亦準確成立。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分用了第 (ii) 部分的偶數情況。那裏的下標是 $2r-1$, $2r$, $2r+1$, $2r+2$，所以 $n = 2r-1$ 是奇數，值為 $+1$。
- 由正切相等直接推出角相等，而沒有驗證兩個角都位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 內。
- 忘記伸縮求和後的首項：它是 $\arctan(1/F_2) = \frac{\pi}{4}$，而不是 $\arctan(1/F_1)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分與卡西尼 (Cassini) 恆等式 $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ 是近親。兩者最好透過矩陣 (matrix) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 來理解：它的 n 次冪的元素正是斐波那契數 (Fibonacci numbers)，所以取行列式 (determinant) 便立即得到卡西尼恆等式。伸縮級數 (telescoping series)，以及由部分和過渡到極限時所需的謹慎，是大學第一個分析 (analysis) 課程的必備內容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是閱讀這些內容的好起點，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）則有更多關於遞推關係的 STEP 風格練習。

詳細解答

STEP III 2012，第 9 題

力學 • 轉動滑輪的動力學

STEP III 2012，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

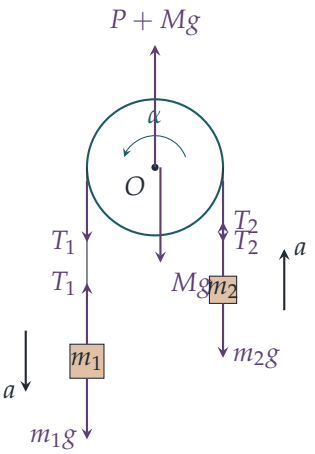
step.maths.org/questions/12-s3-q9

關鍵思路

測得的軸上作用力就是線索。滑輪的質心（centre of mass）不會移動，所以軸必須承托滑輪的重量，同時平衡兩段繩的張力（tension）。由此 P 就是兩個張力之和，從而可以求出兩個質點的加速度。知道加速度之後，滑輪的轉動方程就能給出轉動慣量（moment of inertia）。摩擦力偶（friction couple）只會改變這一條方程，其他一概不變。

解答

模型。兩個質點視為質點，繩是輕（light）而不可伸長（inextensible）的。繩在滑輪上不打滑，所以繩的速率等於圓盤邊緣的速率。我們假設系統由靜止釋放，因此較重的質點 m_1 下降。設 a 為 m_1 向下的加速度，這也是 m_2 向上的加速度。於是滑輪的角加速度（angular acceleration）為 $\alpha = a/r$。m_1 一側繩的張力為 T_1，m_2 一側為 T_2（兩者不同，因為滑輪有慣性）。設 I 為滑輪繞軸的轉動慣量。



對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m_1 g - T_1 = m_1 a, \qquad T_2 - m_2 g = m_2 a,$$

所以

$$T_1 = m_1(g - a), \qquad T_2 = m_2(g + a).$$

軸上的作用力。滑輪的質心位於固定點 O，所以滑輪所受的合力為零。作用在滑輪上的力有：它的重量 Mg、兩個張力（兩者都向下拉，因為兩側的繩都是豎直懸垂的），以及軸施加的力。摩擦力偶（我們在第 (ii) 部分才加入）沒有合力（resultant），所以不會在這裏出現。因此軸上的豎直作用力為 $Mg + T_1 + T_2$，與測量值比較，得

$$P = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a,$$

所以

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g - P}{m_1 - m_2}. \tag{1}$$

這只用到測量值和兩個質點的方程，所以在兩部分中都成立。

第 (i) 部分

軸上沒有摩擦時，只有張力對 O 有力矩（moment）。對軸取力矩，

$$(T_1 - T_2)r = I\alpha = \frac{Ia}{r}, \qquad \text{所以} \qquad I = \frac{(T_1 - T_2)r^2}{a}.$$

而 $T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a$，所以

$$I = r^2\left(\frac{(m_1 - m_2)g}{a} - (m_1 + m_2)\right).$$

把 (1) 代入 a：

$$\begin{aligned} I &= r^2\left(\frac{(m_1-m_2)^2g}{(m_1+m_2)g-P}-(m_1+m_2)\right)\\ &= r^2\,\frac{(m_1-m_2)^2g-(m_1+m_2)^2g+(m_1+m_2)P}{(m_1+m_2)g-P}\\ &= \frac{\big((m_1+m_2)P-4m_1m_2g\big)r^2}{(m_1+m_2)g-P}, \end{aligned}$$

其中用到 $(m_1+m_2)^2-(m_1-m_2)^2=4m_1m_2$。這就是 $(*)$，證畢。

第 (ii) 部分

把新的計算值記為 I'。摩擦力偶 C 阻礙轉動，而轉動方向是由 T_1 驅動的方向，所以力矩方程變成

$$(T_1-T_2)r-C=\frac{I'a}{r}.$$

加速度仍然由 (1) 給出，因為所用的是同一個測量值 P，而關於軸上作用力的論證並不涉及 C。所以 T_1-T_2 和 a 與第 (i) 部分完全相同，於是

$$I'=\frac{(T_1-T_2)r^2}{a}-\frac{Cr}{a}=(*)-\frac{Cr}{a}.$$

> **想一想** 我們怎樣知道 a 的正負？

系統由靜止開始，滑輪轉動時 m_1 向下移動，所以 m_1 必定有正的向下加速度。（如果 a 為零或負數，m_1 根本不會開始向下移動。）所以 $a>0$。由於 $C>0$ 且 $r>0$，得 $Cr/a>0$，因此**考慮摩擦後算出的值比 $(*)$ 小**。這是合理的：張力產生的淨扭矩（torque）有一部分用來克服摩擦，所以只需較小的慣性就能解釋同一個觀測到的加速度。

C 的上界。把張力代入力矩方程：

$$\big((m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a\big)r-C=\frac{I'a}{r},$$

整理後得

$$(m_1-m_2)rg-C=a\left(\frac{I'}{r}+(m_1+m_2)r\right).$$

右邊 $a>0$、$I'\geq 0$（轉動慣量不可能是負數）而且 $(m_1+m_2)r>0$，所以右邊嚴格為正。因此

$$C<(m_1-m_2)rg,$$

證畢。換句話說，摩擦力偶必須小於兩邊重量不平衡所產生的力偶 $(m_1-m_2)gr$。否則系統根本不會開始移動。

驗算

- 輕滑輪：若 $I = 0$ 且 $C = 0$，則 $a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$（熟悉的阿特伍德機（Atwood machine）結果），而 $P = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$。此時 $(*)$ 的分子為零，正如預期。
- 靜止的滑輪：當 $a \to 0$ 時，$P \to (m_1 + m_2)g$，$(*)$ 的分母趨於零，$(*)$ 趨於無限大。無限重的滑輪不會產生加速度。
- 數值驗算：取 $g = 9.8$、$m_1 = 3$、$m_2 = 1$、$r = 0.5$、$I = 0.7$ 及 $C = 2$（國際單位制），真實運動中 $a \approx 2.29\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，$P \approx 34.6\ \mathrm{N}$。公式 $(*)$ 給出 $I \approx 1.14$，恰好多了 $Cr/a \approx 0.44$，而考慮摩擦的模型則還原出 0.7。這裏 $C = 2 < (m_1 - m_2)rg = 9.8$。我們用同樣方法測試了 10^4 個隨機例子。

常見錯誤

- 以為兩側的張力相同。這只對輕滑輪或無摩擦滑輪成立，而在這裏會令 I 從問題中消失。
- 計算軸上作用力時忘記滑輪本身的重量。這正是測量值寫成 $P + Mg$ 的原因。
- 以為摩擦力偶會改變軸上的作用力。力偶的合力為零，所以兩部分中都有 $P = T_1 + T_2$。

STEP 之外

這是從測量推斷隱藏參數的一個小例子。答案取決於你所假設的模型，而忽略摩擦會令估計值朝一個可預測的方向偏差。在大學一年級的力學中，剛體會用線動量和角動量的完整理論來處理，而對於繞一般軸轉動的物體，轉動慣量會變成一個張量（tensor）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）深入講解定軸轉動，以及滑輪有質量的阿特伍德機。

詳細解答

STEP III 2012，第 10 題

力學 • 圓周運動

STEP III 2012，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

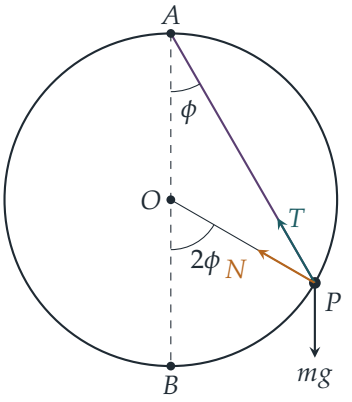
step.maths.org/questions/12-s3-q10

關鍵思路

一切都歸結為一個等腰三角形（isosceles triangle）的幾何：它由圓環的圓心、圓環的最高點和小環三點組成。只要看出繩長是 $2a\cos\phi$，而小環所在的半徑與豎直向下方向成 2ϕ 角，整道題就只需一條能量方程（energy equation）（求 λ 和速率）和一條徑向運動方程（radial equation of motion）（求反作用力）。

解答

我們把小環視為在光滑圓周上運動的質點，並把繩子視為遵守胡克定律（Hooke's law）的輕彈性繩。設 O 為圓環的圓心，A 為其最高點，B 為其最低點，P 為小環，並記 $c = \cos\phi$。



幾何

三角形 OAP 中 $OA = OP = a$，所以它是等腰三角形，在 A 和 P 的兩個角都是 ϕ。因此

$$AP = 2a\cos\phi, \qquad \angle AOP = \pi - 2\phi, \qquad \angle BOP = 2\phi.$$

於是 P 在 O 下方的深度是 $a\cos 2\phi$，而它在 B 上方的高度是 $a(1-\cos 2\phi) = 2a\sin^2\phi$。繩子（拉緊時）的伸長量（extension）為 $x = 2a\cos\phi - a = a(2c-1)$；當 $2c-1=0$，即 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 時，繩子變得鬆弛。

彈性模量

圓環是光滑的，反作用力（reaction）與運動方向垂直，所以機械能守恆（conservation of mechanical energy）。在 B（$\phi = 0$）時，小環靜止，伸長量為 a，所以彈性勢能為 $\lambda a^2/(2a) = \frac{1}{2}\lambda a$。在 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 時，小環再次靜止，繩子剛好變得鬆弛（沒有彈性勢能），而小環已上升了 $2a\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}a$。因此

$$\tfrac{1}{2}\lambda a = mg\cdot\tfrac{3}{2}a \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 3mg.$$

這就是彈性模量（modulus of elasticity）。

速率

在一般角度 ϕ 而繩子拉緊時，由 B 起應用能量守恆，得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \tfrac{1}{2}\lambda a - \frac{\lambda a^2(2c-1)^2}{2a} - 2mga\sin^2\phi\\ &= \tfrac{3}{2}mga\left[1-(2c-1)^2\right] - 2mga(1-c^2)\\ &= \tfrac{3}{2}mga(4c-4c^2) - 2mga + 2mgac^2\\ &= mga(-4c^2+6c-2),\end{aligned}$$

所以

$$\frac{mv^2}{a} = mg(-8c^2+12c-4) = -4mg(2c-1)(c-1).$$

此式在 $c=1$ 和 $c=\frac{1}{2}$ 時為零，在兩者之間為正，這與小環在 $\phi = -\frac{\pi}{3}$ 與 $\phi = \frac{\pi}{3}$ 之間來回運動相符：小環靜止後會滑回並經過 B，到達另一邊的對稱點，如此往復。整個過程中 $\frac{1}{2} \le c \le 1$，繩子一直拉緊（只在兩個端點剛好鬆弛），張力為

$$T = \frac{\lambda x}{a} = 3mg(2c-1).$$

反作用力

設 N 為反作用力指向 O 的分量，如圖所示（結果可能是負數）。我們沿 PO 指向圓心的方向分解各力：

- 張力沿 PA 作用，而 PA 與 PO 成 ϕ 角（即等腰三角形的底角），所以張力指向 O 的分量是 $T\cos\phi$；
- OP 與豎直向下方向成 2ϕ 角，所以重力有一個背離 O 的分量 $mg\cos 2\phi$。

想一想 為甚麼這裏重力的分量是向外而不是向內？

當 $\phi < \frac{\pi}{4}$ 時，小環在 O 的下方，重力把它拉離圓心；單一表達式 $-mg\cos 2\phi$（指向 O）已涵蓋兩種情況，因為當 P 越過 O 的水平高度時，$\cos 2\phi$ 會變號。

沿指向圓心的方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$N + T\cos\phi - mg\cos 2\phi = \frac{mv^2}{a}.$$

代入 T、mv^2/a 及 $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$：

$$\begin{aligned} N &= mg(-8c^2 + 12c - 4) - 3mg(2c-1)c + mg(2c^2 - 1) \\ &= mg(-8c^2 + 12c - 4 - 6c^2 + 3c + 2c^2 - 1) \\ &= -mg(12c^2 - 15c + 5). \end{aligned}$$

因此反作用力的大小為

$$R = (12\cos^2\phi - 15\cos\phi + 5)\, mg,$$

正如所求，前提是括號內的式子永不為負，下面我們便證明這一點。（負號告訴我們，在整個運動中，圓環都是把小環向外推，即背離 O。）

R 永不為零

二次式 $12c^2 - 15c + 5$ 的判別式（discriminant）為 $15^2 - 4\cdot 12\cdot 5 = 225 - 240 = -15 < 0$，而首項係數（leading coefficient）為正，所以它對每個實數 c 都嚴格為正。配方（completing the square）得

$$12c^2 - 15c + 5 = 12\left(c - \tfrac{5}{8}\right)^2 + \tfrac{5}{16} \geq \tfrac{5}{16},$$

所以在整個運動中 $R \geq \frac{5}{16}mg > 0$，最小值出現在 $\cos\phi = \frac{5}{8}$ 時（此值位於 $[\frac{1}{2}, 1]$ 內，所以確實能取到）。

驗算

- 在 B（$c = 1$）：小環靜止，$T = 3mg$ 向上，重力 mg 向下，所以圓環必須以 $2mg$ 向下推。公式給出 $(12 - 15 + 5)mg = 2mg$。

- 在鬆弛點（$c = \frac{1}{2}$）：沒有張力，速率為零，P 在 O 上方 $\frac{a}{2}$ 處，所以徑向反作用力與向內的重力分量 $mg\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}mg$ 平衡。公式給出 $(3 - 7.5 + 5)mg = \frac{1}{2}mg$。
- 我們以數值方法積分運動方程（四階龍格－庫塔法（RK4），從稍為偏離 B 的位置出發）：小環在距 B 角度 $2.094 \approx \frac{2\pi}{3}$ 處停下，計算所得的反作用力與公式的誤差在 10^{-7} 以內，其最小值為 $0.3125\,mg = \frac{5}{16}mg$。

常見錯誤

- 把小環的角位置當作 ϕ 而不是 2ϕ：圓周角是圓心角的一半。
- 在胡克定律或彈性勢能中，用了整條繩長 $2a\cos\phi$，而不是伸長量 $2a\cos\phi - a$。
- 假設反作用力指向內，然後對得到負數答案感到困惑；其實題目只要求反作用力的大小。

STEP 之外

小環只有一個自由度（degree of freedom），處理這類系統最簡潔的方法，是用單一坐標寫出能量（或拉格朗日（Lagrangian））表述，之後再由牛頓定律求出像 R 這樣的約束力（constraint force）。這種分工——由能量得出運動方程，由分解力得出約束力——正正是大學一年級力學課程處理「金屬線上的珠子」問題的方法。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）便以這種思路講解帶約束的圓周運動和能量方法。

詳細解答

STEP III 2012，第 11 題

力學 • 下落的對摺繩

> **STEP III 2012，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q11

關鍵思路

一切都源於繩圈的幾何。只要知道質點下落了 x 時，靜止部分和移動部分各有多長，就可以寫出損失的勢能（potential energy）（利用每段直繩的質心（centre of mass））和增加的動能（kinetic energy）（只有質點和移動部分具有速率）。由能量守恆（conservation of energy）便可得出 v^2 作為 x 的函數，而加速度則可由 $\frac{1}{2}v^2$ 對 x 求導得出，因為 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。

解答

模型與幾何

我們把繩子視為一條均勻、不可伸長（inextensible）、完全柔軟的線，其單位長度質量為

$$\rho = \frac{2M}{2L} = \frac{M}{L},$$

把質點視為點質量，並假設繩圈底部的彎曲部分大小可以忽略。深度由 P 向下量度。

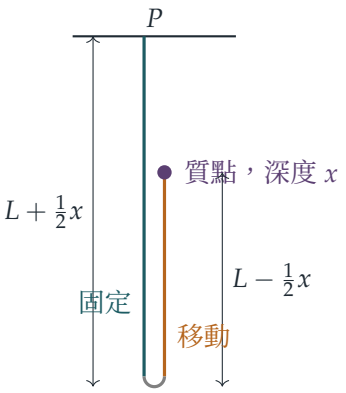
當質點下落了距離 x 時，繩子由兩段豎直部分組成，兩者在繩圈底部相接，設該處深度為 d：

- 固定部分，由 P 向下延伸至底部，處於靜止，長度為 d；
- 移動部分，由質點（深度 x）向下延伸至底部，長度為 $d - x$。

總長度為 $2L$，所以 $d + (d - x) = 2L$，得

$$d = L + \tfrac{1}{2}x, \qquad \text{移動部分長度} = L - \tfrac{1}{2}x.$$

（開始時 $x = 0$，兩部分的長度都是 L。）



損失的勢能

每段直繩都是均勻的，所以其質心位於中點。在深度 h 處，質量 μ 的勢能為 $-\mu gh$。設 $D(x)$ 為整個系統中各部分「質量 × 深度」之和：

$$\begin{aligned} D(x) &= mx + \rho d \cdot \frac{d}{2} + \rho(d-x)\cdot\frac{x+d}{2} \\ &= mx + \frac{\rho}{2}\left(2d^2 - x^2\right) \\ &= mx + \rho\left(L^2 + Lx + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\right) = mx + \rho\left(L^2 + Lx - \tfrac{1}{4}x^2\right). \end{aligned}$$

開始時 $D(0) = \rho L^2$，所以損失的勢能為

$$g\big(D(x) - D(0)\big) = gx\left(m + \rho L - \tfrac{1}{4}\rho x\right) = \frac{gx}{L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\right),$$

這裏用了 $\rho L = M$。

增加的動能

固定部分處於靜止。質點以及移動部分上的每一點都具有速率 v（題目要求我們如此假設），所以移動中的質量為 $m + \rho\left(L - \frac{1}{2}x\right)$，而

$$\text{動能} = \tfrac{1}{2}\left(m + M - \frac{Mx}{2L}\right)v^2 = \frac{1}{2L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\right)v^2.$$

系統由靜止開始，所以由能量守恆得動能 = 損失的勢能：

$$\frac{1}{2L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx\right)v^2 = \frac{gx}{L}\left(mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx\right),$$

即

$$v^2 = \frac{2gx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{mL + ML - \frac{1}{2}Mx},$$

此即所求。當 $x < 2L$ 時分母永不為零，因為此時 $ML - \frac{1}{2}Mx > 0$，所以 $mL + ML - \frac{1}{2}Mx > mL \geq 0$。

加速度

為簡潔起見，記

$$A = mL + ML - \tfrac{1}{4}Mx, \qquad B = mL + ML - \tfrac{1}{2}Mx,$$

於是 $\frac{1}{2}v^2 = gxA/B$，且 $A' = -\frac{1}{4}M$、$B' = -\frac{1}{2}M$（對 x 求導）。

> **想一想** 已知 v^2 是 x 的函數，怎樣才能得出加速度？

由鏈式法則（chain rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，這正是加速度。只要質點在向下移動，即 x 隨 t 遞增，這個做法便成立。

由乘積法則（product rule）和商法則（quotient rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{gxA}{B}\right) &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{A'B - AB'}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A}{B} + x\,\frac{-\frac{1}{4}MB + \frac{1}{2}MA}{B^2}\right] \\ &= g\left[\frac{A - \frac{1}{4}Mx}{B} + \frac{MxA}{2B^2}\right].\end{aligned}$$

關鍵的化簡在於 $A - \frac{1}{4}Mx = mL + ML - \frac{1}{2}Mx = B$，所以第一個分數恰好等於 1。因此

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{Mgx\left(mL + ML - \frac{1}{4}Mx\right)}{2\left(mL + ML - \frac{1}{2}Mx\right)^2},$$

此即所求。

加速度大於 g

釋放後，$0 < x < 2L$。此時

- 如上所示，$B = mL + M\left(L - \frac{1}{2}x\right) > 0$，所以 $B^2 > 0$；
- $A = B + \frac{1}{4}Mx > B > 0$；
- $M > 0$、$g > 0$ 且 $x > 0$。

所以額外項 $\frac{MgxA}{2B^2}$ 嚴格為正，對於 $0 < x < 2L$ 中的每個 x，加速度都嚴格大於 g。（在釋放的一刻，$x = 0$，加速度恰好是 g。）

驗算

- 若 $M = 0$（輕繩），兩條公式都化為自由落體（free fall）的情況：$v^2 = 2gx$，加速度為 g。

- 取 $m = 0.3$、$M = L = 1$ 及 $x = 1$，並設 $g = 9.8$：則 $A = 1.05$、$B = 0.8$，所以 $v^2 = 25.725$，而加速度為 $9.8 + 9.8 \times 1.05/1.28 \approx 17.84\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，遠大於 g。在這一點對 $\frac{1}{2}v^2$ 作數值求導，得出相同的值；而由靜止開始逐步推進運動方程，亦能重現 v^2 的公式。
- 單位：mL、ML 和 Mx 的單位都是「質量 × 長度」，所以各分數都是無量綱（dimensionless）的，而 v^2 的單位與 gx 相同。

常見錯誤

- 把移動部分的長度弄錯：繩圈底部向下移動 $\frac{1}{2}x$，而不是 x，因為下落一側所收入的繩子由兩側平分。
- 給固定部分加上動能，或忘記固定部分的勢能同樣會改變（它變長了，所以其質心下降）。
- 對 v^2 而不是 $\frac{1}{2}v^2$ 求導，結果得出加速度的兩倍。

STEP 之外

這是經典的「下落摺疊鏈」問題，是一個運動中的質量隨時間改變的系統。這裏採用的能量守恆模型預測鏈端的加速度大於 g；若 $m = 0$，當 $x \to 2L$ 時速率會無限增大，這正是揮鞭時發出爆響背後的原理。在彎曲處能量是否真的守恆，在研究文獻中一直有爭論；而以真實鏈條進行的實驗顯示，加速度確實如這裏所述般大於 g。變質量系統（variable-mass systems），以及如何審慎地選用能量或動量（momentum）方法，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

詳細解答

STEP III 2012，第 12 題

概率與統計 • 幾何概率

> **STEP III 2012，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/12-s3-q12

關鍵思路

把三角形分成三個以 P 為公共頂點的小三角形，就可看出三段距離之和必定等於高。至於最小值，最簡潔的切入點是尾概率（tail probability）$\mathrm{P}(X > x)$。「每段距離都大於 x」這個事件對應一個與原三角形相似（similar）的較小三角形，而相似圖形的面積按長度比的平方縮放。在三維空間中，同一思路改用體積亦同樣奏效，而體積按立方縮放。

解答

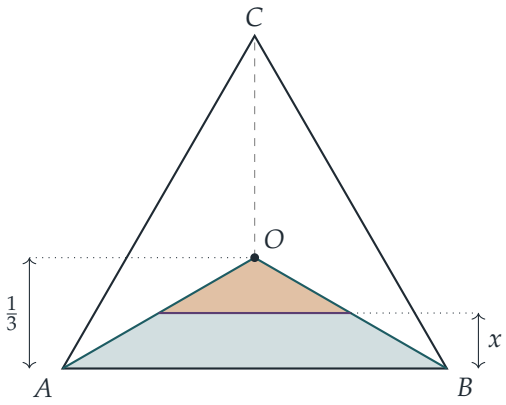
第 (i) 部分

設三角形的邊長為 s。由於高為 1，ABC 的面積為 $\frac{1}{2}s$。把 P 與三個頂點連起來，便把 ABC 分成三角形 PAB、PBC 和 PCA。它們的底就是三條邊，長度均為 s，而它們的高分別是 x_1、x_2 和 x_3。把面積相加，

$$\tfrac{1}{2}sx_1 + \tfrac{1}{2}sx_2 + \tfrac{1}{2}sx_3 = \tfrac{1}{2}s, \qquad \text{所以} \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

得證。

X_1 **為最小值的區域**。與 AB 和 CA 等距的點都在角 A 的角平分線（angle bisector）上。在這條角平分線靠 B 的一側，P 與 AB 的距離比與 CA 的距離小。同理，P 與 AB 的距離比與 BC 的距離小，當且僅當 P 位於角 B 的角平分線靠 A 的一側。在等邊三角形中，角平分線同時也是中線（median），三者相交於中心 O。因此，$X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ 當且僅當 P 位於三角形 ABO 內（下圖陰影部分）。O 到 AB 的距離是高的三分之一，即 $\frac{1}{3}$。



X 的概率密度函數。三個三角形 ABO、BCO 和 CAO 全等（congruent），所以各自的概率都是 $\frac{1}{3}$。（距離相等的情況只會出現在角平分線上，而角平分線的面積為零。）由對稱性，X 的分佈（distribution）與「在 P 位於 ABO 內的條件下」X_1 的分佈相同。在這情況下 $X = X_1$，即 P 到 AB 的距離。

> ? **想一想** 在三角形 ABO 內，哪些點滿足 $X_1 > x$？

它們是位於與 AB 平行、相距 x 的直線上方的點，亦即以 O 為頂點的琥珀色小三角形。它與 ABO 相似，高為 $\frac{1}{3} - x$，而 ABO 的高為 $\frac{1}{3}$，所以它的面積是 ABO 面積的 $\left((\frac{1}{3} - x)/\frac{1}{3}\right)^2 = (1-3x)^2$ 倍。因此，當 $0 \le x \le \frac{1}{3}$ 時，

$$\mathrm{P}(X > x) = (1-3x)^2, \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - (1-3x)^2.$$

此外，由於三段距離之和為 1，X 不可能超過 $\frac{1}{3}$。求導，

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) = 6(1-3x) \quad (0 \le x \le \tfrac{1}{3}),$$

其他情況下 $\mathrm{f}(x) = 0$，得證。

期望值（expected value）。

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/3} 6x(1-3x)\,\mathrm{d}x = \Big[3x^2 - 6x^3\Big]_0^{1/3} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{9} = \tfrac{1}{9}.$$

第 (ii) 部分

設該點到四個面的距離為 $Y_1, \ldots, Y_4$，並設 $Y = \min(Y_1, \ldots, Y_4)$。每個面的面積都是 S，而體積為 $\frac{1}{3}S \cdot 1$。把該點與四個頂點連起來，便把四面體分成四個較小的四面體。每個小四面體以一個面為底，以其中一個 Y_i 為高，所以

$$\tfrac{1}{3}S(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \tfrac{1}{3}S, \qquad \text{所以} \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1.$$

重心（centroid）到每個面的距離都是 $\frac{1}{4}$，所以內切球（inscribed sphere）的半徑為 $\frac{1}{4}$。

想一想 現在集合 $\{Y > y\}$ 是甚麼樣子？

它是與四個面的距離都大於 y 的點所組成的集合。每個面平行地向內移動 y，得出一個重心相同的較小正四面體（regular tetrahedron）。重心到每個面的距離由 $\frac{1}{4}$ 降至 $\frac{1}{4} - y$，所以比例因子（scale factor）為 $(\frac{1}{4} - y)/\frac{1}{4} = 1 - 4y$。體積按比例因子的立方縮放，所以當 $0 \le y \le \frac{1}{4}$ 時，

$$\mathrm{P}(Y > y) = (1 - 4y)^3.$$

（把同一論證應用於第 (i) 部分的三角形，可直接得出 $(1 - 3x)^2$：內部三角形的內切圓半徑（inradius）為 $\frac{1}{3} - x$。）

由於 $Y \ge 0$，我們可以把尾概率積分來求 $\mathrm{E}(Y)$：

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^{1/4} \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1/4} (1 - 4y)^3\,\mathrm{d}y = \Big[-\tfrac{1}{16}(1 - 4y)^4\Big]_0^{1/4} = \tfrac{1}{16}.$$

如果你較喜歡用概率密度函數，它在 $[0, \frac{1}{4}]$ 上是 $12(1 - 4y)^2$，而 $\int_0^{1/4} 12y(1 - 4y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{16}$，結果一樣。

所以到最近一個面的距離的期望值是 $\frac{1}{16}$。

驗算

- $\int_0^{1/3} 6(1 - 3x)\,\mathrm{d}x = 1$，所以 f 確實是一個概率密度函數。
- 這裏有一個規律：在高為 1 的三角形中，$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$；在高為 1 的四面體中，$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$。在一維情況下，$[0, 1]$ 中隨機一點到較近端點的距離的平均值是 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$，同樣吻合。
- 在三角形內取 4×10^5 個隨機點進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation），得出平均值 0.1110（理論值 $\frac{1}{9} \approx 0.1111$），而直方圖（histogram）與 $6(1 - 3x)$ 吻合。在四面體內取 3×10^5 個點，平均值為 0.0625（理論值 $\frac{1}{16} = 0.0625$）。

常見錯誤

- 對 $\mathrm{P}(X > x)$ 求導時漏了負號：概率密度函數是 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}(X > x)$。
- 忘記內部三角形的高是 $1 - 3x$ 而非 $1 - x$：三條邊各自向內移動了 x。
- 在第 (ii) 部分用了比例因子的平方。體積是按立方縮放的。

STEP 之外

這道題目中的兩個工具，在大學第一個概率課程裏經常出現：透過 $\mathrm{P}(\min > x)$ 求最小值的分佈，以及對非負隨機變量（random variable）計算 $\mathrm{E}(Y) = \int_0^\infty \mathrm{P}(Y > y)\,\mathrm{d}y$。這個規律還可以延續下去：在高為 1 的 n 維單形（simplex）中，到最近一個面的距離的期望值是 $1/(n+1)^2$。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩個工具都有細緻的論述。

詳細解答

STEP III 2012，第 13 題

概率與統計 • 截尾正態分佈

STEP III 2012，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/12-s3-q13

關鍵思路

在某區間上的條件期望（conditional expectation），就是 $z\,f(z)$ 在該區間上的積分，再除以該區間的概率。對標準正態分佈（standard Normal）而言，$z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 恰好是 $-\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 的導數，因此這個積分可以精確求出。其餘的工作只是標準化（standardising），即 $X = \mu + \sigma Z$，以及按 X 的正負號把 $|X|$ 拆開處理。

解答

全文以 $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$ 表示 Z 的概率密度函數（probability density function），於是 $\Phi'(z) = \phi(z)$ 及 $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$。

第 (i) 部分

在 $a < Z < b$ 的條件下，Z 的條件密度在 (a, b) 上為 $\phi(z)/\mathrm{P}(a < Z < b)$，而 $\mathrm{P}(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$。因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z \mid a < Z < b) &= \frac{1}{\Phi(b) - \Phi(a)} \int_a^b z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)} \Big[-\mathrm{e}^{-z^2/2} \Big]_a^b \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-a^2/2} - \mathrm{e}^{-b^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)},
\end{aligned}$$

因為 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(-\mathrm{e}^{-z^2/2}\big) = z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$。這就是所求的結果。由於該積分收斂（converges），當 $b = \infty$（或 $a = -\infty$）時結果同樣成立，只需把 $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$ 及 $\Phi(\infty) = 1$ 代入理解即可。

第 (ii) 部分

設 $X = \mu + \sigma Z$，其中 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ 且 $\sigma > 0$。由於 $\sigma > 0$，

$$X > 0 \iff Z > -\mu/\sigma,$$

所以以 $X > 0$ 為條件，等同於以 $Z > -\mu/\sigma$ 為條件。期望在條件下同樣是線性（linear）的，故

$$\mathrm{E}(X \mid X > 0) = \mathrm{E}(\mu + \sigma Z \mid Z > -\mu/\sigma) = \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z \mid Z > -\mu/\sigma),$$

此即所求。

$|X|$ 的平均值。令 $c = \mu/\sigma$。在第 (i) 部分中取 $a = -c$ 及 $b = \infty$，得

$$\mathrm{E}(Z \mid Z > -c) = \frac{\mathrm{e}^{-c^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\big(1 - \Phi(-c)\big)} = \frac{\phi(c)}{p}, \qquad \text{其中} p = \mathrm{P}(X > 0) = 1 - \Phi(-c).$$

把上一條式子乘以 p，得

$$\mathrm{E}(X;\, X > 0) := \mathrm{E}(X \mid X > 0)\,\mathrm{P}(X > 0) = \mu p + \sigma\phi(c).$$

想一想 怎樣才能不再計算第二個積分，就得到 $X < 0$ 部分的貢獻？

兩部分加起來就是整個平均值：$\mathrm{E}(X;\, X > 0) + \mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mathrm{E}(X) = \mu$（事件 $X = 0$ 的概率為 0）。所以 $\mathrm{E}(X;\, X < 0) = \mu - \mu p - \sigma\phi(c)$。在 $X < 0$ 時有 $|X| = -X$，因此

$$\begin{aligned} m = \mathrm{E}|X| &= \mathrm{E}(X;\, X > 0) - \mathrm{E}(X;\, X < 0) \\ &= 2\big(\mu p + \sigma\phi(c)\big) - \mu \\ &= \mu(2p - 1) + 2\sigma\phi(c). \end{aligned}$$

最後，$2p - 1 = 1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)$ 及 $2\phi(c) = \sqrt{2/\pi}\,\mathrm{e}^{-\mu^2/(2\sigma^2)}$，得

$$m = \mu\big(1 - 2\Phi(-\mu/\sigma)\big) + \sigma\sqrt{2/\pi}\,\exp\big(-\tfrac{1}{2}\mu^2/\sigma^2\big),$$

此即所求。

$|X|$ 的方差。關鍵在於 $|X|^2 = X^2$，所以二階矩（second moment）無須另作計算：

$$\mathrm{E}\big(|X|^2\big) = \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \big(\mathrm{E}X\big)^2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

因此

$$\mathrm{Var}|X| = \mu^2 + \sigma^2 - m^2.$$

驗算

- 若 $\mu = 0$，則 $|X|$ 服從半正態分佈（half-Normal），公式給出 $m = \sigma\sqrt{2/\pi}$，正是熟悉的數值；此時方差為 $\sigma^2(1 - 2/\pi)$，是正數。
- 若 $\mu \gg \sigma$，則 X 幾乎總是正數，$\Phi(-\mu/\sigma) \approx 0$，而指數項極小，所以 $m \approx \mu$ 及 $\mathrm{Var}|X| \approx \sigma^2$，與預期相符。
- 把 μ 換成 $-\mu$ 時，m 的公式不變（利用 $1 - 2\Phi(-c) = -(1 - 2\Phi(c))$），與對稱性 $|X| \sim |-X|$ 吻合。
- 數值上，取 $\mu = 1$、$\sigma = 2$，得 $m \approx 1.7912$ 及 $\mathrm{Var}|X| \approx 1.7917$，與直接數值積分（quadrature）以及 2×10^5 個數值的模擬（simulation）結果一致。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分忘記除以 $\Phi(b) - \Phi(a)$：單是積分本身只是 $\mathrm{E}(Z;\, a < Z < b)$，並非條件期望。
- 寫成 $\mathrm{E}|X| = \mathrm{E}(X \mid X > 0)$：條件期望必須分別以 $\mathrm{P}(X > 0)$ 及 $\mathrm{P}(X < 0)$ 加權。
- 用另一個積分去計算 $\mathrm{E}(X^2)$，其實 $|X|^2 = X^2$ 即可直接得出。

STEP 之外

$|X|$ 的分佈稱為摺疊正態分佈（folded Normal），而第 (i) 部分中的條件分佈則是截斷正態分佈（truncated Normal）；比值 $\phi(c)/\big(1 - \Phi(-c)\big)$ 稱為逆米爾斯比率（inverse Mills ratio），在計量經濟學（econometrics）中處理刪失（censored）或經篩選數據的模型裏擔當核心角色。技巧 $\phi'(z) = -z\phi(z)$ 亦是用於正態逼近的斯坦因方法（Stein's method）的起點。如想深入了解條件期望，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2012 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。