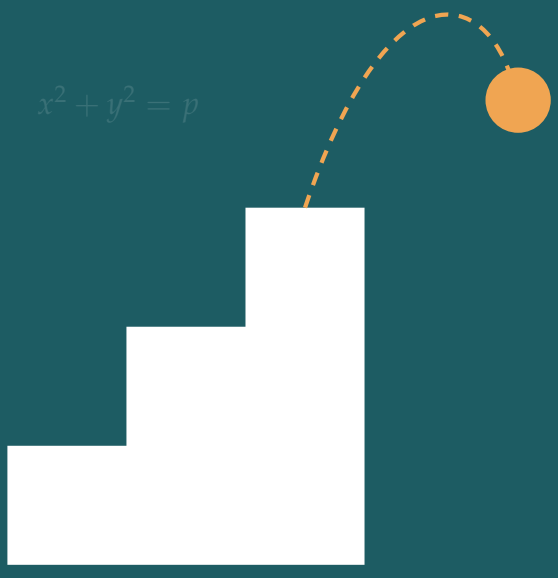
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2010 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2010 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2010 年詳細解答

2010 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 配方法 純數學 . . . 3

第 2 題 曲線描繪 純數學 . . . 7

第 3 題 和化積公式 純數學 . . . 12

第 4 題 代換積分法 純數學 . . . 16

第 5 題 二項式係數恆等式 純數學 . . . 19

第 6 題 降階法 純數學 . . . 22

第 7 題 向量與相交直線 純數學 . . . 25

第 8 題 無窮遞降法 純數學 . . . 29

第 9 題 摩擦力與平衡 力學 . . . 32

第 10 題 質量運動學 力學 . . . 36

第 11 題 圓上的碰撞 力學 . . . 40

第 12 題 長尾和求期望值 概率與統計 . . . 43

第 13 題 酒鬆過程的等候時間 概率與統計 . . . 47

STEP II

第 1 題 曲率與密切圓 純數學 . . . 51

第 2 題 三角函數積分法 純數學 . . . 54

第 3 題 斐波那契數與遞推關係 純數學 . . . 58

第 4 題 代換積分法 純數學 . . . 61

第 5 題 向量夾角與圓錐 純數學 . . . 64

第 6 題 正四面體的幾何 純數學 . . . 68

第 7 題 三次方程 純數學 . . . 72

第 8 題 曲線之間的面積 純數學 . . . 76

第 9 題 相撞的拋體 力學 . . . 80

第 10 題 彈性碰撞 力學 83
第 11 題 力平衡 力學 87
第 12 題 均值與中位數 概率與統計 91
第 13 題 獨立事件 概率與統計 95

STEP III

第 1 題 平均值與方差 純數學 99
第 2 題 定積分 純數學 103
第 3 題 單位根 純數學 107
第 4 題 多項式的公共根 純數學 111
第 5 題 坐標幾何作圖 純數學 115
第 6 題 三維空間中的旋轉 純數學 119
第 7 題 麥克勞林級數 純數學 122
第 8 題 利用商法則積分 純數學 126
第 9 題 圓上的運動 力學 130
第 10 題 微小振動 力學 133
第 11 題 摩擦力與相對運動 力學 136
第 12 題 幾何分佈的期望值 概率與統計 140
第 13 題 線性組合的相關性 概率與統計 144

詳細解答

STEP I 2010，第 1 題

純數學 • 配方法

> **STEP I 2010，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q1

關鍵思路

這個恆等式（identity）把一個不易處理的二次式改寫成兩個平方之和再加一個常數。只要留意到第二條方程也可以用同樣的兩個括號 $x-y+2$ 和 $2x-y$ 來表示，問題就變成兩個新未知數的兩條簡單方程。這兩條方程對新未知數的平方而言是線性的，所以可以直接求解。

解答

恆等式

展開右邊，

$$\begin{aligned} &a(x-y+2)^2+b(cx+y)^2+d \\ &\quad =a(x^2+y^2-2xy+4x-4y+4)+b(c^2x^2+2cxy+y^2)+d \\ &\quad =(a+bc^2)x^2+(a+b)y^2+(2bc-2a)xy+4ax-4ay+(4a+d). \end{aligned}$$

由於這是恆等式，我們可以與 $5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y$ 比較係數（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned}
x: &\quad 4a = 4, && \text{所以} a = 1;\\
y: &\quad -4a = -4, && \text{與上式吻合;}\\
y^2: &\quad a + b = 2, && \text{所以} b = 1;\\
xy: &\quad 2bc - 2a = -6, && \text{所以} 2c = -4,\ c = -2;\\
x^2: &\quad a + bc^2 = 5, && \text{驗算：} 1 + 4 = 5;\\
\text{常數項}: &\quad 4a + d = 0, && \text{所以} d = -4.
\end{aligned}$$

注意，單憑 x^2 的係數只能得出 $c^2 = 4$；決定正負號的是 xy 的係數。所以

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = -2, \qquad d = -4,$$

即

$$5x^2 + 2y^2 - 6xy + 4x - 4y \equiv (x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 4,$$

其中我們把 $(-2x + y)^2$ 寫成 $(2x - y)^2$。

聯立方程

根據恆等式，第一條方程變成

$$(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 13.$$

想一想 第二條方程看來不一樣。它可以用同樣的兩個括號來表示嗎？

它含 x 和 y 的一次項是 $8x - 8y$，是第一條方程的兩倍。這提示我們試試 $2(x - y + 2)^2$，它的一次項正好相符：

$$2(x - y + 2)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 8y + 8.$$

左邊餘下的部分是

$$6x^2 + 3y^2 - 8xy + 8x - 8y - 2(x - y + 2)^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy - 8 = (2x - y)^2 - 8.$$

所以第二條方程是 $2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 - 8 = 14$，即

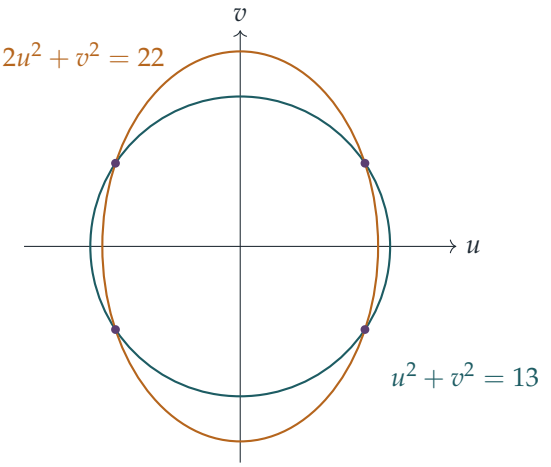
$$2(x - y + 2)^2 + (2x - y)^2 = 22.$$

（你也可以沿用求恆等式的方法，在 $\alpha(x - y + 2)^2 + \beta(\gamma x + y)^2 + \delta$ 中比較係數而得出這個結果。）

現在設 $u = x - y + 2$ 及 $v = 2x - y$。方程組變成

$$u^2 + v^2 = 13, \qquad 2u^2 + v^2 = 22.$$

兩式相減得 $u^2 = 9$，於是 $v^2 = 4$。所以 $u = \pm 3$ 及 $v = \pm 2$，兩者的正負號可獨立選取，共得四組 (u, v)。



要還原為 x 和 y，可以相減：$v - (u - 2) = (2x - y) - (x - y) = x$，所以

$$x = v - u + 2, \qquad y = 2x - v = v - 2u + 4.$$

每組 (u, v) 恰好對應一組 (x, y)，因為這個變數代換（change of variables）是線性而且可逆的。四個解如下：

u	v	x	y
3	2	1	0
3	−2	−3	−4
−3	2	7	12
−3	−2	3	8

所以

$$(x, y) = (1, 0), \quad (-3, -4), \quad (7, 12), \quad (3, 8).$$

驗算

代入 $(1, 0)$：第一條方程得 $5 + 4 = 9$，第二條得 $6 + 8 = 14$。對於 $(7, 12)$：$245 + 288 - 504 + 28 - 48 = 9$ 及 $294 + 432 - 672 + 56 - 96 = 14$。電腦已在一千個隨機有理點上驗

證這兩個恆等式，並確認四組解全部滿足兩條方程。以窮舉法搜尋所有滿足 $|x|, |y| \leq 50$ 的整數對，找到的正好就是這四個解。兩條圓錐曲線（conic）最多相交於四點，所以我們不可能有所遺漏。

常見錯誤

- 由 $c^2 = 4$ 直接取 $c = 2$，而沒有核對 xy 的係數。
- 只取正平方根，結果只找到一個解而不是四個。
- 直接從原來的方程消去一個變數。這樣會得出一條四次方程（quartic），用手計算非常費力。

STEP 之外

把二次型（quadratic form）寫成平方的組合，是二次型理論的起點。把對稱矩陣（symmetric matrix）對角化（diagonalise），總可以找到一個線性變數代換，把 $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ 化為 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$，而圓錐曲線正是這樣分類的。這一題的兩條方程碰巧共用同一對平方，所以才能如此乾淨俐落地分離開來。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）清楚講解了對稱矩陣和二次型。

詳細解答

STEP I 2010，第 2 題

純數學 • 曲線描繪

STEP I 2010，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q2

關鍵思路

用商法則（quotient rule）求導，並抽出永不為零的因子 e^x。這樣駐點（stationary point）就是一個二次式的根，所以「有兩個駐點」其實是關於其判別式（discriminant）的一個條件。至於繪畫略圖，同一個二次式的正負號告訴我們曲線在哪裏上升、在哪裏下降，而曲線在漸近線（asymptote）附近以及當 $x \to \pm\infty$ 時的表現，則補足其餘的細節。

解答

設 $y = \dfrac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x$，其定義域為 $x \neq b$。利用積法則（product rule），並由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right) = \dfrac{(x-b)-(x-a)}{(x-b)^2} = \dfrac{a-b}{(x-b)^2}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-a}{x-b}\mathrm{e}^x + \frac{a-b}{(x-b)^2}\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x\left[(x-a)(x-b)+(a-b)\right]}{(x-b)^2}.$$

由於 $\mathrm{e}^x > 0$，而且當 $x \neq b$ 時 $(x-b)^2 > 0$，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的正負號與下式的正負號相同：

$$q(x) = (x-a)(x-b) + (a-b) = x^2 - (a+b)x + ab + a - b,$$

而駐點正好就是 q 的根當中不等於 $x = b$ 的那些。

? **想一想** q 的根會否剛好落在 $x = b$，即曲線沒有定義的地方？

這並不會造成問題：$q(b) = a - b$，所以只有當 $a = b$ 時 $x = b$ 才是根。但這時曲線只不過是 $y = \mathrm{e}^x$（在 $x = b$ 處有一個空洞），根本沒有駐點。因此在任何情況下，駐點都恰好

是 q 的實根，而駐點有兩個，當且僅當 q 有兩個相異實根，即其判別式為正：

$$(a+b)^2 - 4(ab+a-b) = (a-b)^2 - 4(a-b) = (a-b)(a-b-4) > 0.$$

兩個因子之積為正，當且僅當兩者皆正或兩者皆負。兩者皆負即 $a-b<0$；兩者皆正即 $a-b>4$（這已保證 $a-b>0$）。因此，若有兩個駐點，必須有

$$a-b<0 \quad \text{或} \quad a-b>4,$$

這正是所要證明的。（反過來說，兩個條件中任何一個成立，都會有兩個駐點。）

第 (i) 部分

取 $a=0$、$b=\frac{1}{2}$，則 $a-b=-\frac{1}{2}<0$，並且

$$y=\frac{x\,\mathrm{e}^x}{x-\frac{1}{2}}, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=(x-1)\big(x+\tfrac{1}{2}\big).$$

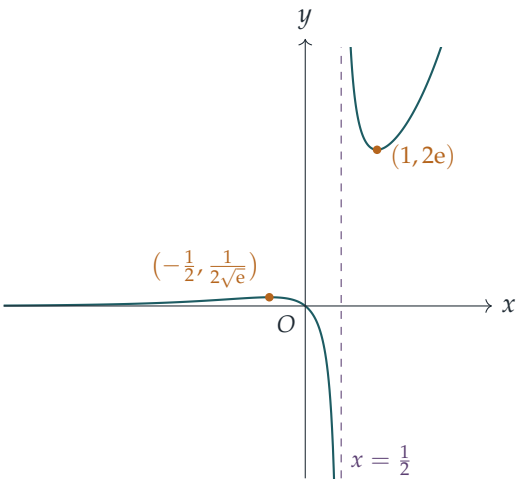
駐點位於 $x=-\frac{1}{2}$ 和 $x=1$，分別在鉛垂漸近線 $x=\frac{1}{2}$ 的兩側，符合題目要求。它們的 y-值為

$$y\big(-\tfrac{1}{2}\big)=\frac{-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{-1}=\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\approx 0.30, \qquad y(1)=\frac{\mathrm{e}}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{e}\approx 5.44.$$

由於當 $x<-\frac{1}{2}$ 時 $q>0$，當 $-\frac{1}{2}<x<1$（其中 $x\neq\frac{1}{2}$）時 $q<0$，而當 $x>1$ 時 $q>0$，所以點 $\big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\big)$ 是局部極大點（local maximum），而 $(1,2\mathrm{e})$ 是局部極小點（local minimum）。

其他特徵：

- 當 $x\to-\infty$ 時，$\frac{x}{x-1/2}\to 1$ 而 $\mathrm{e}^x\to 0$，所以 $y\to 0$。當 $x<0$ 時，x 和 $x-\frac{1}{2}$ 皆為負數，所以 $y>0$：曲線從上方趨近負 x-軸。
- 曲線只在原點與坐標軸相交，而且當 $0<x<\frac{1}{2}$ 時 $y<0$。
- 當 $x\to\frac{1}{2}^-$ 時，$y\to-\infty$；當 $x\to\frac{1}{2}^+$ 時，$y\to+\infty$（分子趨向 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1/2}>0$）。
- 當 $x\to\infty$ 時，$y\to\infty$，增長的速度與 e^x 相若。



第 (ii) 部分

取 $a=\frac{9}{2}$、$b=0$，則 $a-b=\frac{9}{2}>4$，所以同樣有兩個駐點。這時

$$y=\frac{x-\frac{9}{2}}{x}\,\mathrm{e}^x, \qquad q(x)=x^2-\tfrac{9}{2}x+\tfrac{9}{2}=\tfrac{1}{2}(2x-3)(x-3),$$

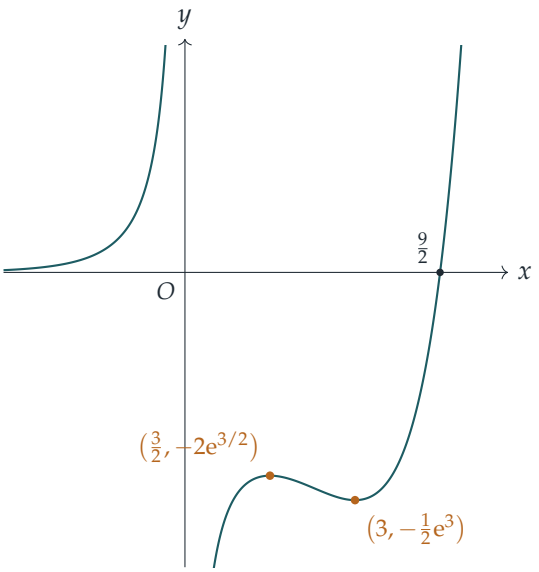
所以駐點位於 $x=\frac{3}{2}$ 和 $x=3$，兩者都在漸近線 $x=0$ 的右方。它們的 y-值為

$$y\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{-3}{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{3/2}=-2\mathrm{e}^{3/2}\approx -8.96, \qquad y(3)=\frac{-\frac{3}{2}}{3}\,\mathrm{e}^3=-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^3\approx -10.04.$$

q 的正負號如下：當 $x<\frac{3}{2}$（$x\neq 0$）時為正，在 $\left(\frac{3}{2},3\right)$ 上為負，當 $x>3$ 時為正，所以 $\left(\frac{3}{2},-2\mathrm{e}^{3/2}\right)$ 是局部極大點，而 $\left(3,-\frac{1}{2}\mathrm{e}^3\right)$ 是局部極小點。留意兩點都位於 x-軸下方，而且極小點只比極大點略低，所以兩點之間的凹陷很淺。

其他特徵：

- 當 $x\to-\infty$ 時，$y\to 0$；當 $x<0$ 時，$x-\frac{9}{2}$ 和 x 皆為負數，所以 $y>0$。在 $x<0$ 上曲線遞增（因為該處 $q>0$），由剛好高於橫軸之處一直向上升往漸近線。
- 當 $x\to 0^-$ 時，$y\to+\infty$；當 $x\to 0^+$ 時，$y\to-\infty$（分子趨向 $-\frac{9}{2}$）。
- 唯一的截點（intercept）是 $\left(\frac{9}{2},0\right)$；在 $\left(0,\frac{9}{2}\right)$ 上 $y<0$，而當 $x>\frac{9}{2}$ 時 $y>0$，並且當 $x\to\infty$ 時 $y\to\infty$。



這裏 y-軸本身就是鉛垂漸近線。

驗算

- 在隨機選取的 (a,b,x) 上以數值方法計算 y 的導數，結果與 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的公式吻合；對隨機選取的 (a,b) 數算 q 變號的次數，亦發現恰好在 $a-b<0$ 或 $a-b>4$ 時才有兩個駐點。
- 在 (i) 中，$y(1)=5.4366=2\mathrm{e}$ 及 $y(-\frac{1}{2})=0.3033$；在 (ii) 中，$y(\frac{3}{2})=-8.9634$ 及 $y(3)=-10.0428$，而各點左右兩旁鄰近的函數值亦確認了它們是極大點還是極小點。
- 檢查條件是否合理：在 (i) 中 $a-b=-\frac{1}{2}$，在 (ii) 中 $a-b=\frac{9}{2}$，兩者都在容許的範圍之內，理應如此。

常見錯誤

- 把判別式展開後，沒有察覺它就是 $(a-b)^2-4(a-b)$；只要以 $a-b$ 來表示，它便可以簡潔地因式分解。
- 忘記檢查 q 的根不可能落在漸近線 $x=b$ 上。
- 在 (ii) 中，把極大點和極小點畫在 x-軸的上下兩側：其實兩者都在軸的下方，而曲線只在 $x=\frac{9}{2}$ 處穿過該軸。

STEP 之外

這裏所用的方法，即根據導數的正負號和各個極限來判斷曲線的形狀，在大學第一門分析(analysis)課程中會得到嚴格的論證：一方面藉着中值定理(Mean Value Theorem)(在某區間上導數為正，確實意味着函數遞增)，另一方面藉着無窮遠處極限的嚴謹定義。當 $x \to \pm\infty$ 時，e^x 勝過任何有理函數（rational function），這也是在該課程中證明的一個標準結果。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把這一切都講解得十分精彩。

詳細解答

STEP I 2010，第 3 題

純數學 • 和化積公式

STEP I 2010，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q3

關鍵思路

和差化積公式（sum-to-product formulae）的作用，正是把兩個正弦（或餘弦）之差化為乘積。橢圓（ellipse）上連接參數（parameter）為 u 和 v 的兩點的弦（chord），其斜率（gradient）為 $\dfrac{b(\sin v - \sin u)}{a(\cos v - \cos u)}$。分子和分母都是差，所以可用這些公式把它們因式分解，約去公因式之後，斜率只取決於和 $u + v$。於是比較兩條弦，就歸結為比較兩個餘切（cotangent）。

解答

三角恆等式

利用複角公式（compound-angle formulae），

$$\begin{aligned}\sin(x+y) - \sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y) - (\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= 2\cos x \sin y,\end{aligned}$$

正如所求。現在，對任意 A 和 B，設 $x = \frac{1}{2}(A+B)$ 及 $y = \frac{1}{2}(A-B)$，則 $x + y = A$ 及 $x - y = B$。這個恆等式（identity）變成

$$\sin A - \sin B = 2\cos \tfrac{1}{2}(A+B)\ \sin \tfrac{1}{2}(A-B).$$

同樣地，

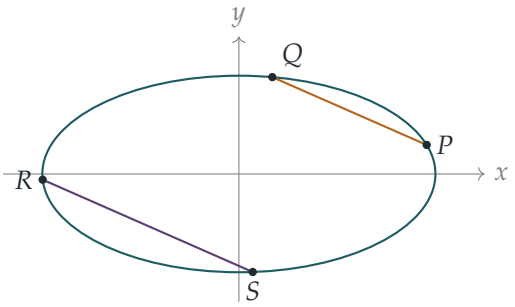
$$\begin{aligned}\cos(x+y) - \cos(x-y) &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= -2\sin x \sin y,\end{aligned}$$

再作相同的代換，便得

$$\cos A - \cos B = -2\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\,\sin\tfrac{1}{2}(A-B).$$

平行弦

四點全都位於橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，按逆時針方向依次為 P、Q、R、S。下圖顯示 $a=2$、$b=1$ 時的一對平行弦。



弦的斜率。在 $[0,2\pi)$ 內取兩個參數 $u<v$，使得通過 $(a\cos u, b\sin u)$ 和 $(a\cos v, b\sin v)$ 的弦不是垂直的，即 $\cos v \neq \cos u$。在兩個恆等式中取 $A=v$、$B=u$，可知其斜率為

$$\frac{b(\sin v-\sin u)}{a(\cos v-\cos u)}=\frac{2b\cos\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}{-2a\sin\frac{1}{2}(u+v)\,\sin\frac{1}{2}(v-u)}=-\frac{b}{a}\cot\tfrac{1}{2}(u+v).$$

這樣約分是合理的：$0<v-u<2\pi$，所以 $\frac{1}{2}(v-u)$ 嚴格介乎 0 與 π 之間，故 $\sin\frac{1}{2}(v-u)\neq 0$。由於原來的分母不等於零，$\sin\frac{1}{2}(u+v)\neq 0$ 亦成立，所以餘切有定義。

記 $\alpha=\frac{1}{2}(p+q)$ 及 $\beta=\frac{1}{2}(r+s)$。PQ 和 SR 都不是垂直的，所以

$$\text{斜率：}PQ=-\frac{b}{a}\cot\alpha,\qquad \text{斜率：}SR=-\frac{b}{a}\cot\beta,$$

其中 $\sin\alpha\neq 0$ 及 $\sin\beta\neq 0$。兩條非垂直的直線平行，當且僅當它們的斜率相等；又因為 $b/a\neq 0$，

$$PQ\parallel SR \iff \cot\alpha=\cot\beta.$$

? **想一想** 為甚麼不能直接「約去 cot」而得出 $\alpha=\beta$？

因為 cot 並非一對一（one-to-one）：它以 π 為週期（period）重複取值。為了顧及這一點，把兩者之差寫成單一個正弦：

$$\cot\alpha-\cot\beta=\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

分母不等於零，所以

$$PQ \parallel SR \iff \sin(\beta-\alpha)=0 \iff \beta-\alpha=k\pi \text{ ，對於某整數} k.$$

確定 k 的值。我們有

$$\beta-\alpha=\tfrac{1}{2}\big[(r-p)+(s-q)\big].$$

由於 $p<r$ 及 $q<s$，兩個括號內的值都是正數，所以 $\beta-\alpha>0$。由於四個參數都在 $[0,2\pi)$ 內，每個括號內的值都小於 2π，所以 $\beta-\alpha<2\pi$。嚴格介乎 0 與 2π 之間的 π 的倍數只有 π 本身，所以 $k=1$。因此

$$PQ \parallel SR \iff \tfrac{1}{2}(r+s-p-q)=\pi \iff r+s-p-q=2\pi.$$

每一步都是等價關係，所以兩個方向都已證明，正如所求。

（這兩條直線不可能重合：一條直線與橢圓最多相交於兩點，而 P、Q、R、S 是四個相異的點。所以這裏的「平行」是指真正平行而且互不重合。）

驗算

- 取 $p=0$、$q=\frac{\pi}{2}$、$r=\pi$、$s=\frac{3\pi}{2}$，則 $r+s-p-q=2\pi$。此時 $P=(a,0)$、$Q=(0,b)$、$R=(-a,0)$、$S=(0,-b)$，而 PQ 和 SR 的斜率都是 $-b/a$。當 $a=2$、$b=1$ 時，兩個斜率都等於 -0.5。
- 對稱性：條件即是 $\frac{1}{2}(r+s)=\frac{1}{2}(p+q)+\pi$。變換 $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ 會令點的參數增加 π，而把弦 PQ 旋轉半周會得出一條平行的弦，與結果吻合。
- 數值檢驗：隨機選取 a,b 以及 $p<q<r<s$，在 $r+s-p-q=2\pi$ 的情況下（約 5000 個特意構造的例子），兩個斜率完全相等，其他情況下則從不相等。

常見錯誤

- 由 $\cot\alpha=\cot\beta$ 直接推出 $\alpha=\beta$。這樣會得到 $r+s=p+q$，在這裏是不可能的。cot 的週期正是整題的關鍵。
- 忘記說明為何可以約去 $\sin\frac{1}{2}(v-u)$，或者沒有利用 $p<q<r<s$ 這個次序來排除 $k=0$ 和 $k=2$。

STEP 之外

把橢圓寫成 $(a\cos t, b\sin t)$，可見它是單位圓（unit circle）在伸縮變換（stretch）$(x,y)\mapsto(ax,by)$ 之下的像。這類線性映射（linear map）把平行線變為平行線，所以這道題其實

是關於圓的問題。在圓上，由角 p 到角 q 的弦垂直於角 $\frac{1}{2}(p+q)$ 處的半徑，於是結果幾乎一目了然。這種利用映射下保持不變的性質來簡化問題的想法，貫穿線性代數和幾何。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是認識線性映射如何運作的好去處。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則有更多 STEP 風格的三角恆等式練習。

詳細解答

STEP I 2010，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP I 2010，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q4

關鍵思路

這個代換（substitution）的用意，是令 x 和 $x+1$ 同時變成分母同為 t^2-1 的簡單分數，於是兩者乘積的平方根可以準確地開出來。積分隨即化為附註中的標準積分。至於體積，把 y 平方後會得到兩個容易處理的對數項和一個交叉項（cross term），而這個交叉項正正就是我們剛求得的積分。

解答

積分

取 $x>0$。代換 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$（其中 $t>1$）是合理的：解出 t 得

$$t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}},$$

而當 t 取遍 $(1,\infty)$ 時，x 取遍 $(0,\infty)$（遞減地），每個 t 對應唯一一個 x 值。

現在

$$x+1=\frac{1}{t^2-1}+1=\frac{t^2}{t^2-1}, \qquad \text{所以} \qquad x(x+1)=\frac{t^2}{(t^2-1)^2}.$$

由於 $t>1$，t 和 t^2-1 都是正數，所以

$$\sqrt{x(x+1)}=\frac{t}{t^2-1}.$$

? **想一想** 為甚麼開平方根時需要 $t>1$？

平方根永不為負，所以 $\sqrt{t^2/(t^2-1)^2} = |t|/|t^2-1|$。條件 $t > 1$ 讓我們可以把兩個絕對值（modulus）符號都去掉。這也解釋了為何這樣選取：$t^2 - 1 > 0$ 正是令 $x > 0$ 的條件。

求導，得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-1}{t}\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right) + c,\end{aligned}$$

這裏用了附註中 $a = 1$ 的情況，以及 $t > 1$ 令 $(t-1)/(t+1)$ 為正數這一事實。

現在利用 $t = \sqrt{x+1}/\sqrt{x}$ 換回 x。把分子和分母同乘以 $\sqrt{x}$，

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2}{(x+1)-x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

其中我們把分子和分母同乘以 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$，並用了平方差（difference of two squares）公式。故此

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + c,$$

正如所求。

體積

當 $x > 0$ 時，曲線上 $y > 0$，因為由 $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ 可得 $1/\sqrt{x} > 1/\sqrt{x+1}$。所以曲線與 x 軸之間的區域旋轉所掃出的體積是 $V = \pi\int y^2\,\mathrm{d}x$。展開後，

$$y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x(x+1)}},$$

而最後一項是第一部分中被積函數（integrand）的兩倍。所以

$$V = \pi\Big[\ln x + \ln(x+1)\Big]_{1/8}^{9/16} - 2\pi\Big[2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\Big]_{1/8}^{9/16}.$$

積分上下限是特意選取的，好讓各個平方根都很整齊：

- 當 $x = \frac{9}{16}$：$\sqrt{x} = \frac{3}{4}$，$\sqrt{x+1} = \frac{5}{4}$，兩者之和為 2，而 $x(x+1) = \frac{225}{256}$；
- 當 $x = \frac{1}{8}$：$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，$\sqrt{x+1} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$，兩者之和為 $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$，而 $x(x+1) = \frac{9}{64}$。

第一個方括號的值是

$$\ln\frac{225}{256} - \ln\frac{9}{64} = \ln\left(\frac{225}{256}\cdot\frac{64}{9}\right) = \ln\frac{25}{4},$$

而第二個是

$$2\ln 2 - 2\ln\sqrt{2} = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2.$$

因此

$$V = \pi \ln\frac{25}{4} - 2\pi\ln 2 = \pi\ln\frac{25}{4} - \pi\ln 4 = \pi\ln\frac{25}{16} = 2\pi\ln\frac{5}{4},$$

這正是我們要的結果。

驗算

- 對答案求導：

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}},$$

  因為括號內等於 $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$。

- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\pi\int_{1/8}^{9/16} y^2\,\mathrm{d}x \approx 1.402052$，與 $2\pi\ln\frac{5}{4} \approx 1.402052$ 吻合。辛普森法則亦印證了 $\int_{1/8}^{9/16} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}} = \ln 2 \approx 0.693147$。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 中的負號。正是這個負號把 $\ln\frac{t-1}{t+1}$ 變成 $\ln\frac{t+1}{t-1}$。
- 把 y^2 展開成 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$：交叉項 $-2/\sqrt{x(x+1)}$ 正是第一部分的用意所在。
- 在體積公式中漏掉因子 π，或者把 π 寫成 2π。

STEP 之外

答案 $2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ 其實就是 $2\,\mathrm{arsinh}\,\sqrt{x}$，因為 $\mathrm{arsinh}\,u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$。用代換 $x = \sinh^2\theta$，一行就可得到同樣的結果。選取能把平方根有理化（rationalise）的代換，是一套有系統的技巧（歐拉代換，Euler substitutions），而它背後支撐着這樣一個結果：凡是 x 與 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的有理函數（rational function），其積分都可以用初等函數（elementary functions）表示。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中還有很多同類的積分。

詳細解答

STEP I 2010，第 5 題

純數學 • 二項式係數恆等式

> **STEP I 2010，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q5

關鍵思路

這些和式每一個都是 $(1+x)^n$ 的二項展開式（binomial expansion）的化身：先對展開式做一些處理，再代入 $x=1$。$\binom{n}{k}$ 前面的因子 k，正是對 x^k 求導（differentiate）所產生的；因子 $\frac{1}{k+1}$，則是對 x^k 積分（integrate）所產生的。因此我們對恆等式（identity）

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

求導或積分，然後代入 $x=1$。至於 k^2，我們需要求導兩次，並在兩次之間乘以 x。

解答

以下 n 一直是正整數，而

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n \qquad (*)$$

對所有實數 x 均成立。由於等式兩邊都是多項式（polynomial），我們可以逐項求導或逐項積分，而恆等式依然成立。

第 (i) 部分

在 $(*)$ 中代入 $x=1$。左邊是 2^n，而每個 x^k 都變成 1，所以

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

把 $(*)$ 對 x 求導。常數項消失，而 $\binom{n}{k}x^k$ 變成 $k\binom{n}{k}x^{k-1}$：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}. \qquad (**)$$

代入 $x = 1$ 得

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\,2^{n-1},$$

這正是所要證明的結果。

第 (iii) 部分

這次我們想要的是 $\binom{n}{k}$ 除以 $k+1$，而這正好可以由 $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}$ 得到。把 $(*)$ 由 0 積分至 1，左邊是

$$\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1},$$

而右邊是

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

因此

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right),$$

這正是所要證明的結果。留意積分下限十分重要：正因為由 0 開始積分，才會出現那個 -1。

第 (iv) 部分

> **想一想** 如果我們只是把 $(**)$ 再求導一次，得到的係數會是 $k(k-1)$，而不是 k^2。怎樣才能得到 k^2 呢？

在第二次求導之前，先把 $(**)$ 乘以 x。這樣 $k\binom{n}{k}$ 旁邊的冪便還原為 x^k，於是下一次求導帶下來的因子恰好又是 k：

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^k.$$

求導，左邊使用積法則（product rule），得

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

（當 $n=1$ 時，左邊第二項含有因子 $n-1=0$，所以這一項根本不存在；恆等式仍然成立。）現在代入 $x=1$：

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{3}+\cdots+n^2\binom{n}{n} &= n\,2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}\\ &= n\,2^{n-2}\big(2+(n-1)\big)\\ &= n(n+1)2^{n-2},\end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

另一個做法是寫成 $k^2=k(k-1)+k$。把 $(*)$ 求導兩次再代入 $x=1$，得 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$，再加上第 (ii) 部分的結果，便得到相同的答案。

驗算

取 $n=3$，此時各係數為 $1,3,3,1$。

- (i) $1+3+3+1=8=2^3$。
- (ii) $3+6+3=12=3\cdot 2^2$。
- (iii) $1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}=\frac{1}{4}(2^4-1)$。
- (iv) $3+12+9=24=3\cdot 4\cdot 2$。

我們亦已用分數作精確計算，對由 1 至 40 的每一個 n 驗證了全部四個恆等式。

常見錯誤

- 在 (iii) 中，忘記了積分下限的貢獻，得出 $\frac{2^{n+1}}{n+1}$。
- 在 (iv) 中，直接對 $(**)$ 求導，得到的是 $\sum k(k-1)\binom{n}{k}$，而不是 $\sum k^2\binom{n}{k}$。

STEP 之外

這些恆等式都有概率上的意義。設 X 為擲一枚公平硬幣 n 次所得正面的次數，則 $\mathrm{P}(X=k)=\binom{n}{k}/2^n$，所以第 (ii) 部分說明 $\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}$，第 (iv) 部分說明 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{n(n+1)}{4}$，由此得 $\mathrm{Var}(X)=\frac{n}{4}$。對母函數（generating function）求導以求出矩（moments），是大學一年級的標準技巧。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）對此有完整的闡述。

詳細解答

STEP I 2010，第 6 題

純數學 • 降階法

> **STEP I 2010，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q6

關鍵思路

只要知道二階線性微分方程（linear second-order equation）的一個解，把通解（general solution）寫成這個已知解乘以一個未知函數 u，所有只含 u 本身（不帶導數）的項便會互相抵消。餘下的只涉及 u' 和 u''，所以它其實是關於 $v = u'$ 的一階方程，而且這個方程是可分離變數（separable）的。這種技巧稱為*降階法*（reduction of order）。

解答

驗證 $y = \mathrm{e}^x$ 是解

若 $y = \mathrm{e}^x$，則 $y' = y'' = \mathrm{e}^x$，所以

$$(x-1)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x - 1 - x + 1)\mathrm{e}^x = 0,$$

因此 $y = \mathrm{e}^x$ 滿足 $(*)$。

關於 u 的方程

設 $y = u\mathrm{e}^x$。由積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (u' + u)\,\mathrm{e}^x,\\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= (u'' + u')\,\mathrm{e}^x + (u' + u)\,\mathrm{e}^x = (u'' + 2u' + u)\,\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

代入 $(*)$ 的左方，並抽出因子 e^x：

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x\big[(x-1)(u''+2u'+u)-x(u'+u)+u\big]\\&\quad=\mathrm{e}^x\big[(x-1)u''+(2x-2-x)u'+(x-1-x+1)u\big]\\&\quad=\mathrm{e}^x\big[(x-1)u''+(x-2)u'\big].\end{aligned}$$

含 u 的項互相抵消，情況與我們驗證 $y=\mathrm{e}^x$ 時完全一樣（那次驗證正是 $u=1$ 的情形）。由於 e^x 永不為零，$y=u\mathrm{e}^x$ 滿足 $(*)$ 當且僅當

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+(x-2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0,$$

這就是 $(**)$，正如題目所求。

先解 v，再解 u

設 $v=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$(**)$ 便化為一階方程

$$(x-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(x-2)\,v.$$

其中一個解是 $v=0$。除此之外，在 $x\neq1$ 且 $v\neq0$ 的區間上，我們可以分離變數：

$$\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v=-\int\frac{x-2}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣求 $\dfrac{x-2}{x-1}$ 的積分？

把分子用分母表示：$x-2=(x-1)-1$，所以

$$\frac{x-2}{x-1}=1-\frac{1}{x-1}.$$

因此

$$\ln|v|=-x+\ln|x-1|+c,\qquad\text{所以}\qquad v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

其中 $C=\pm\mathrm{e}^c$。若容許 $C=0$，便連 $v=0$ 這個解也包括在內，所以 $v=C(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，其中 C 為任意常數。（不難直接驗證，這個解對所有 x（包括 $x=1$）都滿足 $(x-1)v'+(x-2)v=0$。）

現在求積分以得出 u。運用分部積分法（integration by parts），對 $(x-1)$ 求導、對 e^{-x} 求積分，

$$\begin{aligned}\int(x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}+\int\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=-(x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=-x\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

所以 $u = -Cx\mathrm{e}^{-x} + B$。把 $-C$ 改記為 A，

$$u = Ax\mathrm{e}^{-x} + B,$$

其中 A 和 B 為任意常數。

最後部分

上文已證明，只要 u 滿足 $(**)$，$y = u\mathrm{e}^{x}$ 便滿足 $(*)$。我們求得的 $u = Ax\mathrm{e}^{-x} + B$ 滿足 $(**)$，因為它的導數是 $v = -A(x-1)\mathrm{e}^{-x}$，而這正是關於 v 的方程的解。因此，對任意常數 A 和 B，

$$y = u\mathrm{e}^{x} = \big(Ax\mathrm{e}^{-x} + B\big)\mathrm{e}^{x} = Ax + B\mathrm{e}^{x}$$

都滿足 $(*)$，正如題目所求。

驗算

直接驗證 $y = x$：$y' = 1$，$y'' = 0$，所以 $(*)$ 的左方是 $0 - x + x = 0$。由於 $(*)$ 是線性的，x 和 e^{x} 這兩個解的任何組合 $Ax + B\mathrm{e}^{x}$ 同樣是解。再作一次數值驗算：取 $A = 2$、$B = -1$ 及 $x = 0.5$，則 $y = 1 - \mathrm{e}^{0.5} \approx -0.64872$，$y' = 2 - \mathrm{e}^{0.5} \approx 0.35128$，$y'' = -\mathrm{e}^{0.5} \approx -1.64872$，得出 $(-0.5)(-1.64872) - 0.5(0.35128) - 0.64872 = 0.82436 - 0.17564 - 0.64872 = 0$。

常見錯誤

- 忘記積法則在 y'' 中給出的是 $2u'$（而不是 u'）。
- 沒有先分拆出 1，便直接把 $\frac{x-2}{x-1}$ 當作對數來積分。
- 對 v 求積分以得出 u 時漏掉常數。正是這個常數 B 把原來的解 e^{x} 帶回來。

STEP 之外

降階法適用於任何線性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$：若 y_1 是其中一個解，代入 $y = uy_1$ 總會得出一個關於 u' 的一階方程。配合關於朗斯基行列式（Wronskian）的阿貝爾（Abel）公式，可以證明所有解構成一個二維向量空間（vector space），所以在每個不包含奇點（singular point）$x = 1$ 的區間上，$Ax + B\mathrm{e}^{x}$ 其實就是本題的通解。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（一本常微分方程入門教科書）對這兩個概念都有講解。

詳細解答

STEP I 2010，第 7 題

純數學 • 向量與相交直線

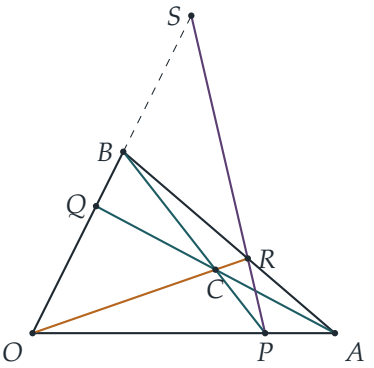
STEP I 2010，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q7

關鍵思路

由於 O、A 和 B 不共線（collinear），平面上每一點都可以寫成 $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}$ 的形式，而且寫法唯一。因此，要找出兩條直線的交點，我們可以把每條直線上的一般點寫成這個形式，然後比較 **a** 和 **b** 的係數（coefficient）。一點位於直線 OB 上，當且僅當它的 **a** 係數為零；位於 AB 上，則當且僅當它的兩個係數之和為 1。這兩個事實幾乎包辦了全部工作。



圖中取 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{7}{20}$。留意 S 位於直線 OB 上，但在線段（segment）OB 之外，而 Q 則位於 O 與 B 之間。

解答

求 p 和 q

直線 BC 上的一般點為

$$\mathbf{b} + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mu\alpha\,\mathbf{a} + \big(1 - \mu(1-\beta)\big)\mathbf{b}.$$

直線 OA 上的點具有 $\lambda\mathbf{a}$ 的形式，沒有 $\mathbf{b}$ 分量。由於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 不平行（因為 O、A、B 不共線），我們可以比較係數。$\mathbf{b}$ 的係數必須為零，所以 $\mu = \dfrac{1}{1-\beta}$；這樣做是可以的，因為 $\beta < 1 - \alpha < 1$，所以 $1 - \beta \neq 0$。於是

$$\mathbf{p} = \mu\alpha\,\mathbf{a} = \frac{\alpha\mathbf{a}}{1-\beta},$$

正如所求。

整個設定在對調 $A \leftrightarrow B$ 及 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 之下是對稱的（這同時對調了 $P \leftrightarrow Q$），所以我們可以直接寫出

$$\mathbf{q} = \frac{\beta\mathbf{b}}{1-\alpha}.$$

點 R

首先，$\mathbf{r} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\,\mathbf{c}$ 是 $\mathbf{c}$ 的純量倍數（scalar multiple），所以 R 位於直線 OC 上。

其次，把它寫成 $\mathbf{r} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}$，其中 $t = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$。事實上 $1 - t = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$，這正是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{r}$ 中的係數。形如 $t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} = \mathbf{b} + t(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ 的點恰好就是直線 AB 上的點，所以 R 也位於 AB 上。

點 S

直線 PR 上的一般點為 $\mathbf{p} + t(\mathbf{r} - \mathbf{p})$，它等於

$$\left[\frac{\alpha}{1-\beta} + t\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\right]\mathbf{a} \;+\; \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}.$$

要使這一點位於 OB 上，$\mathbf{a}$ 的係數必須為零。兩邊除以 $\alpha \neq 0$，得

$$\frac{1}{1-\beta} = t \cdot \frac{(\alpha+\beta) - (1-\beta)}{(1-\beta)(\alpha+\beta)}, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+2\beta-1}.$$

（題目告訴我們這兩條直線相交，這就迫使 $\alpha + 2\beta \neq 1$。若 $\alpha + 2\beta = 1$，則 PR 與 OB 平行。）因此

$$\mathbf{s} = \frac{t\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b} = \frac{\beta}{\alpha+2\beta-1}\,\mathbf{b}.$$

想一想 怎樣由位置向量（position vector）$k\mathbf{b}$ 得出該點與 O 的距離和與 B 的距離之比？

若 X 的位置向量為 $k\mathbf{b}$，則 $\overrightarrow{OX} = k\mathbf{b}$ 而 $\overrightarrow{BX} = (k-1)\mathbf{b}$，所以

$$\frac{OX}{BX} = \frac{|k|}{|1-k|}.$$

這裏的絕對值（absolute value）很重要，因為 k 可以是負數，也可以大於 1，圖中的 S 正是如此。

兩個比

對於 Q，我們有 $k = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$，而且 $0 < k < 1$，因為 $0 < \beta < 1-\alpha$。於是 $1-k = \dfrac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha}$，所以

$$\frac{OQ}{BQ} = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

對於 S，我們有 $k = \dfrac{\beta}{\alpha+2\beta-1}$，所以

$$1-k = \frac{\alpha+2\beta-1-\beta}{\alpha+2\beta-1} = \frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+2\beta-1'}, \qquad \frac{k}{1-k} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1} = -\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}.$$

取絕對值，並利用 $\beta > 0$ 和 $1-\alpha-\beta > 0$，得

$$\frac{OS}{BS} = \left|\frac{k}{1-k}\right| = \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} = \frac{OQ}{BQ}.$$

證明至此完成。取絕對值之前的那個負號說明：Q 內分（divides internally）OB，而 S 則外分（divides externally）它，兩者的比相同。

驗算

- 試取 $\alpha = \frac{1}{2}$，$\beta = \frac{7}{20}$（即圖中的情況）。這時 $\mathbf{q} = 0.7\mathbf{b}$ 而 $\mathbf{s} = 1.75\mathbf{b}$，所以 $OQ/BQ = 0.7/0.3 = \frac{7}{3}$ 及 $OS/BS = 1.75/0.75 = \frac{7}{3}$。公式給出 $\beta/(1-\alpha-\beta) = 0.35/0.15 = \frac{7}{3}$。
- 我們隨機選取 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、α、β，直接解成對的直線方程以計算全部四個交點，再與公式比較，並檢查兩個比是否相等。在超過 8000 個個案中，結果全部吻合。
- 對稱性：對調 $\alpha \leftrightarrow \beta$ 及 $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{b}$，會把 $\mathbf{p}$ 的公式變成 $\mathbf{q}$ 的公式，正該如此。

常見錯誤

- 忘記取絕對值。**s** 的係數可以是負數，也可以大於 1，這時不小心直接用 $k/(1-k)$，便會得出一個負的「長度之比」。
- 比較 **a** 和 **b** 的係數，卻沒有說明為甚麼可以這樣做。這個做法之所以成立，是因為 **a** 與 **b** 不平行。

STEP 之外

點 Q 和 S 以相同的比內分和外分 OB，所以它們是關於 O 和 B 的調和共軛（*harmonic conjugates*）。這裏的圖形，即四條直線連同它們的交點，就是經典的完全四邊形（*complete quadrilateral*）。調和分割（harmonic division）在投影（projection）之下保持不變，是射影幾何（projective geometry）的核心概念之一。把點用兩個獨立向量表示，再比較係數，這個習慣正是線性代數（linear algebra）的起點；在線性代數中，它發展成為基（basis）的概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）闡述了這方面的內容。

詳細解答

STEP I 2010，第 8 題

純數學 • 無窮遞降法

> **STEP I 2010，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q8

關鍵思路

兩部分用的是同一個技巧，稱為*無窮遞降法*（infinite descent）。首先考慮方程模（modulo）某個質數（prime）的情況（第 (i) 部分取 3，第 (ii) 部分取 5），會發現這個質數必定整除每一個未知數。把它除去之後，便得到*完全相同的方程*的一個更小的解，而一個非零整數不可能無止境地被 3（或 5）整除。真正要花工夫的，只是找出哪些餘數（residue）可能出現，而在第 (ii) 部分，四次方（fourth power）的末位數字已替我們完成這一步。

解答

第 (i) 部分

移項整理，得

$$a^3 = 9c^3 - 3b^3 = 3\left(3c^3 - b^3\right),$$

所以 3 整除 a^3。由於 3 是質數，若它整除乘積 $a \cdot a \cdot a$，則它必整除其中一個因子，所以 $3 \mid a$。

設 $a = 3a_1$，其中 a_1 為整數。代入後除以 3：

$$27a_1^3 + 3b^3 = 9c^3 \quad \Longrightarrow \quad 9a_1^3 + b^3 = 3c^3,$$

所以 $b^3 = 3\left(c^3 - 3a_1^3\right)$ 可被 3 整除，同理可得 $3 \mid b$。設 $b = 3b_1$；則

$$9a_1^3 + 27b_1^3 = 3c^3 \quad \Longrightarrow \quad c^3 = 3\left(a_1^3 + 3b_1^3\right),$$

所以亦有 $3 \mid c$。這證明了 a、b 和 c 全都可被 3 整除。

現在再設 $c = 3c_1$。最後一條方程變成 $27c_1^3 = 3a_1^3 + 9b_1^3$，即

$$a_1^3 + 3b_1^3 = 9c_1^3.$$

? **想一想** 我們已證明 3 整除所有未知數。為甚麼這樣就迫使它們全部等於零？

因為 $(a_1, b_1, c_1) = (a/3,\, b/3,\, c/3)$ 同樣是原來方程的一個整數解，所以剛才證明的一切對它同樣適用：a_1、b_1、c_1 可被 3 整除，即 a、b、c 可被 9 整除。把這個論證重複 k 次，可知對每個 $k \geq 1$，3^k 都整除 a、b 和 c 各數。但一旦 $3^k > |n|$，非零整數 n 便不能被 3^k 整除。因此 $a = b = c = 0$，而這顯然是一個解，所以它是唯一的解。

（等價的說法：假如存在 $(0,0,0)$ 以外的解，從中選取 $|a| + |b| + |c|$ 為正數而又盡可能小的一個；那麼 $(a/3, b/3, c/3)$ 也是一個解，而且對應的正數值更小，矛盾。）

第 (ii) 部分

由於 $p^4 = |p|^4$，p^4 的末位數字只取決於 $|p|$ 的末位數字：

n 的末位數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^4 的末位數字	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

（例如 $2^4 = 16$、$3^4 = 81$、$7^4 = 2401$。）所以四次方的末位數字是 0、1、5 或 6，而且末位是 0 或 5 當且僅當 $5 \mid n$。

現在逐項看末位數字。

- $5r^4$ 是 5 的倍數，所以末位是 0 或 5。
- $2q^4$ 的末位是 0（若 q^4 的末位是 0 或 5）或 2（若 q^4 的末位是 1 或 6）。
- p^4 的末位是 0、1、5 或 6。

把 $\{0,1,5,6\}$ 中的一個末位數字與 $\{0,2\}$ 中的一個相加，結果的末位是 $0,1,5,6,2,3,7,8$ 其中之一。要得到 0 或 5，只有 $0+0$ 和 $5+0$ 兩種方式。所以 $2q^4$ 的末位是 0，也就是說 q^4 的末位是 0 或 5，即 $5 \mid q$；而 p^4 的末位是 0 或 5，即 $5 \mid p$。這證明了 p 和 q 可被 5 整除。

（另一做法：根據費馬小定理（Fermat's little theorem），當 $5 \nmid n$ 時 $n^4 \equiv 1 \pmod 5$，所以 $p^4 + 2q^4$ 模 5 同餘（congruent）於 $0+0$、$1+0$、$0+2$ 或 $1+2$，當中只有第一個是 0。）

設 $p = 5p_1$ 及 $q = 5q_1$。則

$$625\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) = 5r^4 \quad \Longrightarrow \quad r^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right),$$

所以 $5 \mid r^4$，又因為 5 是質數，故 $5 \mid r$。設 $r = 5r_1$，得

$$625r_1^4 = 125\left(p_1^4 + 2q_1^4\right) \quad \Longrightarrow \quad p_1^4 + 2q_1^4 = 5r_1^4.$$

所以 $(p/5, q/5, r/5)$ 同樣是同一方程的整數解。

與第 (i) 部分完全一樣，重複這個步驟可知對每個 k，5^k 都整除 p、q 和 r 各數，而這對非零整數來說是不可能的。因此唯一的整數解是 $p = q = r = 0$。

驗算

用電腦搜尋，在 $|a|, |b|, |c| \le 60$ 的範圍內，$a^3 + 3b^3 = 9c^3$ 除 $(0,0,0)$ 外沒有其他解；在 $|p|, |q|, |r| \le 150$ 的範圍內，$p^4 + 2q^4 = 5r^4$ 亦然。逐一檢查 p 和 q 末位數字的全部 100 種組合，可確認只有當兩個末位數字都是 0 或 5 時，$p^4 + 2q^4$ 的末位才是 0 或 5。再用手算快速核對一下：取 $p = q = 1$，得 $p^4 + 2q^4 = 3$，不是 5 的倍數，與上表所示一致。

常見錯誤

- 證明了 3（或 5）整除每個未知數之後便停下來。單憑這一點並不能得出零；關鍵在於除去該因數後，得到的是同一條方程的解，所以論證可以重複下去。
- 由「$3 \mid a^3$」推出「$3 \mid a$」而不說明理由。這一步成立是因為 3 是質數；換成例如由 $9 \mid a^3$ 推出 $9 \mid a$ 就不成立（試試 $a = 3$）。
- 列出末位數字時忘記了負整數。四次方是偶數次冪，所以 $p^4 = |p|^4$，上表已涵蓋所有情況。

STEP 之外

無窮遞降法可追溯至費馬（Fermat），他用這個方法證明了 $x^4 + y^4 = z^2$ 沒有正整數解（從而證明了費馬最後定理（Fermat's Last Theorem）中 $n = 4$ 的情況）。這裏用到的想法是：如果一條方程模某個質數的冪沒有非平凡（non-trivial）解，它就不可能有非平凡的整數解；這個想法進一步發展，便成為 p 進數（p-adic numbers）和哈塞原理（Hasse principle）的研究。達文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是一本介紹同餘與遞降法的優美入門書。

詳細解答

STEP I 2010，第 9 題

力學 • 摩擦力與平衡

> **STEP I 2010，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s1-q9

關鍵思路

先把地面上的那個頂點放在一個已知位置，再沿兩條互相垂直的邊走到質心（centre of mass）：這樣便得出質心與牆的距離。至於平衡（equilibrium），「兩個接觸點均處於極限狀態」意味着每個摩擦力（friction）都等於 μ 乘以相應的法向反作用力（normal reaction），因此沿兩個方向分解力（resolving）後，兩個反作用力都可用重量表示。之後只需一條力矩（moment）方程便大功告成，而設 $\mu = \tan\lambda$ 則可把代數運算化為複角公式（compound-angle formulae）。

解答

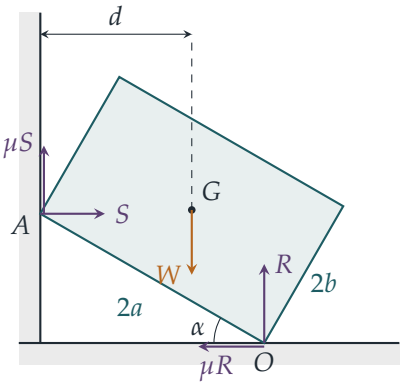
模型

薄片（lamina）是一塊重量為 W 的均勻剛性長方形，所以它的質心 G 就是它的中心。設 O 為地面上的頂點，A 為靠牆的頂點，於是 OA 是一條長度為 $2a$ 的邊，與地面成角 α，而由 O 出發、長度為 $2b$ 的邊則向上並向遠離牆的方向伸展。各力如下：

- 在 O 點：法向反作用力 R 向上，摩擦力 F 沿水平方向；
- 在 A 點：法向反作用力 S 沿水平方向指離牆壁，摩擦力 P 沿鉛垂方向；
- 重量 W 作用於 G，方向向下。

薄片正處於即將滑動的狀態，O 會向遠離牆的方向滑動，A 則會沿牆向下滑動，而摩擦力阻礙這些運動：F 指向牆壁，P 向上。由於兩個接觸點的摩擦力均達極限（limiting friction），

$$F = \mu R, \qquad P = \mu S.$$



質心與牆的距離

由於 OA 的長度為 $2a$，且與水平線成角 α，所以 O 與牆的水平距離為 $2a\cos\alpha$。

由 O 出發，沿 O 點的兩條邊各走一半，便到達 G。沿 OA（向牆的方向）走 a，我們便向牆移近了 $a\cos\alpha$。長度為 $2b$ 的邊與 OA 垂直，所以它與水平線成角 $\frac{1}{2}\pi-\alpha$，並向遠離牆的方向傾斜；沿它走 b，我們便遠離牆壁 $b\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=b\sin\alpha$。因此 G 與牆的距離為

$$d=2a\cos\alpha-a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\cos\alpha+b\sin\alpha,$$

正如所求。同理，G 在地面之上的高度為 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$，而 A 在地面之上的高度為 $2a\sin\alpha$。

平衡條件

沿水平和鉛垂方向分解力，

$$S=\mu R,$$
$$R+\mu S=W.$$

把第一式代入第二式，得 $R(1+\mu^2)=W$，所以

$$R=\frac{W}{1+\mu^2},\qquad S=\frac{\mu W}{1+\mu^2}.$$

現在對 O 取力矩，這樣便消去了 R 和 μR。在水平方向上，G 比 O 更接近牆壁 $2a\cos\alpha-d=a\cos\alpha-b\sin\alpha$，所以重量的力矩為 $W(a\cos\alpha-b\sin\alpha)$，傾向使薄片朝牆的方向轉動。在 A 點，力 S 的作用線位於 O 之上 $2a\sin\alpha$ 的高度，而 μS 沿牆作用，與 O 的水平距離為 $2a\cos\alpha$；兩者都傾向使薄片朝遠離牆的方向轉動。所以

$$W(a\cos\alpha-b\sin\alpha)=S\cdot 2a\sin\alpha+\mu S\cdot 2a\cos\alpha=\frac{2a\mu W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\mu^2}.\qquad(*)$$

想一想 設 $\mu = \tan\lambda$ 如何把右邊化簡？

設 $\mu = \tan\lambda$，則 $1 + \mu^2 = \sec^2\lambda$，所以

$$\frac{\mu}{1+\mu^2} = \tan\lambda\cos^2\lambda = \sin\lambda\cos\lambda,$$
$$\sin\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda} = \frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}.$$

因此 $(*)$ 的右邊是 $2aW\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda)$。約去 W，並利用 $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$，其中 $P = \alpha+\lambda$，$Q = \lambda$，

$$\begin{aligned} b\sin\alpha &= a\cos\alpha - 2a\sin\lambda\sin(\alpha+\lambda) \\ &= a\cos\alpha - a\big(\cos\alpha - \cos(\alpha+2\lambda)\big) \\ &= a\cos(2\lambda+\alpha), \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

正方形薄片

若薄片是正方形，則 $b = a$，兩邊除以 $a \neq 0$，

$$\cos(2\lambda+\alpha) = \sin\alpha = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right).$$

所以對某個整數 k，有 $2\lambda+\alpha = \pm\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + 2k\pi$。我們需要選出正確的分支。這裏 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$(薄片是傾斜的)，而且由於 $\mu > 0$，有 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$，所以 $0 < 2\lambda+\alpha < \frac{3}{2}\pi$。

- 取 $+$ 號得 $2\lambda+\alpha = \frac{1}{2}\pi - \alpha + 2k\pi$；只有 $k = 0$ 落在 $(0, \frac{3}{2}\pi)$ 之內（因為 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 位於 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內），由此得 $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$。
- 取 $-$ 號得 $2\lambda = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$，即 $\lambda = -\frac{1}{4}\pi + k\pi$，而這樣的值沒有一個位於 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。

因此 $\lambda = \frac{1}{4}\pi - \alpha$，正如所求。(特別地，這種極限平衡需要 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$，這與 G 必須位於 O 靠牆一側的要求吻合：$a\cos\alpha > a\sin\alpha$。)

驗算

- 若 $\mu = 0$（$\lambda = 0$)，條件變為 $a\cos\alpha = b\sin\alpha$：$G$ 在 O 的正上方，這正是薄片無需牆壁幫助、僅靠頂點便能平衡的情況。
- 對於 $\alpha = 15°$ 的正方形，結果給出 $\lambda = 30°$，所以 $\mu = 1/\sqrt{3} \approx 0.577$。把 $a = b = 1$、$\alpha = \frac{\pi}{12}$、$\mu = 1/\sqrt{3}$ 代入 $(*)$，兩邊都等於 $W(\cos 15° - \sin 15°) \approx 0.707W$。

- 在數值方面，我們隨機選取了 2000 組長方形和角度，以二分法（bisection）從力和力矩方程求出 μ，並確認 $a\cos(2\lambda+\alpha) = b\sin\alpha$ 成立，誤差在 10^{-14} 以內。

常見錯誤

- 弄錯摩擦力的方向：應先判斷每個接觸點會向哪個方向滑動，然後取相反的方向。
- 把與牆的距離 $a\cos\alpha + b\sin\alpha$ 當作對 O 的力臂（moment arm）；對 O 的力臂其實是 $a\cos\alpha - b\sin\alpha$。
- 忘記了 $\lambda = \frac{3}{4}\pi$ 也是該三角方程的解；它之所以被排除，是因為 $\mu > 0$ 使得 $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

滿足 $\tan\lambda = \mu$ 的角 λ 稱為摩擦角（angle of friction）：在極限摩擦時，總接觸力與法線成角 λ。另有一個巧妙的方法，利用的是以下事實：剛體（rigid body）在三個力作用下平衡，這三個力必須共點（concurrent）：兩個總接觸力與重量必須交於一點，於是問題便化為純粹的幾何問題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）在講述牛頓力學其他內容的同時，也闡述了剛體靜力學和摩擦。

詳細解答

STEP I 2010，第 10 題

力學 • 向量運動學

STEP I 2010，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q10

關鍵思路

一切都源自對 $\mathbf{r}$ 求導再取點積（dot product）：兩個向量之間的夾角可由 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ 求得，而垂直（perpendicular）即表示點積為零。至於第二個質點，關鍵的觀察是：Q 在時刻 t 的位置，正是 P 在時刻 $t-T$ 的位置。把位置寫成複數（complex number）$z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$，最後一部分便化為一行計算。

解答

速度與加速度

記 $\mathbf{r} = \mathrm{e}^t(\cos t,\ \sin t)$。由乘積法則（product rule），

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \mathrm{e}^t\big(\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t\big),\\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \mathrm{e}^t\big((\cos t - \sin t) + (-\sin t - \cos t),\ (\sin t + \cos t) + (\cos t - \sin t)\big)\\ &= \mathrm{e}^t\big(-2\sin t,\ 2\cos t\big).\end{aligned}$$

速度與位移之間的夾角

兩者的大小分別為 $|\mathbf{r}| = \mathrm{e}^t$ 及

$$|\mathbf{v}|^2 = \mathrm{e}^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\right] = \mathrm{e}^{2t}\cdot 2,$$

因為交叉項 $\mp 2\sin t\cos t$ 互相抵消。所以 $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t$。點積為

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{e}^{2t}\left[\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t)\right] = \mathrm{e}^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \mathrm{e}^{2t}.$$

因此，若 θ 為 $\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v}$ 之間的夾角，則

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{r}||\mathbf{v}|} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^t\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以對任何 t 都有 $\theta = \frac{\pi}{4}$，正如題目所求。（由於 $\mathrm{e}^t > 0$，兩個向量都永不為零，所以夾角恆有定義。）

加速度與位移垂直

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{e}^{2t}\left[-2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t\right] = 0,$$

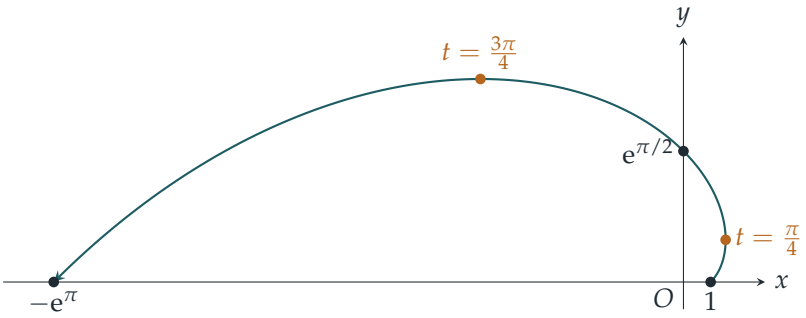
而且兩個向量均非零，所以 $\mathbf{a}$ 恆與 $\mathbf{r}$ 垂直。還可留意，$\mathbf{a} = 2\mathrm{e}^t(-\sin t, \cos t)$ 正是把 $\mathbf{r}$ 旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後再放大至兩倍。

$0 \le t \le \pi$ 時的路徑

在極坐標（polar coordinates）中，路徑為 $r = \mathrm{e}^\theta$，其中 $\theta = t$：質點沿逆時針方向轉動時，與 O 的距離按指數增長，這是一條等角螺線（equiangular spiral），又稱對數螺線（logarithmic spiral）。幾個有用的參考點：

- $t = 0$：位於點 $(1,0)$，沿方向 $(1,1)$ 運動，與 x 軸成 $\frac{\pi}{4}$ 角。
- $t = \frac{\pi}{4}$：$\dot{x} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t) = 0$，所以 x 達到最大，位於點 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pi/4}\right) \approx (1.55, 1.55)$。
- $t = \frac{\pi}{2}$：位於點 $(0, \mathrm{e}^{\pi/2}) \approx (0, 4.81)$。
- $t = \frac{3\pi}{4}$：$\dot{y} = \mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) = 0$，所以 y 達到最大，位於 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}\right) \approx (-7.46, 7.46)$。
- $t = \pi$：位於點 $(-\mathrm{e}^\pi, 0) \approx (-23.1, 0)$，以 $\frac{\pi}{4}$ 角穿過坐標軸，朝左下方前進。

在路徑上每一點，路徑都與由 O 出發的徑向線成 $\frac{\pi}{4}$ 角，其形狀由此確定。



第二個質點

想一想 Q 在時刻 t 位於何處？試以 P 的運動來表示。

Q 到達每一點的時間都比 P 遲 T，所以在時刻 t，它正處於 P 在時刻 $t-T$ 的位置：

$$\mathbf{r}_Q(t) = \mathbf{r}(t-T) = \mathrm{e}^{t-T}\big(\cos(t-T),\, \sin(t-T)\big).$$

於是

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |\mathbf{r}(t)|^2 + |\mathbf{r}(t-T)|^2 - 2\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t-T) \\ &= \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t-2T} - 2\mathrm{e}^{2t-T}\big(\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T)\big) \\ &= \mathrm{e}^{2t}\big(1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}\big), \end{aligned}$$

其中用到 $\cos t\cos(t-T) + \sin t\sin(t-T) = \cos\big(t-(t-T)\big) = \cos T$。因此

$$|PQ| = k\,\mathrm{e}^t, \qquad k = \sqrt{1 - 2\mathrm{e}^{-T}\cos T + \mathrm{e}^{-2T}},$$

而 k 只取決於 T，與 t 無關。所以 P 與 Q 之間的距離與 e^t 成正比，正如題目所求。（括號內的式子等於 $|1-\mathrm{e}^{-T}\mathrm{e}^{\mathrm{i}T}|^2$，當 $T\neq 0$ 時為正數，因為 $\mathrm{e}^{-T}\neq 1$；所以 $k>0$。）

*複數版本。*設 $z = x+\mathrm{i}y$，則 P 位於 $z_P = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$，而 Q 位於 $z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})(t-T)}$。所以

$$z_P - z_Q = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\big(1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}\big), \qquad |z_P - z_Q| = \mathrm{e}^t\,|1-\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})T}|.$$

這亦顯示 $\overrightarrow{QP}$ 是 z_P 的一個固定複數倍，所以線段 PQ 與 OP 的夾角保持不變：三角形 OQP 的形狀始終如一，只是不斷放大和轉動。

驗算

- 對 $z = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ 求導，得 $\dot z = (1+\mathrm{i})z$ 及 $\ddot z = (1+\mathrm{i})^2 z = 2\mathrm{i}z$。乘以 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 相當於旋轉 $\frac{\pi}{4}$，乘以 $2\mathrm{i}$ 則相當於旋轉 $\frac{\pi}{2}$：最初的兩個結果一目了然。
- 以數值驗證：隨機選取 t，$\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{v}$ 之間的夾角算得 $0.785398\ldots = \frac{\pi}{4}$，且 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0$。取 $T=1$ 時，在所有測試過的 t 值上都有 $|PQ|/\mathrm{e}^t = 0.85895\ldots$，與 $\sqrt{1-2\mathrm{e}^{-1}\cos 1+\mathrm{e}^{-2}}$ 吻合。
- 當 $T\to 0$ 時，$k\approx T\sqrt{2}$，所以 $|PQ|\approx\sqrt{2}\,\mathrm{e}^t T = |\mathbf{v}|T$，即在時間 T 內走過的距離，理應如此。

常見錯誤

- 把 Q 的位置當作 $\mathbf{r}(t+T)$：Q 在 P 的後面，所以它位於 $\mathbf{r}(t-T)$。（答案仍然與 e^t 成正比，但常數不同。）
- 把螺線畫成順時針方向轉動，或者畫成路徑經過原點。質點與 O 的距離為 $\mathrm{e}^t \geq 1$，並隨着質點沿逆時針方向運動而增加。

STEP 之外

曲線 $r = \mathrm{e}^\theta$ 就是對數螺線：以 O 為中心把它縮放，所得的曲線都是它本身旋轉後的結果，這正是相交角保持不變、以及 OQP 形狀不變的原因。在大學一年級的課程中，平面上的運動常以極坐標單位向量 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ 來處理；在這套表示法下，本題的徑向加速度 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 等於零，直接得出垂直的結論。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是為這類問題而發展極坐標的方法。

詳細解答

STEP I 2010，第 11 題

力學 • 圓上的碰撞

STEP I 2010，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

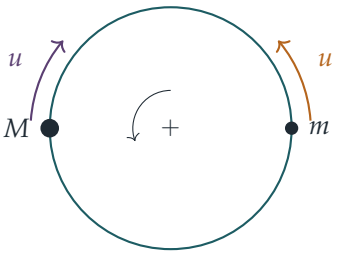
step.maths.org/questions/10-s1-q11

關鍵思路

雖然兩個質點（particle）在圓上運動，但每次碰撞（collision）其實都是沿公切線方向的普通一維碰撞：光滑凹槽只會在垂直於運動的方向施力，所以它既不能改變速率，也不會影響切向的衝量（impulse）。因此我們採用動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law），並以沿圓周量度的帶符號速度來列式。此後，兩個事實已包含全部資訊：帶符號的總動量永遠不變，而每次碰撞都令相對速率乘以 e。

解答

我們把兩個質點看成光滑水平凹槽內的點。取逆時針方向為正，設 m 最初以 u 逆時針運動，M 以 u 順時針運動，所以它們的帶符號速度分別是 u 和 $-u$。



在兩次碰撞之間，每個質點所受的唯一水平力就是光滑凹槽的法向反作用力（normal reaction），它垂直於速度。這個力不作功，所以每個質點的速率保持不變。碰撞時，兩個質點互相施加的衝量沿公切線方向，大小相等、方向相反，而凹槽並不提供任何切向衝量。因此每次碰撞中，沿圓周的帶符號總動量不變，而牛頓定律亦適用於帶符號速度。

第一次碰撞

設第一次碰撞後的帶符號速度為 p（對於 m）和 q（對於 M）。由動量守恆和牛頓定律得

$$mp + Mq = mu - Mu,$$
$$q - p = e\big(u - (-u)\big) = 2eu.$$

把 $q = p + 2eu$ 代入第一條方程，得 $(m+M)p = (m-M)u - 2eMu$，所以

$$p = -\frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad q = p + 2eu = \frac{u\,\big(2em - (M-m)\big)}{M+m}.$$

因此第一次碰撞後，兩個質點的速率分別為

$$\text{質點}m = \frac{u\,(M - m + 2eM)}{M+m}, \qquad \text{質點}M = \frac{u\,|2em - (M-m)|}{M+m}.$$

想一想 哪些正負號表示質點改變了方向？

質點 m 原本沿正方向運動，所以它恰好在 $p < 0$ 時反向。由於 $M > m$ 且 $e \geq 0$，括號內的 $M - m + 2eM$ 是正數，所以 m 必定反向。質點 M 原本沿負方向運動，所以它恰好在 $q > 0$ 時反向，即當

$$2em > M - m.$$

所以在這個條件下，兩個質點都改變方向，正如題目所要求。

再經過 $2n$ 次碰撞之後

為何 $mv - MV = u(M-m)$。開始時，帶符號的總動量是 $mu - Mu = -u(M-m)$。碰撞令它守恆，而在兩次碰撞之間速率不變，所以它永遠保持這個值。

由於兩個質點在每次碰撞時都反向，第一次碰撞後 m 順時針運動而 M 逆時針運動；其後每次碰撞都把這個情況對調。再經過 $2n$ 次碰撞之後，總共發生了 $2n+1$ 次碰撞，是奇數次，所以 m 又是順時針運動，M 又是逆時針運動。它們的帶符號速度是 $-v$ 和 V，而

$$m(-v) + MV = -u(M-m) \quad \Longrightarrow \quad mv - MV = u(M-m).$$

相對速率。每次碰撞後，兩個質點以恆定速率沿圓周向相反方向分開，然後在圓的另一邊再次相遇，而互相接近時的相對速率與分開時相同。牛頓定律指出，碰撞後的分離速率等於碰撞前接近速率的 e 倍。最初的接近速率是 $2u$，所以經過 $2n+1$ 次碰撞後，分離速率是 $2ue^{2n+1}$。由於兩個質點向相反方向運動，這個分離速率就是 $v + V$：

$$v + V = 2ue^{2n+1}.$$

求解。把第二條方程乘以 M，再與第一條相加：

$$(m+M)v = u(M-m) + 2Mue^{2n+1},$$

又把第二條方程乘以 m，再減去第一條：

$$(m+M)V = 2mue^{2n+1} - u(M-m).$$

因此

$$v = \frac{u\big(M-m+2Me^{2n+1}\big)}{M+m}, \qquad V = \frac{u\big(2me^{2n+1}-(M-m)\big)}{M+m}.$$

驗算

- 代入 $n=0$，便得回上面求得的第一次碰撞後的速率。
- 取 $m=2$、$M=3$、$e=0.8$、$u=1$，公式在 $n=0$ 時給出 $(v,V)=(1.16,\,0.44)$，在 $n=1$ 時給出 $(0.8144,\,0.2096)$。逐步模擬兩個質點繞圓運動並碰撞的過程，在第 1 次和第 3 次碰撞後得到的正是這些數值。
- 動能（kinetic energy）不應增加。當 $e=1$ 時，$v = u\,\frac{3M-m}{M+m}$ 而 $V = u\,\frac{3m-M}{M+m}$，你可以驗證 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2$。

常見錯誤

- 混淆速率與速度：牛頓定律和動量守恆都必須以帶符號速度來寫。到最後才轉換為速率。
- 忘記「再經過 $2n$ 次碰撞」即總共 $2n+1$ 次，所以冪次是 e^{2n+1} 而不是 e^{2n}。
- 為凹槽提供的向心力（centripetal force）而擔心。它垂直於運動方向，所以既不改變速率，也不會出現在碰撞方程之中。

STEP 之外

V 的公式顯示，當 $e<1$ 時，題目給定的假設不可能永遠成立：一旦 $2me^{2n+1}$ 跌至低於 $M-m$，較重的質點便不再反向。這裏的動量只是在旋轉的意義下守恆。凹槽的力總是指向通過圓心的方向，所以真正守恆的量是關於圓心的角動量（angular momentum），而圓的半徑剛好約去。這類源自對稱性的守恆定律，是大學一年級力學的核心主題；Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對角動量和碰撞有仔細的論述。

詳細解答

STEP I 2010，第 12 題

概率與統計 • 以尾和求期望值

STEP I 2010，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q12

關鍵思路

尾和公式（tail-sum formula）的來源，是把 $n\,\mathrm{P}(X=n)$ 寫成 $\mathrm{P}(X=n)$ 相加 n 次，然後把各項按另一種次序重新歸併。就企鵝這個問題而言，事件 $X \geq n$ 比 $X = n$ 容易描述得多：開了 $n-1$ 個盒之後仍須再開，當且僅當這 $n-1$ 個盒裏全是同一種企鵝。因此尾概率（tail probability）十分簡單，而剛證明的公式就把 $\mathrm{E}(X)$ 化成兩個等比級數（geometric series）。

解答

定義與尾和公式

由於 X 只取 $1, 2, 3, \ldots$ 這些值，

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}(X=m),$$

前提是這個級數收斂（converge）。

對每個 $n \geq 1$，事件 $X \geq n$ 是各事件 $X = m$（$m \geq n$）的不相交併集（disjoint union），所以 $\mathrm{P}(X \geq n) = \sum_{m \geq n} \mathrm{P}(X=m)$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathrm{P}(X=m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathrm{P}(X=m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m\,\mathrm{P}(X=m) = \mathrm{E}(X).\end{aligned}$$

想一想 為甚麼可以對調兩個求和的次序？

這個二重和是把 $\mathrm{P}(X=m)$ 對所有滿足 $1 \le n \le m$ 的數對 (n,m) 相加。第一行是固定 n，對 m 求和；第二行是固定 m，對 $n=1,\ldots,m$ 這 m 個值求和。每一項都是非負的，而對於非負項級數，總和與求和的次序無關（兩邊都可能是無窮大，若然則兩邊同為無窮大）。不妨把各項想像成排成一個三角形，第 m 行有 m 個 $\mathrm{P}(X=m)$：逐行相加得 $\mathrm{E}(X)$，逐列相加得尾和。公式得證。

尾概率

按題目原意，假設不同盒子的內容互相獨立（independent）。設 D_k 為第 k 個盒內是企鵝爸爸的事件，則 $\mathrm{P}(D_k)=p$，$\mathrm{P}(D_k')=q$。

取 $n \ge 2$。$X \ge n$ 成立，當且僅當首 $n-1$ 個盒尚未湊齊兩種企鵝，即它們全是爸爸或全是媽媽。這兩種情況互不相交，故由獨立性得

$$\mathrm{P}(X \ge n) = p^{n-1} + q^{n-1} \qquad (n \ge 2).$$

特別地，取 $n=4$，

$$\mathrm{P}(X \ge 4) = p^3 + q^3,$$

正是所求。此外，$X \ge 2$ 必然成立，因為一個盒不可能同時裝有兩種企鵝，所以 $\mathrm{P}(X \ge 1) = \mathrm{P}(X \ge 2) = 1$。（上面的公式在 $n=2$ 時給出 $p+q=1$，與此相符；但在 $n=1$ 時卻給出 2，所以 $n=1$ 這一項必須另行處理。）

期望值

由尾和公式，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{P}(X \ge 1) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(p^{n-1} + q^{n-1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p^k + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \\ &= 1 + \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q},\end{aligned}$$

其中兩個等比級數都收斂，因為 $0<p<1$ 及 $0<q<1$（這裏正是用到 $p \ne 0$、$q \ne 0$ 的地方）。由於 $1-p=q$ 及 $1-q=p$，

$$\mathrm{E}(X) = 1 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = 1 + \frac{p^2+q^2}{pq}.$$

而 $p^2+q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 1-2pq$，所以

$$\mathrm{E}(X) = 1 + \frac{1-2pq}{pq} = 1 + \frac{1}{pq} - 2 = \frac{1}{pq} - 1,$$

正是所求。

最後一部分

對正數 p 和 q 應用算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality），

$$\sqrt{pq} \le \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad 0 < pq \le \frac{1}{4}.$$

想一想 取倒數之後，不等號朝哪個方向？

由於 $pq > 0$，取倒數會令不等號反向：$\dfrac{1}{pq} \ge 4$。因此

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{pq} - 1 \ge 4 - 1 = 3,$$

等號成立當且僅當 $p = q = \frac{1}{2}$。（等價地，$pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}$。）

驗算

- 取 $p = q = \frac{1}{2}$：$X - 1$ 是等到第一個與第 1 盒不同的盒子所需的次數，是一個平均值為 2 的幾何變量（geometric variable），所以 $\mathrm{E}(X) = 3$，與 $\frac{1}{1/4} - 1$ 吻合。
- 當 $p \to 0$ 時，$\mathrm{E}(X) \to \infty$：企鵝爸爸十分罕有，所以要等很久。這與 $\frac{1}{pq} - 1$ 趨向無窮大相符。
- 直接計算，對 $n \ge 2$ 有 $\mathrm{P}(X = n) = p^{n-1}q + q^{n-1}p$。取 $p = \frac{1}{3}$，以數值方法把 $n\,\mathrm{P}(X = n)$ 相加得 3.5；另外模擬 200 000 名收集者（取 $p = 0.3$），所得平均值為 3.761，而準確值是 $\frac{1}{0.21} - 1 \approx 3.762$。

常見錯誤

- 在 $n = 1$ 時也使用 $p^{n-1} + q^{n-1}$，結果得出一個等於 2 的「概率」，期望值亦因而多了 1。
- 寫成 $\mathrm{P}(X \ge 4) = p^4 + q^4$：只要首三個盒相同，就需要開第四個盒。
- 在最後一部分忘記了正數之間的不等式取倒數後會反向。

STEP 之外

尾和公式有一個連續版本的孿生公式：對於非負隨機變量（random variable），$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)\,\mathrm{d}x$，證明方法同樣是對調次序（在一般情況下，這一步由托

內利定理（Tonelli's theorem）保證成立）。企鵝問題是贈券收集問題（coupon collector's problem）中只有兩種類型的情況；若有 N 種機會均等的類型，所需盒數的期望值是 $N(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N})$，約為 $N\ln N$。這兩個想法都見於 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門），以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率導論）。

詳細解答

STEP I 2010，第 13 題

概率與統計 • 泊松過程的等候時間

STEP I 2010，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s1-q13

關鍵思路

「第一則短訊在第 1 至第 2 小時之間收到」等同於「第一個小時內沒有短訊，但並非頭兩個小時內都沒有短訊」。兩者各自都是泊松分佈（Poisson distribution）中零個事件的概率，也就是單獨一個指數式。之後代入 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$，一切便化為一條二次方程，餘下的工作交給韋達定理（Vieta's formulas，即根之和與根之積）便可完成，Mildred 的部分也是如此。

解答

我們採用慣常的泊松模型：George 在任何長度為 t 小時的時段內收到的短訊數目服從平均值為 λt 的泊松分佈，而互不重疊的時段內的數目互相獨立（independent）。時間由早上開始時起計。由於時間是連續的，第一則短訊剛好在第 1 小時或剛好在第 2 小時收到的概率為零，所以端點包括與否並無影響。

George 的方程

設 T 為 George 收到第一則短訊前所經過的時間（以小時計）。那麼 $T > t$ 當且僅當 $[0, t]$ 內沒有短訊，所以

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(\text{Poisson}(\lambda t) = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

事件 $\{1 < T \leq 2\}$ 就是從 $\{T > 1\}$ 中剔除 $\{T > 2\}$，而 $\{T > 2\} \subseteq \{T > 1\}$，所以

$$p = \mathrm{P}(1 < T \leq 2) = \mathrm{P}(T > 1) - \mathrm{P}(T > 2) = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

全式乘以 $\mathrm{e}^{2\lambda}$，得 $p\mathrm{e}^{2\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda} - 1$，即

$$p\mathrm{e}^{2\lambda} - \mathrm{e}^{\lambda} + 1 = 0,$$

正是所求。

λ 的兩個正值

設 $x = \mathrm{e}^{\lambda}$。由於 $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{\lambda}$ 是由 $(0,\infty)$ 到 $(1,\infty)$ 的嚴格遞增雙射（bijection），λ 的正數解恰好對應於下式中滿足 $x > 1$ 的解：

$$px^2 - x + 1 = 0.$$

這裏 $p > 0$（它是某事件的概率，而該事件在例如 $[1,2]$ 內剛好收到一則短訊、之前一則也沒有的情況下必定發生），所以這確實是一條二次方程。

> **想一想** 要證明兩根為實數並不困難。但我們怎樣知道兩根都大於 1？

*相異實根。*判別式（discriminant）為 $1 - 4p > 0$，因為 $4p < 1$，所以方程有兩個相異實根 $x_1 < x_2$。

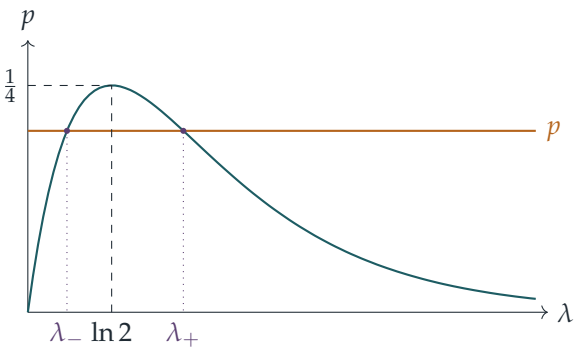
*兩根均大於 1。*根據韋達定理，$x_1 + x_2 = \frac{1}{p}$ 及 $x_1 x_2 = \frac{1}{p}$。於是

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{p} + 1 = 1 > 0,$$

所以 $x_1 - 1$ 與 $x_2 - 1$ 同號。兩者之和為 $x_1 + x_2 - 2 = \frac{1}{p} - 2 > 0$，因為由 $p < \frac{1}{4}$ 可得 $\frac{1}{p} > 4$。因此兩者皆為正數：$x_1 > 1$ 及 $x_2 > 1$。

故此 $\lambda_{\pm} = \ln\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2p}\right)$ 是滿足該方程的兩個相異的 λ 正值。

看看圖像便明白箇中道理。把 $p = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}$ 視為 λ 的函數，它在 $\lambda = 0$ 時為 0，當 $\lambda \to \infty$ 時趨向 0，並且（設 $u = \mathrm{e}^{-\lambda}$，則 $p = u - u^2$）在 $u = \frac{1}{2}$，即 $\lambda = \ln 2$ 時取得極大值 $\frac{1}{4}$。高度為 $p < \frac{1}{4}$ 的水平線與曲線相交兩次：一部冷清的電話（根本很少收到短訊）和一部繁忙的電話（短訊通常在第一個小時內便收到）可以給出相同的 p。



Mildred：$\lambda_1 + \lambda_2$

每部電話單獨來看，都與 George 的情況完全相同，所以 e^{λ_1} 和 e^{λ_2} 都滿足 $px^2 - x + 1 = 0$。這條二次方程只有兩個根，而 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 e^{λ_1} 和 e^{λ_2} 就是它的兩個根 x_1 和 x_2。（這需要 $p < \frac{1}{4}$，而此條件成立，因為存在兩個相異的值：當 $p = \frac{1}{4}$ 時方程有重根。）由根之積，

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = x_1x_2 = \frac{1}{p}, \qquad \text{所以} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \ln\frac{1}{p} = -\ln p.$$

Mildred 的第一則短訊

想一想 Mildred 兩部電話合共收到的短訊總數服從甚麼分佈？

兩個數目是獨立的泊松變量，所以它們之和服從泊松分佈，其平均值為兩個平均值之和：在 t 小時內，她合共收到 $\text{Poisson}\big((\lambda_1 + \lambda_2)t\big)$ 則短訊。換一個說法，設 T_1, T_2 為兩部電話各自的等候時間；它們互相獨立，而她的第一則短訊在 $T = \min(T_1, T_2)$ 時收到，且

$$P(T > t) = P(T_1 > t)\,P(T_2 > t) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

無論用哪一種方法，設 $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$，則 $e^{-\mu} = p$，再沿用處理 George 時的同一論證，可得

$$P(1 < T \leq 2) = e^{-\mu} - e^{-2\mu} = p - p^2 = p(1 - p).$$

驗算

- 取 $\lambda = 0.8$，$p = e^{-0.8} - e^{-1.6} \approx 0.2474$；模擬 2×10^5 個指數分佈（exponential distribution）的等候時間，所得結果為 0.2462。
- 取 $p = 0.2$：兩根為 $\lambda_1 \approx 0.3235$ 和 $\lambda_2 \approx 1.2859$，兩者皆為正數，其和為 $1.6094 = \ln 5 = -\ln 0.2$。模擬 $\min(T_1, T_2)$ 所得的最後一個概率為 0.1601，而 $p - p^2 = 0.16$。
- 合理性檢查：$p(1 - p) < p$，理應如此，因為有兩部電話時，第一則短訊往往較早收到，令「一小時內沒有短訊」的可能性降低。

常見錯誤

- 證明了 x 的兩根是正實數，卻忘記 $\lambda > 0$ 需要 $x > 1$，而不僅是 $x > 0$。
- 在最後一部分把兩部電話的概率相加，或把它們相乘（p^2）。正確的事件是「任何一部電話收到的第一則短訊」，由合併後的速率決定。

STEP 之外

泊松過程（Poisson process）中第一個事件出現前的等候時間服從指數分佈，而本題用到的合併性質（速率分別為 λ_1、λ_2 的獨立泊松過程合併成一個速率為 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松過程）是泊松過程的基本性質之一，與之並列的還有「稀疏化」（thinning，即每個事件各自獨立地以概率 q 保留）。這些想法是排隊論（queueing theory）以及應用概率中許多內容的基礎。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）對泊松過程的處理方式，正好自然地承接本題。

詳細解答

STEP II 2010，第 1 題

純數學 • 曲率與密切圓

> **STEP II 2010，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q1

關鍵思路

「相切」(touches) 的意思是圓與曲線共有點 P，而且在該點的斜率 (gradient) 相同；「斜率的變化率」就是 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。因此我們要找一個圓，使它在 P 點的 y、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 全部與曲線的相應數值一致。把一般圓的方程作兩次隱函數微分 (implicit differentiation)，問題便化為關於圓心的簡單方程。

解答

曲線在 P 點的情況

對於 $y = 1 - x + \tan x$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 + \sec^2 x = \tan^2 x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\tan x \sec^2 x.$$

當 $x = \frac{1}{4}\pi$ 時，$\tan x = 1$ 且 $\sec^2 x = 2$，所以

$$y = 2 - \tfrac{1}{4}\pi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 4.$$

因此 $P = \left(\frac{1}{4}\pi,\ 2 - \frac{1}{4}\pi\right)$。

圓

設圓的方程為 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$。對 x 作隱函數微分，得

$$(x-a) + (y-b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

再微分一次（對第二項使用積法則（product rule）），得

$$1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(y-b)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0.$$

想一想 為甚麼可以把曲線的數值直接代入圓的方程？

這兩條方程在圓上每一點都成立，其中 y、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 是圓本身的數值。題目的兩個條件是說：在 P 點，圓通過 P，而且斜率與 C 相同，二階導數（second derivative）也相同。所以在 P 點我們可以取 $x=\frac{1}{4}\pi$、$y=2-\frac{1}{4}\pi$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=1$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=4$。

由第二條方程得

$$1+1+4(y-b)=0 \quad\Longrightarrow\quad y-b=-\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad b=2-\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi.$$

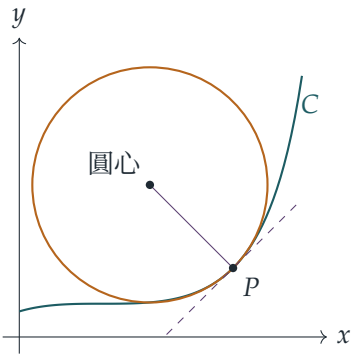
再由第一條方程得

$$x-a=-(y-b)\cdot 1=\tfrac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad a=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}.$$

最後，$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。所以密切圓（osculating circle）的

$$\text{圓心為}\left(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad \text{，半徑為} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

從幾何上看，這個結果是合理的。圓心與 P 相距 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，位於方向 $(-1,1)$ 上，而這個方向與斜率為 1 的切線（tangent）垂直。圓心位於 $y>2-\frac{1}{4}\pi$ 的一側，即曲線的上方；這是對的，因為 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2>0$，曲線在該處向上凹（concave upwards）。



驗算

- 一般的曲率半徑（radius of curvature）公式 $\rho=\left(1+y'^2\right)^{3/2}/|y''|$ 給出 $2^{3/2}/4=1/\sqrt{2}$，與上面求得的結果一致。

- 以數值計算，圓心約為 $(0.2854,\ 1.7146)$，P 約為 $(0.7854,\ 1.2146)$；兩點的距離為 0.70711。取圓的下半部分 $y = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}$，在 $x = 0.7854$ 處作數值微分，得斜率 1.0000 和二階導數 4.000，與曲線吻合。

常見錯誤

- 把圓心放在切線的錯誤一側：$y - b$ 的正負號由第二條方程決定，所以讓代數運算來判斷就可以了。
- 忘記對 $(y-b)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 微分時要用積法則，而 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2$ 這一項正是由此而來。

STEP 之外

密切圓的半徑就是曲率半徑，它的倒數 $\kappa = |y''|/(1+y'^2)^{3/2}$ 就是曲率（curvature），是曲線微分幾何（differential geometry）中的核心量。對於空間曲線，曲率與撓率（torsion）一同出現在弗勒內–塞雷公式（Frenet–Serret formulae）中，這組公式描述曲線如何彎曲和扭轉。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）收錄了更多同類的 STEP 題目。

詳細解答

STEP II 2010，第 2 題

純數學 • 三角函數積分法

STEP II 2010，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q2

關鍵思路

三次式 $7\sin x - 8\sin^3 x$ 看來不易積分，但只要留意到它其實由三倍角公式（triple-angle formula）砌成，即 $\sin 3x$ 的兩倍再加上少許餘項，問題便迎刃而解。接着利用餘弦的三倍角公式，把答案變回 $c = \cos\alpha$ 的多項式（polynomial）。至於 Eustace 的積分，利用 $\sin^2\alpha = 1 - c^2$ 可把他那個（錯誤的）答案化為同一個變數，再比較兩者，便得到一個 c 的四次方程（quartic），而題目已就它的根給了我們提示。

解答

三倍角公式

利用複角公式（addition formulae）及 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，

$$\begin{aligned}\cos 3x = \cos(2x + x) &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x,\end{aligned}$$

正如所求。同樣地，利用 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$，

$$\begin{aligned}\sin 3x = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

第 (i) 部分

由正弦的公式可得 $8\sin^3 x = 6\sin x - 2\sin 3x$，所以

$$7\sin x - 8\sin^3 x = \sin x + 2\sin 3x.$$

這樣積分便容易計算了：

$$\mathrm{I}(\alpha) = \Big[-\cos x - \tfrac{2}{3}\cos 3x\Big]_0^{\alpha} = -\cos\alpha - \tfrac{2}{3}\cos 3\alpha + 1 + \tfrac{2}{3}.$$

由餘弦的公式，$\cos 3\alpha = 4c^3 - 3c$，所以

$$\mathrm{I}(\alpha) = -c - \tfrac{2}{3}(4c^3 - 3c) + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{8}{3}c^3 + c + \tfrac{5}{3},$$

這正是我們要證明的結果。

至於使 $\mathrm{I}(\alpha) = 0$ 的 c 值：取 $\alpha = 0$，積分顯然等於零，所以 $c = 1$ 符合要求（驗算：$-\frac{8}{3} + 1 + \frac{5}{3} = 0$）。事實上這是唯一的值，因為 $8c^3 - 3c - 5 = (c-1)(8c^2 + 8c + 5)$，而當中二次式的判別式（discriminant）為 $64 - 160 < 0$。

第 (ii) 部分

按 Eustace 的法則，$\int \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^2 x$ 及 $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin^4 x$，所以他算出的定積分（definite integral）之值為

$$\mathrm{E}(\alpha) = \Big[\tfrac{7}{2}\sin^2 x - 2\sin^4 x\Big]_0^{\alpha} = \tfrac{7}{2}s^2 - 2s^4, \qquad s = \sin\alpha.$$

為了與第 (i) 部分比較，寫成 $s^2 = 1 - c^2$：

$$\mathrm{E}(\alpha) = \tfrac{7}{2}(1 - c^2) - 2(1 - c^2)^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}c^2 - 2c^4.$$

$\cos\beta = -\frac{1}{6}$ **這個值**。 當 $c = -\frac{1}{6}$ 時，

$$\mathrm{I}(\beta) = -\tfrac{8}{3}\cdot\big(-\tfrac{1}{216}\big) - \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{81} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{245}{162},$$
$$\mathrm{E}(\beta) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{36} - 2\cdot\tfrac{1}{1296} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{648} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{8}{648} = \tfrac{245}{162}.$$

兩者相等，所以 Eustace 只是碰巧得到 $\mathrm{I}(\beta)$ 的正確值。

所有 α 的值。 Eustace 的答案正確，當且僅當 $\mathrm{E}(\alpha) = \mathrm{I}(\alpha)$，即（乘以 6 並整理各項後）

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = 0.$$

? **想一想** 沒有現成公式可用，我們怎樣把這樣的四次式因式分解（factorise）？

我們已經知道兩個根。由剛才的計算，$c = -\frac{1}{6}$ 符合方程，所以 $6c+1$ 是一個因式。另外 $c = 1$（即 $\alpha = 0$）也必定符合，因為 I 和 E 在該處都等於 0。除去因式 $6c+1$（比較 c^3 和 c 的係數），

$$12c^4 - 16c^3 - 3c^2 + 6c + 1 = (6c+1)(2c^3 - 3c^2 + 1),$$

然後，由於 $c = 1$ 是這個三次式的根，

$$2c^3 - 3c^2 + 1 = (c-1)(2c^2 - c - 1) = (c-1)^2(2c+1).$$

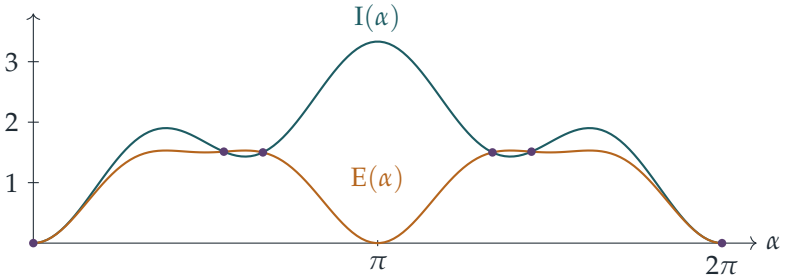
所以條件就是

$$(6c+1)(2c+1)(c-1)^2 = 0, \qquad \text{即} \qquad c = 1,\ -\tfrac{1}{2} \text{ 或 } -\tfrac{1}{6}.$$

由於 $c = \cos\alpha$，而 $[-1,1]$ 內每一個 c 值都對應某個 α，所以 Eustace 得到 $\mathrm{I}(\alpha)$ 的正確值，當且僅當對某個整數 n，

$$\alpha = 2n\pi, \qquad \alpha = 2n\pi \pm \tfrac{2\pi}{3}, \qquad \text{或} \qquad \alpha = 2n\pi \pm \arccos\left(-\tfrac{1}{6}\right).$$

（負的 α 也已包括在內：I 和 E 都只透過 $\cos\alpha$ 取決於 α。）下圖顯示在 $0 \le \alpha \le 2\pi$ 的範圍內，真正的積分（藍綠色）和 Eustace 的答案（琥珀色）；兩條曲線相交於 $\alpha = 0$、$\frac{2\pi}{3}$、$\arccos(-\frac{1}{6}) \approx 1.738$，以及這些點關於 $\alpha = \pi$ 的鏡像。



驗算

- 當 $\alpha = \pi (c = -1)$時，公式給出 $\mathrm{I}(\pi) = \frac{8}{3} - 1 + \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$，與 $\int_0^\pi (\sin x + 2\sin 3x)\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{3}$ 吻合。
- 對原來的被積函數（integrand）使用森遜法則（Simpson's rule），得 $\mathrm{I}(\beta) \approx 1.5123457$，與 $\frac{245}{162} = 1.5123456\ldots$ 吻合；當 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ 時，積分和 Eustace 的答案都等於 1.5。

常見錯誤

- 忘記代入下限：$-\cos 0 - \frac{2}{3}\cos 0 = -\frac{5}{3}$，那個 $+\frac{5}{3}$ 正是由此而來。

- 沒有發現 $c = 1$ 是四次方程的二重根，甚或完全遺漏了它，只寫出 $c = -\frac{1}{2}$ 和 $c = -\frac{1}{6}$。
- 只給出 $[0, \pi]$ 內的 α；題目要求的是所有值。

STEP 之外

把 $\sin^3 x$ 這類冪寫成 $\sin x$ 與 $\sin 3x$ 的組合，正是傅立葉分析（Fourier analysis）的起點：每一個冪 $\sin^n x$ 都是有限個 $\sin kx$ 或 $\cos kx$ 之和，利用 $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ 便可很快求出。以 $\cos x$ 表示 $\cos nx$ 的多項式，就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomial）T_n，其中 $T_3(c) = 4c^3 - 3c$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）說明了為何有了棣美弗定理（de Moivre's theorem），這些恆等式全都變得自然而然。

詳細解答

STEP II 2010，第 3 題

純數學 • 斐波那契數與遞推關係

STEP II 2010，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q3

關鍵思路

已知四項，未知數也有四個：把 $n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $(*)$ 再解方程。竅門是用一條方程除以另一條，這樣可以消去 a，並把條件化為關於 $\lambda + \mu$ 和 $\lambda\mu$ 的陳述。這兩個對稱函數（symmetric functions）使 λ 和 μ 成為某個二次方程（quadratic equation）的根。求出公式之後，第 (iii) 部分的和就可以拆成兩個幾何級數（geometric series）。

解答

第 (i) 部分

把 $n = 0, 1, 2, 3$ 代入 $(*)$，得

$$a + b = 0, \qquad a\lambda + b\mu = 1,$$
$$a\lambda^2 + b\mu^2 = 1, \qquad a\lambda^3 + b\mu^3 = 2.$$

由第一條得 $b = -a$，於是其餘三條變為

$$a(\lambda - \mu) = 1, \qquad a(\lambda^2 - \mu^2) = 1, \qquad a(\lambda^3 - \mu^3) = 2.$$

特別地，由 $a(\lambda - \mu) = 1$ 可知 $a \neq 0$ 且 $\lambda \neq \mu$。因式分解，

$$\lambda^2 - \mu^2 = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu), \qquad \lambda^3 - \mu^3 = (\lambda - \mu)(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2),$$

所以把第二及第三條方程除以 $a(\lambda - \mu) = 1$（因為它不為零，所以可以這樣做），得

$$\lambda + \mu = 1 \qquad \text{和} \qquad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = 2,$$

其中第二條正是所求的結果。

想一想 怎樣從這兩條方程求出 λ 和 μ 本身？

把第二條用和與積表示：$\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu$，所以 $1-\lambda\mu=2$，即 $\lambda\mu=-1$。和為 1、積為 -1 的兩個數是以下方程的根：

$$t^2-t-1=0,\qquad \text{所以}\qquad t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

哪一個根是 λ？由 $a(\lambda-\mu)=1$ 及 $a>0$，需要 $\lambda-\mu>0$，所以 λ 是較大的根。於是 $\lambda-\mu=\sqrt{5}$，而

$$\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad \mu=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\qquad a=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

（若把兩根對調，則必須 $a=-1/\sqrt{5}$，這是不容許的。）反過來，由於上面每一步都可逆，這些值滿足全部四條方程。

第 (ii) 部分

我們有 $F_6=(\lambda^6-\mu^6)/\sqrt{5}$。與其直接展開 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6$，不如利用 λ 是 $t^2=t+1$ 的根這一事實來降次：

$$\begin{aligned}\lambda^2&=\lambda+1,\\ \lambda^3&=\lambda^2+\lambda=2\lambda+1,\\ \lambda^6&=(2\lambda+1)^2=4\lambda^2+4\lambda+1=4(\lambda+1)+4\lambda+1=8\lambda+5.\end{aligned}$$

μ 滿足同一條二次方程，所以完全同樣的推導亦成立，得 $\mu^6=8\mu+5$。因此

$$F_6=\frac{(8\lambda+5)-(8\mu+5)}{\sqrt{5}}=\frac{8(\lambda-\mu)}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=8.$$

第 (iii) 部分

利用 $(*)$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n-\left(\frac{\mu}{2}\right)^n\right].$$

由於 $\lambda\approx1.618$ 而 $\mu\approx-0.618$，兩個公比（common ratio）$\lambda/2$ 和 $\mu/2$ 的模（modulus）都小於 1。所以兩個幾何級數都收斂（converge），我們可以把和拆成兩者之差：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{2^{n+1}}&=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\lambda/2}-\frac{1}{1-\mu/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2-\lambda}-\frac{1}{2-\mu}\right]\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\lambda-\mu}{(2-\lambda)(2-\mu)}=\frac{1}{4-2(\lambda+\mu)+\lambda\mu},\end{aligned}$$

這裏用了 $\lambda - \mu = \sqrt{5}$。由 $\lambda + \mu = 1$ 及 $\lambda\mu = -1$，分母為 $4 - 2 - 1 = 1$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^{n+1}} = 1.$$

驗算

公式應該給出整數：$F_4 = (\lambda^4 - \mu^4)/\sqrt{5}$，配合 $\lambda^4 = 3\lambda + 2$ 得 $F_4 = 3$；而 $F_5 = 5$、$F_6 = 8$ 符合從前四項看到的規律 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$。至於第 (iii) 部分，部分和（partial sums）$0,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{19}{32}, \ldots$ 慢慢逼近 1；用數值方法把首 300 項相加，在機器精度內得 1.0000000。各項只以約 $(0.809)^n$ 的速度衰減，所以收斂得很慢。

常見錯誤

- 忘記利用 $a > 0$ 來決定哪個根是 λ：沒有這個條件，答案便不能確定。
- 除以 $\lambda - \mu$ 時沒有說明它為何不為零（它不為零，因為 $a(\lambda - \mu) = 1$）。
- 把無窮級數拆成兩個級數時，沒有檢查每個級數是否收斂。

STEP 之外

這裏的公式是斐波那契數（Fibonacci numbers）的比奈公式（Binet's formula），而所用的方法是處理線性遞推關係（linear recurrences）的一般方法：λ 和 μ 是 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ 的特徵方程（characteristic equation）$t^2 = t + 1$ 的根。第 (iii) 部分其實是在 $x = \frac{1}{2}$ 處求生成函數（generating function）$\sum F_n x^n = x/(1 - x - x^2)$ 的值（再取一半），結果同樣是 1。生成函數是大學一年級組合數學（combinatorics）和概率的重要工具；關於黃金比例（golden ratio）λ 以及斐波那契數在連分數（continued fractions）理論中的角色，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

詳細解答

STEP II 2010，第 4 題

純數學 • 代換積分法

STEP II 2010，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q4

關鍵思路

代換（substitution）$u = a - x$ 會把區間的兩端對調，並把 $f(x)$ 變成 $f(a-x)$，反之亦然。因此這個積分等於它的「拍檔」，後者的分子正是分母的另一半。把兩個版本相加，分子便等於分母，被積函數（integrand）就變成 1。題目餘下的部分，就是要在偽裝之下認出這個結構。第 (ii) 部分用的是同一招，只是代換改為 $x \mapsto 1/x$，它會把 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的兩端對調。

解答

第 (i) 部分

我們全程假設在 $[0, a]$ 上 $f(x) + f(a-x) \neq 0$，使被積函數有定義。在 I 中代入 $u = a - x$，於是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$。當 $x = 0$ 時，$u = a$；當 $x = a$ 時，$u = 0$。因此

$$I = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u)+f(u)}\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a \frac{f(a-u)}{f(u)+f(a-u)}\,\mathrm{d}u.$$

由於 u 是啞變量（dummy variable），我們可以把它改名為 x，這樣便得到所需的 I 的第二種形式。

現在把 I 的兩個表達式相加：

$$2I = \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a, \qquad \text{所以} \qquad I = \frac{a}{2}.$$

第一個積分。

? **想一想** $f(x) + f(a-x)$ 藏在 $\ln(2 + x - x^2)$ 的哪裏？

這個二次式可以因式分解：$2+x-x^2=(1+x)(2-x)$。所以

$$\ln(2+x-x^2)=\ln(1+x)+\ln(2-x),$$

這是成立的，因為兩個因式在 $[0,1]$ 上都是正數。取 $a=1$ 及 $f(x)=\ln(1+x)$。那麼 $f(1-x)=\ln(2-x)$，而被積函數正好是 $\dfrac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}$。分母永不為零，因為在 $[0,1]$ 上 $2+x-x^2\geq 2$。因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\ln(2+x-x^2)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

第二個積分。 用複角公式（compound-angle formula）展開分母：

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\tfrac{\pi}{4}=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}.$$

所以被積函數是 $\sqrt{2}\,\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$。取 $a=\frac{\pi}{2}$ 及 $f=\sin$，便有 $f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$。分母 $\sin x+\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上是正數。由上面的結果，

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\frac{\pi/2}{2}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

第 (ii) 部分

把這個積分記為 J。它的被積函數是 $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\sin(1/x)}$。分母沒有問題：對於 $x\in[\frac{1}{2},2]$，x 和 $1/x$ 都落在 $[\frac{1}{2},2]\subset(0,\pi)$ 之內，所以 $\sin x>0$ 且 $\sin(1/x)>0$。

> **想一想** 哪一個代換可以把 $\sin x$ 和 $\sin\frac{1}{x}$ 對調，同時保持上下限 $\frac{1}{2}$ 和 2？

答案是 $x=1/u$。這時 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$。當 $x=\frac{1}{2}$ 時，$u=2$；當 $x=2$ 時，$u=\frac{1}{2}$。因子 $\frac{1}{x}$ 變成 u，所以

$$J=\int_2^{1/2}u\cdot\frac{\sin(1/u)}{\sin(1/u)+\sin u}\cdot\Big(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Big)=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin(1/u)}{u\big(\sin u+\sin\frac{1}{u}\big)}\,\mathrm{d}u.$$

把 u 改名為 x，再與 J 原來的形式相加：

$$2J=\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x+\sin\frac{1}{x}}{x\big(\sin x+\sin\frac{1}{x}\big)}\,\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\ln\tfrac{1}{2}=2\ln 2.$$

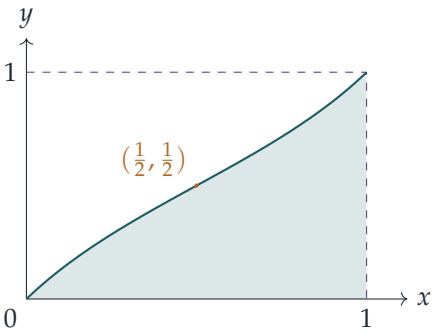
因此

$$\int_{1/2}^{2}\frac{\sin x}{x\big(\sin x+\sin\frac{1}{x}\big)}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

因子 $\frac{1}{x}$ 在這裏是不可或缺的。測度（measure）$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 在 $x\mapsto 1/x$ 之下保持不變（方向除外），正如 $\mathrm{d}x$ 在 $x\mapsto a-x$ 之下保持不變一樣。

驗算

- 被積函數 $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}$ 滿足 $g(x) + g(a-x) = 1$。因此它的圖像繞 $(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 旋轉半圈後不變，所以曲線下的面積是 $a \times 1$ 長方形面積的一半。下圖以第一個積分為例說明這一點。



- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）計算，第一個積分得 0.500000，第二個得 1.110721（而 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1.110721$），第 (ii) 部分得 0.693147（而 $\ln 2 \approx 0.693147$）。

常見錯誤

- 改寫 $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ 時漏掉因子 $\sqrt{2}$，結果得出 $\frac{\pi}{4}$ 而不是 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$。
- 在第 (ii) 部分，忘了跟進 $\frac{1}{x}$ 的去向：它變成 u，再與 $-\frac{1}{u^2}$ 合併，剩下 $-\frac{1}{u}$。

STEP 之外

這兩招都利用了區間的一種對稱性，而這種對稱性令積分的「測度」保持不變：反射（reflection）$x \mapsto a - x$ 保持 $\mathrm{d}x$ 不變，而反演（inversion）$x \mapsto 1/x$ 保持 $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 不變。到了大學，這會發展成不變測度（invariant measure）的概念。例如，$\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是正實數在乘法之下的自然測度，也是梅林變換（Mellin transform）的基礎。關於代換法在實分析（real analysis）上的基礎，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。想看更多 STEP 風格的積分技巧，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP II 2010，第 5 題

純數學 • 向量夾角與圓錐

> **STEP II 2010，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q5

關鍵思路

這一題的一切都歸結為一個事實：方向為 $\mathbf{d}$ 的直線與向量（vector）$\mathbf{a}$ 之間的夾角 θ 滿足 $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\,|\mathbf{a}|}$。「傾角相等」和「傾角為 α」都可以直接化為關於 $\mathbf{d}$ 各分量（components）的方程。至於最後一部分，留意那個笛卡兒方程（Cartesian equation）與你剛剛求得的關係式形狀相同。通過 O 而與某條固定直線成相同夾角的所有直線，合起來就是一個圓錐（cone）。

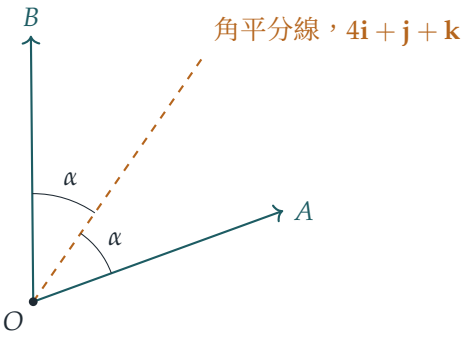
解答

設 $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$，則 $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ 而 $|\mathbf{b}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$。另外 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5-1-1 = 3$。因此

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

由於 $\cos 2\alpha > 0$，角 2α 是銳角，所以 α 介乎 0 與 $\frac{\pi}{4}$ 之間。稍後我們會用到

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) = \tfrac{2}{3}.$$



（此圖只是平面 OAB 的示意圖。）

第 (i) 部分

設 $\mathbf{d} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ 為 L_1 的方向。$\mathbf{d}$ 與 OA 及 OB 所成夾角的餘弦分別是

$$\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{d}|\sqrt{3}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|} \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{d}|\,3\sqrt{3}} = \frac{5m-n-p}{3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|}.$$

由於 cos 在 $[0,\pi]$ 上是一對一（one-to-one）的，夾角相等即餘弦相等。兩邊同乘 $3\sqrt{3}\,|\mathbf{d}|$，得

$$3(m+n+p) = 5m-n-p \quad \Longleftrightarrow \quad m = 2(n+p).$$

> **想一想** 直線本身並沒有指定的方向。假如直線與 OA 成角 θ，但與 OB 成角 $\pi-\theta$，那又如何？

如果我們把「兩條直線之間的夾角」理解為銳角的那一個，那麼兩個餘弦只需在相差一個正負號的意義下相等。取另一個符號，得 $3(m+n+p) = -(5m-n-p)$，即 $4m+n+p=0$。這些直線位於通過 O 且垂直於角平分線的平面上，而該平面包含 $\angle AOB$ 的外角平分線（external bisector）。題目預期的答案是 $m = 2(n+p)$，但知道還有第二族直線存在，也是值得的。

要求 $\angle AOB$ 的角平分線（bisector），我們把沿 OA 和 OB 方向的單位向量（unit vector）相加。兩個單位向量之和平分它們之間的夾角，因為它們張成一個菱形（rhombus）。所以

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{8\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{3\sqrt{3}},$$

於是可取 $m=4$、$n=1$、$p=1$（或其任何非零倍數）。驗算一下：$4 = 2(1+1)$，所以這個方向滿足上面的關係式。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{e} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 為 L_2 的方向。這條直線與 OA 成角 α，當且僅當

$$\frac{u+v+w}{\sqrt{3}\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \pm\cos\alpha.$$

這裏的 $\pm$ 顧及了沿直線的兩個指向。平方後正負號消失，再利用 $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$，得

$$(u+v+w)^2 = 2(u^2+v^2+w^2).$$

把左邊展開為 $u^2+v^2+w^2+2(vw+wu+uv)$ 並整理，便得到關係式

$$u^2+v^2+w^2 = 2(vw+wu+uv).$$

想一想 一個關於方向的條件，怎樣變成一個曲面？

任取一點 $(x,y,z) \neq (0,0,0)$。它恰好位於一條通過 O 的直線上，即方向為 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 的那條直線。根據第 (ii) 部分，該點滿足

$$x^2+y^2+z^2 = 2(yz+zx+xy)$$

當且僅當它所在的那條通過 O 的直線與 OA 成角 α。原點也滿足這個方程。因此，這個曲面（surface）就是所有通過 O 且與直線 OA 成傾角 α 的直線的併集。

這是一個**（雙葉）直立圓錐（right circular cone）**，頂點在原點，軸為直線 $x=y=z$（即直線 OA）。它的半頂角（semi-vertical angle）α 滿足

$$\cos\alpha = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad \tan\alpha = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha \approx 35.3^\circ,$$

即 $\angle AOB$ 的一半。它有兩葉（nappes），因為 μ 取遍所有實數。第 (i) 部分的角平分線位於這個圓錐上：對於 $(4,1,1)$，我們有 $16+1+1 = 18 = 2(1+4+4)$。

驗算

- 點 $(1,1,0)$ 滿足 $2 = 2(0+0+1)$。它與 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 的夾角的餘弦為 $2/(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2/3}$，與預期相符。
- 數值上，$\arccos(1/3)/2 = 0.61548\,\text{rad}$，而角平分線 $4\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 與 OA 和 OB 所成的角都是 $0.61548\,\text{rad}$。
- 恆等式 $x^2+y^2+z^2-2(yz+zx+xy) = (x^2+y^2+z^2)(2-3c^2)$ 成立，其中 c 是與 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 所成夾角的餘弦。所以左邊等於零，當且僅當 $c^2 = \frac{2}{3}$。

常見錯誤

- 用 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 來求角平分線，而不是用單位向量之和。由於 $|\mathbf{b}| \neq |\mathbf{a}|$，$\mathbf{a}+\mathbf{b} = 6\mathbf{i}$ 並不是角平分線。
- 使用 $\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$ 或類似的式子。這裏需要的是倍角公式（double-angle formula）$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$。
- 只把曲面描述為「一個圓錐」，而沒有指出它的頂點、軸和半頂角。

STEP 之外

這個圓錐的方程是一個二次型（quadratic form）：$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} M\mathbf{x} = 0$，其中 M 是對稱矩陣（symmetric matrix）。在大學一年級的線性代數（linear algebra）中，你會按 M 的特徵值（eigenvalues）為這類曲面分類。這裏 M 的對角線元素為 1，非對角線元素為 -1，所以它的特徵值是 -1（沿 $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ 方向）和 2（二重）。一個負特徵值加上兩個相等的正特徵值，正是圓錐的標誌：它是一個圓形的圓錐，軸沿着那個與別不同的特徵值所對應的特徵向量（eigenvector）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）在討論對稱矩陣和二次型時，對此有詳細的闡述。

詳細解答

STEP II 2010，第 6 題

純數學 • 正四面體的幾何

STEP II 2010，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

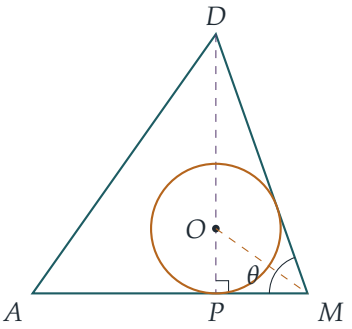
step.maths.org/questions/10-s2-q6

關鍵思路

正四面體（regular tetrahedron）的對稱性極高，幾乎所有事情都發生在同一個鉛垂截面（cross-section）上：通過一條棱的中點、其對頂點和頂尖的那個平面。在這個平面內，每個立體問題都化為一個直角三角形。至於球，對稱性告訴我們球心必定在哪裏，而第 (ii) 部分求得的角則告訴我們球心與每個面相距多遠。

解答

以下一律設 M 為 BC 的中點。每個面都是邊長為 1 的等邊三角形，所以每條中線（median）（例如 AM 或 DM）的長度為 $\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。



第 (i) 部分

由於 D 與 A、B、C 等距，而 DP 垂直於平面 ABC，由畢氏定理（Pythagoras' theorem）得 $PA^2 = DA^2 - DP^2 = DB^2 - DP^2 = PB^2$，同理 $PB = PC$。所以 P 是等邊三角形

ABC 的外心（circumcentre），亦即它的形心（centroid）。形心位於每條中線上由頂點起計三分之二的位置，所以

$$PA = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad PM = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}}.$$

然後，由三角形 DPA 中位於 P 的直角，得

$$PD^2 = DA^2 - PA^2 = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}, \qquad \text{所以} \qquad PD = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

第 (ii) 部分

六條棱的情況完全相同（四面體的對稱變換可以把任何一條棱移到任何另一條棱上），所以只需求出面 ABC 與面 DBC 之間的夾角 θ，這兩個面相交於 BC。

? **想一想** 圖中哪一個角才*真正*是這兩個面之間的夾角？

兩個平面相交於一條直線時，它們的夾角要用兩條直線來量度：兩條直線各在一個平面內，並且在同一點上垂直於交線。在等邊三角形 ABC 中，中線 AM 垂直於 BC；在等邊三角形 DBC 中，中線 DM 垂直於 BC。所以 $\theta = \angle AMD$，而由於 P 在 AM 上，介乎 A 與 M 之間，故亦有 $\theta = \angle PMD$。

三角形 DPM 在 P 處有一直角，其中 $PM = \frac{1}{2\sqrt{3}}$，斜邊 $DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$。因此

$$\cos\theta = \frac{PM}{DM} = \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3},$$

正如所求。（作為驗算，$PD^2 = DM^2 - PM^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$，與第 (i) 部分吻合。）

第 (iii) 部分

最佳的球。設 O 為 DP 上滿足 $OP = r$ 的點，其中 r 有待求出，使得 O 與三個斜面的距離也同樣是 r。根據對稱性，只需處理面 DBC。

平面 AMD 垂直於 BC（它包含 AM 和 DM，兩者都垂直於 BC），所以它垂直於面 DBC，而由 O 到該面的垂線就在這個截面之內：它就是由 O 到直線 MD 的垂線。由於 O 與直線 MP 的距離為 OP，與直線 MD 的距離為 r，而我們想這兩個距離相等，所以 O 必須在 M 處的角 θ 的角平分線（bisector）上。於是

$$r = PM\tan\tfrac{\theta}{2}.$$

由第 (ii) 部分，利用 $\tan^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$，

$$\tan^2\tfrac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\tfrac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

（取正值，因為 θ 是銳角）。因此

$$r = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

以 O 為球心、半徑為 $\frac{\sqrt{6}}{12}$ 的球與四個面全部相切，而且位於四面體之內，因為 O 是一個內點，與每個面的距離都至少為 r。

想一想 我們怎樣知道，無論把球放在哪裏，都不可能比這個球更大？

再大就放不下。在四面體內任取一點 X，設它與四個面的距離為 d_1, d_2, d_3, d_4。把 X 與各頂點連起來，便將四面體分成四個棱錐（pyramid），每個面上各有一個，每個的底面積都是 $\frac{\sqrt{3}}{4}$。把它們的體積相加，

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{4} (d_1 + d_2 + d_3 + d_4).$$

但取 $X = D$（此時三個距離為 0，餘下一個為 PD）可知 $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} PD$。因此對每一個內點都有

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = PD = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

以 X 為球心、半徑為 ρ 的球，只有在每個 $d_i \geq \rho$ 時才能放在四面體之內，所以 $4\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$，即 $\rho \leq \frac{\sqrt{6}}{12}$。所以最大的球的半徑為

$$r = \frac{\sqrt{6}}{12} = \tfrac{1}{4} PD,$$

等號恰好在四個距離全部相等時（即在 O 處）成立。

驗算

- 坐標：取 $A = (0,0,0)$、$B = (1,0,0)$、$C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$、$D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{2/3})$，則六條棱的長度全為 1，而 $PD \approx 0.8165$。
- 任意兩個面的向外單位法向量（unit normal）的點積（dot product）為 $-\frac{1}{3}$，印證了 $\cos\theta = \frac{1}{3}$（約 70.5°）。
- 點 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$ 與四個面的距離全為 $0.20412\ldots = \frac{\sqrt{6}}{12}$。隨機選取的內點，其距離之和總是 $0.8165\ldots$，而其中最小的距離從不超過 0.2041。
- 球心位於 PD 上由底部起計四分之一的高度。這與以下事實吻合：正四面體的內心（incentre）就是它的形心，而形心位於由一個面到其對頂點的四分之一處。

常見錯誤

- 把 $\angle DAM$ 或 $\angle DBA$ 當作兩個面之間的夾角。所用的兩條直線必須都垂直於公共棱，而 DM 和 AM 正是如此。
- 把 PA 當作中線的一半，而不是中線的三分之二。
- 求出了與四個面相切的球，卻沒有說明為何放在別處的球不可能更大。距離之和的恆等式只需兩行便可解決這一點。

STEP 之外

到各個面的距離之和為常數，這是等邊三角形的維維亞尼定理（Viviani's theorem）的三維版本。它源自重心坐標（barycentric coordinates），即把單純形（simplex）內任何一點表示為其頂點的加權平均。角 $\arccos\frac{1}{3}$ 在化學中也會出現：甲烷中鍵與鍵之間的夾角是 $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.5°$，亦即同一個四面體的兩個頂點在中心所張的角。想看更多這類立體推理，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；若想了解運用點積和叉積（cross product）的向量方法，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*。

詳細解答

STEP II 2010，第 7 題

純數學 • 三次方程

STEP II 2010，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q7

關鍵思路

首項係數（leading coefficient）為正的三次曲線，當且僅當它的兩個轉向點（turning points）位於軸的同一側時，才只與軸相交一次。第 (ii) 部分是解不含 x^2 項三次方程的經典技巧：選取代換 $x = u + q/u$，使 x^3 中的交叉項與 $-3qx$ 互相抵消，剩下一條關於 u^3 的二次方程。而第 (iii) 部分原來是同一條三次方程換了個樣子，只是以 p 代替 x。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = x^3 - 3qx - q(1+q)$。則 $f'(x) = 3x^2 - 3q$，它在 $x = \pm\sqrt{q}$ 處為零（由於 $q > 0$，兩者均為實數）。由於 $f''(x) = 6x$，$x = -\sqrt{q}$ 處的點是局部極大點（local maximum），而 $x = \sqrt{q}$ 處的點是局部極小點（local minimum）。

在局部極大點，

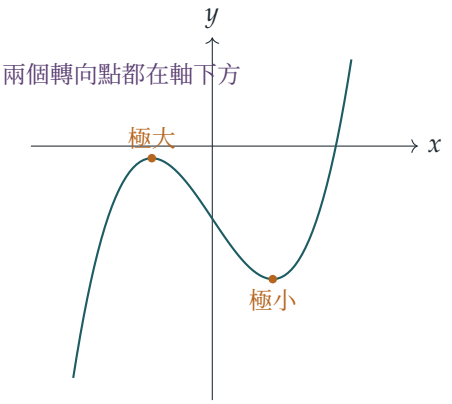
$$\begin{aligned} f(-\sqrt{q}) &= -q\sqrt{q} + 3q\sqrt{q} - q - q^2 \\ &= -q\left(q - 2\sqrt{q} + 1\right) \\ &= -q\left(\sqrt{q} - 1\right)^2. \end{aligned}$$

由於 $q > 0$ 且 $q \neq 1$（因此 $\sqrt{q} \neq 1$），此值嚴格小於零。局部極小值更低：

$$f(\sqrt{q}) = q\sqrt{q} - 3q\sqrt{q} - q - q^2 = -2q\sqrt{q} - q - q^2 < 0.$$

所以兩個轉向點都在 x 軸下方。當 $x < \sqrt{q}$ 時，曲線永遠不會高於其局部極大值，而該值為負，因此曲線在此範圍內不與軸相交。當 $x > \sqrt{q}$ 時，函數嚴格遞增，由負值增至

$+\infty$，因此恰好與軸相交一次。故此曲線只與 x 軸相交一次。



第 (ii) 部分

用二項式定理（binomial theorem）將 $x = u + q/u$ 立方，

$$\begin{aligned} x^3 &= u^3 + 3u^2 \cdot \frac{q}{u} + 3u \cdot \frac{q^2}{u^2} + \frac{q^3}{u^3} \\ &= u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3q\left(u + \frac{q}{u}\right) = u^3 + \frac{q^3}{u^3} + 3qx. \end{aligned}$$

所以 $x^3 - 3qx = u^3 + q^3/u^3$，三次方程變為

$$u^3 + \frac{q^3}{u^3} = q(1+q).$$

兩邊乘以 u^3（注意代換要有意義，須有 $u \neq 0$），得 u^3 所滿足的二次方程

$$\left(u^3\right)^2 - q(1+q)\,u^3 + q^3 = 0.$$

想一想 這條二次方程怎樣因式分解？

兩根之和必須為 $q + q^2$，兩根之積為 $q^3 = q \cdot q^2$，所以兩根是 q 和 q^2：

$$\left(u^3 - q\right)\left(u^3 - q^2\right) = 0.$$

取實數立方根，得 $u = q^{1/3}$ 或 $u = q^{2/3}$。兩者給出相同的 x：

$$q^{1/3} + \frac{q}{q^{1/3}} = q^{1/3} + q^{2/3}, \qquad q^{2/3} + \frac{q}{q^{2/3}} = q^{2/3} + q^{1/3}.$$

直接驗證：設 $s = q^{1/3}$ 及 $x = s + s^2$，則 $x^3 = s^3 + 3s^4 + 3s^5 + s^6$ 而 $3qx = 3s^4 + 3s^5$，所以 $x^3 - 3qx = s^3 + s^6 = q(1+q)$。由第 (i) 部分，當 $q > 0$、$q \neq 1$ 時，此三次方程只有一個實根，所以該實根為

$$x = q^{1/3} + q^{2/3}.$$

第 (iii) 部分

由於 $\alpha+\beta=p$ 及 $\alpha\beta=q$，

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3qp,$$

此即所求。

若其中一根是另一根的平方，則 $\alpha^2=\beta$ 或 $\beta^2=\alpha$，因此無論哪種情況都有

$$(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)=0.$$

這個式子關於 α 和 β 對稱（symmetric），所以可以用 p 和 q 表示。展開得

$$\begin{aligned}(\alpha^2-\beta)(\beta^2-\alpha)&=\alpha^2\beta^2-(\alpha^3+\beta^3)+\alpha\beta\\&=q^2-(p^3-3qp)+q.\end{aligned}$$

令此式等於零，得到關係式

$$p^3-3qp-q(1+q)=0.$$

這正是第 (ii) 部分的三次方程，只是以 p 代替 x。當 $q>0$、$q\neq1$ 且 p 為實數時，p 必然是它唯一的實根，所以

$$p=q^{1/3}+q^{2/3}.$$

這是合理的：此時兩根為 $\alpha=q^{1/3}$ 及 $\beta=q^{2/3}=\alpha^2$，其和為 p，其積為 q。

驗算

取 $q=8$：第 (ii) 部分給出 $x=2+4=6$，而確實 $216-144-72=0$。在第 (iii) 部分，$p=6$ 給出 $t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$，且 $4=2^2$。我們用電腦對數以千計的隨機 q 驗證了 (i) 中兩個轉向點的函數值，對隨機複數 u 驗證了恆等式 $x^3-3qx=u^3+q^3/u^3$，並確認 $p=q^{1/3}+q^{2/3}$ 總是給出一對其中一根為另一根平方的根。

常見錯誤

- 在 (i) 中只檢查局部極小值為負。單憑這一點，曲線仍可能與軸相交三次；關鍵在於局部極大值為負，而這正是用到 $q\neq1$ 的地方。
- 在 (ii) 中擔心 u^3 的兩個值會給出兩個不同的根。它們給出相同的 x，這是必然的，因為 u 和 q/u 的地位是對稱的。

STEP 之外

(ii) 中的代換是一般三次方程的卡爾達諾公式（Cardano's formula）的核心，也正是在這裏，複數（complex numbers）在數學中首次變得無可迴避：當三次方程有三個實根時，關於 u^3 的二次方程反而有複數根。被排除的情況 $q = 1$ 是一個很好的例子。此時 $p = -1$ 也是允許的，而 $t^2 + t + 1 = 0$ 的根是 ω 和 ω^2，即單位的複數立方根（complex cube roots of unity），兩者互為對方的平方。至於多項式方程何時可以用根式（radicals）求解，完整的故事就是伽羅瓦理論（Galois theory），Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）對此有很好的講述。

詳細解答

STEP II 2010，第 8 題

純數學 • 曲線之間的面積

STEP II 2010，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q8

關鍵思路

由於 $\sin x \le 1$，曲線 $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ 永遠不會高於 $y = \mathrm{e}^{-x}$；兩者恰好在 $\sin x = 1$ 之處相遇，而且在該處只是相切（touch）。因此每一塊面積都只是 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ 在相鄰兩個切點之間的單一積分，毋須擔心正負號改變。$\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的積分是標準的「分部積分兩次」題型，而由於積分上下限全都是 $\sin x = 1$ 及 $\cos x = 0$ 的點，反導數（antiderivative）在這些點上會化簡成非常簡單的式子。

解答

草圖

C_1 是大家熟悉的衰減指數函數（decaying exponential），由 $(0,1)$ 開始，遞減並趨向 0。C_2 是一條阻尼正弦波（damped sine wave）：它由原點開始，在 π 的每個倍數處都等於零，而且因為 $-1 \le \sin x \le 1$，它被夾在 $y = \mathrm{e}^{-x}$ 與 $y = -\mathrm{e}^{-x}$ 之間。振盪幅度收縮得非常快；第一個負向凹陷的深度已只有約 0.014（在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 處）。

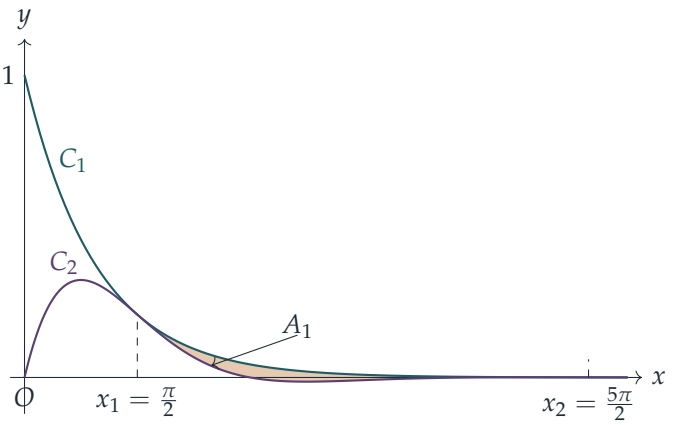
兩條曲線在哪裏相遇？由於 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，

$$\mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x} \iff \sin x = 1 \iff x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

在這些點上，兩條曲線相切而非相交：C_2 處處位於 C_1 之上或之下。事實上，兩者在該處的斜率（gradient）亦相同，因為

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x}\sin x\right) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad \text{當 } \sin x = 1,\ \cos x = 0.$$

留意 C_2 的第一個極大值在 $x = \frac{\pi}{4}$（即 $\cos x = \sin x$ 之處），早於在 $x = \frac{\pi}{2}$ 的第一個切點：草圖應顯示 C_2 先到達峯頂，然後回落，與 C_1 相切。



面積 A_n

第 n 個切點是方程 $\sin x = 1$ 在 $x > 0$ 時的第 n 個解：

$$x_n = \tfrac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi = \tfrac{(4n-3)\pi}{2}, \qquad x_{n+1} = x_n + 2\pi.$$

在 x_n 與 x_{n+1} 之間，有 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\sin x = \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x) \geq 0$，所以 C_1 在整段區間都是上邊界，因此

$$A_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

想一想 怎樣求 $\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的積分？

進行兩次分部積分（integration by parts），便會回到原本的積分。設 $I = \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$。先取 $u = \sin x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，再取 $u = \cos x$ 做一次，

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \int \mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\sin x - \mathrm{e}^{-x}\cos x - \int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

所以 $2I = -\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x)$，而 $I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) + c$。（你可以透過求導來驗證。）

因此 $\mathrm{e}^{-x}(1-\sin x)$ 的一個反導數是

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x).$$

巧妙之處來了：在每個切點上都有 $\sin x = 1$ 及 $\cos x = 0$，所以在這些點上

$$F(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

因此，利用 $x_{n+1} = x_n + 2\pi$，

$$\begin{aligned} A_n = F(x_{n+1}) - F(x_n) &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_n-2\pi}\big(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\big). \end{aligned}$$

最後，$x_n + 2\pi = \frac{(4n-3)\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$，所以

$$A_n = \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\big)\mathrm{e}^{-(4n+1)\pi/2},$$

此即所求。

無窮級數之和

由公式可見 $A_{n+1} = \mathrm{e}^{-2\pi}A_n$，所以各面積組成一個幾何級數（geometric series），首項為 $A_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}$，公比（common ratio）為 $r = \mathrm{e}^{-2\pi}$。由於 $0 < r < 1$，該級數收斂（converges），而且

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi}} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)\mathrm{e}^{-5\pi/2}}{\mathrm{e}^{-2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - 1)} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}. \end{aligned}$$

驗算

- 總和就是 x_1 右方兩曲線之間的全部面積，所以它應等於 $\int_{\pi/2}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty} F(X) - F(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2}$。結果的確如此，而且完全不需要用到級數。
- 數值上，$A_1 \approx 0.10375$，而 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.10394$：正如草圖所示，幾乎全部面積都在第一個區域內，因為 $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0.0019$。對 $\mathrm{e}^{-x}(1 - \sin x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ 上使用辛普森法則（Simpson's rule），得到相同的 0.103746。

常見錯誤

- 誤以為切點就是 C_2 的極大值點。極大值在 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$；兩曲線則在 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 相切。
- 把 $\sin x = \pm 1$ 的每個解都算進去，或把 $\sin x = 1$ 的解當作相隔 π：相鄰兩個切點相隔 2π。
- 計算 $\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ 時弄錯正負號。把答案求導來檢查一下。

STEP 之外

曲線 C_2 是阻尼振盪的形狀，即有摩擦的彈簧的運動，而包絡線（envelope）$\pm e^{-x}$ 決定了振盪衰減的快慢。像 $\int e^{-x} \sin x \, dx$ 這類積分，若視為 $\int e^{(-1+i)x} \, dx$ 的虛部（imaginary part）來計算，會快得多；這個技巧在大學一年級的微分方程（differential equations）及拉普拉斯變換（Laplace transforms）課程中經常用到。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）詳細討論了阻尼振盪。

詳細解答

STEP II 2010，第 9 題

力學 • 相撞的拋體

STEP II 2010，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

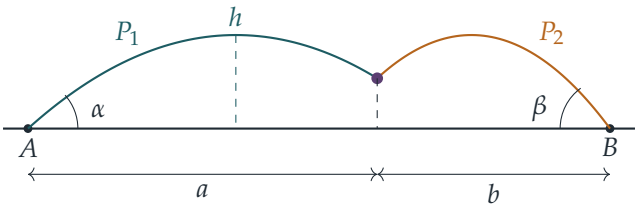
step.maths.org/questions/10-s2-q9

關鍵思路

兩粒同時拋出的質點以相同的加速度 g 下落，所以要令兩者在碰撞一刻的高度相等，唯一的可能是它們的初始豎直速度相等。這樣兩者的豎直運動便完全一樣：最大高度同為 h，在同一時刻到達，而且（若沒有碰撞）會在同一時刻落地。碰撞發生在飛行最高點與落地之間，而每粒質點走過的水平距離與時間成正比，因此這段距離被夾在兩個簡單的界限之間。

解答

我們把兩粒質點都視為只受重力 g 作用、自由運動的拋射體（projectile），並忽略空氣阻力（air resistance）。設 P_1 的速率為 u，P_2 的速率為 v，取拋出時刻為 $t = 0$，並設碰撞發生於時刻 $t_c > 0$。



相同的豎直運動

在時刻 t，P_1 與 P_2 的高度分別為

$$y_1 = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad y_2 = vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

碰撞時 $y_1 = y_2$，故 $(u\sin\alpha - v\sin\beta)\,t_c = 0$；由於 $t_c > 0$，

$$u\sin\alpha = v\sin\beta.$$

因此兩粒質點的豎直運動完全相同。特別地，兩者在同一時刻 T 到達相同的最大高度 h，其中

$$T = \frac{u\sin\alpha}{g} = \frac{v\sin\beta}{g}, \qquad h = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g},$$

而且兩者都會在時刻 $2T$ 回到地面。

想一想 「在空中」和「在 P_1 到達其最大高度之後」這兩個條件，告訴了我們關於 t_c 的甚麼資訊？

P_1 在時刻 T 位於最高點，所以「之後」給出 $t_c > T$。兩粒質點只在 $0 < t < 2T$ 期間位於地面之上，所以要在空中碰撞，便需要 $t_c < 2T$。因此

$$T < t_c < 2T.$$

b 的界限

在水平方向上，P_2 以恆定速率 $v\cos\beta$ 運動，所以 $b = v\cos\beta\, t_c$。在時刻 T，它走過的水平距離會是

$$v\cos\beta\, T = \frac{v^2\sin\beta\cos\beta}{g} = \frac{v^2\sin^2\beta}{2g}\cdot\frac{2\cos\beta}{\sin\beta} = 2h\cot\beta.$$

因此

$$b = v\cos\beta\, T\cdot\frac{t_c}{T} = 2h\cot\beta\cdot\frac{t_c}{T},$$

又由於 $1 < t_c/T < 2$，且 $2h\cot\beta > 0$（因為 β 是銳角），

$$2h\cot\beta < b < 4h\cot\beta,$$

得證。

a 的界限

完全同理，$a = u\cos\alpha\, t_c$，而

$$u\cos\alpha\, T = \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = 2h\cot\alpha,$$

所以 $a = 2h\cot\alpha\cdot t_c/T$，再由 $1 < t_c/T < 2$ 得

$$2h\cot\alpha < a < 4h\cot\alpha.$$

這裏用的是同一個 h：按定義，h 是 P_1 的最大高度；而由於兩者的豎直運動完全相同，它同時也是 P_2 的最大高度。

驗算

- 邊界情況：若碰撞恰好發生在最高點（$t_c = T$），則 $a = 2h\cot\alpha$，即熟悉的半射程（half-range）$\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$；若碰撞發生在落地一刻（$t_c = 2T$），則 $a = 4h\cot\alpha$，即全射程 $\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$。題目中的嚴格不等式正好介乎兩者之間。
- 數值驗證：取 $g = 9.8$、$u = 20$、$\alpha = 0.7$、$\beta = 0.9$（弧度），$v = u\sin\alpha/\sin\beta$ 及 $t_c = 1.5T$，得 $h \approx 8.470$ 及 $a \approx 30.17$，介乎 $2h\cot\alpha \approx 20.11$ 與 $4h\cot\alpha \approx 40.22$ 之間（事實上它恰好等於 1.5×20.11）。我們用這個方法測試了 20 000 個隨機設定，逐步模擬 P_1 的運動以確認 h，並檢查兩粒質點確實重合。

常見錯誤

- 把兩粒質點到達碰撞點的時間當作不同：它們是同時拋出的，所以兩者用的是同一個 t_c。
- 忘記解釋上界的由來：上界來自碰撞發生在空中，即在共同落地時刻 $2T$ 之前。

STEP 之外

關鍵的一步是轉換參考系（frame of reference）：在一個以加速度 g 自由下落的參考系中，兩粒質點都以恆定速度沿直線運動，所以只有當它們在該參考系中互相瞄準時才會碰撞，這正是經典的「猴子與獵人」（monkey and hunter）問題的思路。以加速參考系思考問題，以及當加速度不均勻時隨之出現的慣性力（fictitious forces），是大學一年級力學的核心主題。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）討論了拋射體、相對運動及非慣性參考系（non-inertial frames），並附有大量優秀習題。

詳細解答

STEP II 2010，第 10 題

力學 • 彈性碰撞

> **STEP II 2010，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s2-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 10.2 節疊球效應中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/stacked-balls.html

關鍵思路

一切都建基於一次碰撞：一粒質點以完全彈性的方式撞向另一粒靜止的質點。動量守恆（conservation of momentum）加上牛頓實驗定律（Newton's experimental law，取 $e = 1$）便可求出傳遞出去的速率，而這個速率只取決於兩個質量之比。在第 (ii) 部分，每次碰撞的質量比都是 λ，所以每次碰撞都把速率乘以同一個因子，餘下的工作交給等比數列（geometric progression）就可以了。

解答

把各質點視為點質量，在光滑桌面上沿一條直線運動，所有速度均以 B 的初始運動方向為正方向量度。

第 (i) 部分

設 B 和 A 在緊接碰撞之後的速度分別為 v_B 和 v_A。由動量守恆得

$$bmu = bm\,v_B + m\,v_A,$$

又因為碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的（$e = 1$），按牛頓實驗定律，分離速率等於接近速率：

$$v_A - v_B = u.$$

把 $v_B = v_A - u$ 代入動量方程，並約去 m，

$$bu = b(v_A - u) + v_A \quad \Longrightarrow \quad v_A = \frac{2bu}{b+1}.$$

所以 A 的速率是 $\dfrac{2b}{b+1}\,u$。

這條公式只用到質量比 b，而且推導對任何 $b > 0$ 都成立。由於 $b+1 > b$ 且 $u > 0$，

$$v_A = 2u \cdot \frac{b}{b+1} < 2u,$$

不論 b 取甚麼值都是如此。所以 A 永遠不可能以 B 初始速率的兩倍運動；不過只要把 b 取得夠大，它的速率可以任意接近 $2u$。

第 (ii) 部分

沿直線依次排列的質量為

$$B_1 : \lambda^n m, \quad B_2 : \lambda^{n-1} m, \quad \ldots, \quad B_n : \lambda m, \quad A : m.$$

每粒質點的質量都是下一粒的 λ 倍。所以每當一粒以速率 v 運動的質點撞上下一粒（靜止的）質點，第 (i) 部分的結果便適用，其中 $b = \lambda$，而被撞的質點會以速率 kv 離開，其中

$$k = \frac{2\lambda}{\lambda+1}.$$

由第 (i) 部分的方程 $v_B = v_A - u$ 可知，撞擊的質點會繼續向前運動，速率為

$$kv - v = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\, v,$$

由於 $\lambda > 1$，這個值是正數。

於是 B_1 令 B_2 得到速率 ku，然後 B_2 令 B_3 得到速率 k^2u，如此類推，直至以 $k^{n-1}u$ 運動的 B_n 令 A 得到速率

$$v_A = k^n u = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

? **想一想** 會不會有額外的碰撞，即某個 B_i 把速率傳遞出去之後，又追上前面的那一粒？

全部 n 次碰撞之後，B_i 以速率 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}k^{i-1}u$ 向前運動，其中 $i = 1, \ldots, n$，而 A 則以速率 $k^n u$ 運動。由於 $\lambda > 1$，我們有 $k > 1$（因為 $2\lambda > \lambda + 1$），所以這些速率沿着直線嚴格遞增：每粒質點都比它後面的那一粒快，彼此愈離愈遠。因此不會再有碰撞，A 的最終速率就是 $k^n u$。

因為 $k > 1$，當 $n \to \infty$ 時 $k^n \to \infty$。所以對任何目標速率 V，只要把 n 取得夠大，使 $k^n u > V$，便可令 A 的速率超過 V：A 的速率沒有上限。

$\lambda = 4$ 的情況

這時 $k = \frac{8}{5}$，我們要找出滿足 $\left(\frac{8}{5}\right)^n > 20$ 的最小 n。取以 10 為底的對數（logarithm；這是遞增函數，所以不等式的方向不變），

$$n \log_{10} \tfrac{8}{5} > \log_{10} 20.$$

寫成 $\frac{8}{5} = \frac{2^4}{10}$ 和 $20 = 2 \times 10$，

$$\log_{10} \tfrac{8}{5} = 4 \log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412,$$
$$\log_{10} 20 = \log_{10} 2 + 1 \approx 1.30103.$$

由於 $\log_{10} \frac{8}{5} > 0$，我們可以把兩邊同除以它，得

$$n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37.$$

滿足此條件的最小整數是 $n = 7$。（這裏的餘裕相當充足：6.37 離整數很遠，所以 $\log_{10} 2$ 的近似值不會影響答案。）

驗算

- 在第 (i) 部分，$b = 1$ 給出 $v_A = u$ 和 $v_B = 0$：質量相等的質點互換速度，正該如此。當 $b \to \infty$ 時，$v_A \to 2u$。
- 動能（kinetic energy）：以 $v_A = \frac{2b}{b+1}u$ 和 $v_B = \frac{b-1}{b+1}u$ 代入，得 $bv_B^2 + v_A^2 = \frac{b(b-1)^2+4b^2}{(b+1)^2}u^2 = bu^2$，所以能量守恆。
- 直接計算：$1.6^6 \approx 16.78 < 20$ 而 $1.6^7 \approx 26.84 > 20$，確認 $n = 7$。用精確分數逐步模擬整條質點鏈，同樣得出 A 的速率在剛好 n 次碰撞之後恰為 $k^n u$。

常見錯誤

- 把質量的次序弄反：B_1 是最重的（$\lambda^n m$），B_n 是各個 B 之中最輕的（λm），而 A 比它還要輕。
- 把碰撞次數數成 $n - 1$ 次而不是 n 次：速率沿 $B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_n \to A$ 傳遞，共有 n 步。
- 忘記排除其後再發生碰撞的可能，或者答了非整數 6.37，而不是最小整數 $n = 7$。

STEP 之外

單獨一次彈性碰撞最多只能把速率加倍，但一連串碰撞卻沒有這個限制。這正是「疊球」示範背後的原理：把一個輕球疊在重球上面一同放下，輕球反彈的高度會遠遠超過它落下的高度。利用動量和能量來分析碰撞（更簡潔的做法是在質心參考系（centre-of-mass frame）中分析，在那裏彈性碰撞只是把每個速度反轉），是大學一年級力學的核心課題。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對此有深入的討論。

詳細解答

STEP II 2010，第 11 題

力學 • 三力平衡

STEP II 2010，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q11

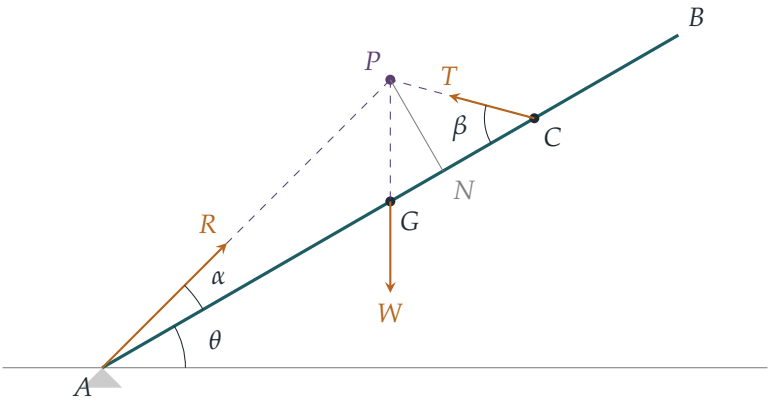
關鍵思路

作用於桿上的力只有三個：桿的重量、A 點的反作用力（reaction）和 C 點的張力（tension）。當三個互不平行的力使一個物體保持平衡（equilibrium）時，它們的作用線（line of action）必定通過同一點。因此，由 A 出發的反作用力所在直線、由 C 出發的繩所在直線，以及通過桿中點的鉛垂線，三者相交於一點。從這個公共點出發，沿桿的方向和垂直於桿的方向量度距離，整道題便化為簡單的直角三角學，完全不必求出各個力的大小。

解答

模型與圖示

我們把桿視為均勻剛性桿（uniform rigid rod），所以它的重量 W 作用於中點 G，其中 $AG = 2L$。繩是輕繩，所以它在 C 點沿繩本身的方向拉着桿，其中 $AC = 3L$。支承在 A 點對桿施加單一個力 R（題目沒有說明支承是光滑還是粗糙，而我們也不需要知道）。下圖按比例繪出 $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 的情況。



證明公式

重量沿鉛垂方向作用，其作用線通過 G；繩的作用線通過 C，反作用力的作用線則通過 A。這三條直線並不平行，所以三者都通過同一點，我們稱這點為 P。

想一想 為甚麼三條作用線必定相交於一點？

設 R 和 T 的作用線相交於 P。對 P 取力矩（moment），R 和 T 的力矩都是零，所以桿若要處於轉動平衡，重量對 P 的力矩也必須是零。這就表示通過 G 的鉛垂線同樣通過 P。

設 N 為由 P 到桿的垂足，並設 $h = PN$。在直角三角形 PNA 中，A 處的角是 α，所以 $AN = h\cot\alpha$。在直角三角形 PNC 中，C 處的角是 β，所以 $NC = h\cot\beta$。由於 $AN + NC = AC$，

$$h\cot\alpha + h\cot\beta = 3L. \tag{1}$$

（若 α 或 β 是鈍角，N 便落在 A 或 C 之外，但帶正負號的長度 $h\cot\alpha$ 與 $h\cot\beta$ 之和仍然等於 AC，所以 (1) 在任何情況下都成立。）

現在利用第三條作用線。桿與水平線的夾角是 θ，所以垂線 PN 與鉛垂線 PG 的夾角也是 θ。在直角三角形 PNG 中，P 處的角是 θ，所以 $GN = h\tan\theta$，而且 N 位於 G 的上方一側（離 A 較遠），如圖所示。因此

$$h\cot\alpha = AN = AG + GN = 2L + h\tan\theta. \tag{2}$$

由 (1) 減去 (2)，得 $h\cot\beta = L - h\tan\theta$，即

$$L = h(\cot\beta + \tan\theta).$$

把 L 的這個值代入 (2)：

$$h\cot\alpha = 2h(\cot\beta + \tan\theta) + h\tan\theta = h(3\tan\theta + 2\cot\beta).$$

由於 $h \neq 0$（否則 P 會落在桿上的 G 點，而繫於 C 點的繩便會沿着桿的方向，無法抵銷重量對 A 的力矩），我們可以除以 h：

$$\cot\alpha = 3\tan\theta + 2\cot\beta,$$

這正是所需的結果。

$\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 的情況

由 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 及 $\cot 45° = 1$，

$$\cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} + 2 = 2 + \sqrt{3}.$$

現在我們需要 $\cot 15°$。利用 $\tan(A - B)$ 的公式，取 $A = 45°$、$B = 30°$，

$$\tan 15° = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

所以

$$\cot 15° = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

因此 $\cot\alpha = \cot 15°$。角 α 介乎 $0°$ 與 $180°$ 之間，而 cot 在這個區間上嚴格遞減（strictly decreasing），所以每個值它都恰好取一次。故此 $\alpha = 15°$。

驗算

- *另一條獨立的途徑。*對 A 取力矩，得 $T \cdot 3L\sin\beta = W \cdot 2L\cos\theta$。然後沿桿的方向和垂直於桿的方向分解各力，便得到 R 的兩個分量，而 $\cot\alpha$ 就是它們之比；這樣可以重新得出該公式。我們用這個方法，對 10^5 組隨機的 (θ, β) 作了數值檢驗，兩者吻合至約 10^{-15}。
- *特殊值。*當 $\theta = 30°$、$\beta = 45°$ 時，以數值方法求平衡，得 $\alpha = 15.000°$，而 $\cot 15° = 3.7320\ldots = 2 + \sqrt{3}$。圖是按比例繪畫的：$P$ 位於 G 的正上方，比 A 高出 $\sqrt{3}L$。
- *極限情況。*若 $\theta \to 0$ 而 $\beta = 90°$（桿水平，繩鉛垂），公式給出 $\cot\alpha = 0$，所以 $\alpha = 90°$：反作用力也是鉛垂的，而當其餘各力全是鉛垂時，這是必然的。

常見錯誤

- 把重量放在 C 點，或取 $AG = 3L/2$：重量作用於整枝桿的中點，與 A 相距 $2L$。

- 弄錯 GN 的正負號。由於桿從 A 起向上傾斜，通過 G 的鉛垂線與由 P 所作的垂線，相交於 G 遠離 A 的一側，所以 $AN = 2L + h\tan\theta$，而不是 $2L - h\tan\theta$。
- 寫到 $\cot\alpha = 2 + \sqrt{3}$ 便停下來，既沒有證明這就是 $\cot 15°$，也沒有說明為甚麼這能唯一確定 α。

STEP 之外

三力定理（three-force theorem）是靜力學（statics）中一個普遍事實的特殊情況。作用於剛體（rigid body）上的任何力系，都可以化簡為通過某一選定點的單一個力，再加上一個力偶（couple），而平衡就是指兩者皆為零。到了大學，這會變成一個向量條件：合力與總力矩 $\sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ 都等於零，而這個條件正是剛體動力學的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）就是用這套向量語言來闡述力矩（torque）與平衡的。

詳細解答

STEP II 2010，第 12 題

概率與統計 • 平均值與中位數

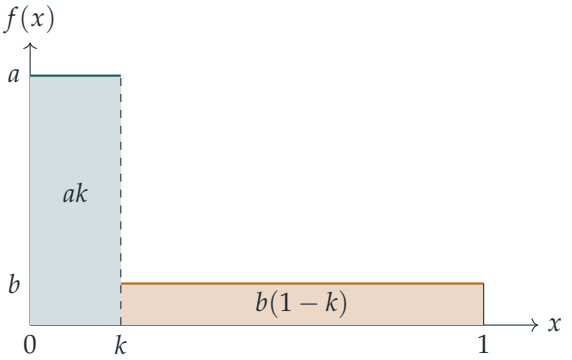
STEP II 2010，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q12

關鍵思路

這個密度函數（density function）是只有兩級的階梯函數（step function），所以每個概率都是一個長方形的面積，而唯一真正的條件就是總面積等於 1。這個條件把 k 用 a 和 b 表示出來；一旦消去 k，餘下的全是代數運算。至於中位數（median），問題只在於那個較高的第一個長方形是否已經佔了一半的概率。



解答

圖中兩個長方形的面積分別是 ak 和 $b(1-k)$，所以密度函數的積分等於 1，當且僅當

$$ak + b(1-k) = 1, \qquad \text{即} \qquad k = \frac{1-b}{a-b}.$$

（由於 $a > b$，我們可以除以 $a-b$。）以下一直採用這個 k 值。

為何 $a > 1$ 且 $b < 1$。 方程 $ak + b(1-k) = 1$ 表示 1 是 a 和 b 的加權平均（weighted average），權重為 k 和 $1-k$，兩者都嚴格介乎 0 與 1 之間。權重為正的加權平均必定嚴格介乎兩個數值之間，所以 $b < 1 < a$。不用文字來說，就是：$1 - b = k(a-b) > 0$ 及 $a - 1 = (1-k)(a-b) > 0$。

第 (i) 部分

在每一段上對 $xf(x)$ 積分，

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^k ax\,\mathrm{d}x + \int_k^1 bx\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}ak^2 + \tfrac{1}{2}b(1-k^2) = \tfrac{1}{2}\big(b + (a-b)k^2\big).$$

現在 $(a-b)k^2 = \dfrac{(1-b)^2}{a-b}$，所以

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b(a-b) + (1-b)^2}{2(a-b)} = \frac{ab - b^2 + 1 - 2b + b^2}{2(a-b)} = \frac{1 - 2b + ab}{2(a-b)},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

累積分佈函數（cumulative distribution function）是

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} ax & 0 \le x < k, \\ ak + b(x-k) & k \le x \le 1. \end{cases}$$

它在 $[0,1]$ 上連續而且嚴格遞增，所以中位數 M 是 $\mathrm{F}(M) = \frac{1}{2}$ 的唯一解。該用哪一條公式，取決於第一個長方形是否佔了至少一半的概率。

> **想一想** 怎樣把「第一個長方形的面積至少是 $\frac{1}{2}$」化為關於 a 和 b 的條件？

代入 k 的值，並消去正數分母 $a-b$：

$$ak \ge \tfrac{1}{2} \iff 2a(1-b) \ge a - b \iff 2a - 2ab \ge a - b \iff a + b \ge 2ab.$$

情況 $a + b \ge 2ab$。這時 $\mathrm{F}(k) = ak \ge \frac{1}{2}$，所以中位數位於 $[0,k]$ 之內，並滿足 $aM = \frac{1}{2}$：

$$M = \frac{1}{2a}.$$

情況 $a + b \le 2ab$。這時 $ak \le \frac{1}{2}$，所以中位數位於 $[k,1]$ 之內。從右端入手最為簡便：M 右方的概率是 $b(1-M)$，而它必須等於 $\frac{1}{2}$。因此

$$M = 1 - \frac{1}{2b} = \frac{2b-1}{2b}.$$

當 $a + b = 2ab$ 時，兩條公式都適用，而且結果一致，因為這時 $1 - \frac{1}{2b} = \frac{2ab-a}{2ab} = \frac{b}{2ab} = \frac{1}{2a}$。

第 (iii) 部分

我們在每個情況下計算 $\mathrm{E}(X) - M$，並證明它是正數。

情況 $a + b \geq 2ab$。通分，以 $2a(a-b)$ 為公分母，

$$\mathrm{E}(X) - \frac{1}{2a} = \frac{a(1-2b+ab) - (a-b)}{2a(a-b)} = \frac{b - 2ab + a^2 b}{2a(a-b)} = \frac{b(a-1)^2}{2a(a-b)}.$$

情況 $a + b \leq 2ab$。通分，以 $2b(a-b)$ 為公分母，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) - \frac{2b-1}{2b} &= \frac{b(1-2b+ab) - (2b-1)(a-b)}{2b(a-b)} \\ &= \frac{(b - 2b^2 + ab^2) - (2ab - 2b^2 - a + b)}{2b(a-b)} = \frac{a(1-b)^2}{2b(a-b)}.\end{aligned}$$

想一想 為甚麼這些數值是嚴格為正，而不僅僅是非負？

在兩個情況下，a、b 和 $a-b$ 都是正數，而平方項嚴格為正，因為我們一開始已證明 $a > 1$ 且 $b < 1$。所以在任何情況下都有 $\mathrm{E}(X) - M > 0$，即 $M < \mathrm{E}(X)$。

驗算

- 取 $a = 3$、$b = \frac{1}{2}$：這時 $k = \frac{1}{5}$，$a + b = \frac{7}{2} \geq 3 = 2ab$，而 $\mathrm{E}(X) = \frac{1-1+\frac{3}{2}}{5} = 0.3$，$M = \frac{1}{6}$。兩者之差 $0.1\overline{3}$ 與 $\frac{b(a-1)^2}{2a(a-b)} = \frac{2}{15}$ 吻合。
- 取 $a = \frac{5}{4}$、$b = \frac{9}{10}$：這次 $a + b = 2.15 \leq 2.25 = 2ab$，所以 $M = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \approx 0.444$，而 $\mathrm{E}(X) = \frac{13}{28} \approx 0.464$。
- 當 $a \to 1^+$（因而 $b \to 1^-$）時，密度函數趨向均勻分佈（uniform distribution）的密度函數，兩個差值都趨向 0：平均值（mean）與中位數同為 $\frac{1}{2}$，按對稱性理應如此。

我們以 300 對隨機選取的 (a, b) 作了數值檢驗：對 F 使用二分法（bisection）求得的中位數與分情況的公式吻合，以中點求積法（midpoint quadrature）求得的平均值與第 (i) 部分吻合，而 $\mathrm{E}(X) - M$ 亦等於上面已因式分解的表達式。

常見錯誤

- 忘記消去 k：答案須只用 a 和 b 表示。
- 把第二個中位數寫成 $b(M-k) = \frac{1}{2}$ 的解，忘記了在 $[0, k)$ 上已經累積的概率 ak。
- 只得出 $\mathrm{E}(X) \geq M$ 的結論：嚴格不等式需要 $a \neq 1$ 和 $b \neq 1$，而這正是題目開首部分所提供的。

STEP 之外

這個密度函數是遞減的，所以它是「右偏」（skewed to the right）的：長長的尾部把平均值拉到中位數之外。這種現象很常見，但並非必然；大學的第一門概率課程會說明，對於單峯分佈（unimodal distribution），平均值、中位數和眾數（mode）之間有何關係，以及那些耳熟能詳的經驗法則在甚麼情況下會失效。像這樣的階梯函數，也是直方圖（histogram）的基本組件，同時是測度論（measure theory）中用來定義積分的簡單函數（simple function）的基本組件。想進一步了解連續分佈，可參閱 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）。

詳細解答

STEP II 2010，第 13 題

概率與統計 • 獨立事件

STEP II 2010，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s2-q13

關鍵思路

Rosalind 要合格，必須對 Pardeep 至少勝一局，並且對 Quentin 至少勝一局。「至少一次」用補集（complement）處理總是最容易：n 局中至少勝一局的概率，等於 1 減去全部落敗的概率。各局獨立（independent）時，每種策略的成功概率便是兩個這類因子的乘積，而比較策略就是把兩者之差因式分解（factorise）。以 $a = 1 - p$ 和 $b = 1 - q$ 表示落敗的概率，可使代數運算保持簡潔。

解答

我們假設不同對局的結果互相獨立，並且無論之前發生過甚麼，每局對 Pardeep（或 Quentin）的勝出概率都是 p（或 q）。對局的次序並不重要：無論她取得資格後是否停止比賽，她取得資格的結果都完全相同。

設 Rosalind 與 Pardeep 對賽 m 局、與 Quentin 對賽 n 局，令 A 為她對 Pardeep 至少勝一局的事件（event），B 為她對 Quentin 至少勝一局的事件。那麼 $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^m$，因為只有當她 m 局全敗時 A 才不發生；同理 $\mathrm{P}(B) = 1 - (1-q)^n$。這兩個事件涉及不同的對局，所以互相獨立，於是

$$\mathrm{P}(\text{獲接納}) = \big(1 - (1-p)^m\big)\big(1 - (1-q)^n\big).$$

以下一律記 $a = 1 - p$ 和 $b = 1 - q$。由於 $0 < p < q < 1$，我們有 $0 < b < a < 1$。

第 (i) 部分

與 Pardeep 對賽兩局、與 Quentin 對賽一局，成功概率為 $(1 - a^2)(1 - b)$；與 Quentin 對賽兩局、與 Pardeep 對賽一局，成功概率為 $(1 - a)(1 - b^2)$。把各個平方差（difference

of squares）因式分解，

$$\begin{aligned}(1-a^2)(1-b)-(1-a)(1-b^2) &= (1-a)(1-b)\big[(1+a)-(1+b)\big]\\ &= (1-a)(1-b)(a-b)\\ &= pq(q-p).\end{aligned}$$

由於 $p,q>0$ 且 $q>p$，此式嚴格為正。所以與 Pardeep 對賽兩局，獲接納的機會較大，她應該選擇這個方案。

第 (ii) 部分

三種策略的成功概率分別為

$$S_1=(1-a^3)(1-b),\qquad S_2=(1-a^2)(1-b^2),\qquad S_3=(1-a)(1-b^3).$$

三者都含有因子 $(1-a)(1-b)=pq$，因為 $1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$。

策略 1 必定勝過策略 3。我們有

$$\begin{aligned}S_1-S_3 &= pq\big[(1+a+a^2)-(1+b+b^2)\big]\\ &= pq\,(a-b)(1+a+b)>0,\end{aligned}$$

因為 $a>b$。所以策略 3 永遠不是最佳選擇，只需比較策略 1 和策略 2。

策略 1 對策略 2。我們有

$$S_1-S_2=pq\big[(1+a+a^2)-(1+a)(1+b)\big]=pq\big[a^2-b(1+a)\big].$$

換回 p 和 q，

$$S_1-S_2=pq\,D,\qquad \text{其中}\qquad D=(1-p)^2-(1-q)(2-p).$$

由於 $pq>0$，策略 1 優於策略 2 當且僅當 $D>0$。

想一想 條件 $q-p>\frac{1}{2}$ 怎樣有助令 D 為正？

D 中唯一涉及 q 的項是 $-(1-q)(2-p)$，而由於 $2-p>0$，它隨 q 增加而增加。所以我們把 q 換成條件所容許的最小值。若 $q-p>\frac{1}{2}$，則 $1-q<\frac{1}{2}-p$，又因為 $2-p>0$，

$$(1-q)(2-p)<\big(\tfrac{1}{2}-p\big)(2-p)=1-\tfrac{5}{2}p+p^2.$$

因此

$$D>(1-2p+p^2)-\big(1-\tfrac{5}{2}p+p^2\big)=\tfrac{1}{2}p>0.$$

所以 $S_1>S_2$，連同 $S_1>S_3$，這就證明了當 $q-p>\frac{1}{2}$ 時 Rosalind 應該選擇策略 1。

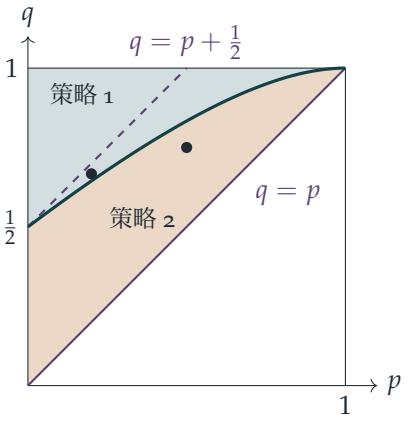
當 $q-p<\frac{1}{2}$ 時，兩者都有可能較優。以下是兩個例子：

- $p = \frac{1}{2}$，$q = \frac{3}{4}$（所以 $q - p = \frac{1}{4}$）。這時 $D = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{8} < 0$。事實上 $S_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{42}{64}$ 而 $S_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{45}{64}$，所以**策略 2 較佳**。
- $p = \frac{1}{5}$，$q = \frac{2}{3}$（所以 $q - p = \frac{7}{15} < \frac{1}{2}$）。這時 $D = \frac{16}{25} - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{16}{25} - \frac{15}{25} = \frac{1}{25} > 0$。事實上 $S_1 = \frac{61}{125} \cdot \frac{2}{3} = \frac{122}{375}$ 而 $S_2 = \frac{9}{25} \cdot \frac{8}{9} = \frac{120}{375}$，所以**策略 1 較佳**。

在 (p, q) 平面上，整個情況一目了然。令 $D = 0$ 便得出邊界曲線 $q = 1 - \dfrac{(1-p)^2}{2-p}$。可以驗證

$$\left(p + \tfrac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{(1-p)^2}{2-p}\right) = \frac{p}{2(2-p)} > 0,$$

所以該曲線位於直線 $q = p + \frac{1}{2}$ 稍下方。在曲線之上，策略 1 最佳；在曲線與對角線 $q = p$ 之間，策略 2 最佳。



圖中兩點就是上面的兩個例子：$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 位於策略 2 的區域內，而 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{3})$ 則剛好在曲線之上。

驗算

在第 (i) 部分，令 $q \to 1$：對 Quentin 必勝，所以只有對 Pardeep 的對局才有影響，而這類對局顯然愈多愈好，這與差值 $pq(q-p) \to p(1-p) > 0$ 吻合。至於第 (ii) 部分，我們隨機抽取了 2000 對滿足 $p < q$ 的數值，以分數精確地列舉全部 2^4 種結果，確認了 S_1, S_2, S_3 的公式和各個因式分解。以 $p = \frac{1}{2}$、$q = \frac{3}{4}$ 進行模擬（simulation），得出 $S_1 \approx 0.657$ 和 $S_2 \approx 0.703$，而精確值為 $\frac{21}{32} = 0.65625$ 和 $\frac{45}{64} \approx 0.7031$。

常見錯誤

- 把「至少勝一局」的概率算成 mp 而不是 $1-(1-p)^m$；把互相重疊的事件的概率相加，會重複計算。
- 忘記策略 3：要證明策略 1 最佳，必須同時勝過另外兩種策略。
- 舉出 $q-p<\frac{1}{2}$ 的例子，卻沒有檢查條件 $0<p<q<1$。

STEP 之外

直覺告訴我們「把力氣花在自己最弱的地方」，但第二部分顯示這並非永遠正確：多對 Pardeep 一局的效益會遞減（diminishing returns），而當 p 不太小時，多對 Quentin 一局更為划算。把固定數目的試驗分配到各處，使若干個「至少成功一次」的概率之積達到最大，正是可靠性理論（reliability theory）和實驗設計（design of experiments）背後那類最優化（optimisation）問題的一個小例子。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）仔細講解了獨立性和補集，並有許多同類風格的題目。

詳細解答

STEP III 2010，第 1 題

純數學 • 平均值與方差

STEP III 2010，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q1

關鍵思路

A 和 B 是首 n 個數的平均值（mean）和方差（variance）；C 和 D 則是再加入一個數之後的平均值和方差。方差最容易以「平方的平均值減去平均值的平方」這個形式處理，而這正是第 (ii) 部分給我們的結果。有了這個形式，D 便成為 x_{n+1} 的二次式（quadratic），而兩條不等式（inequality）都是關於這個二次式的陳述。

解答

為簡潔起見，全文記 $x = x_{n+1}$。

第 (i) 部分

按定義 $\sum_{k=1}^{n} x_k = nA$，所以

$$C = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x\right) = \frac{nA + x}{n+1}.$$

第 (ii) 部分

把平方展開，並利用 $\sum_{k=1}^{n} x_k = nA$ 及 $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$：

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - 2Ax_k + A^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{2A}{n}\cdot nA + \frac{1}{n}\cdot nA^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - A^2, \end{aligned}$$

此即所求。

第 (iii) 部分

第 (ii) 部分對任何一組數都成立，所以把它應用於 $n+1$ 個數 $x_1, \ldots, x_{n+1}$（其平均值為 C），得

$$D = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - C^2.$$

再由第 (ii) 部分，$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n(B+A^2)$，故 $\sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = n(B+A^2) + x^2$。以第 (i) 部分代入 C，

$$D = \frac{nB + nA^2 + x^2}{n+1} - \frac{(nA+x)^2}{(n+1)^2}.$$

兩邊乘以 $(n+1)^2$ 並展開：

$$\begin{aligned}(n+1)^2 D &= (n+1)\left(nB + nA^2 + x^2\right) - \left(n^2A^2 + 2nAx + x^2\right)\\ &= n(n+1)B + (n^2 + n - n^2)A^2 - 2nAx + (n+1-1)x^2\\ &= n(n+1)B + n\left(x^2 - 2Ax + A^2\right)\\ &= n(n+1)B + n(x-A)^2.\end{aligned}$$

因此

$$\boxed{D = \frac{n}{n+1}B + \frac{n}{(n+1)^2}\left(x_{n+1} - A\right)^2.}$$

第一條不等式。 乘以 $n+1$，

$$(n+1)D = nB + \frac{n}{n+1}(x_{n+1} - A)^2 \;\geq\; nB,$$

因為最後一項是一個平方的非負倍數。這對 x_{n+1} 的任何值都成立，而等號成立當且僅當 $x_{n+1} = A$。

? **想一想** 怎樣才能把 $D < B$ 轉化為關於 x_{n+1} 的條件，而又不必擔心負數的平方根？

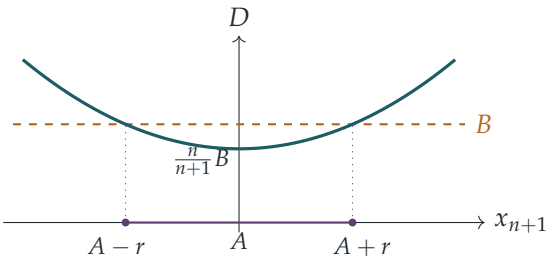
第二條不等式。 首先留意 $B \geq 0$，因為它是一些平方的平均值，所以 $\sqrt{(n+1)B/n}$ 是實數。現在利用方框中的公式，以下每一步都是可逆的（我們只是在兩邊減去同一個量，

以及乘以正數 $(n+1)^2/n$）：

$$\begin{aligned} D < B &\iff \frac{n}{(n+1)^2}(x_{n+1}-A)^2 < B - \frac{n}{n+1}B = \frac{B}{n+1} \\ &\iff (x_{n+1}-A)^2 < \frac{(n+1)B}{n} \\ &\iff |x_{n+1}-A| < \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}} \\ &\iff A - \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}} < x_{n+1} < A + \sqrt{\frac{(n+1)B}{n}}. \end{aligned}$$

第三步是在兩邊取非負平方根；對非負數之間的嚴格不等式而言，這樣做會保持不等式成立。這就是所求的「當且僅當」。（若 $B = 0$，則該區間是空集，而事實上此時恆有 $D \geq 0 = B$。）

下圖顯示當 $n = 3$、$A = 0$、$B = 1$ 時，D 作為 x_{n+1} 的函數的圖像：這是一條拋物線，在 $x_{n+1} = A$ 處取得最小值 $\frac{n}{n+1}B$，並恰好在上面求得的區間上低於 B 這個水平。



其中 $r = \sqrt{(n+1)B/n}$。

驗算

- 取 $n = 1$：此時 $B = 0$，而公式給出 $D = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$；對於兩個數 x_1, x_2 而言這是正確的，因為它們的平均值就是它們的中點。
- 取 $x_1, x_2, x_3 = 0, 0, 3$，則 $A = 1$、$B = 2$，再加入 $x_4 = 1 = A$。直接計算得 $D = \frac{1}{4}(1+1+4+0) = \frac{3}{2} = \frac{3}{4}B$，正是最小值。
- 我們在 20 000 組隨機數列上以分數精確驗證了全部三個結果，包括等價關係 $D < B \iff (x_{n+1}-A)^2 < (n+1)B/n$，並在區間兩端點皆為有理數的 216 個情況中，確認了在兩端點處 $D = B$。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分展開時，忘記 $\sum_{k=1}^{n} A^2 = nA^2$，而不是 A^2。

- 以 $\sum x_k^2$ 表示 D 後便停下來：題目要求以 B、A、x_{n+1} 和 n 表示，所以必須利用第 (ii) 部分把這個和替換掉。
- 對 $(x_{n+1} - A)^2 < k$ 開平方時只得出 $x_{n+1} - A < \sqrt{k}$，漏掉了區間的下端。

STEP 之外

D 的公式是一條**更新公式**（updating formula）：它讓電腦可以逐個數值地維持一個數據流的平均值和方差，而無須儲存全部數據；這個想法在 Welford 算法（Welford's algorithm）中得到進一步改良。$n(x_{n+1} - A)^2/(n+1)^2$ 這一項，是把方差分解為「組內」和「組間」兩部分的一個小例子，而這種分解正是統計學中方差分析（analysis of variance）的基礎。如欲深入了解，可參閱 Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）。

詳細解答

STEP III 2010，第 2 題

純數學 • 定積分

STEP III 2010，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q2

關鍵思路

這裏每個分母都是一個二次式（quadratic）（以 x 或 x^2 為變量），而其根原來正是 $\pm e^a$ 和 $\pm e^{-a}$。把雙曲函數（hyperbolic function）係數寫成指數形式，因式分解（factorisation）便一目了然，因為 e^a 與 e^{-a} 之積為 1，之和為 $2\cosh a$（或之差為 $2\sinh a$）。之後，部分分式（partial fractions）把一切化為對數或反正切（arctangent），而真正的功夫在於把答案整理成雙曲函數的形式。

解答

第 (i) 部分

按定義，

$$\cosh a = \tfrac{1}{2}\left(e^a + e^{-a}\right).$$

因此 $2\cosh a = e^a + e^{-a}$ 且 $e^a \cdot e^{-a} = 1$，即

$$x^2 + 2x\cosh a + 1 = (x + e^a)(x + e^{-a}).$$

當 $x \geq 0$ 時兩個因式皆為正，所以被積函數（integrand）在 $[0, 1]$ 上連續。由於 $a > 0$，兩根 $-e^a$ 與 $-e^{-a}$ 相異，部分分式為

$$\frac{1}{(x+e^{-a})(x+e^a)} = \frac{1}{e^a - e^{-a}}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right) = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x+e^{-a}} - \frac{1}{x+e^a}\right),$$

你可以把它重新合併來驗證：分子變成 $(x+e^a)-(x+e^{-a})=e^a-e^{-a}$。積分得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1} &= \frac{1}{2\sinh a}\Big[\ln\frac{x+e^{-a}}{x+e^a}\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sinh a}\left(\ln\frac{1+e^{-a}}{1+e^a}-\ln\frac{e^{-a}}{e^a}\right).\end{aligned}$$

第一個對數可以漂亮地化簡：$1+e^a=e^a(e^{-a}+1)$，所以 $\dfrac{1+e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}$。第二個是 $\ln e^{-2a}=-2a$。因此

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cosh a+1}=\frac{1}{2\sinh a}(-a+2a)=\frac{a}{2\sinh a},$$

這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

第一個積分。 現在係數是 $2\sinh a=e^a-e^{-a}$，常數項是 $-1=e^a\cdot(-e^{-a})$，所以

$$x^2+2x\sinh a-1=(x+e^a)(x-e^{-a}).$$

> **想一想** 被積函數在整個範圍 $[1,\infty)$ 上都表現良好嗎？

兩根為 $-e^a<0$ 和 e^{-a}，而由於 $a>0$，有 $e^{-a}<1$。所以當 $x\geq 1$ 時兩個因式皆為正，被積函數連續。當 x 很大時，它的表現類似 $1/x^2$，所以這個瑕積分（improper integral）收斂（converges）。部分分式的做法同前，現在用 $e^a-(-e^{-a})=2\cosh a$：

$$\frac{1}{(x-e^{-a})(x+e^a)}=\frac{1}{2\cosh a}\left(\frac{1}{x-e^{-a}}-\frac{1}{x+e^a}\right).$$

由 1 積分至 X，再令 $X\to\infty$，

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1}=\frac{1}{2\cosh a}\left(\ln\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}-\ln\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}\right).$$

當 $X\to\infty$ 時，分數 $\frac{X-e^{-a}}{X+e^a}\to 1$，所以第一個對數趨向 0。至於第二個，從分子抽出 e^{-a}：

$$\frac{1-e^{-a}}{1+e^a}=e^{-a}\,\frac{e^a-1}{e^a+1}=e^{-a}\tanh\tfrac{a}{2},$$

這裏用了 $\dfrac{e^a-1}{e^a+1}=\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{e^{a/2}+e^{-a/2}}=\tanh\frac{a}{2}$（分子分母同除以 $e^{a/2}$）。所以第二個對數是 $-a+\ln\tanh\frac{a}{2}$，而

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\sinh a-1}=\frac{a-\ln\tanh\frac{a}{2}}{2\cosh a}=\frac{a+\ln\coth\frac{a}{2}}{2\cosh a}.$$

分子中兩項皆為正（因為 $0<\tanh\frac{a}{2}<1$），這正符合被積函數為正的要求。

第二個積分。 這是第 (i) 部分的二次式，只是把 x 換成 x^2：

$$x^4 + 2x^2\cosh a + 1 = (x^2 + e^a)(x^2 + e^{-a}),$$

對所有實數 x，兩個因式皆為正，所以被積函數連續；而它在無窮遠處是 $O(1/x^4)$，所以積分收斂。把 x^2 當作變量，套用同樣的部分分式，

$$\frac{1}{(x^2 + e^{-a})(x^2 + e^a)} = \frac{1}{2\sinh a}\left(\frac{1}{x^2 + e^{-a}} - \frac{1}{x^2 + e^a}\right).$$

每一部分都是標準的反正切積分：對 $c > 0$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + c^2} = \left[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}.$$

分別取 $c = e^{-a/2}$ 和 $c = e^{a/2}$（每一部分各自收斂，所以可以把積分拆開），

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{1}{2\sinh a}\cdot\frac{\pi}{2}\left(e^{a/2} - e^{-a/2}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\sinh\frac{a}{2}}{2\sinh a}.$$

最後，二倍角公式（double-angle formula）$\sinh a = 2\sinh\frac{a}{2}\cosh\frac{a}{2}$ 把 $\sinh\frac{a}{2}$ 約去：

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 2x^2\cosh a + 1} = \frac{\pi}{4\cosh\frac{a}{2}}.$$

? **想一想** 有沒有辦法預先看出 $\cosh\frac{a}{2}$ 會出現？

有。設該積分為 I。代換（substitution）$x \mapsto 1/x$ 顯示同樣有 $I = \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2\cosh a+1}\,\mathrm{d}x$，所以

$$2I = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{x^2 + 1/x^2 + 2\cosh a}\,\mathrm{d}x.$$

令 $u = x - 1/x$，則 $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$ 且 $x^2 + 1/x^2 = u^2 + 2$，而 u 由 $-\infty$ 走到 ∞。分母變成 $u^2 + 2 + 2\cosh a = u^2 + 4\cosh^2\frac{a}{2}$，所以 $2I = \pi/(2\cosh\frac{a}{2})$，答案相同。

驗算

- 當 $a \to 0$ 時，第 (i) 部分變成 $\int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，而 $a/(2\sinh a) \to \frac{1}{2}$。最後一個積分變成 $\int_0^\infty (1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$，與 $\pi/(4\cosh 0)$ 吻合。
- 數值上，取 $a = 1$，辛普森法則（Simpson's rule）給出第 (i) 部分為 0.4254590641，(ii) 的第一個積分為 0.5741556186，第二個為 0.6965059227，與 $\frac{1}{2\sinh 1}$、$\frac{1-\ln\tanh\frac{1}{2}}{2\cosh 1}$ 及 $\frac{\pi}{4\cosh\frac{1}{2}}$ 在小數點後十位一致。

常見錯誤

- 把部分分式的常數弄錯：它是 $1/(\text{兩根之差})$，在第 (i) 部分是 $1/(2\sinh a)$，但在 (ii) 的第一個積分中是 $1/(2\cosh a)$。
- 忘記驗證 $e^{-a} < 1$，即分母的根位於 $[1, \infty)$ 以外。
- 把答案留在指數形式：題目要求用雙曲函數表示，所以 $\frac{e^a-1}{e^a+1}$ 應寫成 $\tanh\frac{a}{2}$。

STEP 之外

在大學裏，(ii) 的第二個積分通常用圍道積分（contour integration）來做：被積函數在 $\pm ie^{\pm a/2}$ 處有單極點（simple poles），把上半平面（upper half-plane）內的留數（residues）加起來，幾行便得出 $\pi/(4\cosh\frac{a}{2})$。同一方法也能處理 $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1+x^n)$，以及許多用實分析方法難以攻克的積分。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）從幾何角度闡述留數及其背後的道理。

詳細解答

STEP III 2010，第 3 題

純數學 • 單位根

> **STEP III 2010，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q3

本題在 *Beyond STEP* 第 6.1 節以單位根爲根的多項式中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/cyclotomic.html

關鍵思路

每個單位根 a 都有唯一的階（order）：即使 $a^m = 1$ 成立的最小正整數 m。所謂本原 n 次單位根（primitive nth root of unity），就是階恰好為 n 的單位根。因此，要求 $\mathrm{C}_n(x)$，我們先列出所有 n 次單位根 $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k/n}$，剔除那些在較低次冪時已經回到 1 的根，再把餘下的 $(x-a)$ 全部相乘。而每個數只有一個階這一事實，也正是解決最後一部分的關鍵。

解答

以下各部分中，n 次單位根為 ω^k，其中 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，$\omega = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/n}$；並且 $(\omega^k)^m = 1$ 當且僅當 n 整除 km。由於 C_n 是首一（monic）多項式，沒有重根，而且其根恰好是所有本原 n 次單位根，故

$$\mathrm{C}_n(x) = \prod_{a \text{ 為本原單位根}} (x-a).$$

4 次單位根

4 次單位根為 $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}$。由於 $1^1 = 1$ 及 $(-1)^2 = 1$，這兩個根都不是本原的。但 $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$、$\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$，全部不等於 1；$-\mathrm{i}$ 的情況亦相同（它的各次冪是前者的共軛（conjugate））。所以本原 4 次單位根為 i 和 $-\mathrm{i}$，從而

$$\mathrm{C}_4(x) = (x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}) = x^2 + 1,$$

與題目所求相符。

第 (i) 部分

$n = 1$。唯一的 1 次單位根是 1，而不存在滿足 $0 < m < 1$ 的 m，所以 1 是本原的：$C_1(x) = x - 1$。

$n = 2$。2 次單位根為 ± 1；由於 $1^1 = 1$，1 被剔除，而 $(-1)^1 \neq 1$。所以 $C_2(x) = x + 1$。

$n = 3$ **及** $n = 5$。當 n 為質數（prime）時，對於滿足 $1 \leq k \leq n-1$ 的根 ω^k，$(\omega^k)^m = 1$ 只在 $n \mid km$ 時成立；又因 n 是質數且不整除 k，這迫使 $n \mid m$。所以除 1 以外的每個 n 次單位根都是本原的。它們正是

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$

的根，而這個多項式是首一的，且各根互不相同。因此

$$C_3(x) = x^2 + x + 1, \qquad C_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

$n = 6$。設 $\omega = e^{\pi i/3}$，則 ω^k 的階為 $6/\gcd(k, 6)$。所以 $\omega^0 = 1$ 的階為 1，$\omega^3 = -1$ 的階為 2，ω^2, ω^4 的階為 3，只有 ω 和 $\omega^5 = \overline{\omega}$ 的階為 6。兩者之和為 $2\cos\frac{\pi}{3} = 1$，之積為 $|\omega|^2 = 1$，所以

$$C_6(x) = x^2 - x + 1.$$

（作為交叉驗證：每個 6 次單位根的階為 1、2、3 或 6，所以 $x^6 - 1 = C_1C_2C_3C_6$；而事實上 $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = (x^3-1)(x^3+1) = x^6 - 1$。）

第 (ii) 部分

設 a 為 $x^4 + 1 = 0$ 的任一根。則 $a^4 = -1$，所以 $a^8 = 1$。a 的階 d 整除 8（寫 $8 = qd + r$，其中 $0 \leq r < d$；則 $a^r = a^8(a^d)^{-q} = 1$，由 d 的最小性得 $r = 0$）。所以 $d \in \{1, 2, 4, 8\}$。若 d 為 1、2 或 4，則 $a^4 = 1$，與 $a^4 = -1$ 矛盾。因此 $x^4 + 1$ 的每個根都是本原 8 次單位根。

反過來，設 $\omega = e^{\pi i/4}$，則 ω^k 的階為 8 當且僅當 k 為奇數（若 k 為偶數，則 $(\omega^k)^4 = 1$），所以本原 8 次單位根恰好有四個：$\omega, \omega^3, \omega^5, \omega^7$。四次多項式 $x^4 + 1$ 有四個互不相同的根（即 $e^{(2j+1)\pi i/4}$，$j = 0, 1, 2, 3$），全部都是本原 8 次單位根，所以它們正正就是這四個根。因此 $C_8(x) = x^4 + 1$。

其他 n 均不成立：C_n 的根的階全部是 n，而 $x^4 + 1$ 的根的階是 8。所以答案是 $n = 8$。

第 (iii) 部分

第 (i) 部分中用於 $n=3$ 及 $n=5$ 的論證，適用於任何質數 p：除 1 以外的每個 p 次單位根都是本原的。因此

$$C_p(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1.$$

（當 $p=2$ 時，此式給出 $x+1$，與第 (i) 部分一致。）

第 (iv) 部分

用反證法（proof by contradiction），假設對某些正整數 q,r,s，有 $C_q(x)\equiv C_r(x)C_s(x)$。

首先，C_s 至少有一個根，因為 $e^{2\pi i/s}$ 是本原 s 次單位根：$(e^{2\pi i/s})^m=e^{2\pi im/s}=1$ 只在 $s\mid m$ 時成立。C_r 亦同理。所以 C_r 和 C_s 的次數（degree）都至少為 1。

取 C_r 的任一根 a。由恆等式，$C_q(a)=C_r(a)C_s(a)=0$，所以 a 既是本原 q 次單位根，也是本原 r 次單位根。

> **想一想** 同一個數能否在 $r\neq q$ 的情況下，既是本原 r 次單位根，又是本原 q 次單位根？

不能。假如 $r<q$，則 $a^r=1$ 且 $0<r<q$，這與 a 是本原 q 次單位根矛盾。若 $q<r$，則把兩者的角色對調即可。所以 $r=q$；同理（利用 C_s 的一個根）可得 $s=q$。

但這樣一來，恆等式就變成 $C_q=C_q^2$。比較次數，得 $\deg C_q=2\deg C_q$，所以 $\deg C_q=0$，與 C_q 有根這一事實矛盾。（另一做法：C_q^2 有重根，而 C_q 沒有。）因此不存在這樣的 q、r、s。

驗算

- C_n 的次數等於在 $1\le k\le n$ 中滿足 $\gcd(k,n)=1$ 的 k 的個數：當 $n=1,\dots,6$ 時，次數為 $1,1,2,2,4,2$；當 $n=8$ 時為 4，全部吻合。
- 每個 n 次單位根都有某個整除 n 的階 d，所以 x^n-1 等於 C_d 對 n 的所有因數 d 之積。當 $n=4$：$(x-1)(x+1)(x^2+1)=x^4-1$；當 $n=8$：$(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$。
- 以數值方法，對 $n\le 40$ 把各本原根的 $(x-a)$ 相乘，可重現上述每一個多項式，只有在 $n=8$ 時得到 x^4+1，並且在 $q,r,s\le 30$ 的範圍內找不到任何恆等式 $C_q=C_rC_s$。

常見錯誤

- 把 1（或 -1）算作本原根：C_n 並不是 x^n-1。

- 在第 (ii) 部分，只驗證 x^4+1 整除 x^8-1，卻沒有排除較小的階：重點在於 $a^4 = -1 \neq 1$。
- 在第 (iv) 部分，單憑次數論證：$\deg C_q = \deg C_r + \deg C_s$ 是可能成立的（例如 $4 = 2+2$），所以導出矛盾的是根，而不是次數。

STEP 之外

這些 C_n 就是分圓多項式（cyclotomic polynomials）。恆等式 $x^n - 1 = \prod_{d|n} C_d(x)$ 說明它們的係數必定是整數；而一個更深入的定理指出，每個分圓多項式在有理數上都是不可約（irreducible）的。它們在伽羅瓦理論（Galois theory）中佔核心地位，亦是高斯（Gauss）發現哪些正多邊形可以用尺規作圖（ruler and compass construction）作出的關鍵。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）發展了這方面的代數，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）則為單位根提供了幾何圖像。

詳細解答

STEP III 2010，第 4 題

純數學 • 多項式的公共根

STEP III 2010，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q4

關鍵思路

若 α 同時滿足兩條首項係數（leading coefficient）相同的二次方程（quadratic），那麼它亦滿足兩者之差，而 x^2 項互相抵消，只剩下一條線性（linear）方程。這樣便能確定 α，再把它代回其中一條二次方程，就得到所求條件。在第 (ii) 部分，只要先把三次多項式（cubic）除以二次多項式，同一技巧便再次奏效：在二次方程的根上，三次多項式的值與其餘式（remainder）完全相同，於是問題又回到兩條二次方程，可直接引用第 (i) 部分的結果。

解答

全文中，「根」指複數範圍內的根，因此每條二次方程都有兩個根（按重數（multiplicity）計算）。

第 (i) 部分

設 α 同時滿足兩條方程。以第一條減去第二條，得

$$(a-c)\alpha + (b-d) = 0.$$

由於 $a \neq c$，可除以 $a-c$，得

$$\alpha = -\frac{b-d}{a-c},$$

即為所求。

條件。記 $k = a - c \neq 0$ 及 $m = b - d$，則條件為 $m^2 - amk + bk^2 = 0$。

(⇒) 若存在公共根 (common root)，由第一個結果，它必為 $\alpha = -m/k$。代入 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$，

$$\frac{m^2}{k^2} - \frac{am}{k} + b = 0,$$

再乘以 $k^2 \neq 0$，得 $m^2 - amk + bk^2 = 0$。

(⇐) 設 $m^2 - amk + bk^2 = 0$，並定義 $\alpha = -m/k$。把條件除以 k^2，再把上一步倒過來看，便知 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$。另外，按 α 的取法，$(a-c)\alpha + (b-d) = k\alpha + m = 0$。因此

$$\alpha^2 + c\alpha + d = (\alpha^2 + a\alpha + b) - \big((a-c)\alpha + (b-d)\big) = 0 - 0 = 0,$$

所以 α 是公共根。這就證明了在 $a \neq c$ 時兩者等價。

想一想 為甚麼單靠正方向並不足夠？

正方向只說明如果存在公共根，條件便成立。要證明「當且僅當」(if and only if)，我們還必須證明條件能產生一個公共根。正因如此，我們才由條件定義 α，並驗證它同時滿足兩條方程。

去掉 $a \neq c$。設 $a = c$。此時條件變為 $(b-d)^2 = 0$，即 $b = d$。

- 若 $b = d$，兩條方程完全相同，自然有公共根（它們的兩個根都是公共根），而條件亦成立。
- 若 $b \neq d$，假如有公共根 α，相減便得 $(a-c)\alpha + (b-d) = b - d = 0$，矛盾。所以沒有公共根，而條件亦不成立。

兩種情況下，「有公共根」與「條件成立」都一致，所以**是的，即使沒有** $a \neq c$ **這個條件，結果仍然成立**。

(唯一微妙之處在於只考慮實根的情況。若 $a = c$、$b = d$ 且 $a^2 < 4b$，條件成立，但兩條相同的方程卻沒有實根。當 $a \neq c$ 時則沒有這個問題，因為對實係數而言，公共根 $-(b-d)/(a-c)$ 必然是實數。)

第 (ii) 部分

把三次多項式除以 $x^2 + ax + b$。由於 $(x+1)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$，

$$x^3 + (a+1)x^2 + qx + r = (x+1)(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b).$$

因此若在 $x = \alpha$ 處 $x^2 + ax + b = 0$，則三次多項式在該處的值為 $(q-a-b)\alpha + (r-b)$，而二次多項式

$$(x^2 + ax + b) + (q - a - b)x + (r - b) = x^2 + (q-b)x + r.$$

在該處的值亦然。所以 α 是該二次方程與三次方程的公共根，當且僅當它是

$$x^2+ax+b=0 \qquad \text{與} \qquad x^2+(q-b)x+r=0.$$

的公共根。現在以 $c=q-b$ 及 $d=r$ 應用第 (i) 部分。此時 $a-c=a+b-q$ 及 $b-d=b-r$，所以存在公共根當且僅當

$$(b-r)^2-a(b-r)(a+b-q)+b(a+b-q)^2=0.$$

由於無論 $a=c$ 與否，第 (i) 部分的結果都成立，這裏不需要額外條件。

例子。把兩條方程都除以 2，使它們成為首一（monic）方程：

$$x^2+\tfrac{5}{2}x+b=0, \qquad x^3+\tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{5}{2}x+\tfrac{1}{2}=0.$$

它們具備所需形式，其中 $a=\frac{5}{2}$（而且確實 $a+1=\frac{7}{2}$）、$q=\frac{5}{2}$ 及 $r=\frac{1}{2}$。於是 $a+b-q=b$ 及 $b-r=b-\frac{1}{2}$，條件變為

$$\left(b-\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{5}{2}\left(b-\tfrac{1}{2}\right)b+b\cdot b^2=0.$$

乘以 4：

$$\begin{aligned}(2b-1)^2-5b(2b-1)+4b^3&=0\\ 4b^3-6b^2+b+1&=0.\end{aligned}$$

觀察可知 $b=1$ 是一個根，而

$$4b^3-6b^2+b+1=(b-1)(4b^2-2b-1).$$

二次因式給出 $b=\dfrac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$。所以兩條方程有公共根，當且僅當

$$b=1 \qquad \text{或} \qquad b=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{或} \qquad b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

另一方法。這裏的三次方程不含 b，所以可以直接解出。試 $x=-\frac{1}{2}$，得 $-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-\frac{5}{2}+1=0$，所以

$$2x^3+7x^2+5x+1=(2x+1)(x^2+3x+1),$$

其根為 $-\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{5})$。公共根 x 必須滿足 $2b=-(2x^2+5x)$。當 $x=-\frac{1}{2}$ 時，得 $b=1$。至於另外兩個根，$x^2=-3x-1$，所以 $2x^2+5x=-x-2$，而 $b=\frac{1}{2}(x+2)=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})$。這與上面的答案一致。

驗算

- 當 $b = 1$ 時，二次式 $2x^2 + 5x + 2 = (2x+1)(x+2)$ 有根 $-\frac{1}{2}$，而它是三次方程的根。
- $b = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \approx 0.8090$：二次方程的根為 ≈ -0.3820 及 -2.1180，而 $-0.3820 \approx \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})$ 是三次方程的根。
- 以電腦測試 20 000 組隨機整數 a, b, c, d（以及 a, b, q, r），結果顯示條件式恰好在兩條方程有公共複數根時為零，包括 $a = c$ 的情況。

常見錯誤

- 只證明「有公共根 $\Rightarrow$ 條件成立」，忘記證明逆命題（converse）。
- 回答 $a = c$ 的問題時說「不成立，因為我們除以了 $a - c$」。證明的確失效，但結果仍然成立，因為兩邊都化為 $b = d$。
- 未先除以 2 便應用第 (ii) 部分：公式要求方程是首一的。

STEP 之外

第 (i) 部分的表達式是兩條二次多項式的結式（resultant）：一個以係數為變量的多項式，恰好在兩個多項式有公共根時為零。結式源於西爾維斯特（Sylvester）行列式，並且是用來求解多項式方程組的消元理論（elimination theory）的基礎。第 (ii) 部分中「相除並保留餘式」的步驟，正是多項式的歐幾里得算法（Euclidean algorithm）的第一步；這個算法求兩個多項式的最高公因式（highest common factor），方法與整數的情況如出一轍。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）在這個框架下探討多項式除法與最高公因式。

詳細解答

STEP III 2010，第 5 題

純數學 • 坐標幾何作圖

STEP III 2010，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q5

關鍵思路

這題全靠坐標完成：先求出 R 和 S，用截距式（intercept form）寫出直線 PQ 和 RS，再看兩者各自與「過 A 且垂直（perpendicular）於 AC 的直線」交於何處。它們交於同一點，而該點必然就是 T。至於作圖，關鍵在於一個觀察：已知正方形的對角線（diagonal）正好是我們需要的邊長，而第一部分正好提供了一個只用直尺（straight-edge）就能作出與該對角線成直角的方法。

解答

證明 $TA \perp AC$

過 $C(a,a)$ 的直線很容易處理。直線 CP 連接 (a,a) 與 $(an,0)$，所以其斜率（gradient）為 $\dfrac{a}{a-an} = \dfrac{1}{1-n}$（由於 $n<1$，斜率有定義），方程為

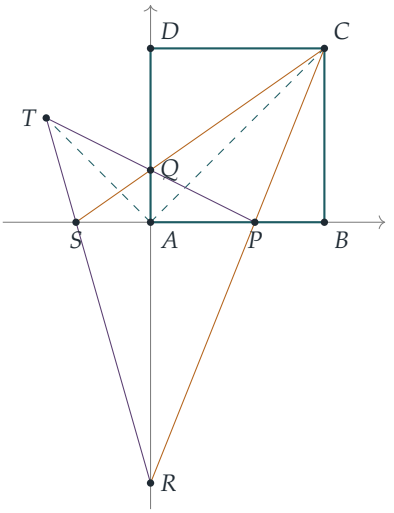
$$y = \frac{x-an}{1-n}.$$

直線 DA 是 $x=0$，所以

$$R = \left(0,\ -\frac{an}{1-n}\right).$$

同理，CQ 連接 (a,a) 與 $(0,am)$，斜率為 $1-m \neq 0$，方程為 $y = am + (1-m)x$。令 $y=0$（即直線 BA），

$$S = \left(-\frac{am}{1-m},\ 0\right).$$



現在用截距式。直線 PQ 的截距為 an 和 am；直線 RS 的截距為 $-\frac{am}{1-m}$ 和 $-\frac{an}{1-n}$。所以

$$\begin{aligned} PQ: &\quad \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=a, \\ RS: &\quad -\frac{(1-m)x}{m}-\frac{(1-n)y}{n}=a. \end{aligned}$$

由於 AC 的斜率為 1，過 A 且垂直於 AC 的直線是 $y=-x$。把 $y=-x$ 代入兩條方程：

$$\begin{aligned} PQ: &\quad x\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)=a, \\ RS: &\quad x\Big(-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}-1\Big)=x\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)=a. \end{aligned}$$

兩者是同一條方程。由於 $m\neq n$，括號內的值不為零，因此兩條直線都與 $y=-x$ 交於唯一一點

$$\Big(\frac{amn}{m-n},-\frac{amn}{m-n}\Big).$$

想一想 我們找到了一個同時在 PQ 和 RS 上的點。為甚麼它一定是 T？

兩條不同的直線最多只有一個交點。直線 PQ 和 RS 是不同的直線（PQ 經過 x 軸上 $x>0$ 的點 P，而 RS 與 x 軸交於 $x<0$ 的點 S）。所以兩者的任何公共點都就是它們的交點 T。因此

$$T=\Big(\frac{amn}{m-n},-\frac{amn}{m-n}\Big),$$

它位於 $y=-x$ 上。向量（vector）$\overrightarrow{AT}$ 是 $(1,-1)$ 的倍數，而 $\overrightarrow{AC}=(a,a)$，且 $(1,-1)\cdot(a,a)=0$。所以 TA 垂直於 AC，得證。

留意整個推導從未用到 $m<n$，只用到 $m\neq n$。推導也從未用到 P 和 Q 的實際位置，所以只要 $AP\neq AQ$，邊 AB 上的任意一點 P 與邊 AD 上的任意一點 Q 所得的 T，都會落在過 A 且垂直於 AC 的直線上。

作圖

面積為 $2a^2$ 的正方形，邊長為 $\sqrt{2}\,a$，正好是對角線 AC 的長度。所以我們以 AC 為一邊作正方形。用坐標表示，這個正方形的頂點為

$$A(0,0),\quad E(a,-a),\quad F(2a,0),\quad C(a,a).$$

它的各邊 $\overrightarrow{AE}=(a,-a)$、$\overrightarrow{EF}=(a,a)$、$\overrightarrow{FC}=(-a,a)$ 和 $\overrightarrow{CA}=(-a,-a)$ 長度都是 $\sqrt{2}\,a$，而且相鄰兩邊互相垂直，所以其面積為 $2a^2$。

> **想一想** 用沒有刻度的直尺，我們只能連接兩點和延長直線。這樣怎可能作出直角？

第一部分正是這樣一個方法，因為其中每一步都只是連接兩個已知點或求兩直線的交點。只用直尺：

1. 畫出對角線 AC。在 AB 上任取一點 P，在 AD 上任取一點 Q，使兩者與 A 的距離明顯不相等（無須量度；我們只需要 $AP\neq AQ$）。
2. 延長 CP 與直線 DA 交於 R，延長 CQ 與直線 BA 交於 S。延長 PQ 和 RS，交於 T。
3. 畫出直線 TA。由上面的結果，它垂直於 AC。把 CB 延長越過 B，與直線 TA 交於 E。（直線 CB 是 $x=a$，直線 TA 是 $y=-x$，所以 $E=(a,-a)$。）
4. 在對角 C 重複第 1 至 3 步：在 CD 和 CB 上取與 C 距離明顯不相等的點，進行同樣的作圖。繞正方形中心的半周旋轉（half-turn）會互換 A 和 C，並把正方形映射到自身，所以這樣得到的是過 C 且垂直於 AC 的直線，即 $x+y=2a$。
5. 把 AB 延長越過 B，與這條直線交於 $F=(2a,0)$。

於是 $AEFC$ 是邊長為 $AC=\sqrt{2}\,a$ 的正方形，所以其面積為 $2a^2$。（它的對角線 AF 和 CE 分別位於直線 AB 和 CB 上，相交於新正方形的中心 B。）

驗算

- 取 $a=1$、$m=0.3$、$n=0.6$。則 $R=(0,-1.5)$、$S=(-\frac{3}{7},0)$、$T=(-0.6,0.6)$。點 T 在通過 R 和 S 的直線上：$-\frac{0.7}{0.3}(-0.6)-\frac{0.4}{0.6}(0.6)=1.4-0.4=1$。它也在 PQ 上：$-1+2=1$。而且 T 在 $y=-x$ 上。
- 我們用電腦以分數精確計算了 R、S 和 T，對 a、m、n 作了 2000 組隨機選擇，$m<n$ 和 $m>n$ 兩種次序都有涵蓋。在每一種情況下，$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，而且所作出的 $AEFC$ 都有四條相等的邊，邊長平方為 $2a^2$，並且兩兩成直角相交。

常見錯誤

- 硬解 PQ 和 RS 的聯立方程。這樣做行得通，但很繁複。把一條候選直線（$y = -x$）分別代入兩條方程檢驗，快得多。
- 忘記解釋為甚麼公共點真的是 T。你需要說明兩條直線是不同的。
- 在作圖中「作垂線」或「截取某長度」卻沒有說明怎樣做。每一步都必須是連接兩點或求兩直線的交點。

STEP 之外

只用直尺的作圖屬於射影幾何（*projective geometry*），在其中連接與相交是僅有的運算；而像隱藏在 R、S 和 T 之中的那些比例，則透過交比（cross-ratio）和調和點列（harmonic range）來研究。彭賽列（Poncelet）和施泰納（Steiner）的一條經典定理指出：只要預先畫好一個圓及其圓心，單憑直尺就能完成直尺與圓規所能做的一切作圖；在本題中，正方形扮演了類似的角色。考克斯特（Coxeter）的 *Projective Geometry*（《射影幾何》）是這個學科一本優美的入門書。

詳細解答

STEP III 2010，第 6 題

純數學 • 三維空間中的旋轉

> **STEP III 2010，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q6

關鍵思路

繞一條軸的旋轉（rotation）會令軸上每一點保持不動，而對垂直於該軸的平面內的一切，則完全如同該平面上的一個旋轉般轉動。因此每一步都可化為一個二維旋轉：找出被轉動的平面，寫下該平面內一對標準正交（orthonormal）向量，然後把它們旋轉。任何沿軸方向的向量都只會原封不動，而單是這一點觀察，便已替 Q 的計算完成了大部分工作。

解答

以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示沿各坐標軸的單位向量（unit vectors），於是 P_0、Q_0、R_0 的位置向量（position vectors）分別為 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$。

第 (i) 部分

繞 z 軸旋轉會把 x-y 平面轉過 ϕ，而 $\mathbf{i}$ 朝 $\mathbf{j}$ 的方向移動。因此

$$P_1 = (\cos\phi,\ \sin\phi,\ 0).$$

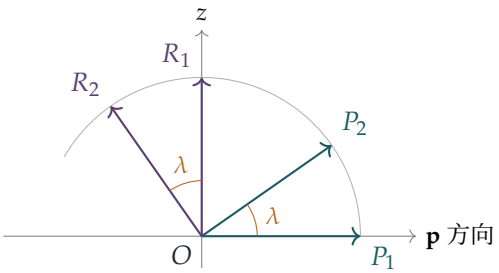
為了稍後之用：同一個旋轉把 $\mathbf{j}$ 送到 $Q_1 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$，因為在該平面內 Q 始終領先 P 一個直角；而 R_0 位於軸上，故保持不動：$R_1 = (0,0,1)$。

第 (ii) 部分

設 $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP_1} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$。在 x-y 平面內垂直於 OP_1 的直線，其方向為

$$\mathbf{u} = (-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0),$$

因為 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}=0$ 及 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}=0$。垂直於這條軸的平面，就是由標準正交向量對 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{k}$ 所張成的平面，而第二次旋轉把這個平面轉過 λ，其中 $\mathbf{p}$ 朝 $\mathbf{k}$ 的方向移動：



在該平面內，這個旋轉把

$$\mathbf{p}\mapsto\cos\lambda\,\mathbf{p}+\sin\lambda\,\mathbf{k},\qquad \mathbf{k}\mapsto-\sin\lambda\,\mathbf{p}+\cos\lambda\,\mathbf{k},$$

其中第二式成立，是因為 $\mathbf{k}$ 始終領先 $\mathbf{p}$ 一個直角。因此

$$P_2=(\cos\lambda\cos\phi,\ \cos\lambda\sin\phi,\ \sin\lambda),\qquad R_2=(-\sin\lambda\cos\phi,\ -\sin\lambda\sin\phi,\ \cos\lambda).$$

想一想 在第二次旋轉中，Q 會去到哪裏？

第一次旋轉後，Q 位於 $Q_1=(-\sin\phi,\cos\phi,0)$，這恰好就是 $\mathbf{u}$：它正正位於第二次旋轉的軸上，所以不會移動。因此

$$Q_2=(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0).$$

作為驗算，P_2、Q_2、R_2 是兩兩互相垂直的單位向量(例如 $\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OR_2}=-\sin\lambda\cos\lambda\cos^2\phi-\sin\lambda\cos\lambda\sin^2\phi+\sin\lambda\cos\lambda=0$)，經過旋轉後理應如此。

第 (iii) 部分

在這一部分中，我們一直假設 $P_2\neq\pm P_0$，使 O、P_0、P_2 確實能決定一個平面。

想一想 為甚麼旋轉角會等於角 P_2OP_0？

由於 P 一直留在平面 OP_0P_2 內，旋轉軸必定是經過 O 並垂直於該平面的直線（旋轉會令一點在經過該點而垂直於軸的平面內移動）。所以 P 沿着這個平面上的大圓（great circle）移動，而平面內每個向量都轉過旋轉角。因此該角就是 $\overrightarrow{OP_2}$ 與 $\overrightarrow{OP_0}$ 之間的夾角；又由於兩者皆為單位向量，

$$\cos\theta=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_0}=(\cos\lambda\cos\phi)(1)+(\cos\lambda\sin\phi)(0)+(\sin\lambda)(0)=\cos\phi\cos\lambda,$$

此即所求。（若繞遠路轉過 $2\pi-\theta$，所得的餘弦值亦相同。）

旋轉軸同時垂直於 $\overrightarrow{OP_2}$ 和 $\overrightarrow{OP_0}$，所以它沿着兩者的向量積（cross product）方向：

$$\overrightarrow{OP_2} \times \overrightarrow{OP_0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\lambda\cos\phi & \cos\lambda\sin\phi & \sin\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ \sin\lambda,\ -\cos\lambda\sin\phi).$$

所以沿軸方向的一個向量為

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\lambda \\ -\cos\lambda\sin\phi \end{pmatrix}.$$

取這個定向時，按右手定則（right-hand rule）轉過 θ 的旋轉會把 P_2 帶到 P_0。留意這條軸沒有 x 分量，這是理所當然的，因為它垂直於 OP_0。

驗算

- 若 $\lambda = 0$，第二次旋轉毫無作用，所以第三次旋轉只是抵消第一次：$\theta = \phi$，而軸沿 $(0, 0, -\sin\phi)$ 方向，即 z 軸。公式與此吻合。
- 若 $\phi = 0$，唯一的旋轉是繞 y 軸進行的；而軸確實沿 $(0, \sin\lambda, 0)$ 方向，且 $\theta = \lambda$。
- 以數值驗證：對 20 000 組隨機的 (ϕ, λ)，用 Rodrigues 公式（Rodrigues' formula）施行各旋轉，均能重現 P_2、Q_2、R_2，而繞 $(0, \sin\lambda, -\cos\lambda\sin\phi)$ 轉過 θ 的旋轉亦會把 P_2 送回 P_0。當 $\phi = 0.7$、$\lambda = 0.4$ 時，$\cos\theta \approx 0.7045$，故 $\theta \approx 0.789$。

常見錯誤

- 在第二步中旋轉了 Q：它位於軸上，所以應保持不動。
- 弄錯 R_2 的正負號：當 P 向上朝 $\mathbf{k}$ 傾斜時，R 會向下傾並遠離 OP_1，所以它的水平部分是 $-\sin\lambda\,\mathbf{p}$。

STEP 之外

這裏的兩個角分別是經度（longitude）ϕ 和緯度（latitude）λ，而 $\cos\theta = \cos\phi\cos\lambda$ 正是球面餘弦定理（spherical cosine rule）的直角情形，在航海中用來計算大圓距離。更一般地說，兩個旋轉的合成（composition）仍然是繞單一條軸的旋轉（歐拉（Euler）旋轉定理），而以 $\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OQ_2}$、$\overrightarrow{OR_2}$ 為各列所組成的，正是合成旋轉的正交矩陣（orthogonal matrix）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）討論了旋轉矩陣和正交矩陣；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則展示了如何用複數（complex numbers）描述球面的旋轉。

詳細解答

STEP III 2010，第 7 題

純數學 • 麥克勞林級數

STEP III 2010，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q7

關鍵思路

整個解法的關鍵，在於擺脫那個麻煩的平方根：只要把 $\sqrt{1-x^2}\,y'$ 寫成一個簡潔的式子，再微分一次，二階微分方程（second-order differential equation）便自然得出。之後反覆微分，係數會呈現出一個規律，再用歸納法（induction）加以證明。把 $x=0$ 代入一般關係式，便得到麥克勞林係數（Maclaurin coefficients）的遞推關係（recurrence）；當 m 為偶數時，這個遞推關係會遇上一個等於零的因子，於是級數就此終止。

解答

微分方程

設 $\theta = \arcsin x$，則 $\sin\theta = x$，其中 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$；而當 $|x|<1$ 時，$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$。於是 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，且 $y = \cos m\theta$，由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\sin m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{亦即，} \qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -m\sin m\theta.$$

將此式對 x 微分，左邊使用乘積法則（product rule）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{m^2\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{m^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

兩邊同乘 $\sqrt{1-x^2}$（它不等於零），得

$$(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2y = 0,$$

此即所求。（此處及以下，$y^{(n)}$ 表示 $\mathrm{d}^ny/\mathrm{d}x^n$。）

三階及四階方程

將剛證明的方程微分。乘積 $(1-x^2)y''$ 給出 $(1-x^2)y''' - 2xy''$，而 xy' 給出 $xy'' + y'$，因此

$$(1-x^2)\,y''' - 3x\,y'' + (m^2-1)\,y' = 0.$$

以同樣方法再微分一次，

$$(1-x^2)\,y^{(4)} - 2x\,y''' - 3x\,y''' - 3y'' + (m^2-1)\,y'' = 0,$$

故

$$(1-x^2)\,y^{(4)} - 5x\,y''' + (m^2-4)\,y'' = 0.$$

一般關係式

x 的係數依次為 $1, 3, 5$，常數項依次為 m^2-0^2, m^2-1^2, m^2-2^2，因此我們猜想對每個整數 $n \geq 0$，

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (m^2-n^2)\,y^{(n)} = 0. \qquad (*)$$

我們對 n 用歸納法證明。$n=0$ 的情況就是最先證明的方程。假設 $(*)$ 對某個 n 成立。將其微分，

$$\begin{aligned}(1-x^2)\,y^{(n+3)} - 2x\,y^{(n+2)} - (2n+1)\,x\,y^{(n+2)} \\ - (2n+1)\,y^{(n+1)} + (m^2-n^2)\,y^{(n+1)} = 0.\end{aligned}$$

合併同類項，$x\,y^{(n+2)}$ 的係數為 $-(2n+3) = -\big(2(n+1)+1\big)$，而 $y^{(n+1)}$ 的係數為 $m^2-(n^2+2n+1) = m^2-(n+1)^2$。因此

$$(1-x^2)\,y^{(n+3)} - \big(2(n+1)+1\big)x\,y^{(n+2)} + \big(m^2-(n+1)^2\big)y^{(n+1)} = 0,$$

這正是以 $n+1$ 代替 n 的 $(*)$。由歸納法，$(*)$ 對所有 $n \geq 0$ 成立。

麥克勞林級數

當 $x=0$ 時 $\theta = 0$，故 $y(0) = \cos 0 = 1$，且 $y'(0) = -m\sin 0 = 0$。將 $x=0$ 代入 $(*)$，中間一項便消失：

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-m^2)\,y^{(n)}(0).$$

由於 $y'(0)=0$，所有奇數階導數在 0 處均為零。至於偶數階導數，

$$\begin{aligned}y''(0) &= (0-m^2)\cdot 1 = -m^2,\\ y^{(4)}(0) &= (2^2-m^2)(-m^2) = m^2(m^2-2^2),\\ y^{(6)}(0) &= (4^2-m^2)\,m^2(m^2-2^2) = -m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2),\end{aligned}$$

一般而言 $y^{(2k)}(0) = (-1)^k m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\cdots\left(m^2-(2k-2)^2\right)$。因此麥克勞林級數（Maclaurin series）為

$$y = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\,x^6}{6!} + \cdots,$$

而首三個非零項為 $1 - \dfrac{m^2x^2}{2!} + \dfrac{m^2(m^2-2^2)x^4}{4!}$。（只要 $m \neq 0, \pm 2$，這些項都不為零；對於這些值，級數的項數較少，下一部分會加以解釋。）

偶數 m

設 m 為偶數，並記 $|m| = 2p$。因子 $m^2 - (2p)^2$ 等於零，而一旦 $2k - 2 \geq 2p$，它便會出現在 $y^{(2k)}(0)$ 之中。所以階數大於 $|m|$ 的每個導數在 $x = 0$ 處都等於零，麥克勞林級數在 $x^{|m|}$ 項便終止。

> **想一想** 一個終止的級數只告訴我們函數在 $x = 0$ 這一點的各階導數。我們怎樣知道對每個 $|x| < 1$，y 真的等於這個多項式（polynomial）？

我們再次利用 $(*)$，這次是在整個區間上。取 $n = |m|$，使 $m^2 - n^2 = 0$，並設 $v = y^{(n+1)}$。於是 $(*)$ 變成

$$(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v = 0 \qquad (|x| < 1).$$

這個一階方程的積分因子（integrating factor）為 $(1-x^2)^{(2n-1)/2}$；事實上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v\right] = (1-x^2)^{(2n-1)/2}\left[(1-x^2)\,v' - (2n+1)\,x\,v\right] = 0,$$

所以 $(1-x^2)^{(2n+1)/2}\,v$ 在 $(-1,1)$ 上是常數。它在 $x = 0$ 的值為 $v(0) = y^{(n+1)}(0) = 0$，因為 $n+1$ 是奇數。因此 $v \equiv 0$，即對所有 $|x| < 1$，$y^{(|m|+1)}(x) = 0$，故 y 是次數最多為 $|m|$ 的多項式。多項式等於其本身的麥克勞林級數，所以對 $|x| < 1$，

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\,x^4}{4!} - \cdots,$$

右邊就是上面那個會終止的級數。

現在設 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$，並令 $x = \sin\theta$。則 $|x| < 1$，且 $\arcsin(\sin\theta) = \theta$（對 θ 的限制正是在這裏用上），所以

$$\cos m\theta = 1 - \frac{m^2\sin^2\theta}{2!} + \frac{m^2(m^2-2^2)\sin^4\theta}{4!} - \cdots,$$

這是一個關於 $\sin\theta$ 的多項式，其開首各項與所求相符。

最後，$\sin^{|m|}\theta$ 的係數為 $y^{(|m|)}(0)/|m|!$，即 $\pm m^2(m^2-2^2)\cdots\left(m^2-(|m|-2)^2\right)/|m|!$。這些因子都不為零，因為當 $2j \leq |m| - 2$ 時 $(2j)^2 < m^2$。所以當 $m \neq 0$ 時，這個多項式的次數恰好是 $|m|$（即當 m 為正偶數時，次數為 m）；當 $m = 0$ 時，它是常數 1。

驗算

- $m = 2$：級數給出 $1 - 2\sin^2\theta$，這正是我們熟悉的 $\cos 2\theta$。
- $m = 4$：級數給出 $1 - 8\sin^2\theta + \frac{16\cdot 12}{24}\sin^4\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$。直接計算，$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta$。兩者一致。
- 我們利用 $\cos(m \arcsin x)$ 在各點的泰勒展開（Taylor expansion），在 200 組隨機的 (m, x) 上，以數值方法驗證了 $n = 0, \ldots, 8$ 時的 $(*)$（最大相對殘差約為 10^{-13}），並對所有不超過 12 的偶數 m 驗證了 $\cos m\theta$ 與該多項式相等。例如當 $m = 6$、$\theta = 1$ 時，兩邊都等於 0.96017。

常見錯誤

- 微分 $(1 - x^2)y^{(n+2)}$ 時，漏掉乘積法則產生的 $-2x\,y^{(n+2)}$ 項：正是這一項把 $2n + 1$ 變成 $2n + 3$。
- 以為終止的麥克勞林級數必定等於原函數。這裏確實如此，但需要用 $v = y^{(|m|+1)}$ 的論證（或其他理據）來說明。
- 把次數寫成 $m/2$：這個多項式只含 $\sin\theta$ 的偶數次冪，但最高次冪是 $\sin^m\theta$。

STEP 之外

若改為代入 $x = \cos\phi$，同類方程便化為切比雪夫（Chebyshev）方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$，其多項式解 $T_n(\cos\phi) = \cos n\phi$ 就是切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials），在數值逼近中佔核心地位。我們把 $x = 0$ 代入經微分的方程以得出係數遞推關係的技巧，正是線性常微分方程（linear ODEs）的冪級數法（power series method）的起點；在這個方法中，級數在特殊參數值下終止，正是勒讓德（Legendre）多項式、埃爾米特（Hermite）多項式和切比雪夫多項式產生的方式。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）有一章清晰講解級數解。

詳細解答

STEP III 2010，第 8 題

純數學 • 利用商法則積分

STEP III 2010，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q8

關鍵思路

表達式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ 正是對商 R/Q 求導時得到的分子（numerator）。因此，只要能找到一個 R 產生所給的 P，任何形如 P/Q^2 的被積函數（integrand）都可以一眼積出來。在兩個部分中，分母都告訴我們 Q 是甚麼，然後我們透過比較係數（comparing coefficients）求出 R。在第 (ii) 部分，微分方程（differential equation）的左邊原來恰好是 $\mathrm{Q}y' - \mathrm{Q}'y$，即是同一個結構換了個樣子出現。

解答

一般積分

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)}\right) = \frac{\mathrm{Q}(x)\mathrm{R}'(x) - \mathrm{Q}'(x)\mathrm{R}(x)}{\left(\mathrm{Q}(x)\right)^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{\left(\mathrm{Q}(x)\right)^2},$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{P}(x)}{\left(\mathrm{Q}(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{R}(x)}{\mathrm{Q}(x)} + C.$$

第 (i) 部分

這裏 $\mathrm{Q}(x) = 1 + 2x + 3x^2$，所以 $\mathrm{Q}'(x) = 2 + 6x$。設 $\mathrm{R}(x) = a + bx + cx^2$，則 $\mathrm{R}'(x) = b + 2cx$，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= (1 + 2x + 3x^2)(b + 2cx) - (2 + 6x)(a + bx + cx^2) \\ &= (b - 2a) + (2c - 6a)x + (2c - 3b)x^2.\end{aligned}$$

（兩個乘積各自產生的 x^3 項 $6cx^3$ 互相抵消。）我們需要它等於 $5x^2 - 4x - 3$，所以

$$b - 2a = -3, \qquad 2c - 6a = -4, \qquad 2c - 3b = 5.$$

由頭兩條得 $b = 2a - 3$ 及 $c = 3a - 2$。代入第三條，

$$2(3a - 2) - 3(2a - 3) = 6a - 4 - 6a + 9 = 5,$$

這對任何 a 都成立。所以第三條方程沒有提供新資訊，每個 a 值都可行：

$$\mathrm{R}(x) = a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2.$$

取 $a = 1$ 得到最整潔的選擇 $\mathrm{R}(x) = 1 - x + x^2$，因此

$$\int \frac{5x^2 - 4x - 3}{(1 + 2x + 3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} + C.$$

分母永不為零（其判別式（discriminant）為 $4 - 12 < 0$），所以此式對所有實數 x 成立。

不唯一性。 我們剛看到有效的 R 組成一個單參數族，所以選擇並不唯一：例如 $a = 0$ 給出 $\mathrm{R} = -3x - 2x^2$，$a = 1$ 給出 $\mathrm{R} = 1 - x + x^2$，兩者都可行。把一般 a 的選擇與 $a = 0$ 的選擇比較，

$$\big(a + (2a - 3)x + (3a - 2)x^2\big) - \big(-3x - 2x^2\big) = a + 2ax + 3ax^2 = a\,\mathrm{Q}(x).$$

? **想一想** 為甚麼在 R 上加上 Q 的倍數不會帶來任何分別？

若以 $\mathrm{R} + k\mathrm{Q}$ 取代 R，其中 k 為常數，則

$$\mathrm{Q}(\mathrm{R} + k\mathrm{Q})' - \mathrm{Q}'(\mathrm{R} + k\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} + k(\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q}) = \mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R},$$

所以 P 不變。相應地，答案 R/Q 變成 R/Q + k：不同的 R 給出的原函數（antiderivative）只相差一個常數，而這個常數會被任意的積分常數（constant of integration）吸收。例如，

$$\frac{1 - x + x^2}{1 + 2x + 3x^2} = \frac{-3x - 2x^2}{1 + 2x + 3x^2} + 1.$$

第 (ii) 部分

設 $\mathrm{Q}(x) = 1 + \cos x + 2\sin x$。則 $\mathrm{Q}'(x) = -\sin x + 2\cos x$，所以方程中 y 的係數 $\sin x - 2\cos x$ 恰好是 $-\mathrm{Q}'(x)$。因此方程為

$$\mathrm{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \mathrm{Q}'y = 5 - 3\cos x + 4\sin x.$$

在任何 $\mathrm{Q} \neq 0$ 的區間上，我們除以 Q^2，並看出左邊是一個商的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\mathrm{Q}}\right) = \frac{5 - 3\cos x + 4\sin x}{\mathrm{Q}^2}.$$

（換句話說，$1/\mathrm{Q}^2$ 是一個積分因子（integrating factor）。）要積出右邊，我們尋找一個 R 使得 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = 5 - 3\cos x + 4\sin x$。仿照 Q 的形式，試設 $\mathrm{R} = a + b\cos x + c\sin x$，於是 $\mathrm{R}' = -b\sin x + c\cos x$。展開，

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}' &= -b\sin x + c\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + c\cos^2 x - 2b\sin^2 x,\\ \mathrm{Q}'\mathrm{R} &= -a\sin x + 2a\cos x + (2c - b)\sin x\cos x + 2b\cos^2 x - c\sin^2 x.\end{aligned}$$

相減後，$\sin x\cos x$ 項互相抵消，而平方項合併為 $(c - 2b)(\cos^2 x + \sin^2 x) = c - 2b$。所以

$$\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R} = (c - 2b) + (c - 2a)\cos x + (a - b)\sin x.$$

與 $5 - 3\cos x + 4\sin x$ 比較：

$$c - 2b = 5, \qquad c - 2a = -3, \qquad a - b = 4.$$

第一條方程減去第二條得 $2a - 2b = 8$，又是第三條方程，所以與第 (i) 部分一樣有一個自由參數，原因也相同。取 $b = 0$ 得 $c = 5$、$a = 4$，所以 $\mathrm{R} = 4 + 5\sin x$。因此

$$\frac{y}{\mathrm{Q}} = \frac{4 + 5\sin x}{1 + \cos x + 2\sin x} + C,$$

而通解（general solution）為

$$y = 4 + 5\sin x + C(1 + \cos x + 2\sin x),$$

其中 C 為任意常數。雖然我們求解時除以了 Q，但直接代入可以確認這個函數對每個 x 都滿足方程。其他 b 的選擇只會令 C 平移：例如 $b = -2$ 給出 $\mathrm{R} = 2 - 2\cos x + \sin x = (4 + 5\sin x) - 2\mathrm{Q}$。

驗算

- 在第 (i) 部分，由我們的原函數，被積函數的 $\int_0^1$ 應為 $\frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$；辛普森法則（Simpson's rule）給出 $-0.83333\ldots$，而且對每個 a 的選擇，在隨機區間上結果都吻合。

- 在第 (ii) 部分，代入 $y = 4 + 5\sin x$：左邊為 $(1 + \cos x + 2\sin x)5\cos x - (2\cos x - \sin x)(4 + 5\sin x) = 5 - 3\cos x + 4\sin x$。而 $y = \mathrm{Q}$ 給出 $\mathrm{QQ}' - \mathrm{Q}'\mathrm{Q} = 0$，即餘函數（complementary function）。
- 以數值方法（龍格－庫塔法（Runge–Kutta））由 $y(0.5) = 1.7$ 解方程至 $x = 1.5$，得 3.910638，與取相應 C 的公式吻合。

常見錯誤

- 以為三個未知數的三條方程必定有唯一解。這裏它們是相依的，而這正是不唯一性問題的重點所在。
- 在第 (ii) 部分弄錯 Q' 的正負號：$\mathrm{Q}' = 2\cos x - \sin x$，所以 y 的係數是 $-\mathrm{Q}'$，而不是 $+\mathrm{Q}'$。
- 忘記在最終答案中積分常數是乘以 Q 的：通解是 $y = \mathrm{R} + C\mathrm{Q}$，而不是 $y = \mathrm{R} + C$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的方程是一條一階線性微分方程（first-order linear differential equation），其通解的形狀是「特解（particular solution）加上齊次方程（homogeneous equation）之解的倍數」，這個模式貫穿所有線性問題。表達式 $\mathrm{QR}' - \mathrm{Q}'\mathrm{R}$ 是 Q 與 R 的朗斯基行列式（Wronskian），它在二階線性方程中擔當核心角色，尤其是在降階法（reduction of order）和參數變易法（variation of parameters）之中。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）同時涵蓋積分因子和朗斯基行列式。

詳細解答

STEP III 2010，第 9 題

力學 • 圓上的運動

STEP III 2010，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

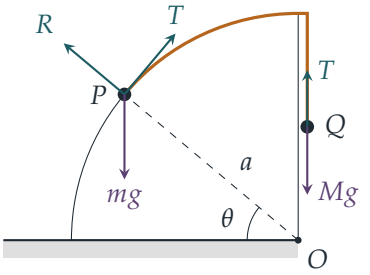
step.maths.org/questions/10-s3-q9

關鍵思路

由於繩子不可伸長（inextensible），而木塊光滑（smooth），P 和 Q 始終以相同的速率運動，而且整個系統的能量守恆（conservation of energy）。這樣便能把 P 的速率寫成 θ 的函數（function），完全不用解任何微分方程（differential equation）。接着，由於 P 在圓周上運動，沿指向 O 的方向分解力，便可求出法向反作用力（normal reaction）。保持接觸即表示這個反作用力始終非負，而利用凹性（concavity）論證，可知只需檢查木塊頂部的情況便足夠。

解答

模型。 P 和 Q 是質點（particle），繩子輕而不可伸長，木塊光滑，因此整條繩子上的張力（tension）T 處處相同。設 P 位於圓弧上角度 θ 的位置。繩子由 P 沿圓弧伸延至木塊頂部，然後沿鉛垂面旁邊垂直向下連到 Q。



速率。 當 P 由 $\theta = 0$ 移動到 θ 時，它走過了長度為 $a\theta$ 的圓弧，因此 Q 下降了距離 $a\theta$。兩者都以速率 $v = a\dot{\theta}$ 運動。與此同時，P 上升了高度 $a\sin\theta$。木塊光滑，而繩子對整個系統不做淨功（因為它不可伸長），所以能量守恆。由靜止開始，

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v^2 = Mga\theta - mga\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = \frac{2ga\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

由於 $M\theta > m\theta \geq m\sin\theta$，此式在 $0 < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ 時為正，所以系統確實會由靜止開始運動。

法向反作用力。 P 繞 O 沿半徑為 a 的圓周運動，因此它指向 O 的加速度為 v^2/a。作用於 P 的力如下：

- 沿 OP 方向、背離 O 的反作用力 R；
- 沿切線（tangent）方向的張力 T，它沒有徑向分量；
- 重力 mg，由於 OP 與水平方向成角 θ，它指向 O 的分量為 $mg\sin\theta$。

沿指向 O 的方向分解，

$$mg\sin\theta - R = \frac{mv^2}{a} = \frac{2mg\,(M\theta - m\sin\theta)}{m+M}.$$

因此

$$\begin{aligned} R &= \frac{mg\big[(m+M)\sin\theta - 2M\theta + 2m\sin\theta\big]}{m+M} \\ &= \boxed{\frac{mg\big[(3m+M)\sin\theta - 2M\theta\big]}{m+M}.} \end{aligned}$$

想一想 對 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 內的每一個 θ，R 都必須非負。我們是否需要找出 R 的最小值？

條件。 P 保持接觸，當且僅當 $R \geq 0$ 在整個過程中成立，即

$$f(\theta) = (3m+M)\sin\theta - 2M\theta \geq 0 \quad \text{對所有} 0 \leq \theta \leq \tfrac{1}{2}\pi.$$

我們不需要求最小值。由於在這個區間上 $f''(\theta) = -(3m+M)\sin\theta \leq 0$，$f$ 是凹函數，所以它的圖像位於連接兩個端點的弦（chord）之上或弦上。又因為 $f(0) = 0$，所以：

- *必要性*（*necessity*）。若 P 在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時仍保持接觸，則 $f(\frac{1}{2}\pi) = 3m + M - \pi M \geq 0$。
- *充分性*（*sufficiency*）。若 $f(\frac{1}{2}\pi) \geq 0$，則由 $(0,0)$ 到 $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi))$ 的弦位於橫軸之上或橫軸上。由凹性可知 f 位於弦之上或弦上，所以在整個區間上 $f \geq 0$。

因此條件是 $3m \geq (\pi - 1)M$，即

$$\frac{m}{M} \geq \frac{\pi - 1}{3},$$

得證。注意 $(\pi - 1)/3 \approx 0.714 < 1$，所以這與 $m < M$ 並無矛盾。

驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，得 $R = 0$。這是正確的：開始時 P 位於木塊底部，半徑 OP 是水平的，P 的重量由桌面承托。
- 對 P 沿切線方向分解、對 Q 沿鉛垂方向分解，可得 $T = \dfrac{Mmg(1 + \cos\theta)}{m + M} > 0$，所以繩子在整個過程中確實保持拉緊。
- 數值上，取 $m = 0.8$、$M = 1$ 及 $a = 1$（比值 $0.8 > 0.714$），逐步數值求解運動方程（equation of motion），並用牛頓第二定律（Newton's second law）計算 R，結果與公式吻合至 10^{-13}，而且 R 始終非負。若取 $m/M = \frac{2}{3}$，則 R 在接近頂部時為負。

常見錯誤

- 忘記 Q 也有動能（kinetic energy），因而寫成 $\frac{1}{2}mv^2$ 而非 $\frac{1}{2}(m + M)v^2$。
- 把張力放進徑向方程。在光滑表面上，繩子沿 P 點的切線方向。
- 只檢查 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時 $R \geq 0$，卻沒有說明為何這樣已經足夠。正是 f 的凹性令這樣做足夠。

STEP 之外

在這裏，能量守恆代替了求解運動方程 $(m + M)a\ddot{\theta} = g(M - m\cos\theta)$。這就是首次積分（first integral）的概念，它在拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中處於核心地位：繩子是一個約束（constraint），而單一個坐標 θ 便能描述整個系統。本題屬於「珠子離開球面」這一類問題，Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這類問題有詳細的討論。

詳細解答

STEP III 2010，第 10 題

力學 • 微小振動

> **STEP III 2010，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q10

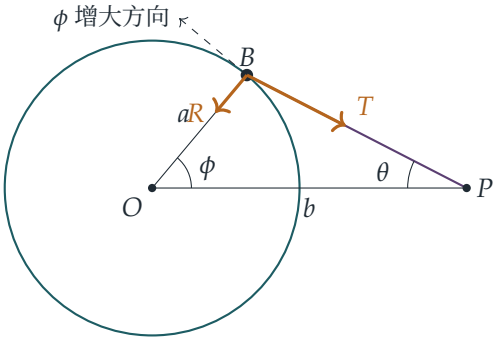
關鍵思路

珠子（bead）被限制在圓環上運動，所以只有沿圓環切線（tangent）方向的力分量會改變它的運動；法向反作用力（normal reaction）以及重力（由圓環的豎直反作用力抵消）完全不會出現在方程中。其餘一切都是三角形 OBP 的幾何。正弦定理（sine rule）把這幾何關係轉化為弦的長度；在角度很小時，它又給出第二部分所要求的 θ 與 ϕ 之間的線性關係。

解答

運動方程

把珠子視為光滑圓環上的質點，把弦視為輕而有彈性的弦。取 P 在正 x 軸上，並以逆時針方向量度 ϕ，使 B 位於與 OP 成角 ϕ 的位置，如圖所示。在三角形 OBP 中，O 處的角為 ϕ，P 處的角為 θ，因此 B 處的角為 $\pi - \theta - \phi$。



設 $l = BP$。在三角形 OBP 中應用正弦定理，

$$\frac{l}{\sin\phi} = \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b}{\sin(\theta+\phi)},$$

這裏用了 $\sin(\pi-\theta-\phi) = \sin(\theta+\phi)$。特別地，$l = \dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta}$。

弦在整個運動過程中都是拉緊的，因為 B 與 P 的最短距離是 $b-a$，而 $b-a > c$。所以由胡克定律（Hooke's law），張力（tension）為

$$T = \frac{\lambda(l-c)}{c} = \lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right).$$

在水平面內的力有沿 BP 的張力 T，以及光滑圓環沿半徑 OB 方向的法向反作用力 R。（在豎直方向，重量由反作用力的豎直部分抵消。）珠子在半徑為 a 的圓上運動，所以它沿切線方向（取 ϕ 增大的方向）的加速度為 $a\ddot{\phi}$。只有 T 有切向分量。

弦 BP 與向內的半徑 BO 成角 $\pi-\theta-\phi$，所以它與向外的半徑成角 $\theta+\phi$，其沿切線的分量大小為 $T\sin(\theta+\phi)$。這個分量指向 P，即 ϕ 減小的方向。沿切線分解，

$$ma\ddot{\phi} = -\lambda\left(\frac{a\sin\phi}{c\sin\theta} - 1\right)\sin(\theta+\phi),$$

即為所求。（當 $\phi < 0$ 時，圖形關於 OP 作反射；此時 $\theta < 0$ 亦成立，而以有向角計算，同一方程仍然成立。）

微小振動

正弦定理給出精確關係 $a\sin(\theta+\phi) = b\sin\theta$。當 θ 和 ϕ 都很小時，兩邊都有 $\sin x \approx x$，所以

$$a(\theta+\phi) \approx b\theta.$$

因此 $\theta \approx \dfrac{a\phi}{b-a}$，以及 $\theta+\phi \approx \dfrac{b\theta}{a} \approx \dfrac{b\phi}{b-a}$。

想一想 當兩個角都趨於零時，$\dfrac{a\sin\phi}{c\sin\theta}$ 會怎樣？它看起來像 $0/0$。

這個商其實就是 l/c，而當 B 趨近平衡位置（equilibrium）時，長度 l 趨於 $b-a$。等價地，由上面的關係可得 $\dfrac{a\sin\phi}{\sin\theta} \approx \dfrac{a\phi}{\theta} \approx b-a$。所以在首階近似（leading order）下，張力就是常數的平衡張力

$$T_0 = \lambda\left(\frac{b-a}{c} - 1\right) = \frac{\lambda(b-a-c)}{c},$$

由於 $c < b-a$，它是正數。因子 $\sin(\theta+\phi)$ 本身已經很小，所以 T 的任何修正項只會在二階才有貢獻。

代入運動方程並保留一階項，

$$ma\ddot{\phi} \approx -\frac{\lambda(b-a-c)}{c}\cdot\frac{b\phi}{b-a}, \qquad \text{所以} \qquad \ddot{\phi} = -\omega^2\phi, \quad \omega^2 = \frac{\lambda b(b-a-c)}{mac(b-a)}.$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），而在 $\theta = \phi = 0$ 附近微小振動的週期（period）為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mac(b-a)}{\lambda b(b-a-c)}}.$$

驗算

- 量綱（dimensions）：λ 是力，所以 $mac(b-a)/(\lambda b(b-a-c))$ 的量綱是 $\mathrm{M}\,\mathrm{L}/(\mathrm{M}\,\mathrm{L}\,\mathrm{T}^{-2}) = \mathrm{T}^2$，正是週期應有的量綱。
- 當 $c \to b-a$ 時，平衡張力消失，週期變成無限大：鬆弛的弦不提供恢復力（restoring force），這是合理的。
- 數值上，取 $a = 1$、$b = 2.5$、$c = 0.7$、$\lambda = 3$、$m = 0.5$，公式給出週期 1.8586。從一個微小位移出發，以數值方法逐步推進精確的運動（力直接由 B 的位置計算），得出的值在六位有效數字內相同。在隨機選取的位置上，精確的運動方程亦與直接的向量分解結果吻合。

常見錯誤

- 符號弄錯：切向拉力指向 P，即指向 $\phi = 0$，所以它必須帶負號。
- 以為平衡時張力為零。在平衡位置，弦被拉長至長度 $b-a > c$，所以張力是 $\lambda(b-a-c)/c$，而正是這個張力提供恢復力。
- 使用 $\theta + \phi \approx \phi$。這裏 θ 與 ϕ 同階，把它略去會得出錯誤的週期。

STEP 之外

這裏的方法是求微小振動頻率的標準做法：找出平衡位置，把運動方程在其附近線性化（linearise），然後讀出 ω^2。一個巧妙之處是，恢復力完全來自平衡張力透過弦方向的改變而產生的作用，這與繃緊的結他弦是同一機制。在大學一年級的課程中，這會發展為拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）和簡正模（normal modes）；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是細心學習微小振動分析的好地方。

詳細解答

STEP III 2010，第 11 題

力學 • 摩擦力與相對運動

STEP III 2010，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

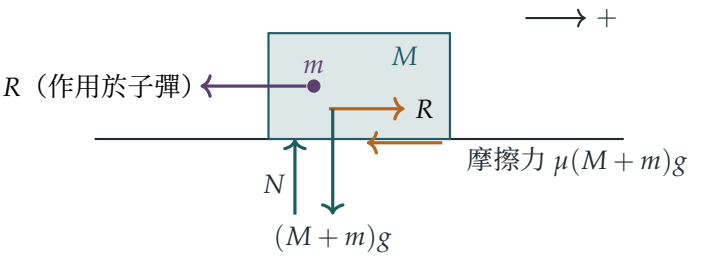
step.maths.org/questions/10-s3-q11

關鍵思路

這裏動量並不守恆（conservation of momentum），因為地面的摩擦力自始至終都作用在木塊上，所以熟悉的「子彈嵌入木塊」捷徑行不通。我們改為把子彈和木塊視為兩個獨立的質點，各自有恆定的加速度，並由大小相等、方向相反的阻力 R 聯繫起來。既然加速度恆定，*suvat* 方程便能完成所有工作，而相對運動只不過是兩者之差。

解答

我們把子彈和木塊模擬為沿水平直線運動的質點，並以子彈的運動方向為正方向。當子彈在木塊內時，木塊以力 R 向後推子彈；根據牛頓第三定律（Newton's third law），子彈亦以力 R 向前推木塊。



法向反作用力（*normal reaction*）。鉛垂方向上沒有任何物體加速。子彈由木塊承托，所以地面承受兩者的重量：$N = (M + m)g$。

摩擦力（*friction*）。由於題目給出 $R > (M + m)\mu g$，作用在木塊上的向前力 R 超過可提供的最大摩擦力 $\mu N = (M + m)\mu g$。因此木塊確實會滑動，而一旦木塊移動，摩擦力便

取其極限值（limiting value）$\mu(M+m)g$，方向向後。

第 (i) 部分

子彈所受的唯一水平力是向後的 R，所以子彈以 R/m 減速。木塊所受的向前合力為 $R-(M+m)\mu g$，所以它向前加速，加速度為

$$A=\frac{R-(M+m)\mu g}{M}>0.$$

相對於木塊，子彈的加速度為 $-\frac{R}{m}-A$，所以它相對於木塊的減速度（deceleration）大小為

$$a=\frac{R}{m}+\frac{R-(M+m)\mu g}{M},$$

此即所求。

第 (ii) 部分

相對於木塊，子彈以速率 u 開始運動，並以 a 均勻減速，所以它在以下時間後相對於木塊靜止：

$$t_1=\frac{u}{a}.$$

在那一刻，木塊的速率就是共同速率 v。木塊由靜止開始以恆定加速度 A 運動，所以

$$v=At_1=\frac{Au}{a},\qquad \text{即}\qquad av=Au=\frac{Ru-(M+m)\mu gu}{M},$$

這就是所要求的結果。

想一想 為甚麼不直接用動量守恆求 v？

子彈—木塊系統的動量只有在沒有外加水平力作用時才守恆。這裏地面的摩擦力在整段時間 t_1 內都作用在木塊上，並帶走動量 $(M+m)\mu g\,t_1$。（對於真實的子彈，這段時間極短，所以 $v\approx mu/(M+m)$，但題目要求的是準確值。）

第 (iii) 部分

在時間 t_1 內，木塊由靜止均勻加速至速率 v，所以它移動的距離等於平均速率乘以時間：

$$s_1=\frac{0+v}{2}\,t_1=\frac{uv}{2a}.$$

第 (iv) 部分

當子彈不再穿過木塊時，兩者便作為一個質量為 $M+m$ 的單一物體一起運動。其重量仍為 $(M+m)g$，所以摩擦力為向後的 $\mu(M+m)g$，減速度為 μg。由速率 v 開始，它再

滑行

$$s_2 = \frac{v^2}{2\mu g}$$

才停下（之後保持靜止，因為已沒有水平力去克服靜摩擦力（static friction））。總距離為

$$s_1 + s_2 = \frac{uv}{2a} + \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{uv}{2a} + \frac{v}{2\mu g} \cdot \frac{Au}{a} = \frac{uv}{2a\mu g}\left(\mu g + A\right),$$

其中我們對其中一個因子 v 使用了第 (ii) 部分的 $v = Au/a$。

想一想 怎樣消去 a 和 A，得出簡潔的答案？

把兩者都化成以 mM 為分母，並尋找公因子：

$$\mu g + A = \frac{M\mu g + R - (M+m)\mu g}{M} = \frac{R - m\mu g}{M},$$
$$a = \frac{MR + mR - m(M+m)\mu g}{mM} = \frac{(M+m)(R - m\mu g)}{mM}.$$

所以 $\dfrac{\mu g + A}{a} = \dfrac{m}{M+m}$，其中因子 $R - m\mu g$ 被約去（它是正數，因為 $R > (M+m)\mu g > m\mu g$）。因此木塊移動的總距離為

$$\frac{uv}{2\mu g} \cdot \frac{m}{M+m} = \frac{muv}{2(M+m)\mu g},$$

此即所求。

$R < (M+m)\mu g$ 的情況

此時作用在木塊上的向前推力 R 小於極限摩擦力 $(M+m)\mu g$，所以靜摩擦力足以使木塊保持不動：木塊始終不會移動。子彈只是在靜止的木塊內以 R/m 減速，在穿入距離 $\dfrac{mu^2}{2R}$ 後停下（假設木塊足夠厚），而木塊自始至終都留在原位。

驗算

- 取 $m = 0.02\,\mathrm{kg}$、$M = 2\,\mathrm{kg}$、$u = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$\mu = 0.5$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $R = 1000\,\mathrm{N}$。則 $a \approx 50\,495\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，$v \approx 2.941\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，$s_1 \approx 0.0087\,\mathrm{m}$，$s_2 \approx 0.8827\,\mathrm{m}$，以及 $s_1 + s_2 \approx 0.8914\,\mathrm{m}$，與 $muv/\big(2(M+m)\mu g\big)$ 相符。對兩個質點作逐步數值模擬，亦得出相同的 v 和總距離。
- 當 $R \to \infty$（即瞬間碰撞）時，$v = Au/a \to mu/(M+m)$，正是動量守恆給出的答案，理應如此。
- 量綱（dimensions）：$muv/\big((M+m)\mu g\big)$ 的量綱是 (速率)^2/(加速度)，即長度。

常見錯誤

- 對木塊使用 $N = Mg$，忘記嵌入其中的子彈的重量同樣由地面承受。
- 在撞擊過程中使用動量守恆，忽略了摩擦力的衝量。
- 把 R 當作木塊所受的合力，而不是 R 減去摩擦力。

STEP 之外

衝量（impulse）可以為整個運動提供一個快速的一致性檢驗：由於系統最終靜止，在木塊移動的整段時間內，地面摩擦力的衝量必須等於子彈的初始動量 mu。把系統分拆成幾部分，用牛頓第三定律追蹤內力，並仔細處理外力，是大學一年級力學的核心技巧，並會引伸至質心參考系（centre-of-mass frame）和非彈性碰撞（inelastic collisions）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）發展了這些概念，書中有很多正是這類風格的題目。

詳細解答

STEP III 2010，第 12 題

概率與統計 • 幾何分佈的期望值

STEP III 2010，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/10-s3-q12

關鍵思路

級數 S 是一個算術幾何級數（arithmetico-geometric series），而減去 rS 這個技巧可以把它化成普通的幾何級數（geometric series）。求出 S 之後，題中每一個期望值（expectation）都正好是這種形式的和：射擊次數按線性增長，而射到那一步的概率則按幾何方式遞減。所以整道題歸結為把每個期望值寫成一個和，再讀出 r 和 d 的正確數值。

解答

級數

由於 $|r| < 1$，級數絕對收斂（converges absolutely）（其各項的絕對值不超過某常數乘以 $n|r|^n$），所以可以逐項相減。把 r 的同次冪對齊，

$$\begin{aligned} S &= 1 + (1+d)r + (1+2d)r^2 + (1+3d)r^3 + \cdots, \\ rS &= \qquad r + (1+d)r^2 + (1+2d)r^3 + \cdots, \end{aligned}$$

對於 $n \geq 1$，r^n 的係數之差都正好是 d。因此

$$(1-r)S = 1 + d\,(r + r^2 + r^3 + \cdots) = 1 + \frac{rd}{1-r},$$

這裏把幾何級數求和，因為 $|r| < 1$，所以這一步成立。兩邊除以 $1 - r \neq 0$，

$$S = \frac{1}{1-r} + \frac{rd}{(1-r)^2},$$

即為所求。

Arthur 單獨射擊

假設 $0 < a \leq 1$（若 $a = 0$，Arthur 永遠射不中）。設 N 為 Arthur 所需的射擊次數。$N = n$ 當且僅當他首 $n-1$ 次都射不中，而第 n 次射中，所以由獨立性（independence）得

$$\mathrm{P}(N = n) = a'^{n-1}a, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

因此

$$\mathrm{E}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a\, a'^{n-1} = a\big(1 + 2a' + 3a'^2 + \cdots\big).$$

括號內正是 $r = a'$、$d = 1$ 時的 S（a'^n 的係數是 $1+n$），而且 $0 \leq a' < 1$，所以

$$\mathrm{E}(N) = a\left(\frac{1}{1-a'} + \frac{a'}{(1-a')^2}\right) = a\left(\frac{1}{a} + \frac{a'}{a^2}\right) = \frac{a+a'}{a} = \frac{1}{a},$$

這裏先用了 $1 - a' = a$，再用了 $a + a' = 1$。（當 $a = 1$ 時，這條公式同樣給出 1。）

比賽：誰會勝出

以下取 $0 < a < 1$ 及 $0 < b < 1$，使得 $0 < a'b' < 1$。第 $1, 3, 5, \ldots$ 次射擊屬於 Arthur，第 $2, 4, 6, \ldots$ 次射擊屬於 Boadicea。把 Arthur 射一次、接着 Boadicea 射一次稱為一個**回合**；一個回合中無人射中的概率是 $a'b'$。

Arthur 在第 $2k+1$ 次射擊時勝出（$k = 0, 1, 2, \ldots$），當且僅當首 k 個回合都無人射中，然後 Arthur 射中。由獨立性，這事件的概率是 $(a'b')^k a$，而這些事件互斥（disjoint），所以

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a = \frac{a}{1 - a'b'}.$$

同理，Boadicea 在第 $2k+2$ 次射擊時勝出，當且僅當 k 個回合都無人射中，然後 Arthur 射不中而 Boadicea 射中，其概率是 $(a'b')^k a'b$。所以

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (a'b')^k a'b = \frac{a'b}{1 - a'b'} = \frac{(1-a)b}{1 - (1-a)(1-b)}.$$

驗證一下：$1 - a'b' = a + b - ab = a + a'b$，所以 $\alpha + \beta = 1$，即比賽以概率 1 結束。

比賽：期望長度

設 T 為比賽中的射擊次數。由上一部分，$T = 2k+1$ 的概率是 $(a'b')^k a$，而 $T = 2k+2$ 的概率是 $(a'b')^k a'b$。記 $q = a'b'$，

$$\mathrm{E}(T) = a \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) q^k + a'b \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) q^k.$$

想一想 這兩個和怎樣套進級數 S 的形式？

第一個和是 $1+3q+5q^2+\cdots$，即 $r=q$、$d=2$ 時的 S。第二個和是 $1+2q+3q^2+\cdots$ 的兩倍，而後者是 $r=q$、$d=1$ 時的 S。所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^k=\frac{1}{1-q}+\frac{2q}{(1-q)^2}=\frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)q^k=2\left(\frac{1}{1-q}+\frac{q}{(1-q)^2}\right)=\frac{2}{(1-q)^2}.$$

因此

$$\mathrm{E}(T)=\frac{a(1+q)+2a'b}{(1-q)^2}.$$

現在與目標式比較。利用 $\alpha=a/(1-q)$ 及 $\beta=a'b/(1-q)$，

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=\frac{1}{1-q}+\frac{a'}{1-q}=\frac{(1+a')(1-q)}{(1-q)^2}.$$

所以只需證明 $a(1+q)+2a'b=(1+a')(1-q)$。利用 $1-q=a+a'b$，

$$(1+a')(1-q)=(1+a')(a+a'b)=a+aa'+a'b+a'^2b,$$
$$a(1+q)+2a'b=a+aa'(1-b)+2a'b=a+aa'-aa'b+2a'b.$$

兩者之差（第一式減第二式）是

$$a'^2b+a'b-2a'b+aa'b=a'b\,(a'+a-1)=0,$$

因為 $a+a'=1$。因此

$$\mathrm{E}(T)=\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b},$$

即為所求。

驗算

- 若 $a=1$，Arthur 第一次便射中：$\alpha=1$，$\beta=0$，$\mathrm{E}(T)=1$，與 $\alpha/a+\beta/b$ 吻合。
- 若 $a=b=p$，則 $\alpha/p+\beta/p=(\alpha+\beta)/p=1/p$。這是對的：此時比賽只是一連串獨立的射擊，每次射中的概率都是 p，而由第一部分，首次射中平均需要 $1/p$ 次射擊。
- 取 $a=0.3$、$b=0.45$，得 $\alpha=0.3/0.615\approx0.4878$ 及 $\mathrm{E}(T)=1.7/0.615\approx2.764$；模擬（simulation）200 000 場比賽得出 0.486 和 2.769。

常見錯誤

- 忘記 Boadicea 只有在 Arthur 剛剛射不中時才可能勝出，於是寫成 $\beta = b/(1 - a'b')$；漏掉的因子 a' 會令 $\alpha + \beta \neq 1$，從而暴露出來。
- 數回合而不是數射擊次數：Boadicea 在第 $k+1$ 回合勝出的比賽共有 $2k+2$ 次射擊，而不是 $k+1$ 次。

STEP 之外

這類結果通常可以透過以第一回合為條件（「首步分析」（first-step analysis））更簡潔地證明：若第一回合無人射中，比賽在兩次射擊後便重新開始，所以 $\mathrm{E}(T) = a \cdot 1 + a'b \cdot 2 + a'b'\big(2 + \mathrm{E}(T)\big)$，一行便得出 $\mathrm{E}(T) = (1 + a')/(1 - a'b')$。首步分析是研究馬爾可夫鏈（Markov chains）的基本工具，通常在數學學位的第一或第二年學習。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了生成函數（generating functions）和這類論證方法。

詳細解答

STEP III 2010，第 13 題

概率與統計 • 線性組合的相關性

> **STEP III 2010，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/10-s3-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 13.7 節製造相關性中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch13/correlation.html

關鍵思路

這裡的一切都是平均值為 0、方差為 1 的獨立（independent）變量的線性組合（linear combination），所以每個期望值（expectation）、方差（variance）和協方差（covariance）都可以直接從係數讀出：若 $U = \sum u_k Z_k$ 及 $V = \sum v_k Z_k$，則 $\operatorname{Cov}(U, V) = \sum u_k v_k$。這道題其實是在逐個變量地構造三個具有任意指定相關係數（correlation）的標準化（standardised）變量，本質上就是喬裝了的格拉姆–施密特（Gram–Schmidt）正交化過程。每個新條件都確定一個新的係數。

解答

全程我們使用協方差的雙線性（bilinearity）、$\operatorname{Var}(Z_k) = 1$，以及當 $j \neq k$ 時 $\operatorname{Cov}(Z_j, Z_k) = 0$（這是因為各個 Z_k 互相獨立）。特別地，對常數 u_k、v_k，

$$\operatorname{Cov}\Big(\sum_k u_k Z_k,\ \sum_k v_k Z_k\Big) = \sum_{j,k} u_j v_k \operatorname{Cov}(Z_j, Z_k) = \sum_k u_k v_k.$$

Z_1 與 Z_2 的相關係數

由獨立性得 $\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{E}(Z_1 Z_2) - \mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2) = 0$，所以 $\operatorname{Corr}(Z_1, Z_2) = 0$。

變量 Y_2

記 $s = \sqrt{1-\rho_{12}^2}$，由於 $-1 < \rho_{12} < 1$，它是正實數。於是 $Y_2 = \rho_{12}Z_1 + sZ_2$，由期望值的線性（linearity of expectation）得

$$\mathrm{E}(Y_2) = \rho_{12}\mathrm{E}(Z_1) + s\,\mathrm{E}(Z_2) = 0.$$

由上述協方差法則，

$$\mathrm{Var}(Y_2) = \rho_{12}^2 + s^2 = \rho_{12}^2 + (1-\rho_{12}^2) = 1, \qquad \mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathrm{Cov}(Z_1, \rho_{12}Z_1 + sZ_2) = \rho_{12}.$$

由於 $\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{Var}(Y_2) = 1$，定義中的分母為 1，因此

$$\mathrm{Corr}(Y_1, Y_2) = \rho_{12}.$$

變量 Y_3

條件 $\mathrm{E}(Y_3) = 0$ 對任何 a, b, c 都自動成立，所以它沒有提供任何資訊。其餘三個條件各給出一條方程。由於 Y_1, Y_2, Y_3 的方差都是 1，每個相關係數都等於對應的協方差。

與 Y_1 的相關係數。 $\mathrm{Cov}(Z_1,\, aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = a$，所以

$$a = \rho_{13}.$$

與 Y_2 的相關係數。 $\mathrm{Cov}(\rho_{12}Z_1 + sZ_2,\, aZ_1 + bZ_2 + cZ_3) = \rho_{12}a + sb$，所以 $\rho_{12}\rho_{13} + sb = \rho_{23}$，又因 $s \neq 0$，

$$b = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}.$$

單位方差。 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$，由於 $c \geq 0$，我們取非負的平方根：

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - \rho_{13}^2 - \frac{(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2} \\ &= \frac{(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2) - (\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1-\rho_{12}^2} \\ &= \frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}, \end{aligned}$$

其中最後一步裡 $\rho_{12}^2\rho_{13}^2$ 項互相抵消。因此

$$c = \sqrt{\frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{12}^2}}.$$

想一想 如果平方根下的式子是負數，會怎樣？

那麼不存在實數 c，而且根本不存在具有這三個相關係數的隨機變量：$\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ 這三個數彼此並不相容。例如，$\rho_{12} = \rho_{13} = 0.9$ 而 $\rho_{23} = -0.9$ 是不可能的，因為如果 Y_2 和 Y_3 都與 Y_1 十分接近，它們之間就不可能強烈地反向相關。題目默認所給的相關係數是可以實現的，而這正正就是該分子非負的條件。

最後部分：X_i

對 $i = 1, 2, 3$，取

$$X_i = \mu_i + \sigma_i Y_i,$$

其中 $\sigma_i > 0$（我們可以取 σ_i 為正，因為題目只指定了 σ_i^2）。於是 $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i + \sigma_i \cdot 0 = \mu_i$，且 $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2 \mathrm{Var}(Y_i) = \sigma_i^2$。加上常數不會改變協方差，所以

$$\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\sigma_i \sigma_j \,\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{|\sigma_i \sigma_j|}\, \rho_{ij} = \rho_{ij},$$

這裡用了 $\sigma_i \sigma_j > 0$。所以這些 X_i 具備所有要求的性質。

驗算

- 若 $\rho_{13} = \rho_{23} = 0$，則得 $a = b = 0$、$c = 1$，所以 $Y_3 = Z_3$，與其他變量獨立，理應如此。若 $\rho_{12} = 0$，則 $Y_2 = Z_2$，且 $a = \rho_{13}$、$b = \rho_{23}$、$c = \sqrt{1 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2}$，正是顯而易見的選擇。
- 數值上，取 $\rho_{12} = 0.5$、$\rho_{13} = -0.3$、$\rho_{23} = 0.2$，得 $a = -0.3$、$b \approx 0.4041$、$c \approx 0.8641$，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$。以 2×10^5 組三元組進行模擬（所用的 Z_k 是均勻分佈而非正態分佈），得到 X_i 的樣本相關係數為 0.500、−0.302、0.200，平均值和標準差亦正確。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{Var}(Y_2) = 1$ 意味着相關係數就是協方差，結果除錯了東西。
- 寫成 $X_i = \mu_i + \sigma_i^2 Y_i$：方差按乘數的平方縮放。
- 對其中一個變量取 $\sigma_i < 0$，這會令它的相關係數變號。

STEP 之外

這三個條件表示係數矩陣 A（各行為 $(1,0,0)$、$(\rho_{12},s,0)$、(a,b,c)）滿足 $AA^{\mathsf{T}}=R$，其中 R 是相關矩陣（correlation matrix）。這就是 R 的喬列斯基分解（Cholesky decomposition），它存在若且唯若 R 是半正定（positive semi-definite）的；而 c^2 的分子正是 $\det R$。統計學家在實際中正是用這個方法模擬相關的變量；若 Z_k 是正態分佈的，所得的就是多元正態分佈（multivariate normal distribution）。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）涵蓋協方差、相關係數和多元正態分佈；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）講解正定矩陣（positive definite matrix）和喬列斯基分解。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2010 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。