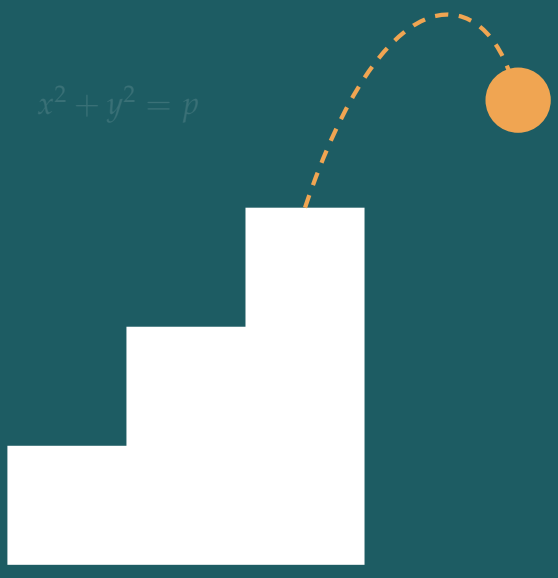
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

2009 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

2009 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

2009 年詳細解答

2009 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 39 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 因數的計數 純數學 . . . 3

第 2 題 三次曲線的切線 純數學 . . . 6

第 3 題 實根的計數 純數學 . . . 10

第 4 題 餘弦公式 純數學 . . . 14

第 5 題 約束最優化 純數學 . . . 17

第 6 題 代換積分法 純數學 . . . 21

第 7 題 分部積分法 純數學 . . . 25

第 8 題 圓與切線 純數學 . . . 28

第 9 題 相撞的拋體 力學 . . . 31

第 10 題 鏈面上的連接質點 力學 . . . 35

第 11 題 碰撞與恢復係數 力學 . . . 38

第 12 題 概率與不等式 概率與統計 . . . 41

第 13 題 排列與游程 概率與統計 . . . 45

STEP II

第 1 題 曲線的對稱性 純數學 . . . 48

第 2 題 曲線描繪與近似 純數學 . . . 52

第 3 題 三角恆等式與根式 純數學 . . . 56

第 4 題 多項式的整除性 純數學 . . . 60

第 5 題 嵌套平方根 純數學 . . . 63

第 6 題 無窮級數的界限 純數學 . . . 66

第 7 題 觀察法積分 純數學 . . . 70

第 8 題 向量幾何 純數學 . . . 74

第 9 題 質心 力學 . . . 77

第 10 題 碰撞與恢復係數 力學 81
第 11 題 摩擦與阻力 力學 85
第 12 題 二項正態分佈 概率與統計 89
第 13 題 二項分佈的期望成本 概率與統計 93

STEP III

第 1 題 圓的坐標幾何 純數學 96
第 2 題 冪級數解 純數學 99
第 3 題 極限與曲線描繪 純數學 103
第 4 題 拉普拉斯變換 純數學 107
第 5 題 根的對稱函數 純數學 110
第 6 題 托勒密定理 純數學 113
第 7 題 逐次微分與數學歸納法 純數學 117
第 8 題 極限與歸約公式 純數學 121
第 9 題 拋體軌道的角度 力學 125
第 10 題 簡諧運動 力學 129
第 11 題 變質量運動 力學 133
第 12 題 概率生成函數 概率與統計 137
第 13 題 重心極限定理 概率與統計 141

詳細解答

STEP I 2009，第 1 題

純數學 • 因數的計數

> **STEP I 2009，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

關鍵思路

$p^a q^b$（其中 p、q 為相異質數）的每一個因數（factor）都可寫成 $p^i q^j$，其中 $0 \le i \le a$ 及 $0 \le j \le b$；而根據唯一分解定理（unique factorisation），不同的 (i, j) 會給出不同的因數。因此因數的數目是一個乘積 $(a+1)(b+1)$，而且無論有多少個質數，同樣的結論都成立。計算真因數（proper factor）的數目只需再減去 2，於是兩部分都變成把一個數寫成乘積的問題。

解答

以 $d(N)$ 表示 N 的正因數的數目，包括 1 和 N 在內。若

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

其中 p_i 為相異質數且 $a_i \ge 1$，則 N 的正因數是 $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$，其中 $0 \le e_i \le a_i$；每個 e_i 有 $a_i + 1$ 種選擇，而根據唯一分解定理，不同的選擇給出不同的因數。因此

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

當 $N > 1$ 時，因數 1 和 N 並不相同，所以真因數的數目是 $d(N) - 2$。

第 (i) 部分

對於 $3^2 \times 5^3$，我們得到 $d = (2+1)(3+1) = 12$，所以共有 $12 - 2 = 10$ 個真因數，符合題目所求。

現在考慮 $3^m \times 5^n$。要令這個數是整數，而且至少有一個真因數，我們需要 $m, n \ge 0$（3 或 5 的負數次冪無法被另一個質數抵銷）。它的因數是 $3^i 5^j$，其中 $0 \le i \le m$、$0 \le j \le n$，

所以 $d = (m+1)(n+1)$（這亦涵蓋 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的情況）。我們需要

$$(m+1)(n+1) = 12,$$

也就是把 12 分解成兩個正整數的有序乘積。這些分解是

$$1 \times 12, \quad 2 \times 6, \quad 3 \times 4, \quad 4 \times 3, \quad 6 \times 2, \quad 12 \times 1,$$

從而得出

$$(m,n) = (0,11),\ (1,5),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,1),\ (11,0).$$

同樣根據唯一分解定理，每一組都給出不同的整數。其中一組 $(2,3)$ 就是題目給出的數，所以這種形式而又有 10 個真因數的**其他**整數恰好有 **5** 個：5^{11}、3×5^5、$3^3 \times 5^2$、$3^5 \times 5$ 和 3^{11}。

第 (ii) 部分

我們需要 $d(N) = 426 + 2 = 428$，而

$$428 = 2^2 \times 107,$$

其中 107 是質數（它不能被 2、3、5 或 7 整除，而且 $11^2 > 107$）。

想一想 N 的質因數分解（prime factorisation）可能有哪些形式？

各個 $a_i + 1$ 都至少是 2，而它們的乘積是 428。由於 107 是質數，當中恰好有一個是 107 的倍數，而它只能是 107、214 或 428；其餘各數的乘積則分別是 4、2 或 1。不計次序的話，$a_i + 1$ 這組數的可能情況是

$$\{428\}, \qquad \{214, 2\}, \qquad \{107, 4\}, \qquad \{107, 2, 2\},$$

所以指數組成的多重集（multiset）是

$$\{427\}, \qquad \{213, 1\}, \qquad \{106, 3\}, \qquad \{106, 1, 1\}.$$

想一想 指數確定之後，應該把它們分配給哪些質數？

指數既定，要令 N 盡可能小，就應該使用最小的質數，並把最大的指數放在最小的質數上。使用最小的可用質數顯然最好：把一個質數換成一個較小而未用過的質數，N 就會變小。另外，若 $p < q$，但 p 的指數是 a、q 的指數是 b，而 $a < b$，則把兩個指數對調，相當於把 N 乘以

$$\frac{p^b q^a}{p^a q^b} = \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a} < 1,$$

所以對調之後 N 會變小。因此每種形式的最佳候選是

$$2^{427}, \qquad 2^{213}\times 3, \qquad 2^{106}\times 3^3, \qquad 2^{106}\times 3\times 5.$$

比較它們的大小：

- $2^{106}\times 3\times 5 = 2^{106}\times 15 < 2^{106}\times 27 = 2^{106}\times 3^3$；
- $2^{106}\times 27 < 2^{106}\times 2^5 = 2^{111}$，而這遠小於 $2^{213}\times 3$ 和 2^{427}。

因此

$$N = 2^{106}\times 3\times 5.$$

驗算一下：$d(N) = 107\times 2\times 2 = 428$，所以 N 有 426 個真因數。

驗算

- 取一個較小的例子，直接列出 $3\times 5^5 = 9375$ 的因數：3^i5^j，其中 $i\in\{0,1\}$、$j\in\{0,\ldots,5\}$，共有 12 個因數，所以有 10 個真因數。
- 用電腦對所有滿足 $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$ 的指數組合 $2^a3^b5^c7^d$ 作一次簡短的搜尋，可確認最小的是 $2^{106}\times 15 \approx 1.22\times 10^{33}$，其次是 $2^{106}\times 27$。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分答 6：題目問的是*其他*整數，所以題目給出的那一個不計算在內。
- 遺漏 $m = 0$ 或 $n = 0$ 的情況（即 5^{11} 和 3^{11}），它們同樣符合題目要求的形式。
- 以為第 (ii) 部分的答案必須用上盡可能多的質數：107 是質數，這就迫使其中一個指數非常大，真正可以選擇的只有因數 4 如何拆分。

STEP 之外

函數 $d(N)$ 是一個*積性*（multiplicative）函數：只要 m 和 n 互質（coprime），就有 $d(mn) = d(m)d(n)$，而這正是本題所用的乘積公式。因數數目比每一個較小的數都多的數，就是拉馬努金（Ramanujan）的*高度合成數*（highly composite numbers），而第 (ii) 部分對調指數的論證，正是他刻劃這類數的第一步。想閱讀有關唯一分解定理和算術函數（arithmetic functions）的內容，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本初等數論經典入門書）是個好去處。

詳細解答

STEP I 2009，第 2 題

純數學 • 三次曲線的切線

> **STEP I 2009，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

本題在 *Beyond STEP* 第 1.9 節三次曲線的切線中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/tangents-cubic.html

關鍵思路

切線（tangent）在切點處與曲線相交兩次：把切線方程代入曲線方程時，切點對應的是一個重根（repeated root）。一旦知道三次方程（cubic）的一個重根，餘下的根便可藉因式分解直接得出，而這第三個交點的坐標原來是有理數。消去分母之後，曲線方程就化成一個立方和。

解答

在 $(-a, b)$ 處的切線

首先，$(-a, b)$ 確實在曲線上，因為 $x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$。

把 $y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ 對 x 作隱函數微分（implicit differentiation）（其中 a 和 b 為常數），得

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

在 $y \neq 0$ 的地方均成立。在 $(-a, b)$ 處，由於 $b > 0$，斜率（gradient）為 a^2/b^2。因此切

線為

$$\begin{aligned} y - b &= \frac{a^2}{b^2}(x + a) \\ b^2y - b^3 &= a^2x + a^3 \\ b^2y - a^2x &= a^3 + b^3, \end{aligned}$$

正是所需的結果。

當 $a = 1, b = 2$ 時的交點

現在曲線是 $y^3 = x^3 + 9$，而在 $(-1, 2)$ 處的切線是 $4y - x = 9$，即 $y = \frac{1}{4}(x + 9)$。代入曲線方程：

$$\begin{aligned} \frac{(x+9)^3}{64} &= x^3 + 9 \\ x^3 + 27x^2 + 243x + 729 &= 64x^3 + 576 \\ 0 &= 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153. \end{aligned}$$

每個係數都可被 9 整除，全式除以這個數後得

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

這正是題目要求的三次方程。

求 p, q, r, s

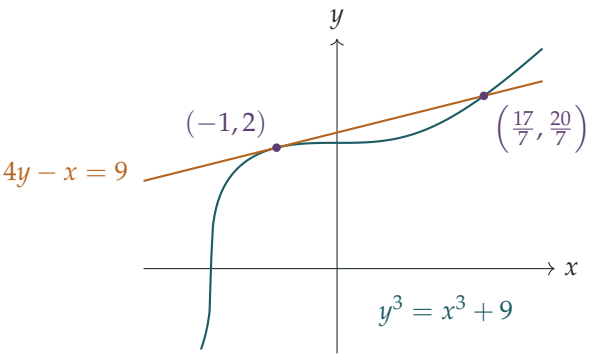
> **想一想** 我們已經知道這個三次方程的一個根。為甚麼它應該是一個二重根？

直線在 $x = -1$ 處與曲線相切，所以 $x = -1$ 是重根：在切點附近，直線與曲線在一階上吻合，因此兩者之差在該處以二階趨於零。故此 $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 是一個因式。比較 x^3 項和常數項，另一個因式必定是 $7x - 17$，我們可以驗證：

$$(x + 1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

所以切線與曲線再次相交於 $x = \frac{17}{7}$ 處，而在該處

$$y = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{17}{7} + 9\right) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{80}{7} = \tfrac{20}{7}.$$



由於這一點在 $y^3 = x^3 + 9$ 上，

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

乘以 7^3 得 $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$。最後一項並不是立方數，但 $9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$，所以

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

（原來的形式 $a^3 + b^3$（其中 $a = 1, b = 2$）就在這裏重新出現。）因此

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

我們可取 $p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$（後三個數的次序可任意排列）。

驗算

直接計算：$17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$。此外，三次方程的三個根是 $-1, -1, \frac{17}{7}$，其和為 $\frac{3}{7}$，其積為 $\frac{17}{7}$，與從係數讀出的 3/7 和 17/7 相符。以數值方法計算 $y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$ 在 $x = -a$ 處的導數，結果與 a^2/b^2 一致。

常見錯誤

- 沒有利用二重根：試圖從頭解這個三次方程，而不是先除去因式 $(x+1)^2$。
- 停在 $20^3 = 17^3 + 3087$ 這一步。我們需要的是立方相加的正整數，而 $3087 = 9 \cdot 7^3$ 必須拆成 $7^3 + 14^3$。

STEP 之外

這是處理三次曲線的經典*切線法*（tangent method）。一條直線與三次曲線相交於三點（按重數計算），所以兩個有理點（rational point）（或如本題般，一個點計算兩次）便

會產生第三個有理點。在橢圓曲線（elliptic curve）上，這種弦切作圖法（chord-and-tangent construction）成為一個羣運算法則（group law），是現代數論中一大領域的起點。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 討論了這類丟番圖方程（Diophantine equation），而 Silverman 與 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves* 則完整地發展了當中的幾何。

詳細解答

STEP I 2009，第 3 題

純數學 • 實根的計數

> **STEP I 2009，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

關鍵思路

把等式兩邊同時取適當的冪次來消去根號，但要留意這一步會失去甚麼。平方根（square root）永不為負，所以只有同時要求 $x \geq 0$，平方這一步才可以逆推回去；實數立方根（cube root）則沒有這種限制，因為每個實數都恰好有一個實數立方根。處理好這一點之後，每一次點算解的個數都歸結為一個二次方程的根，而這些根的正負號可以從兩根之和與兩根之積看出來。

解答

第 (i) 部分：平方根方程

這裏 $(a-x)^{\frac{1}{2}}$ 是指非負的平方根，所以任何解都滿足 $x \geq 0$，而兩邊平方得 $x^2 = a - x$，即 $x^2 + x - a = 0$。反過來，若 $x \geq 0$ 且 $x^2 + x - a = 0$，則 $a - x = x^2 \geq 0$，並且 $(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$。因此

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ 且 } x \geq 0,$$

於是我們要點算的是二次方程 $x^2 + x - a = 0$ 的非負根的個數。設它的根為 α, β（當兩根為實數時），則

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

情況 $a > 0$。判別式（discriminant）$1 + 4a$ 為正，所以有兩個實根，而兩根之積 $-a$ 為負。因此一根為正、另一根為負：恰好有一個解。

情況 $a = 0$。二次方程為 $x(x+1) = 0$，兩根為 0 和 -1。只有 $x = 0$ 是非負的：恰好有一個解。

情況 $a < 0$。若 $a < -\frac{1}{4}$，判別式為負，根本沒有實根。若 $-\frac{1}{4} \le a < 0$，兩根為實數，兩根之積 $-a$ 為正，所以兩根同號，而兩根之和為 -1，所以兩根皆為負。無論哪一種情況都沒有非負根，因此無解。

所以當 $a \ge 0$ 時方程有一個實數解，當 $a < 0$ 時沒有實數解，這正是所要證明的。

第 (i) 部分：立方根方程

每個實數 t 都恰好有一個實數立方根，而且 $x = t^{\frac{1}{3}} \iff x^3 = t$，當中沒有正負號的條件。所以原方程等價於

$$x^3 - (1+a)x + a = 0.$$

各項係數之和為 $1-(1+a)+a = 0$，所以 $x = 1$ 必定是一個根，把對應的因式除去後得

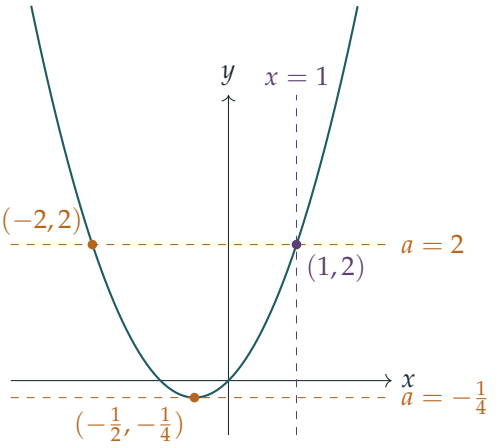
$$x^3 - (1+a)x + a = (x-1)(x^2 + x - a).$$

同一個二次式再次出現，而方程的解就是 $x = 1$ 連同 $x^2 + x - a = 0$ 的實根，這次對正負號再沒有限制。

> **想一想** 二次方程的根會不會與 $x = 1$ 重合，或者兩根彼此重合？

兩種情況都會發生，而它們正是令解的個數減少的情況。當 $1 + 4a = 0$，即 $a = -\frac{1}{4}$ 時，二次方程有重根（repeated root），該根為 $-\frac{1}{2}$。而當 $1 + 1 - a = 0$，即 $a = 2$ 時，$x = 1$ 是二次方程的根；這時 $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$，所以兩根為 1 和 -2。

把二次方程寫成 $a = x^2 + x$，它的實根就是高度為 a 的水平線與拋物線（parabola）$y = x^2 + x$ 相交之處，而這條拋物線的最低點是 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$。額外的解 $x = 1$ 對應拋物線上的點 $(1, 2)$。



綜合各種情況，相異實數解的個數如下：

- $a < -\frac{1}{4}$：二次方程沒有實根，所以只有**一個**解，即 $x = 1$；
- $a = -\frac{1}{4}$：解為 1 和 $-\frac{1}{2}$，所以有**兩個**；
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ 或 $a > 2$：二次方程有兩個相異的根，兩者都不等於 1，再加上 $x = 1$，所以有**三個**；
- $a = 2$：解為 1 和 -2，所以有**兩個**。

第 (ii) 部分

與第 (i) 部分完全一樣，平方根是非負的，所以

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ 且 } x \geq 0,$$

（反方向成立，是因為由 $x \geq 0$ 和 $b + x = x^2$ 可得 $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$）。現在 $x^2 - x - b = 0$ 的兩根之和為 1，兩根之積為 $-b$，而判別式為 $1 + 4b$。

情況 $b < -\frac{1}{4}$。沒有實根，所以**沒有**解。

情況 $b = -\frac{1}{4}$。二次方程為 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$，而 $x = \frac{1}{2} \geq 0$，所以有**一個**解。

情況 $-\frac{1}{4} < b < 0$。有兩個相異實根，兩根之積 $-b$ 為正，所以兩根同號，而兩根之和 1 為正，所以兩根皆為正：有**兩個**解。

情況 $b = 0$。二次方程為 $x(x - 1) = 0$，而 0 和 1 都是非負的：有**兩個**解。（事實上 $0 = \sqrt{0}$ 而 $1 = \sqrt{1}$。）

情況 $b > 0$。有兩個實根，兩根之積為負，所以一正一負：有**一個**解。

總結：當 $b < -\frac{1}{4}$ 時無解；當 $b = -\frac{1}{4}$ 時有一個解；當 $-\frac{1}{4} < b \leq 0$ 時有兩個解；當 $b > 0$ 時有一個解。

驗算

- 從圖像來看，第 (ii) 部分是問直線 $y = x$ 與半拋物線 $y = \sqrt{b + x}$ 在何處相交，而這條半拋物線由 $(-b, 0)$ 開始。當 $b = -\frac{1}{5}$ 時，解為 $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$，約為 0.276 和 0.724，兩者都滿足 $x = \sqrt{x - 0.2}$，準確至小數點後多個位。
- 在立方根方程中取 $a = 2$，$x = 1$ 和 $x = -2$ 都成立：$(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$。
- 我們用電腦在細密的格點上點算了每個方程的根的個數，所取的 a 和 b 的值涵蓋每個分界點（$-\frac{1}{4}$、0、2）的兩側，所得的個數與上面的分情況討論一致。

常見錯誤

- 平方之後忘記了 $x \geq 0$：這樣會得出第 (i) 部分對每個 $a > -\frac{1}{4}$ 都有兩個解，這是錯的。
- 對立方根方程也加上 $x \geq 0$ 的條件。負數的立方根是名正言順的實數。
- 遺漏了 $a = 2$ 的情況：這時一次因式的根 $x = 1$ 同時也是二次式的根，所以三個解之中有兩個合而為一。

STEP 之外

關鍵在於：在 $\mathbb{R}$ 上，平方不是可逆的運算，立方卻是。$x \mapsto x^3$ 是 $\mathbb{R}$ 到自身的雙射（bijection），而 $x \mapsto x^2$ 則不是，所以要先選定非負的分支（branch），才談得上「那個」平方根。把形如 $x = f(x)$ 的方程看成不動點（fixed point）問題，並在參數變動時點算不動點的個數，就是分歧理論（bifurcation theory）的起點；在這套理論中，解會成對地誕生（如在 $a = -\frac{1}{4}$ 處），或者互換位置（如在 $a = 2$ 處）。若想細讀有關函數、反函數（inverse）和連續性（continuity）的嚴謹論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門教材）。

詳細解答

STEP I 2009，第 4 題

純數學 • 餘弦公式

> **STEP I 2009，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q4

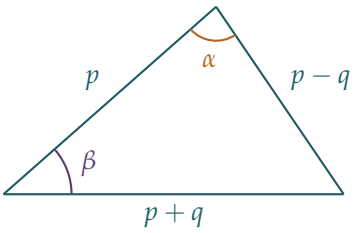
關鍵思路

在三角形中，最大的角對着最長的邊，最小的角對着最短的邊。因此，利用餘弦定理（cosine rule）可以直接以 p 和 q 表示 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$，而要證明的恆等式（identity）只是代數運算。至於第二部分，由 $\alpha = 2\beta$ 可用二倍角公式（double-angle formula）把 $\cos\alpha$ 以 $\cos\beta$ 表示，恆等式於是變成一條只含 $\cos\beta$ 的方程。

解答

恆等式

由於 $p - q < p < p + q$，最大的角 α 對着邊 $p + q$，最小的角 β 對着邊 $p - q$。



對 α 應用餘弦定理，得

$$\cos\alpha = \frac{p^2 + (p-q)^2 - (p+q)^2}{2p(p-q)} = \frac{p^2 - 4pq}{2p(p-q)} = \frac{p-4q}{2(p-q)},$$

對 β 則得

$$\cos\beta = \frac{p^2+(p+q)^2-(p-q)^2}{2p(p+q)} = \frac{p^2+4pq}{2p(p+q)} = \frac{p+4q}{2(p+q)}.$$

這裏我們約去了 p，由於 $p>0$，這樣做是容許的。於是

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-q)-(p-4q)}{2(p-q)} = \frac{p+2q}{2(p-q)},$$
$$1-\cos\beta = \frac{2(p+q)-(p+4q)}{2(p+q)} = \frac{p-2q}{2(p+q)},$$

所以

$$4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) = \frac{(p+2q)(p-2q)}{(p-q)(p+q)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.$$

另一邊則是

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta &= \frac{(p-4q)(p+q)+(p+4q)(p-q)}{2(p^2-q^2)}\\ &= \frac{(p^2-3pq-4q^2)+(p^2+3pq-4q^2)}{2(p^2-q^2)} = \frac{p^2-4q^2}{p^2-q^2}.\end{aligned}$$

兩個表達式相等，所以 $4(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$，正是所要證明的結果。

(要令三角形存在，必須有 $(p-q)+p>p+q$，即 $p>2q$。這時恆等式兩邊都是正數，但上面的代數運算並不依賴這一點。)

$\alpha = 2\beta$ 的情況

設 $c=\cos\beta$。那麼 $\cos\alpha=\cos 2\beta = 2c^2-1$，所以 $1-\cos\alpha = 2(1-c^2)=2(1-c)(1+c)$。代入恆等式，得

$$8(1-c)^2(1+c) = 2c^2+c-1 = (2c-1)(c+1).$$

想一想 我們可以把兩邊同時除以 $1+c$ 嗎？

可以。β 是三角形的一隻角，所以 $0<\beta<\pi$，而 $c=\cos\beta>-1$，即 $1+c\neq 0$。兩邊同時除以這個因子，得

$$8(1-c)^2 = 2c-1 \quad\Longrightarrow\quad 8c^2-18c+9=0 \quad\Longrightarrow\quad (4c-3)(2c-3)=0.$$

所以 $c=\frac{3}{4}$ 或 $c=\frac{3}{2}$。餘弦值不可能大於 1，因此我們捨去 $\frac{3}{2}$。由此可知 $\cos\beta=\frac{3}{4}$，正是所要證明的結果。

三邊之比

利用第一部分所得的 $\cos\beta$ 公式，

$$\frac{p+4q}{2(p+q)} = \frac{3}{4} \quad\Longrightarrow\quad 4p+16q = 6p+6q \quad\Longrightarrow\quad p = 5q.$$

這個結果滿足 $p > 2q$，所以三角形確實存在。它的三邊是 $p-q = 4q$、$p = 5q$ 和 $p+q = 6q$，因此三邊之比是

$$4 : 5 : 6.$$

驗算

在邊長為 $4,5,6$ 的三角形中，由餘弦定理得 $\cos\beta = \frac{25+36-16}{60} = \frac{3}{4}$ 和 $\cos\alpha = \frac{16+25-36}{40} = \frac{1}{8}$。另外 $2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$，這就確認了 $\alpha = 2\beta$（兩隻角都在 $(0,\pi)$ 之內，而餘弦函數在這個區間上是一對一（one-to-one）的）。以數值計算，$\beta \approx 0.7227$ 弧度（radians），$\alpha \approx 1.4455$ 弧度。在這個三角形中，恆等式變成 $4\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{8} = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}$。我們也用 10^5 個滿足 $p > 2q$ 的隨機三角形測試過這條恆等式，兩邊之差不超過 3×10^{-15}。

常見錯誤

- 把角與邊配錯。最大的角對着的是最長的邊，即 $p+q$。
- 約去因子 $1+c$ 時沒有說明它為何不等於零，或者保留了 $c = \frac{3}{2}$ 這個根。
- 答案只寫 $p = 5q$，而沒有給出三邊之比 $4:5:6$。

STEP 之外

若不計縮放，邊長為 $4,5,6$ 的三角形是唯一一個三邊成等差數列（arithmetic progression）而最大角是最小角兩倍的三角形。像「哪些三角形的邊長是整數，而且各角成指定的比？」這類問題，很快就會引出丟番圖方程（Diophantine equations），以及曲線上有理點（rational points）的參數化，情況與畢氏三元數（Pythagorean triples）十分相似。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 很適合用來了解這些想法如何發展，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的幾何和三角學題目。

詳細解答

STEP I 2009，第 5 題

純數學 • 約束最優化

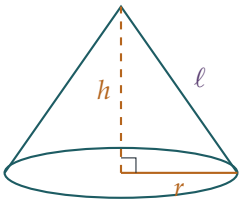
STEP I 2009，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q5

關鍵思路

這裏有三個長度，但只有兩個是自由的，因為 r、h 和 ℓ 由畢氏定理（Pythagoras' theorem）聯繫在一起：$\ell^2 = r^2 + h^2$。固定其中一個量，又會再減少一個自由度，所以在每一部分，我們都把要取駐值（stationary value）的量寫成只含 r 的函數，然後求導。平方根會令代數運算變得繁複，因此改用 V^2 或 A^2 來計算會划算得多：它們取駐值的位置，與 V 或 A 取駐值的位置完全相同。



解答

在整個解答中，r、h 和 ℓ 均為正數，而且由橫切面中的直角三角形可得

$$\ell^2 = r^2 + h^2.$$

由於 $V > 0$ 及 $A > 0$，V^2 的導數（derivative）是 $2V\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$，它恰好在 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ 等於零時才等於零；A 的情況亦相同。因此我們可以改為求這些平方的駐點（stationary point）。

第 (i) 部分

當 A 固定時，$\ell = \dfrac{A}{\pi r}$，所以

$$h^2 = \ell^2 - r^2 = \frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2.$$

（要得到一個真正的圓錐體，必須有 $h > 0$，即 $A > \pi r^2$。）於是

$$\begin{aligned} V^2 = \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 h^2 &= \tfrac{1}{9}\pi^2 r^4 \left(\frac{A^2}{\pi^2 r^2} - r^2\right) \\ &= \tfrac{1}{9}\left(A^2 r^2 - \pi^2 r^6\right). \end{aligned}$$

把 A 視為常數，對 r 求導，得

$$\frac{\mathrm{d}(V^2)}{\mathrm{d}r} = \tfrac{1}{9}\left(2A^2 r - 6\pi^2 r^5\right) = \tfrac{2}{9} r\left(A^2 - 3\pi^2 r^4\right).$$

由於 $r > 0$，上式恰好在以下情況等於零：

$$A^2 = 3\pi^2 r^4,$$

這就是第一個結果。取正平方根，得 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2$，因此

$$\ell = \frac{A}{\pi r} = \frac{\sqrt{3}\,\pi r^2}{\pi r} = \sqrt{3}\, r,$$

正如題目所求。（留意 $A = \sqrt{3}\,\pi r^2 > \pi r^2$，所以這確實是一個圓錐體。）

當 r 遞增並經過這個值時，V^2 的導數由正變負，所以這個駐值是極大值（maximum）：這就是在給定曲面面積（curved surface area）下體積最大的圓錐體。由 $\ell^2 = r^2 + h^2$ 還可得 $h^2 = 3r^2 - r^2 = 2r^2$，所以 $h = \sqrt{2}\, r$。

第 (ii) 部分

現在 V 是固定的，所以 $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$，而

$$\begin{aligned} A^2 = \pi^2 r^2 \ell^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= \pi^2 r^4 + \pi^2 r^2 \cdot \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \\ &= \pi^2 r^4 + \frac{9V^2}{r^2}. \end{aligned}$$

把 V 視為常數，對 r 求導，得

$$\frac{\mathrm{d}(A^2)}{\mathrm{d}r} = 4\pi^2 r^3 - \frac{18V^2}{r^3},$$

它恰好在以下情況等於零：

$$V^2 = \tfrac{2}{9}\pi^2 r^6, \qquad \text{所以} \qquad V = \tfrac{\sqrt{2}}{3}\,\pi r^3$$

（因為 $V > 0$，故取正根）。

想一想 我們已求得以 r 表示的 V，但題目要求的是 h。怎樣才能得到它？

再用一次體積公式：$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$。令它等於 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi r^3$，並約去 $\frac{1}{3}\pi r^2$，得

$$h = \sqrt{2}\,r.$$

這一次導數由負變正（當 r 很小時，$9V^2/r^2$ 這一項非常大；當 r 很大時，$\pi^2 r^4$ 這一項非常大），所以這是在給定體積下曲面面積最小的圓錐體。

想一想 兩部分都得出相同的形狀 $h = \sqrt{2}\,r$，這是巧合嗎？

不是。如果一個圓錐體在其面積之下體積最大，那麼它在其體積之下面積也必然最小：任何體積相同而面積較小的圓錐體，都可以按比例放大至原來的面積，這樣它的體積就會更大，而這是不可能的。由於題目只把形狀確定到相差一個縮放比例，兩部分必定選出相同的比 $h : r$。

驗算

- 在第 (i) 部分取 $r = 1$：則 $A = \sqrt{3}\,\pi$，$\ell = \sqrt{3}$，$h = \sqrt{2}$，而 $\pi r\ell = \sqrt{3}\,\pi$，與應有的結果一致。把 A 保持在 $\sqrt{3}\,\pi$，將 r 稍為調整至 0.99 或 1.01，所得的體積都略小一些。
- 對隨機選取的固定 A 以數值方法求 V 的最大值，以及對隨機選取的固定 V 求 A 的最小值，每次都得出 $h/r \approx 1.41421$，即 $\sqrt{2}$。
- 量綱（dimensions）：A^2 和 $\pi^2 r^4$ 都是（長度）^{4}；V^2 和 $\pi^2 r^6$ 都是（長度）^{6}。

常見錯誤

- 忘記了 ℓ 取決於 r 和 h：在第 (i) 部分把 ℓ 當作常數，或在第 (ii) 部分把 h 當作常數，而事實上只有 A（或 V）是固定的。
- 保留着平方根直接對 V 求導；這樣做是可行的，但很容易出錯。先平方就完全不必用上鏈式法則（chain rule）。

STEP 之外

在固定某個量的情況下求另一個量的極值，是一個約束優化（constrained optimisation）問題。在大學裏你會學到拉格朗日乘數法（Lagrange multipliers），它不必消去變量就能處理約束條件，並且解釋了本題兩部分之間的「對偶性」（duality）。若想找一本清晰的

入門書來學習多元微積分（multivariable calculus）和拉格朗日乘數法，可以看 Stewart 的 *Calculus*；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的優化練習。

詳細解答

STEP I 2009，第 6 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 2009，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q6

關鍵思路

積分上下限 $1/m$ 與 m 在 $x \mapsto 1/x$ 之下互相對調，所以最自然的做法就是試用這個代換（substitution）：它把區間映射到自身，並把冪 x^{-n} 換成冪 u^{n-1}。有了第 (ii) 部分的結果，我們便可以把第 (iii) 部分中難以處理的各項，化為第 (i) 部分那個容易處理的積分。在 (iii)(b) 中，區間不再對稱，但同一個代換會把 $[1,2]$ 送到 $[\frac{1}{2},1]$，於是兩半又可以重新拼合起來。

解答

第 (i) 部分

以 $x+1$ 除 x^2，得

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1},$$

由於在該區間上 $x+1>0$（因為 $m>0$），所以

$$\int_{1/m}^{m} \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_{1/m}^{m}.$$

對數部分給出

$$\ln(m+1) - \ln\left(\frac{1}{m}+1\right) = \ln\frac{m+1}{(m+1)/m} = \ln m.$$

多項式部分給出

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(m^2-\frac{1}{m^2}\Big)-\Big(m-\frac{1}{m}\Big) &= \Big(m-\frac{1}{m}\Big)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(m+\frac{1}{m}\Big)-1\Big]\\ &= \frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{m^2-2m+1}{2m}\\ &= \frac{(m-1)(m+1)(m-1)^2}{2m^2}=\frac{(m-1)^3(m+1)}{2m^2}.\end{aligned}$$

把兩部分相加，即得所求結果。

第 (ii) 部分

設 $x=1/u$，則 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$。當 $x=1/m$ 時，$u=m$；當 $x=m$ 時，$u=1/m$。此外

$$x^n(x+1)=\frac{1}{u^n}\cdot\frac{1+u}{u}=\frac{u+1}{u^{n+1}}.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{1/m}^{m}\frac{1}{x^n(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{m}^{1/m}\frac{u^{n+1}}{u+1}\cdot\Big(-\frac{1}{u^2}\Big)\mathrm{d}u\\ &= \int_{1/m}^{m}\frac{u^{n-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中負號用來把上下限對調回來。這就是所求結果。

第 (iii) 部分

(a) 把被積函數（integrand）拆開：

$$\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{3}{x^3(x+1)}.$$

積分區間是 $[\frac{1}{2},2]$，即第 (ii) 部分的區間取 $m=2$。在第 (ii) 部分中取 $n=3$，得

$$\int_{1/2}^{2}\frac{3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=3\int_{1/2}^{2}\frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u,$$

這是第一項的三倍。由第 (i) 部分取 $m=2$，得

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1^3\cdot 3}{2\cdot 4}+\ln 2=\frac{3}{8}+\ln 2.$$

所以積分等於 $4\big(\frac{3}{8}+\ln 2\big)$，即

$$\int_{1/2}^{2}\frac{x^5+3}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+4\ln 2.$$

(b) 現在

$$\frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^3(x+1)}.$$

想一想 現在的區間是 $[1,2]$，並非 $[1/m, m]$ 的形式。第 (ii) 部分還能派上用場嗎？

可以：代換 $x = 1/u$ 在任何由正數組成的區間上都適用，只是上下限會隨之移動。計算與第 (ii) 部分完全相同，其中 $x = 1$ 對應 $u = 1$，$x = 2$ 對應 $u = \frac{1}{2}$，由此可得

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{u^2}{u+1}\,\mathrm{d}u.$$

它的被積函數與第一項相同，而區間恰好相鄰，所以兩者合起來就是第 (i) 部分取 $m = 2$ 時的積分：

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^2 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2.$$

餘下的一項是

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln 3 - \ln 2.$$

相加得

$$\int_1^2 \frac{x^5+x^3+1}{x^3(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \frac{3}{8} + \ln 3.$$

驗算

- 在第 (i) 部分中，$m = 1$ 時積分區間只有一點，而右邊確實是 $0 + \ln 1 = 0$。把 m 換成 $1/m$ 應該令積分變號（上下限對調），而公式的確會變號。
- 用辛普森法則（Simpson's rule）計算，(iii)(a) 得 4.272589，與 $\frac{3}{2} + 4\ln 2 \approx 4.272589$ 吻合；(iii)(b) 得 1.473612，與 $\frac{3}{8} + \ln 3 \approx 1.473612$ 吻合。
- (b) 的合理性檢查：在 $[1,2]$ 上，被積函數由 1.5 下降至約 1.37，然後上升至約 1.71，所以答案接近 1.47 是合理的。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ 中的負號，或忘記對調上下限；兩者都必須做，而它們會互相抵消。
- 在 (iii)(b) 中，把第 (ii) 部分當作區間是 $[\frac{1}{2}, 2]$ 來套用。代換把 $[1,2]$ 移到 $[\frac{1}{2}, 1]$，而這正是各項能夠拼合起來的原因。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 1/x$ 是區間 $[1/m, m]$ 的一個對稱（symmetry），而利用定義域的對稱性來找出積分之間的關係，是分析學（analysis）中反覆出現的技巧。例如，$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$ 就是這樣證明的。在複分析（complex analysis）中，同樣的反演（inversion）$z \mapsto 1/z$ 會把單位圓的內部與外部對調，並成為一件基本工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）對反演有十分優美的幾何闡述。

詳細解答

STEP I 2009，第 7 題

純數學 • 分部積分法

STEP I 2009，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q7

關鍵思路

開首的積分用的是經典的「分部積分兩次，原來的積分又回來了」這一招：做完兩步之後，原來的積分會在等式右邊重新出現，於是我們把它當作方程中的未知數來求解。一旦對每一個整數 m 都得到 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$ 的公式，其後各部分就只是按部就班的整理工作：把正弦與餘弦的乘積化為若干個單一餘弦之和，而每一項都可以立即積分。

解答

一般的積分

記 $I_m = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x$，並為簡便起見設 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1$。取 $u = \cos mx$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ 作分部積分（integration by parts），

$$I_m = \Big[\mathrm{e}^x \cos mx\Big]_0^{2\pi} + m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x.$$

由於 m 是整數，$\cos 2m\pi = 1$，所以方括號一項等於 $\mathrm{e}^{2\pi} - 1 = E$。再作一次分部積分，這次取 $u = \sin mx$，

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin mx \,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x \sin mx\Big]_0^{2\pi} - m\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = 0 - mI_m,$$

這是因為 $\sin 2m\pi = \sin 0 = 0$，當中再次用到 m 是整數。把兩式合起來，

$$I_m = E - m^2 I_m, \qquad \text{所以} \qquad (m^2+1)I_m = E.$$

? **想一想** 我們兜了一個圈，又得回 I_m。這是否一條死路？

不是：這正是我們想要的。等式 $I_m = E - m^2 I_m$ 是關於未知數 I_m 的一次方程（linear equation），而由於 $m^2 + 1 \neq 0$，我們可以把它除過去：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m^2+1}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right),$$

正如所求。（$m = 0$ 的情況亦包括在內：它只是說 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = E$。）留意整數這個條件的作用，是令邊界項（boundary terms）變得簡單；若 m 不是整數，這條公式並不成立。

第 (i) 部分

用複角公式（compound-angle formulae）展開，$\sin A \sin B$ 的項互相抵消：

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B.$$

取 $A = 6x$ 及 $B = x$，得 $\cos x \cos 6x = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 5x)$。因此，在一般結果中取 $m = 7$ 及 $m = 5$，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \cos x \cos 6x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left(I_7 + I_5\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{26}\right)E \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{26+50}{1300}\,E = \frac{76}{2600}\,E = \frac{19}{650}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right),\end{aligned}$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

這裏需要做兩次積化和差（product-to-sum）。把兩條複角公式相減而不是相加，得 $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$，所以取 $A = 4x$、$B = 2x$，

$$\sin 2x \sin 4x = \tfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 6x).$$

乘以 $\cos x$，並對每個乘積使用第 (i) 部分的恆等式，

$$\begin{aligned}\sin 2x \sin 4x \cos x &= \tfrac{1}{2}\cos 2x \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 6x \cos x \\ &= \tfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) - \tfrac{1}{4}(\cos 7x + \cos 5x).\end{aligned}$$

現在每一項都可用一般結果處理，分別取 $m = 3, 1, 7, 5$：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{4}\left(I_3 + I_1 - I_7 - I_5\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{50} - \frac{1}{26}\right)E \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \frac{65 + 325 - 13 - 25}{650}\,E = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{352}{650}\,E.\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \sin 4x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{44}{325}\left(\mathrm{e}^{2\pi} - 1\right).$$

驗算

- 對 $\dfrac{\mathrm{e}^x(\cos mx + m\sin mx)}{m^2+1}$ 求導，得 $\mathrm{e}^x\cos mx$，所以它是一個原函數（antiderivative）；在 2π 和 0 兩處代入求值，便重新得到一般結果。
- 在第 (ii) 部分的恆等式中代入 $x = 0$：左邊是 0，右邊是 $\frac{1}{4}(1+1-1-1) = 0$。吻合。
- 以數值方法（辛普森法則，Simpson's rule）計算，第 (i) 部分的積分是 $15.6236\ldots$，第 (ii) 部分的積分是 $72.3619\ldots$，與 $\frac{19}{650}E$ 及 $\frac{44}{325}E$ 相符，其中 $E = \mathrm{e}^{2\pi} - 1 \approx 534.49$。

常見錯誤

- 第二次分部積分時弄錯正負號：$\sin mx$ 的導數是 $+m\cos mx$，連同分部積分公式中的負號，得出的是 $-m^2 I_m$。
- 在每次積化和差時漏掉因子 $\frac{1}{2}$，以致第 (ii) 部分得到 $\frac{1}{2}$ 而不是 $\frac{1}{4}$。

STEP 之外

更利落的做法是寫 $\cos mx = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$，於是 $I_m = \operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i}m)x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\dfrac{E}{1+\mathrm{i}m} = \dfrac{E}{1+m^2}$，完全不需要分部積分。像我們在後面各部分所做的那樣，把一個函數拆成 $\cos mx$ 這些分量，正是傅立葉級數（Fourier series）的起點；傅立葉級數是大學一年級分析和微分方程（differential equations）中的核心工具。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）有一段易讀的介紹，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像闡釋複分析的名著）則說明了為何從指數函數的角度看問題會如此奏效。

詳細解答

STEP I 2009，第 8 題

純數學 • 圓與切線

> **STEP I 2009，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q8

關鍵思路

一個圓與一條直線相切（touch），當且僅當圓心到該直線的距離等於半徑。各個圓 C 的圓心都位於一條通過原點的直線上，而這條直線平分（bisect）x 軸與 $3y = 4x$ 之間的夾角，所以每一個這樣的圓都與這兩條直線相切。因此 C 就是嵌在這個角內的整個圓族，而第 (ii) 部分的內切圓（incircle）必定是其中之一：我們只需選出同時令圓與第三條邊相切的 t 值。

解答

第 (i) 部分

圓 C 的圓心為 $P = (2t, t)$，半徑為 t。由於 $t > 0$，圓心位於 x 軸上方，與它的距離為 t，恰好等於半徑。所以 C 與 $y = 0$ 相切，切點為 $(2t, 0)$。

直線 OP 的斜率（gradient）為 $\frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$，所以 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，並且

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

這正是所要證明的。

現在設 β 為 x 軸與直線 $3y = 4x$ 之間的銳角，該直線的斜率為 $\frac{4}{3}$。於是 $\tan\beta = \frac{4}{3} = \tan 2\alpha$。由於 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$（因為 $\tan\alpha = \frac{1}{2} < 1$），角 2α 也是銳角，而 tan 在銳角範圍內是一對一（one-to-one）的，所以 $\beta = 2\alpha$。

? **想一想** 為甚麼 $\beta = 2\alpha$ 可以告訴我們 C 與 $3y = 4x$ 相切？

直線 OP 與 x 軸的夾角為 α，與直線 $3y = 4x$ 的夾角為 $\beta - \alpha = \alpha$，所以 OP 平分這兩條直線之間的夾角。由 P 向兩條直線分別作垂線，得到兩個直角三角形，它們有相同的斜邊（hypotenuse）OP，而且在 O 處的角同為 α，所以兩個垂直距離（perpendicular distance）相等，都是 $OP\sin\alpha$。到 x 軸的距離為 t，所以由 P 到 $3y = 4x$ 的距離也是 t，即半徑。因此 C 與 $3y = 4x$ 相切。

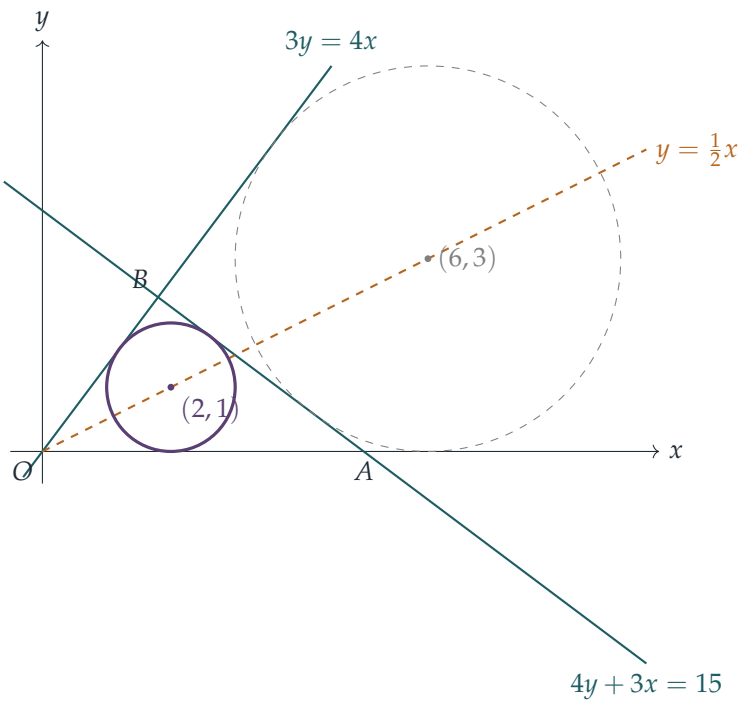
（作為覆核，由點到直線的垂直距離公式，可得由 $(2t, t)$ 到 $4x - 3y = 0$ 的距離為 $\frac{|8t-3t|}{5} = t$。）

第 (ii) 部分

首先找出這個三角形。直線 $y = 0$ 與 $3y = 4x$ 相交於 $O = (0,0)$；$y = 0$ 與 $4y + 3x = 15$ 相交於 $A = (5,0)$。至於第三個頂點，把 $y = \frac{4}{3}x$ 代入 $4y + 3x = 15$：

$$\tfrac{16}{3}x + 3x = 15 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{9}{5}, \qquad y = \tfrac{12}{5},$$

所以 $B = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$。$3y = 4x$ 與 $4y + 3x = 15$ 的斜率分別為 $\frac{4}{3}$ 和 $-\frac{3}{4}$，兩者之積為 -1，所以三角形在 B 處有一個直角。它的三邊為 $OA = 5$、$OB = 3$ 和 $AB = 4$。



內切圓位於三角形之內，所以在 O 附近，它嵌在正 x 軸與直線 $3y = 4x$ 之間的銳角內，並與這兩條直線相切。它的圓心與這兩條直線等距，所以圓心位於該角的平分線上；根據第 (i) 部分，這條平分線就是直線 $y = \frac{1}{2}x$（即直線 OP）。若圓心為 $(2t, t)$，其中 $t > 0$，

則它與 $y = 0$ 的距離為 t，而這必定就是半徑。所以內切圓是第 (i) 部分的圓 C 其中之一。

餘下只需令 C 與第三條邊 $3x + 4y - 15 = 0$ 相切。由 $(2t, t)$ 到這條直線的距離必須等於 t：

$$\frac{|6t + 4t - 15|}{5} = t \quad \Longleftrightarrow \quad |10t - 15| = 5t.$$

要麼 $10t - 15 = 5t$，得 $t = 3$；要麼 $15 - 10t = 5t$，得 $t = 1$。

這兩個圓都與三條直線相切，但只有一個位於三角形之內。當 $t = 3$ 時，圓心 $(6, 3)$ 滿足 $3x + 4y = 30 > 15$，所以它位於 AB 的另一側，與 O（滿足 $3x + 4y = 0 < 15$）分處兩邊：這是一個*旁切圓*（excircle），即圖中的虛線圓。當 $t = 1$ 時，圓心 $(2, 1)$ 滿足 $3x + 4y = 10 < 15$，而且它在 $y = 0$ 之上、$3y = 4x$ 之下，所以它位於三角形之內。一個圓若圓心在三角形之內，並與三條邊都相切，則整個圓位於三角形之內，所以內切圓的圓心為 $(2, 1)$，半徑為 1：

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

驗算

對於兩條直角邊為 a, b、斜邊為 c 的直角三角形，內切圓半徑（inradius）為 $\frac{1}{2}(a + b - c)$；這裏 $\frac{1}{2}(3 + 4 - 5) = 1$，與所得結果一致。內切圓半徑亦等於面積 / 半周長 $= 6/6 = 1$。在數值上，把內心（incentre）計算為各頂點以邊長加權的平均值 $\frac{4O+3A+5B}{12}$，結果恰好是 $(2, 1)$，而由 $(2, 1)$ 到三條直線的距離全都是 1。

常見錯誤

- 解 $|10t - 15| = 5t$ 時忽略了絕對值，只求得 $t = 3$，而這是旁切圓，不是內切圓。
- 求得兩個根，卻沒有解釋為甚麼 $t = 1$ 才是位於三角形之內的那一個。
- 在第 (i) 部分，只說 $\tan\beta = \tan 2\alpha$ 所以 $\beta = 2\alpha$，卻沒有指出兩個角都是銳角。

STEP 之外

每個三角形都有一個內切圓和三個旁切圓，而這四個圓心正是內角平分線與外角平分線的交點；這裏求得的 $t = 3$ 就是與 O 相對的旁切圓。這些圓引領我們進入古典幾何中一個蘊藏豐富的寶庫，包括九點圓（nine-point circle），以及指出九點圓與這四個圓都相切的費爾巴哈定理（Feuerbach's theorem）。考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（幾何學入門）是探索這個課題的經典之作；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學難題）則提供更多 STEP 風格的練習。

詳細解答

STEP I 2009，第 9 題

力學 • 相撞的拋體

STEP I 2009，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

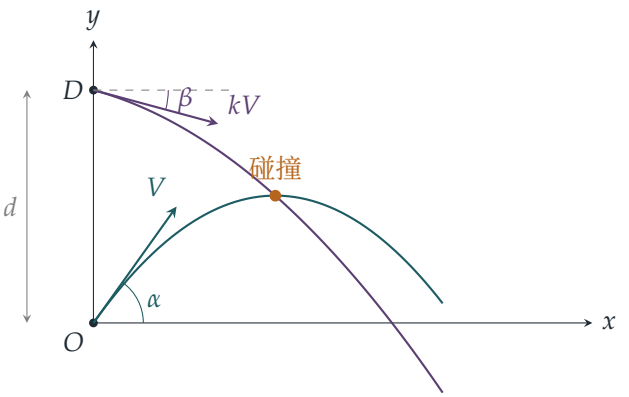
step.maths.org/questions/09-s1-q9

關鍵思路

兩個只受重力作用的質點（particle）具有相同的加速度，所以比較兩者位置時，$-\frac{1}{2}gt^2$ 項會互相抵消：相對於對方而言，它們是以恆定速度沿直線運動。碰撞（collision）的意思是在同一時刻 T，兩者的水平位移相等，垂直位移也相等。水平方向的方程立即給出餘弦關係式。垂直方向的方程含有 β，我們利用 $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$ 和餘弦關係式把它消去。

解答

我們把 P 和 Q 當作在重力下自由運動的質點，不計空氣阻力（air resistance）。要令兩者相撞，它們必須在同一鉛垂平面內、朝同一水平方向拋出。取 O 為原點，x 軸沿該水平方向，y 軸垂直向上，於是 D 的坐標為 $(0, d)$。



在時刻 t，兩質點的位置為

$$\begin{aligned} P: \quad & x = Vt\cos\alpha, && y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2, \\ Q: \quad & x = kVt\cos\beta, && y = d - kVt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

其中 Q 的垂直速度帶負號，是因為 β 是從水平線向下量度的。

餘弦關係式與 T 的方程

碰撞時，$t = T > 0$，而且兩者的坐標相同。水平方向上，

$$VT\cos\alpha = kVT\cos\beta,$$

兩邊除以 $VT \neq 0$，便得 $\cos\alpha = k\cos\beta$，正是所求。

垂直方向上，兩邊的 $-\frac{1}{2}gT^2$ 項互相抵消，餘下

$$VT\sin\alpha = d - kVT\sin\beta, \qquad \text{所以} \qquad kVT\sin\beta = d - VT\sin\alpha.$$

想一想 怎樣消去 β？

我們已知 $k\cos\beta$ 可用 α 表示，所以把方程平方，引入 $k^2\sin^2\beta$，而

$$k^2\sin^2\beta = k^2 - k^2\cos^2\beta = k^2 - \cos^2\alpha.$$

把垂直方向的方程平方再代入，

$$\begin{aligned} (k^2 - \cos^2\alpha)V^2T^2 &= d^2 - 2dVT\sin\alpha + V^2T^2\sin^2\alpha, \\ (k^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \\ (k^2 - 1)V^2T^2 + 2dVT\sin\alpha - d^2 &= 0, \end{aligned}$$

當中用了 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$。這就是所求的方程。

把它看成 T 的二次方程（quadratic），由於 $k > 1$，兩根之積為 $-d^2/\big((k^2-1)V^2\big) < 0$。所以恰好有一個正根，而這個根就是碰撞的時刻。

在 P 的最高點碰撞

P 的垂直速度為 $V\sin\alpha - gt$，當 $t = V\sin\alpha/g$ 時為零。所以這裏 $T = V\sin\alpha/g$。代入二次方程，

$$(k^2-1)\frac{V^4\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2dV^2\sin^2\alpha}{g} - d^2 = 0.$$

乘以 g^2 並合併含 $\sin^2\alpha$ 的項，得 $\sin^2\alpha\,\big((k^2-1)V^4 + 2gdV^2\big) = g^2d^2$，所以

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{g^2d^2}{V^2\big((k^2-1)V^2 + 2gd\big)}}$$

由於 $k > 1$，括號內的式子為正，所以這個表達式有意義。

不等式

由於 $\sin^2\alpha \le 1$ 而分母為正，

$$\begin{aligned} g^2d^2 &\le (k^2-1)V^4 + 2gdV^2, \\ g^2d^2 - 2gdV^2 + V^4 &\le k^2V^4, \\ (gd - V^2)^2 &\le (kV^2)^2. \end{aligned}$$

$|gd - V^2|$ 和 kV^2 都是非負的，所以取平方根後不等式（inequality）的方向不變：$|gd - V^2| \le kV^2$。特別地，$gd - V^2 \le kV^2$，即

$$gd \le (1+k)V^2,$$

正是所求。等號成立需要 $\sin^2\alpha = 1$，即 P 垂直向上拋出。

驗算

- 取 $g = 10$，$V = 10$，$k = 2$，$d = 10$。公式給出 $\sin^2\alpha = \frac{100\cdot 100}{100(300+200)} = \frac{1}{5}$，所以 $T = V\sin\alpha/g = 1/\sqrt{5}$。於是二次方程成為 $3\cdot 100\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{1}{5} - 100 = 60 + 40 - 100 = 0$。取 $\cos\beta = \cos\alpha/2$，兩個質點在時刻 T 的高度都是 1。這裏 $gd = 100 \le 300 = (1+k)V^2$。
- 我們作了一次數值檢驗：隨機選取數千組 V、k、α、T，逐步推算兩個質點的運動，結果證實碰撞、餘弦關係式、二次方程和 $\sin^2\alpha$ 的公式全部成立，誤差只在捨入誤差的範圍之內。
- 極限情況：若 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$，則 $\cos\beta \to 0$，所以兩者都沿垂直方向運動。P 在時間 V/g 內上升至高度 $V^2/(2g)$，而 Q 下降了 $kV^2/g + V^2/(2g)$，所以 $d = (1+k)V^2/g$：等號成立，與預測一致。

常見錯誤

- 弄錯 Q 的垂直速度的正負號：它是從水平線向下拋出的，所以垂直速度為 $-kV\sin\beta$。
- 保留 $\frac{1}{2}gT^2$ 項：這些項會互相抵消，T 的方程裏並沒有 g。
- 對 $(gd - V^2)^2 \le k^2V^4$ 取平方根時，直接寫成 $gd - V^2 \le kV^2$ 而沒有提及絕對值（modulus）。結論是對的，但理由是 $x \le |x|$。

STEP 之外

重力互相抵消這一點，讓我們初次體會到轉換參考系（frame of reference）的威力。在一個以加速度 g 自由下落的參考系中，兩個質點都以恆定速率沿直線運動，碰撞問題於是化為相對速度（relative velocity）的幾何問題。這正是愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）背後的想法，許多拋體攔截問題也因此一句話就能解決。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對相對運動和非慣性參考系（non-inertial frame）有細緻的闡述。

詳細解答

STEP I 2009，第 10 題

力學 • 斜面上的連接質點

STEP I 2009，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

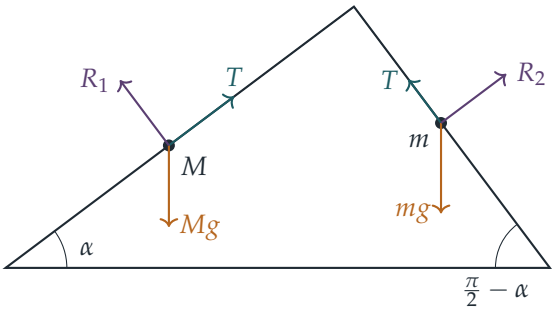
step.maths.org/questions/09-s1-q10

關鍵思路

由於繩子不可伸長（inextensible），滑輪又是光滑的，兩個質點其實是作為一個系統一起運動：當 M 沿其斜面向下移動距離 s 時，m 便沿其斜面向上移動同樣的距離 s，而且兩邊的張力（tension）相同。因此我們比較重力沿兩個斜面的分量，再對每個質點應用牛頓第二定律（Newton's second law），便可求出共同的加速度。最後一部分則是關於單一變量 α 的普通微積分求極大值問題。

解答

我們把兩個質點看作光滑斜面上的點質量，以一條輕而不可伸長的繩子繞過光滑滑輪相連，並假設系統由靜止開始運動。設 T 為張力，R_1、R_2 分別為作用於 M 和 m 的法向反作用力（normal reaction）。



頂角為 $\pi - \alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$，所以兩個斜面互相垂直。重力沿傾角為 α 的斜面向下的分量是 $Mg\sin\alpha$，而沿傾角為 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 的斜面向下的分量是 $mg\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = mg\cos\alpha$。法

向反作用力垂直於斜面，所以對沿斜面的運動沒有影響。

第 (i) 部分

取「M 沿其斜面向下、m 沿其斜面向上」為正方向，加速度為 a。沿各自的斜面分解力：

$$\begin{aligned} M: &\quad Mg\sin\alpha - T = Ma, \\ m: &\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

兩式相加消去 T：

$$a = \frac{g\left(M\sin\alpha - m\cos\alpha\right)}{M+m}.$$

由於當 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時 $\cos\alpha > 0$，

$$a > 0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

所以若 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$，由靜止開始的系統會朝正方向加速：M 沿其斜面下滑，正如題目所求。

想一想 我們怎樣知道繩子一直保持拉緊，從而確定這些方程是正確的？

由第二條方程，$T = m(a + g\cos\alpha)$，當 $a > 0$ 時這是正數，所以繩子拉緊與方程並無矛盾。此外，繩子也不可能鬆弛：假如鬆弛了，每個質點都會沿自己的斜面向下滑，兩者同時遠離滑輪，這就需要一條更長的繩子。

第 (ii) 部分

現在 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$，所以 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$，而且 $\tan\alpha > \frac{m}{M}$，故由第 (i) 部分可知，運動方向仍然是 M 向下。代入 $m = \frac{1}{2}M\tan\alpha$ 並約去 M：

$$\begin{aligned} a &= \frac{g\left(M\sin\alpha - \frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha\right)}{M + \frac{1}{2}M\tan\alpha} = \frac{g\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)}{1 + \frac{1}{2}\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)} \\ &= \frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \end{aligned}$$

其中用到 $\tan\alpha\cos\alpha = \sin\alpha$。這就是所求的加速度大小。

求極大值。比值 m/M 透過 $\tan\alpha = 2m/M$ 決定了 α，所以我們要求以下函數的極大值：

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \qquad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

利用商法則（quotient rule），並由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$，得

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\left(\tan\alpha + 2\right) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha+2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha+2)^2}.$$

把分子乘以 $\cos^2\alpha > 0$，並利用 $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$：

$$\cos^2\alpha\left(\sin\alpha + 2\cos\alpha\right) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

所以 $f'(\alpha)$ 的正負號與 $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\left(2-\tan^3\alpha\right)$ 相同。當 $\tan\alpha$ 由 0 增至 ∞ 時，這個式子在 $\tan^3\alpha < 2$ 時為正，一旦 $\tan^3\alpha > 2$ 便為負。因此 f 先遞增後遞減，其極大值出現於唯一的駐點（stationary point）

$$\tan^3\alpha = 2.$$

（你也可以這樣看出這是極大值：在整個區間上 $f > 0$，而在兩端 $f \to 0$。）配合 $\tan\alpha = \frac{2m}{M}$，這即是說

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{即} \qquad 4m^3 = M^3,$$

正如題目所求。

驗算

- 第 (i) 部分的極限情況：當 $m = 0$ 時得 $a = g\sin\alpha$，即光滑斜面上只有一個質點的情形；而當 $\tan\alpha = m/M$ 時得 $a = 0$，即平衡點。
- 在最優情況下，$\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$，所以 $\alpha \approx 51.6°$，而 $m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$。對 f 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上作網格搜尋，所得的極大值位於同一個 α，其值為 $f \approx 0.240$，所以最大加速度約為 $0.240g$。
- 以隨機的質量和角度代入第 (i) 部分的一般公式，每當 $\tan\alpha = 2m/M$ 時，結果都與第 (ii) 部分的公式吻合，而且兩條運動方程給出相同的正張力。

常見錯誤

- 對 m 使用 $mg\sin\alpha$：它所在斜面的傾角是 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，所以分量應是 $mg\cos\alpha$。
- 固定 m 而讓 M 變化（或反過來）去求極大值，卻沒有留意 a 只取決於 α。把一切都用 α 表示，問題便成為單變量問題。

STEP 之外

像這樣由約束（constraint）把物體連繫起來的系統，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點：你只需選取一個坐標（這裏是沿繩子移動的距離 s），張力和法向反作用力等約束力便會自動消失。大學一年級的課程會把這個想法發展成一套有系統的方法，適用於滑輪、擺以及許多其他情況。若想找一本在這個程度上清楚講解牛頓力學的書，可以看 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）。

詳細解答

STEP I 2009，第 11 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP I 2009，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q11

關鍵思路

每一個一維碰撞都由兩條方程支配：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）。處理能量的竅門，是把每個質點的損失寫成平方差 $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$，因為動量守恆把因式 $u-p$ 和 $q-v$ 連繫起來。一旦抽出公因式 $u-p$，餘下的括號正好就是恢復定律所描述的東西。

解答

我們把兩個質點模擬為在光滑桌面上沿一條直線運動，速度以 **i** 的方向量度。由於 $u > v$，質量為 m 的質點在後面，並會追上前面的質點。水平方向沒有外力，所以動量守恆：

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{所以} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

牛頓恢復定律指出，分離速率是接近速率的 e 倍：

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



碰撞前（速度沿 **i** 方向），$u > v$

第 (i) 部分

動能（kinetic energy）的損失為

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2-p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2-q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

根據 (1)，我們可以把 $M(q-v)$ 換成 $m(u-p)$，於是可抽出因式 $\frac{1}{2}m(u-p)$：

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u+p)-(q+v)\big]\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u-v)-(q-p)\big]\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)\big[(u-v)-e(u-v)\big] \qquad \text{根據 (2)}\\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

這正是所求的結果。

想一想 一條能量損失的公式，怎樣能告訴我們關於 p 的事情？

碰撞不可能產生動能，所以 $\Delta \geq 0$。在乘積 $\frac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$ 中，我們有 $m>0$、$u-v>0$（已知）和 $1-e>0$（因為 $e<1$）。所以 Δ 的正負號就是 $u-p$ 的正負號，而 $\Delta \geq 0$ 迫使 $u \geq p$。質量為 m 的質點不可能在 $\mathbf{i}$ 的方向上加速，這是合理的，因為 M 施加於它的衝量（impulse）是向後的。

如果你不想把 $\Delta \geq 0$ 當作物理事實來依賴，可以直接解 (1) 和 (2)：

$$p = \frac{mu+Mv-Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{所以} \qquad u-p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

對 $e \geq 0$ 成立。這就確認了 $u \geq p$，因而 $\Delta \geq 0$。

第 (ii) 部分

每個質點損失相同而非零的能量，所以

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

根據 (1)，$M(v-q) = -m(u-p)$，所以右邊是 $-\frac{1}{2}m(u-p)(v+q)$，於是

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

左邊非零，所以 $m(u-p) \neq 0$，我們可以除以 $\frac{1}{2}m(u-p)$：

$$u+p = -(v+q), \qquad \text{即} \qquad u+v+p+q = 0. \tag{3}$$

現在 (2) 和 (3) 給出了 p 與 q 的和與差：

$$p+q = -(u+v), \qquad q-p = e(u-v),$$

所以

$$p = -\tfrac{1}{2}\big[(u+v)+e(u-v)\big], \qquad q = -\tfrac{1}{2}\big[(u+v)-e(u-v)\big].$$

我們還未用上動量守恆的完整形式，而正是它決定了 e 的值。代入 $mp + Mq = mu + Mv$ 並乘以 2：

$$\begin{aligned} -(m+M)(u+v) + (M-m)e(u-v) &= 2mu + 2Mv, \\ (M-m)e(u-v) &= (m+M)(u+v) + 2mu + 2Mv \\ &= (M+3m)u + (3M+m)v. \end{aligned}$$

由於 $u - v > 0$，而且當 $m \neq M$ 時 $M - m \neq 0$，我們可以相除而得

$$e = \frac{(M+3m)u + (3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

這正是所求的結果。

驗算

- 取 $m = 1$、$M = 3$、$u = 1$、$v = -\frac{1}{2}$。公式給出 $e = \frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$。於是 $p = -\frac{1}{2}$ 及 $q = 0$，而動量亦吻合：$1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 0$。每個質點損失 $\frac{3}{8}$ 的能量，而且 $u + v + p + q = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$。
- 當 $e = 1$ 時，(i) 的公式給出零損失，這正符合完全彈性碰撞（perfectly elastic collision）應有的情況。
- 電腦以精確分數在 2000 個隨機碰撞上檢驗了 (i)，並在 455 個滿足 $0 \leq e < 1$ 的隨機個案上檢驗了 (ii)。

常見錯誤

- 把恢復定律寫反了：應該是 $q - p = e(u - v)$，即分離除以接近，而這裏兩者都以正數量度。
- 除以 $u - p$ 卻沒有說明它為何非零。題目中「非零的能量」這幾個字，正是為此而設。

STEP 之外

(i) 中的因式分解，是在質心參考系（centre-of-mass frame）中考慮問題的一個漂亮結果。在這個參考系中，總動量為零，動能為 $\frac{1}{2}\mu$(相對速率)^2，其中約化質量（reduced mass）為 $\mu = \frac{mM}{m+M}$，而損失則為 $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$。約化質量和質心參考系會在二體軌道和粒子散射中再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對這些概念有細緻的闡述。

詳細解答

STEP I 2009，第 12 題

概率與統計 • 概率與不等式

STEP I 2009，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q12

關鍵思路

這裏每個概率（probability）都是各袋糖果數目之積的和，再除以總數的某次冪，所以每次比較最終都是比較兩個以 a, b, c 為變量的多項式（polynomial）。開首的不等式（inequality）$x^2+y^2 \geq 2xy$ 正是為此而設的工具。在第 (ii) 部分，直接數算「恰好兩顆同色」相當繁瑣。先數算另外兩種情況（全部同色、全部不同色），再從 1 中減去，會容易得多。

解答

不等式

對任意實數 x 和 y，

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2 \geq 0,$$

因為實數的平方永不為負。所以 $x^2+y^2 \geq 2xy$，等號恰好在 $x=y$ 時成立。

第 (i) 部分

每個袋有 $a+b$ 顆糖果，而兩次抽取來自不同的袋，所以互相獨立（independent）。設 S 為兩顆糖果同色的事件（event），D 為兩顆糖果不同色的事件。那麼

$$\mathrm{P}(S)=\mathrm{P}(\text{紅、紅})+\mathrm{P}(\text{藍、藍})=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}=\frac{2ab}{(a+b)^2},$$

$$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(\text{紅、藍})+\mathrm{P}(\text{藍、紅})=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$$

兩個分母相等且為正數，而由上面的不等式可知 $2ab \le a^2 + b^2$。因此 $\mathrm{P}(S) \le \mathrm{P}(D)$，正如所求，等號只在 $a = b$ 時成立。

第 (ii) 部分

記 $n = a + b + c$，即每個袋中糖果的數目。各袋的內容如下：

	紅	白	黃
第 1 袋	a	b	c
第 2 袋	b	c	a
第 3 袋	c	a	b

三次抽取互相獨立，所以從各袋（按次序）抽出某一指定顏色的概率，就是三個相應數目之積除以 n^3。設 A 為三顆糖果全部同色的事件，T 為恰好兩顆同色的事件，E 為三顆全部不同色的事件。這三個事件涵蓋了所有可能，而且互不重疊。

全部同色。 沿表中每一直行向下讀，

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

全部不同色。 從第 1、2、3 袋抽出的顏色，構成紅、白、黃的 $3! = 6$ 種排列之一：

$$\text{紅白黃：}a \cdot c \cdot b \quad \text{紅黃白：}a \cdot a \cdot a \quad \text{白紅黃：}b \cdot b \cdot b$$
$$\text{白黃紅：}b \cdot a \cdot c \quad \text{黃紅白：}c \cdot b \cdot a \quad \text{黃白紅：}c \cdot c \cdot c$$

所以

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

? **想一想** 怎樣才能由這兩個答案得出 $\mathrm{P}(T)$，而不必列出餘下的 18 個結果？

由於 $\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$，我們需要 $n^3 = (a + b + c)^3$ 的展開式。它包含三個立方項、六個形如 a^2b 而係數為 3 的項，以及係數為 6 的 abc：

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a + b + c)^3},\end{aligned}$$

這就是題目給出的結果。三顆糖果全部同色的概率是

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a+b+c)^3}.$$

推論。 把六個項按公因子兩兩分組：

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2+c^2\right) + b\left(c^2+a^2\right) + c\left(a^2+b^2\right).$$

由開首的不等式，$b^2 + c^2 \geq 2bc$；又因為 $a > 0$，乘上後不等號方向不變：$a(b^2+c^2) \geq 2abc$。同理 $b(c^2+a^2) \geq 2abc$ 及 $c(a^2+b^2) \geq 2abc$。相加得

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

乘以 $3/n^3 > 0$，

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

正如所求。等號成立需要 $b = c$、$c = a$ 和 $a = b$ 同時成立，所以只在 $a = b = c$ 時成立。

驗算

- 當 $a = b = c$ 時，每個袋中三種顏色各佔三分之一，所以 $\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$ 及 $\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$，餘下 $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$：這正是等號成立的情況。
- 當 $a, b, c = 1, 2, 3$ ($n = 6$) 時：$\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$ 及 $\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$。三者之和為 1，而 $\frac{2}{3}$ 是 $\frac{1}{12}$ 的 8 倍。
- 我們以精確窮舉（enumeration）的方法，對 a, b, c 由 1 至 8 的每一組取值驗證了全部三條公式，並以模擬（simulation）作檢驗（取 $a, b, c = 2, 3, 5$，200 000 次試驗得出 0.659，而 $\mathrm{P}(T)$ 的精確值為 0.66）。

常見錯誤

- 把各袋的內容次序寫錯。第 2 袋有 a 顆黃色糖果，而不是 a 顆紅色糖果；像上面那樣列一個表就可避免這種錯誤。
- 以為 $\mathrm{P}(E)$ 中每種排列都給出 abc。其實只有三種如此；紅黃白、白紅黃和黃白紅這三種排列給出的是 a^3、b^3 和 c^3。
- 把不等式乘以 a、b 或 c 時，忘記說明 $a, b, c > 0$。

STEP 之外

最後的不等式是 Muirhead 不等式(Muirhead's inequality)的一個特例，後者是比較單項式（monomial）對稱和的一般法則；在這裏它說明形如 a^2b 的各項之和，不小於形如 abc 的各項之和。第 (i) 部分是同一想法在兩個變量時的情況，而兩者都建基於算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality）。想進一步了解計數論證和互補事件（complementary events），可參閱 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（概率論入門教科書）。

詳細解答

STEP I 2009，第 13 題

概率與統計 • 排列與游程

STEP I 2009，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s1-q13

關鍵思路

重要的只是女孩所佔的位置，而不是哪個女孩或男孩是誰。因此，與其處理 $(n+3)!$ 種次序，不如直接選出女孩所佔的三個位置所組成的集合：$\binom{n+3}{3}$ 個集合中每一個都是等可能的。要數出符合條件的集合，最簡單的做法是先把 n 個男孩排成一行，再考慮女孩要放進男孩之間及兩旁的哪些空隙。

解答

由於全部 $(n+3)!$ 種次序都是等可能的，而女孩的每一個三位置集合都對應相同數目（即 $3!\,n!$）的次序，所以女孩位置的集合在

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

個可能的集合上均勻分佈（uniformly distributed）。在整個解答中，K 只可能是 1、2 或 3。

排成一行的 n 個男孩會產生 $n+1$ 個空隙（第一個男孩之前有一個，最後一個男孩之後有一個，相鄰男孩之間共有 $n-1$ 個）：



把女孩放進空隙（同一個空隙可以放任意多個）便得到一行，而每一行都恰好以一種方式產生。同一個空隙內的女孩彼此相鄰；不同空隙內的女孩之間則至少隔着一個男孩。

第 (i) 部分

$K = 3$ 表示三個女孩全部連成一段，即她們都放進同一個空隙。空隙有 $n+1$ 種選法，所以

$$\mathrm{P}(K=3) = \frac{n+1}{\binom{n+3}{3}} = \frac{6(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

（等價的說法：由三個連續位置組成的一段，可以從第 $1, 2, \ldots, n+1$ 個位置中任何一個開始。）

第 (ii) 部分

$K = 1$ 表示沒有兩個女孩相鄰，即三個女孩分別在三個不同的空隙內。我們從 $n+1$ 個空隙中選出 3 個，共有 $\binom{n+1}{3}$ 種選法，然後在每個空隙放一個女孩。因此

$$\mathrm{P}(K=1) = \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n+3}{3}} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)},$$

正是所求。（當 $n = 0$ 或 1 時，空隙不足，而公式亦正確地給出 0。）

> **想一想** 為甚麼數目是 $\binom{n+1}{3}$，而不是 $\binom{n+1}{3} \times 3!$？

我們數的是位置的集合，而不是有名有姓的孩子的次序。選定使用哪三個空隙，女孩的位置便完全確定；至於哪個女孩坐在哪裏，早已包含在「每個位置集合都是等可能的」這個論斷之中。

第 (iii) 部分

首先我們需要求 $\mathrm{P}(K=2)$。由於 $K \in \{1,2,3\}$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=2) &= 1 - \frac{6}{(n+2)(n+3)} - \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2+5n+6) - 6 - (n^2-n)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6n}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

作為驗算，我們直接數一次：$K = 2$ 表示有一對女孩在同一個空隙，而第三個女孩在另一個空隙。先為那一對選空隙，再為單獨的一個選另一個空隙，共得 $(n+1)n$ 個集合，而 $(n+1)n \big/ \binom{n+3}{3} = 6n \big/ \big((n+2)(n+3)\big)$，與上面的結果相同。

於是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= 1 \cdot \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + 2 \cdot \frac{6n}{(n+2)(n+3)} + 3 \cdot \frac{6}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2+11n+18}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)(n+9)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n+9}{n+3}.\end{aligned}$$

驗算

- $n = 0$：只有女孩，所以必定有 $K = 3$，而 $\frac{n+9}{n+3} = 3$。
- $n = 1$：可能的排列是 GGGB、GGBG、GBGG、BGGG，四者等可能，所以 $K = 3$ 或 2 的概率各為 $\frac{1}{2}$，而 $\mathrm{E}(K) = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$。
- 當 $n \to \infty$ 時，$\mathrm{E}(K) \to 1$：男孩很多時，女孩幾乎不會相鄰。
- 我們以精確分數列舉了 $n = 0, \ldots, 9$ 的所有位置集合(例如 $n = 3$ 時得 $\mathrm{P}(K = 1,2,3) = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{E}(K) = 2$)，並對 $n \leq 4$ 列舉了有標記的孩子的全部 $(n+3)!$ 種次序；所有結果都吻合。

常見錯誤

- 在同一個分數中，把有序排列的數目與位置集合的數目混在一起。選定一個樣本空間（sample space），然後貫徹使用。
- 忘記兩端的兩個空隙，結果用了 $n - 1$ 個空隙而不是 $n + 1$ 個。

STEP 之外

「男孩造出空隙，女孩放進空隙」這個技巧，就是隔板法（stars and bars）的想法；而隨機排列中最長連段（longest run）這個一般問題，則是一個經典課題：對於很長的隨機序列，最長連段的長度大致按序列長度的對數增長。大學本科的概率課程會透過指示變量（indicator variables）和母函數（generating functions）來處理這些問題。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）是學習如何發展這類計數論證的好去處。

詳細解答

STEP II 2009，第 1 題

純數學 • 曲線的對稱性

> **STEP II 2009，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q1

關鍵思路

這一題幾乎不用計算：靠對稱性（symmetry）就能完成大部分工作。兩條曲線對直線 $y = x$ 和 $y = -x$ 作反射（reflection）後都保持不變，所以只要有了一個交點，其餘交點都可以由它反射得到。接着，由這四點的位置形狀便可推出長方形（rectangle）。至於面積，我們根本不必求出 α 和 β 本身：答案原來只需要它們的一個組合，而這個組合可以直接由 $\alpha^4 + \beta^4 = u$ 和 $\alpha\beta = v$ 得到。

解答

對稱軸

如果把曲線上任意一點對某條直線作反射，所得的點仍然在曲線上，我們就說該曲線對這條直線對稱。我們需要的四個反射是

$$(x, y) \mapsto (-x, y), \quad (x, y) \mapsto (x, -y), \quad (x, y) \mapsto (y, x), \quad (x, y) \mapsto (-y, -x),$$

它們分別是對 $x = 0$、$y = 0$、$y = x$ 和 $y = -x$ 的反射。

曲線 $x^4 + y^4 = u$。表達式 $x^4 + y^4$ 在這四個映射下都保持不變，因為四次方與正負號無關，而且表達式對 x 和 y 是對稱的。所以這條曲線有四條對稱軸（lines of symmetry）：

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = x, \qquad y = -x.$$

曲線 $xy = v$。把 x 和 y 互換，xy 保持不變；$(x, y) \mapsto (-y, -x)$ 也是如此，因為 $(-y)(-x) = xy$。只改變其中一個坐標的正負號，會把 xy 變成 $-xy$，而由於 $v > 0$，點 $(-x, y)$ 便落在 $xy = -v$ 上，而不在我們的曲線上。所以這條等軸雙曲線（rectangular

hyperbola）恰好有兩條對稱軸：

$$y = x, \qquad y = -x.$$

四個交點

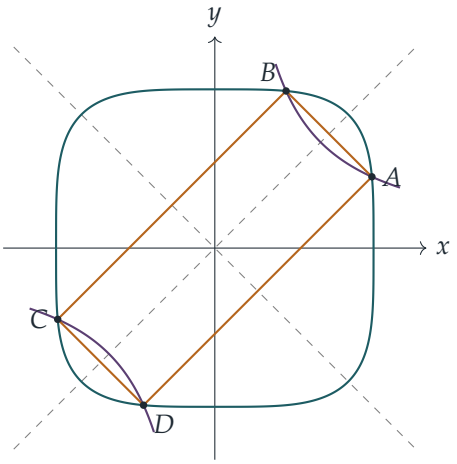
設 S 為對 $y = x$ 的反射，T 為對 $y = -x$ 的反射。兩者都把兩條曲線各自映射到自身，所以都把交點映射到交點。由 $A = (\alpha, \beta)$ 出發，我們得到

$$S(A) = (\beta, \alpha), \qquad T(A) = (-\beta, -\alpha), \qquad T(S(A)) = (-\alpha, -\beta).$$

因為 $\alpha > \beta > 0$，這四點互不相同。此外再沒有其他交點。把 $y = v/x$ 代入四次曲線（quartic）的方程，得 $x^8 - ux^4 + v^4 = 0$，這是 x^4 的二次方程，最多有兩個正根，所以 x 最多有四個實數值。

要按逆時針方向為這些點命名，可以看它們的極角（polar angle）。由於 $0 < \beta < \alpha$，點 A 的極角 θ 滿足 $0 < \theta < 45°$。於是 (β, α) 的極角是 $90° - \theta$，$(-\alpha, -\beta)$ 的極角是 $180° + \theta$，而 $(-\beta, -\alpha)$ 的極角是 $270° - \theta$。這些角按此次序遞增，所以

$$B = (\beta, \alpha), \qquad C = (-\alpha, -\beta), \qquad D = (-\beta, -\alpha).$$



（圖中所示為 $u = 81$、$v = 4$ 的情況：四次曲線以藍綠色表示，雙曲線以紫紅色表示。）

$ABCD$ 是長方形

對角線是 AC 和 BD。AC 的中點是 $\left(\frac{\alpha-\alpha}{2}, \frac{\beta-\beta}{2}\right) = (0, 0)$，同樣地，$BD$ 的中點也是 $(0, 0)$。所以兩條對角線互相平分，$ABCD$ 是平行四邊形（parallelogram）。它們的長度是

$$AC = \sqrt{(2\alpha)^2 + (2\beta)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \qquad BD = \sqrt{(2\beta)^2 + (2\alpha)^2} = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

兩者相等。對角線相等的平行四邊形是長方形，所以 $ABCD$ 是長方形。

想一想 為甚麼對角線相等的平行四邊形必定是長方形？

四個頂點與 O 的距離同為 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，所以它們都在以 O 為圓心的一個圓上，而 AC 和 BD 是這個圓的直徑。根據半圓上的圓周角（angle in a semicircle）定理，$ABCD$ 的每一隻角都是直角。如果想直接驗證，則有 $\overrightarrow{AB}=(\beta-\alpha,\,\alpha-\beta)$ 和 $\overrightarrow{BC}=(-\alpha-\beta,\,-\alpha-\beta)$，其純量積（scalar product）為

$$-(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\big[(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\big]=0.$$

面積

邊長是

$$AB=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}\,(\alpha-\beta),\qquad BC=\sqrt{2(\alpha+\beta)^2}=\sqrt{2}\,(\alpha+\beta),$$

這裏用了 $\alpha>\beta>0$ 來取正平方根。所以

$$\text{面積}=AB\cdot BC=2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=2(\alpha^2-\beta^2).$$

現在利用 A 同時在兩條曲線上這個事實，即 $\alpha^4+\beta^4=u$ 和 $\alpha\beta=v$。於是

$$(\alpha^2-\beta^2)^2=\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2=u-2v^2.$$

由於 $\alpha^2-\beta^2>0$，我們取正根，得

$$\boxed{\text{長方形面積}ABCD=2\sqrt{u-2v^2}}$$

這也說明，題目假設有四個不同的交點，就必然有 $u>2v^2$。如果 $u=2v^2$，則 $\alpha=\beta$，兩條曲線只是相切。

當 $u=81$ 及 $v=4$ 時：$u-2v^2=81-32=49$，所以面積是 $2\times7=14$，與題目要求相符。

驗算

當 $u=81$、$v=4$ 時，以數值方法解 $x^8-81x^4+256=0$，得 $\alpha\approx2.9690$ 及 $\beta=4/\alpha\approx1.3472$。於是 $2(\alpha^2-\beta^2)\approx14.000$，而對四個頂點使用鞋帶公式（shoelace formula）也得到相同的面積。當 u 下降並趨向 $2v^2$ 時，每個象限內的兩點在 $y=x$ 上合而為一，長方形壓扁成一條線段，與面積 $2\sqrt{u-2v^2}\to0$ 吻合。

常見錯誤

- 把坐標軸當作 $xy = v$ 的對稱軸。對坐標軸作反射，會把第一象限的分支送到第二象限，而那裏 $xy < 0$。
- 把各點的次序標錯，例如取 $B = (-\alpha, -\beta)$。這樣 $ABCD$ 便會連成一個交叉四邊形。
- 試圖明確地解出 α 和 β。面積只需要 $\alpha^2 - \beta^2$，而它可以直接由 u 和 v 得到。

STEP 之外

保持 $x^4 + y^4 = u$ 不變的四個反射和各個旋轉，構成正方形的對稱羣（symmetry group），即階為 8 的二面體羣（dihedral group）。雙曲線只保留了其中一個階為 4 的子羣（subgroup）（兩個反射、半周旋轉和恆等變換）。兩條曲線共有的對稱變換會把交點互相置換，而像這樣藉着羣的作用來尋找對象，正是大學一年級羣論（group theory）的一個主題。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是認識這些概念的好起點。

詳細解答

STEP II 2009，第 2 題

純數學 • 曲線描繪與近似

STEP II 2009，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q2

關鍵思路

由於 $a > 1$，函數 a^u 對 u 嚴格遞增（strictly increasing），所以 y 恰好在 $\sin(\pi e^x)$ 最大之處取得最大值，在它最小之處取得最小值。因此，這條曲線的一切性質都來自內層函數 πe^x：它穩定地遞增，依次經過正弦函數的波峯和波谷，而且隨着 x 增大，這些點會愈來愈密集。至於面積，各梯形（trapezium）兩端的高度相同，於是整個和式便化簡為單單一個對數之差。

解答

第 (i) 部分

取對數（logarithm），得 $\ln y = \ln a \, \sin(\pi e^x)$。以隱函數求導（implicit differentiation），

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pi \ln a \, e^x \cos(\pi e^x)\, a^{\sin(\pi e^x)}.$$

這裏 $\ln a > 0$（因為 $a > 1$），$e^x > 0$ 而且 $a^{\sin(\pi e^x)} > 0$，所以導數恰好在 $\cos(\pi e^x) = 0$ 時為零，即 πe^x 是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍之時。由於 $\pi e^x > 0$，只有正的奇數倍才有可能：

$$e^x = n + \tfrac{1}{2}, \qquad x = \ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

在這些點上 $\sin(\pi e^x) = \sin\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = (-1)^n$，所以 $y = a^{(-1)^n}$。駐點（stationary point）為

$$\left(\ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right),\, a\right) \ (n \text{ 為偶數}), \qquad \left(\ln\left(n + \tfrac{1}{2}\right),\, \tfrac{1}{a}\right) \ (n \text{ 為奇數}).$$

第一組是極大點，第二組是極小點。由於 a^u 遞增，對任何 x 都有 $y \le a^1 = a$ 和 $y \ge a^{-1}$，所以 $y = a$ 的點是全局極大點（global maximum），$y = 1/a$ 的點是全局極小

點（global minimum）。具體來說，極大點位於 $x = \ln\frac{1}{2}, \ln\frac{5}{2}, \ln\frac{9}{2}, \ldots$，極小點位於 $x = \ln\frac{3}{2}, \ln\frac{7}{2}, \ln\frac{11}{2}, \ldots$

第 (ii) 部分

當 x 很小時，$\mathrm{e}^x \approx 1 + x$，所以

$$\sin(\pi \mathrm{e}^x) \approx \sin(\pi + \pi x) = -\sin(\pi x) \approx -\pi x,$$

這裏先用了 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$，再用 $\sin t \approx t$，其中 $t = \pi x$ 很小。因此

$$y \approx a^{-\pi x} = \mathrm{e}^{-\pi x \ln a} \approx 1 - \pi x \ln a,$$

最後一步再次用到 $\mathrm{e}^t \approx 1 + t$，這次的小量是 $t = -\pi x \ln a$。這就是所求的近似式：曲線在 $x = 0$ 處穿過直線 $y = 1$，斜率（gradient）為 $-\pi \ln a$。

> **想一想** 為甚麼不能把 $\sin t \approx t$ 直接代入 $\sin(\pi \mathrm{e}^x)$？

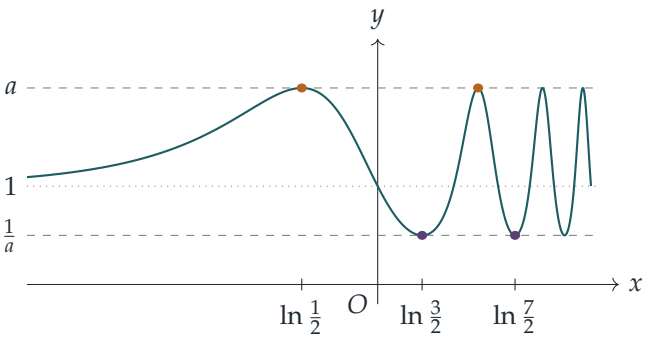
因為當 x 很小時，$\pi \mathrm{e}^x$ 接近的是 π，而不是 0。我們必須先用 $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$，把小量 πx 移到正弦函數的自變量之中。

第 (iii) 部分

草圖上應標示的一些特徵：

- 當 $x \to -\infty$ 時，$\mathrm{e}^x \to 0$，所以 $\sin(\pi \mathrm{e}^x) \to 0$，而 $y \to 1$，並且是從上方趨近（當 $x < \ln\frac{1}{2}$ 時，我們有 $0 < \pi \mathrm{e}^x < \frac{\pi}{2}$，所以正弦值為正，$y > 1$）。直線 $y = 1$ 是曲線在左方的漸近線（asymptote）。
- 曲線上升至位於 $x = \ln\frac{1}{2}$ 的第一個極大值 a，然後永遠在 a 與 $1/a$ 之間振盪，並且始終在 x 軸上方。
- 每當 e^x 是正整數時，曲線便穿過 $y = 1$，即在 $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots$ 處；而由第 (ii) 部分可知，在 $x = 0$ 處的斜率為 $-\pi \ln a$。
- 相鄰駐點之間的距離為 $\ln\frac{n+3/2}{n+1/2} \to 0$，所以隨着 x 增大，振盪愈來愈快。

下面的草圖顯示 $a = 2$ 的情況。



第 (iv) 部分

從左邊數起：第 k 個極大點對應 $n = 2(k-1)$，所以它位於 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{3}{2}$。第 $(k+1)$ 個極大點位於 $\mathrm{e}^x = 2k + \frac{1}{2}$，而兩者之間唯一的極小點位於 $\mathrm{e}^x = 2k - \frac{1}{2}$。記

$$x_1 = \ln\left(2k - \tfrac{3}{2}\right), \qquad x_2 = \ln\left(2k - \tfrac{1}{2}\right), \qquad x_3 = \ln\left(2k + \tfrac{1}{2}\right).$$

用直線把 (x_1, a) 連到 $(x_2, \frac{1}{a})$，再把 $(x_2, \frac{1}{a})$ 連到 (x_3, a)，則直線以下至 x 軸的區域分成兩個梯形，每個梯形的兩條平行邊長度都是 a 和 $\frac{1}{a}$。所以面積的近似值為

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_2 - x_1) + \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{1}{a}\right)(x_3 - x_2) &= \frac{a^2+1}{2a}\,(x_3 - x_1) \\ &= \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{2k+\frac{1}{2}}{2k-\frac{3}{2}} = \frac{a^2+1}{2a}\,\ln\frac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

最後，$\dfrac{k+\frac{1}{4}}{k-\frac{3}{4}} = 1 + \dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}$，所以面積近似於

$$\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)\ln\left(1 + \left(k - \tfrac{3}{4}\right)^{-1}\right),$$

正如題目所求。留意極小點的位置 x_2 完全消去了：只有兩個極大點起作用。

驗算

- 以數值方法求導，可確認在 $n = 0, \ldots, 7$ 時 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 於 $x = \ln(n + \frac{1}{2})$ 成立，而在 $[-6, \ln 8]$ 上再無其他零點；同時亦確認在 $x = 0$ 處的斜率為 $-\pi \ln a$（取 $a = 2$ 時，兩者皆為 -2.1776）。
- 取 $a = 2$、$k = 1$ 時，公式給出 $\frac{5}{4}\ln 5 \approx 2.012$，而用辛普森法則（Simpson's rule）求得的真實面積是 1.954：兩者相當接近，正是近似值應有的表現。梯形的估算略為偏高：曲線在極小點附近低於弦線的幅度，大於它在極大點附近高出弦線的幅度。
- 當 $k \to \infty$ 時，面積趨向 0，與振盪愈來愈窄的現象吻合。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分把 $\frac{\pi}{2}$ 的負奇數倍也算進去：πe^x 永遠是正數。
- 從 $k = 0$ 而不是 $k = 1$ 開始為極大點編號，結果答案會變成 $\ln\left(1 + (k + \frac{1}{4})^{-1}\right)$。
- 在第 (ii) 部分停在 $a^{-\pi x}$，沒有做最後一步線性化 $e^t \approx 1 + t$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其實是把較簡單的展開式複合起來，從而得出一階泰勒展開（Taylor expansion），這正是大學本科生處理複合函數展開的方法。當 k 很大時，一次振盪之下的真實面積大約是 $(x_3 - x_1)$ 乘以 $a^{\sin\theta}$ 在一個週期上的平均值，這個積分會引出修正貝塞爾函數（modified Bessel function）$I_0(\ln a)$；把它與 $\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ 比較，是一道很好的練習，可藉此明白為甚麼梯形法則（trapezium rule）對這類曲線會高估。若想看對近似與泰勒定理（Taylor's theorem）的嚴謹論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門書）。

詳細解答

STEP II 2009，第 3 題

純數學 • 三角恆等式與根式

> **STEP II 2009，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q3

關鍵思路

恆等式（identity）$(*)$ 把你已知的角 x 的正切（tangent），化為角 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ 的正切，而後者的大小約為前者的一半。因此它就像一部半角（half-angle）機器。功夫在於選取一個起始角 x，使它恰好落在你想要的角上。之後的工作就是細心地進行根式（surd）運算：有理化（rationalising）、展開和平方。

解答

證明 $(*)$

設 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，則 $x = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$。於是

$$\sin x = \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \qquad \cos x = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

因此，只要兩邊均有定義（即 $\cos x \neq 0$），便有

$$\sec x - \tan x = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

約去 $\sin\theta$ 是容許的，因為 $\cos x = 2\sin\theta\cos\theta \neq 0$ 必然使 $\sin\theta \neq 0$。這就證明了 $(*)$。

第 (i) 部分

我們要 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}\pi$，由此得 $x = \frac{1}{4}\pi$。由於 $\sec\frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$ 及 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，

$$\tan\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1.$$

至於第二個結果，留意 $\frac{11}{24}\pi = \frac{3}{24}\pi + \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{3}\pi$，而我們知道 $\tan\frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$。由複角公式（addition formula）得

$$\tan\tfrac{11}{24}\pi = \frac{\tan\frac{1}{8}\pi + \tan\frac{1}{3}\pi}{1 - \tan\frac{1}{8}\pi\tan\frac{1}{3}\pi} = \frac{(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1},$$

這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

與其把一個有三項的分母有理化，不如直接證明以下等式，這樣更快：

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1.$$

把 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$ 依次乘以第一個括號內的每一項，並利用 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 及 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$：

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 2\sqrt{3}-2\sqrt{6}+2,\\
\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= \sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2},\\
\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3-3\sqrt{2}+\sqrt{3},\\
\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{6}+1) &= 3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

現在把同類項合併。常數項得 $2+3-6=-1$。$\sqrt{2}$ 項得 $1-3+3=1$。$\sqrt{3}$ 項得 $2-2+1=1$。$\sqrt{6}$ 項得 $-2+1+1=0$。總和為 $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$。分母 $\sqrt{3}-\sqrt{6}+1 \approx 0.28$ 不等於零，所以我們可以除以它，於是

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{6}+1} = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

想一想 最後一部分應把哪個 x 值代入 $(*)$？

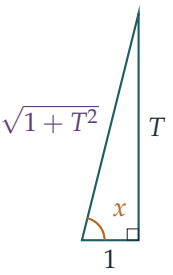
我們需要 $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x = \frac{1}{48}\pi$，所以 $\frac{1}{2}x = \frac{11}{48}\pi$，即 $x = \frac{11}{24}\pi$。這正好是我們在 (i) 和 (ii) 中求得其正切的那個角。

第 (iii) 部分

設 $T = \tan\frac{11}{24}\pi = 2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$。在 $(*)$ 中取 $x = \frac{11}{24}\pi$，得

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi = \sec\tfrac{11}{24}\pi - T.$$

至於正割（secant），我們有 $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$。由於 $0 < \frac{11}{24}\pi < \frac{1}{2}\pi$，餘弦為正，所以取正根，$\sec\frac{11}{24}\pi = \sqrt{1+T^2}$。下面的三角形顯示的是同一件事。



把 T 平方，四項各自的平方之和為 $4+2+3+6=15$。交叉項之和為

$$2\big(2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}\big)=2\big(5\sqrt{2}+4\sqrt{3}+3\sqrt{6}\big)=10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}.$$

所以 $1+T^2=16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}$，因此

$$\tan\tfrac{1}{48}\pi=\sqrt{16+10\sqrt{2}+8\sqrt{3}+6\sqrt{6}}-2-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6},$$

正如所求。

驗算

- $\sqrt{2}-1\approx 0.41421$，與 $\tan 22.5^\circ$ 相符。
- $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\approx 7.59575$，與 $\tan 82.5^\circ$ 相符。(i) 中的分數也給出相同的值。
- 最後的表達式為 $\sqrt{57.45\ldots}-7.59575\approx 0.0655435$，與 $\tan 3.75^\circ\approx 0.0655435$ 相符。
- 快速檢驗 $(*)$：當 $x=0$ 時兩邊均等於 1，而當 $x=\frac{1}{3}\pi$ 時兩邊均等於 $2-\sqrt{3}=\tan\frac{1}{12}\pi$。

常見錯誤

- 解 $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}x=\frac{1}{48}\pi$ 時出錯，誤用 $x=\frac{11}{48}\pi$。那個 $\frac{1}{2}$ 必須消去。
- 把四項的根式平方時遺漏交叉項。交叉項共有六個，每個都要乘以二。
- 直接取 $\sec x=\sqrt{1+\tan^2 x}$，卻沒有說明為何正根才是正確的。

STEP 之外

像 $\tan\frac{\pi}{48}$ 這類精確值，連同當中層層相套的平方根，就是這樣靠反覆把角減半而逐步構造出來的。這正是一個古典問題在代數上的一面：哪些正多邊形可以用尺規作圖（ruler and compass construction）作出？高斯（Gauss）證明了答案取決於 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 能否只用平方

根來表示，而伽羅華理論（Galois theory）則解釋了箇中原因。域（field）和域擴張（field extension）是講述這個故事的語言，若想初步認識，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP II 2009，第 4 題

純數學 • 多項式的整除性

STEP II 2009，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q4

關鍵思路

處理「可被 $(x-1)^5$ 整除（divisible）」這個條件，最好的方法是把它直接寫出來：對某個多項式（polynomial）q，有 $\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\mathrm{q}(x)$。求導（differentiate）後可見，$\mathrm{p}(x) - 1$ 的重因式（repeated factor）會保留在 $\mathrm{p}'(x)$ 之中，只是冪次低一次。在最後一部分，這幾乎完全確定了 p'，因此我們只需對 p' 積分（integrate）便可求出 p，而不必與十個未知係數（coefficient）苦苦糾纏。

解答

由於 $\mathrm{p}(x) - 1$ 可被 $(x-1)^5$ 整除，而且次數（degree）為 9，我們可以寫成

$$\mathrm{p}(x) = 1 + (x-1)^5\,\mathrm{q}(x),$$

其中 q 是一個 4 次多項式。

第 (i) 部分

代入 $x = 1$，第二項便會消失，所以

$$\mathrm{p}(1) = 1.$$

第 (ii) 部分

利用乘積法則（product rule）求導，

$$\begin{aligned} \mathrm{p}'(x) &= 5(x-1)^4\,\mathrm{q}(x) + (x-1)^5\,\mathrm{q}'(x) \\ &= (x-1)^4\big(5\mathrm{q}(x) + (x-1)\mathrm{q}'(x)\big). \end{aligned}$$

括號內是一個多項式，所以 $\mathrm{p}'(x)$ 可被 $(x-1)^4$ 整除，正如題目所求。

第 (iii) 部分

把 $x-1$ 換成 $x+1$，完全相同的論證依然適用：寫成 $\mathrm{p}(x) = -1 + (x+1)^5\,\mathrm{r}(x)$，便得 $\mathrm{p}(-1) = -1$，並且可知 $\mathrm{p}'(x)$ 可被 $(x+1)^4$ 整除。

因此 $\mathrm{p}'(x)$ 同時可被 $(x-1)^4$ 和 $(x+1)^4$ 整除。

? **想一想** 為甚麼由此可知 $\mathrm{p}'(x)$ 可被兩者之積 $(x-1)^4(x+1)^4$ 整除？

設 $\mathrm{p}'(x) = (x-1)^4\mathrm{s}(x)$。$(x+1)^4$ 的每一個根(root)都是 -1，而它並不是 $(x-1)^4$ 的根，所以因式 $(x+1)^4$ 必定整除 $\mathrm{s}(x)$。(換句話說，一次因式(linear factor) $x+1$ 在 p' 中出現了四次，而這四個因式沒有一個可以被 $(x-1)^4$ 用掉。)因此 $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$ 整除 $\mathrm{p}'(x)$。

現在 p' 的次數是 8，與 $(x^2-1)^4$ 的次數相同，所以商（quotient）是一個非零常數：

$$\mathrm{p}'(x) = k(x^2-1)^4 = k\left(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1\right).$$

積分後得

$$\mathrm{p}(x) = k\,\mathrm{F}(x) + c, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{x^9}{9} - \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + x.$$

留意 F 是奇函數（odd function），所以 $\mathrm{F}(-1) = -\mathrm{F}(1)$。由已知的兩個函數值可得

$$k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(1) = 1, \qquad -k\mathrm{F}(1) + c = \mathrm{p}(-1) = -1.$$

兩式相加，得 $c = 0$；兩式相減，得 $k\mathrm{F}(1) = 1$。以 315 為公分母，

$$\mathrm{F}(1) = \frac{35 - 180 + 378 - 420 + 315}{315} = \frac{128}{315}, \qquad \text{所以} \qquad k = \frac{315}{128}.$$

因此

$$\mathrm{p}(x) = \frac{1}{128}\left(35x^9 - 180x^7 + 378x^5 - 420x^3 + 315x\right).$$

我們還應該驗證這個多項式確實符合要求，因為到目前為止，我們只證明了任何符合條件的 p 都必定是這個形式。它的次數是 9。此外，$\mathrm{p}(1) - 1 = 0$，而且 $\mathrm{p}'(x) = \frac{315}{128}(x-1)^4(x+1)^4$，所以 $\mathrm{p}(x) - 1$ 的首四階導數（derivative）在 $x = 1$ 處全部為零；因此 $x = 1$

是 $\mathrm{p}(x)-1$ 的根，其重數（multiplicity）至少為 5，即 $(x-1)^5$ 整除 $\mathrm{p}(x)-1$。由於 p 是奇函數，$\mathrm{p}(x)+1=-\big(\mathrm{p}(-x)-1\big)$，而後者可被 $(-x-1)^5=-(x+1)^5$ 整除。所以兩個條件都成立，而這個 p 就是唯一的答案。

驗算

- 係數 $35,-180,378,-420,315$ 之和為 128，由此確認 $\mathrm{p}(1)=1$。
- 以準確的分數運算，把 $\mathrm{p}(x)-1$ 反覆除以 $x-1$，餘數（remainder）恰好有五次為零；把 $\mathrm{p}(x)+1$ 反覆除以 $x+1$，結果亦然。
- p 是奇函數，這是必然的：若 p 符合條件，則 $-\mathrm{p}(-x)$ 亦符合條件，而答案是唯一的。

常見錯誤

- 試圖由十條聯立方程（simultaneous equations）直接求出 p 的全部十個係數。這在原則上可行，但對 p' 積分要快得多。
- 忘記積分常數（constant of integration），或者沒有同時利用 $\mathrm{p}(1)=1$ 和 $\mathrm{p}(-1)=-1$ 來確定積分常數和 k。

STEP 之外

第 (ii) 部分背後的事實是：a 是 f 的 m 重根，當且僅當 $\mathrm{f}(a)=\mathrm{f}'(a)=\cdots=\mathrm{f}^{(m-1)}(a)=0$。像這樣在若干點上指定函數值和導數值，稱為埃爾米特插值（*Hermite interpolation*）；而這裏求得的多項式是一條「smoothstep」曲線，由 -1 上升至 1，並且在兩端盡可能平坦，常用於電腦圖像（computer graphics）。「互質（coprime）的因式各自整除，則其乘積亦整除」這個論證屬於環論（ring theory）：域（field）上的多項式具有唯一分解（unique factorisation）性質，與整數一樣。想進一步了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）。

詳細解答

STEP II 2009，第 5 題

純數學 • 嵌套平方根

> **STEP II 2009，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q5

關鍵思路

開首的展開式其實就是整道題的化身：它告訴我們 $x+2\sqrt{x-1}$ 是一個完全平方（perfect square），而用同樣的手法可知 $x-2\sqrt{x-1}$ 也是。只要把嵌套根式（nested roots）拆開，每個被積函數（integrand）都會化簡成初等的式子。唯一要留神的是 $\sqrt{a^2}=|a|$，而不是 a，所以我們必須留意正負號，而這正是第 (ii) 部分有趣之處。

解答

展開式

當 $x \geq 1$ 時，

$$(\sqrt{x-1}+1)^2 = (x-1)+2\sqrt{x-1}+1 = x+2\sqrt{x-1}.$$

同理，$(\sqrt{x-1}-1)^2 = x-2\sqrt{x-1}$。取非負平方根，並記住 $\sqrt{a^2}=|a|$，

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}+1, \qquad \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \left|\sqrt{x-1}-1\right|.$$

第一式不需要絕對值（modulus），因為 $\sqrt{x-1}+1>0$。第二式則需要：$\sqrt{x-1}-1$ 在 $1 \leq x < 2$ 時為負，在 $x \geq 2$ 時為非負。

第 (i) 部分

在 $[5,10]$ 上，我們有 $\sqrt{x-1} \geq 2 > 1$，所以 $\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1}-1$。因此分子是

$$(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x-1}-1) = 2\sqrt{x-1},$$

而被積函數就只是 2。故此

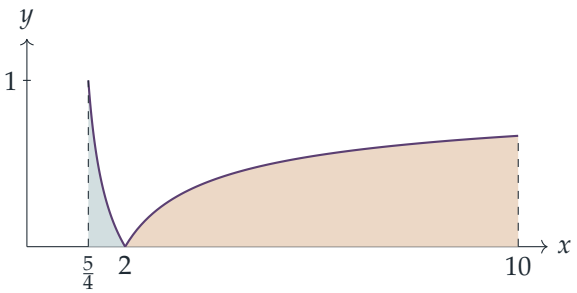
$$\int_5^{10} \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_5^{10} 2\,\mathrm{d}x = 10.$$

第 (ii) 部分

由展開式可得

$$y = \frac{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}{\sqrt{x-1}} = \left|1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right|.$$

所以 $y \geq 0$ 恆成立，而曲線在 $x=2$ 處與 x-軸相切，該處 $\sqrt{x-1}=1$。



? **想一想** 為甚麼我們不能直接去掉平方根，在整個範圍上對 $1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 積分？

因為 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ 永不為負，但 $\sqrt{x-1}-1$ 在 $x<2$ 時為負。忽略絕對值的話，就會把 $[\frac{5}{4},2]$ 上的那一塊當作負面積計算。所以我們在 $x=2$ 處把積分分開。

在 $[\frac{5}{4},2]$ 上，$\sqrt{x-1}\leq 1$，所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-1$，而

$$\int_{5/4}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-1}-x\right]_{5/4}^{2} = (2-2)-\left(1-\tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{1}{4}.$$

在 $[2,10]$ 上，$\sqrt{x-1}\geq 1$，所以 $y=1-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，而

$$\int_2^{10}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)\mathrm{d}x = \left[x-2\sqrt{x-1}\right]_2^{10} = (10-6)-(2-2) = 4.$$

因此總面積是 $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$。

第 (iii) 部分

分子中第二個根式的形狀有所不同，但只要以 $x+1$ 取代 $x-1$，同樣的手法仍然奏效：

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 = (x+1)-2\sqrt{x+1}+1 = x-2\sqrt{x+1}+2.$$

當 $x \geq \frac{5}{4}$ 時，我們有 $\sqrt{x+1} > 1$，所以 $\sqrt{x-2\sqrt{x+1}+2} = \sqrt{x+1}-1$，不需要絕對值。寫成 $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}$（由於當 $x > 1$ 時兩個因子皆為正，此式成立），被積函數便變成

$$\frac{(\sqrt{x-1}+1)+(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

兩個 ± 1 項互相抵消，這正是分子看來有點古怪的用意所在。故此

$$\begin{aligned}\int_{5/4}^{10}\Big(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\Big)\mathrm{d}x &= \Big[2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x-1}\Big]_{5/4}^{10}\\ &= \big(2\sqrt{11}+6\big)-\big(3+1\big)\\ &= 2\sqrt{11}+2,\end{aligned}$$

其中在下限處用到 $\sqrt{9/4} = \frac{3}{2}$ 和 $\sqrt{1/4} = \frac{1}{2}$。

驗算

- 在 $x = 5$ 處：$\sqrt{5+4} = 3$ 而 $\sqrt{5-4} = 1$，所以 (i) 的被積函數是 $(3+1)/2 = 2$，與所說相符。
- 在 (ii) 中，曲線在 $x = \frac{5}{4}$ 處的高度是 $|1-2| = 1$，在 $x = 10$ 處的高度是 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，與草圖吻合；第一塊是面積為 $\frac{1}{4}$ 的狹長小片，這是合理的。
- 對原來的被積函數使用辛普森法則（Simpson's rule），得出 10.000、4.250 和 8.6332，與 10、$\frac{17}{4}$ 和 $2\sqrt{11}+2 \approx 8.6332$ 一致。

常見錯誤

- 對所有 x 都寫 $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}-1$。在 (ii) 中這會得出 $4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$，而不是 $\frac{17}{4}$。
- 在 (iii) 中，沒有察覺 $x - 2\sqrt{x+1} + 2$ 也是完全平方，反而嘗試用代換法（substitution）。

STEP 之外

恆等式 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是分析學（analysis）中一個重大主題的小例子：以公式定義的函數可以暗藏尖角和正負號的轉變，在積分之前，你必須先看清楚式子在哪裏變號。把 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ 這類根式解除嵌套（denesting），背後也有出奇地深刻的代數理論，與域擴張（field extensions）有關。在分析學方面，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是很好的下一步。

詳細解答

STEP II 2009，第 6 題

純數學 • 無窮級數的界限

STEP II 2009，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q6

關鍵思路

我們無法準確求出 $\sum 1/F_i$ 的和，但可以把它夾在兩個界之間。遞推關係（recurrence）給出兩個簡單的比較：每個斐波那契數（Fibonacci number）都小於前一項的兩倍，又大於前兩項那一個的兩倍。第一個比較用一個等比級數（geometric series）從下方界定級數的尾部（tail）。第二個比較則把尾部與它自身平移後的版本聯繫起來，從而由上方界定它。在使用任何一個界之前先準確地加起若干項，就可以把估計收緊到我們想要的程度。

解答

把相鄰兩項逐對相加，得

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad F_9 = 34, \quad F_{10} = 55.$$

所有 F_n 均為正數，而且當 $n \geq 2$ 時 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > F_n$，所以數列由 F_2 起嚴格遞增（strictly increasing）。

級數收斂。 當 $i \geq 4$ 時，$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} > 2F_{i-2}$，因為當 $i - 2 \geq 2$ 時 $F_{i-1} > F_{i-2}$。由於 $F_1 = 1 \geq 2^{-1/2}$ 和 $F_2 = 1 \geq 2^0$，而 $F_3 = 2 \geq 2^{1/2}$，以每次兩步的歸納法（induction）可得對每個 i 都有 $F_i \geq 2^{(i-2)/2}$。所以 $0 < 1/F_i \leq (1/\sqrt{2})^{i-2}$，於是與公比為 $1/\sqrt{2} < 1$ 的等比級數比較，可知 S 收斂（converges）。這樣我們就可以放心地對下面的和式進行運算。我們還會反覆用到一個事實：若對每個 i 都有 $a_i \leq b_i$，並且至少有一個 i 使 $a_i < b_i$，則對收斂級數而言 $\sum a_i < \sum b_i$。

第 (i) 部分

下界。 當 $i \geq 4$ 時，$F_{i-2} < F_{i-1}$，所以

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2} < 2F_{i-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} \qquad (i \geq 4),$$

這就是第一個結果。(當 $i = 3$ 時等號成立，即 $F_3 = 2F_2$，所以這個不等式要由 $i = 4$ 開始。)

反覆應用這個結果，當 $i \geq 4$ 時，

$$\frac{1}{F_i} > \frac{1}{2F_{i-1}} > \frac{1}{2^2F_{i-2}} > \cdots > \frac{1}{2^{i-3}F_3} = \frac{1}{2^{i-2}}.$$

對 $i \geq 4$ 求和，

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2},$$

所以

$$S = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{F_i} > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2} = 3.$$

上界。 現在使用另一個比較：由上面的 $F_i > 2F_{i-2}$，當 $i \geq 4$ 時 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$。我們把它應用於由 $i = 5$ 起的每一項，並設 $j = i - 2$：

$$\sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_i} < \frac{1}{2} \sum_{i=5}^{\infty} \frac{1}{F_{i-2}} = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{F_j} = \frac{1}{2}(S - 2).$$

左方是 S 減去它的首四項，即 $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$。因此

$$S - \tfrac{17}{6} < \tfrac{1}{2}S - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}S < \tfrac{11}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad S < \tfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}.$$

? **想一想** 為甚麼上界的比較要由 $i = 5$ 開始，而不是由 $i = 4$ 開始？

由 $i = 4$ 開始也行得通，但只會得到 $S - \frac{5}{2} < \frac{1}{2}(S - 1)$，即 $S < 4$，這並不足夠。在估計之前準確地加起的項愈多，因子 $\frac{1}{2}$ 令我們損失的就愈少。第 (ii) 部分正是靠這個想法來推動。

第 (ii) 部分

記部分和(partial sum)為 $S_k = \sum_{i=1}^{k} 1/F_i$，尾部為 $T_k = \sum_{i=k}^{\infty} 1/F_i$，於是 $S = S_{k-1} + T_k$。第 (i) 部分用了兩個一般的界，兩者對 $k \geq 3$ 都成立。

下界：與之前完全一樣，當 $i > k$ 時 $1/F_i > 1/(2^{i-k}F_k)$，所以

$$T_{k+1} > \frac{1}{F_k}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{F_k}, \qquad \text{所以} \qquad S > S_k + \frac{1}{F_k}.$$

上界：當 $i \geq k+2 \geq 5$ 時 $1/F_i < 1/(2F_{i-2})$，由此得 $T_{k+2} < \frac{1}{2}T_k$，而 $T_{k+2} = T_k - \frac{1}{F_k} - \frac{1}{F_{k+1}}$，所以

$$T_k < 2\Big(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\Big), \qquad \text{所以} \qquad S < S_{k-1} + 2\Big(\frac{1}{F_k} + \frac{1}{F_{k+1}}\Big).$$

取 $k = 3$ 時，這兩個界就是第 (i) 部分的 3 和 $3\frac{2}{3}$。現在在兩者中都取 $k = 5$。

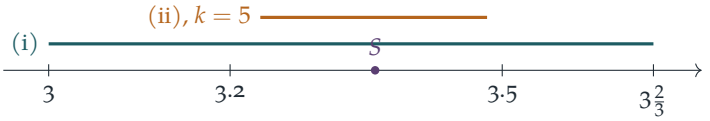
對於下界，$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{91}{30}$，所以

$$S > \frac{91}{30} + \frac{1}{5} = \frac{97}{30} > \frac{96}{30} = 3.2.$$

對於上界，$S_4 = \frac{17}{6}$，而 $F_5 = 5$，$F_6 = 8$，所以

$$S < \frac{17}{6} + 2\Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\Big) = \frac{17}{6} + \frac{13}{20} = \frac{170 + 39}{60} = \frac{209}{60} < \frac{210}{60} = 3.5.$$

合起來便得 $3.2 < S < 3.5$，正如所求。（$k = 4$ 並不足夠：它只給出 $\frac{19}{6} < S < \frac{107}{30}$，約為 $3.17 < S < 3.57$。）



驗算

- 以數值方法把首 200 項加起來，得 $S \approx 3.35989$。這個值落在兩個區間之內，而且 $k = 3, \ldots, 6$ 的界全都把它夾在中間：$3 < \frac{19}{6} < \frac{97}{30} < \frac{197}{60} < S < \frac{2681}{780} < \frac{209}{60} < \frac{107}{30} < \frac{11}{3}$。
- 用實際數值檢驗這些比較：$F_7 = 13 < 2 \times 8$，而 $13 > 2 \times 5$。

常見錯誤

- 在 $i = 3$ 時使用 $1/F_i > 1/(2F_{i-1})$，但該處其實是等式。這會破壞不等式的嚴格性，或者得出錯誤的等比級數和。
- 未先確定級數收斂，就把 S 當作一個數來運算（「$S - \frac{17}{6} < \frac{1}{2}S - 1$」）。
- 因為由 $i = 4$ 開始的比較只給出 $S < 4$，就放棄求上界。應在估計之前先準確地加起更多的項。

STEP 之外

這個值是 $S \approx 3.3598856\ldots$，稱為斐波那契倒數常數（reciprocal Fibonacci constant）。現已知道它是無理數（irrational；這是 André-Jeannin 在 1989 年的結果），但至今未有已知的閉合形式（closed form）。這裏的比較其實是喬裝了的比值審斂法（ratio test）。F_{i+1}/F_i 趨向黃金比（golden ratio）$\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，所以尾部的表現就像一個公比為 $1/\varphi \approx 0.618$ 的等比級數，介乎我們那兩個粗略的公比 $\frac{1}{2}$ 與 $1/\sqrt{2}$ 之間。這類比較審斂法（comparison test）和尾部估計，是大學第一門分析（analysis）課程的核心內容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是正式認識這些內容的絕佳起點。

詳細解答

STEP II 2009，第 7 題

純數學 • 觀察法積分

STEP II 2009，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q7

關鍵思路

這類積分乍看無從入手，直到你發現它們恰好是某個函數的導數（derivative）。第一個結果告訴我們 $(x-a)^n \mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2}$ 的導數是甚麼模樣：$(x-a)$ 的冪、指數函數（exponential）、一個三次多項式（cubic），全部除以 $\sqrt{1+x^2}$。所以每個積分（integral）其實都是一道配對練習：讀出 n、a 和 b，再檢查三次多項式是否吻合。當分子中的多項式是四次（quartic）而非三次時，我們就要弄清楚多出來的那一次從何而來。

解答

導數

對三個因式的乘積求導，並寫出 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= n(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + b(x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[\,n(1+x^2) + b(x-a)(1+x^2) + x(x-a)\,\Big],\end{aligned}$$

這裏我們抽出了公因式 $(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}/\sqrt{1+x^2}$（把首兩項各乘以 $\sqrt{1+x^2}$，使它們置於公分母之上）。展開括號，得

$$q(x) = bx^3 + (n+1-ab)x^2 + (b-a)x + (n-ab).$$

由於 $b \neq 0$，x^3 的係數不為零，所以 q 確實是三次多項式。這就是所要求的結果。我們會以下列形式使用它：

$$\int \frac{(x-a)^{n-1}\mathrm{e}^{bx}\,q(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-a)^n\mathrm{e}^{bx}\sqrt{1+x^2} + C. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

配對各個因式，我們需要 $a = 4$、$b = 4$ 和 $n - 1 = 14$，所以 $n = 15$。代入這些數值，

$$q(x) = 4x^3 + (16 - 16)x^2 + (4 - 4)x + (15 - 16) = 4x^3 - 1,$$

這正是被積函數（integrand）中的三次多項式。因此由 $(*)$ 得

$$\int \frac{(x-4)^{14}\mathrm{e}^{4x}(4x^3-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-4)^{15}\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

第 (ii) 部分

這次的多項式是四次的，所以它不可能直接就是 q。

> ? **想一想** 一個只會產生三次多項式的公式，怎樣才能容納一個四次多項式？

$(*)$ 中 $(x - a)$ 的冪可以由我們選擇。如果這個四次多項式有因式 $(x - 1)$，我們就可以把它移過去與 $(x - 1)^{21}$ 合併，餘下一個三次多項式。試代 $x = 1$：$12 - 1 - 11 = 0$，所以 $(x - 1)$ 確實是因式，除去後得

$$12x^4 - x^2 - 11 = (x - 1)(12x^3 + 12x^2 + 11x + 11).$$

（你也可以看出它等於 $(x^2 - 1)(12x^2 + 11)$。）因此被積函數是

$$\frac{(x-1)^{22}\mathrm{e}^{12x}(12x^3+12x^2+11x+11)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

取 $a = 1$、$b = 12$、$n = 23$：

$$q(x) = 12x^3 + (24 - 12)x^2 + (12 - 1)x + (23 - 12) = 12x^3 + 12x^2 + 11x + 11,$$

兩者吻合。故此

$$\int \frac{(x-1)^{21}\mathrm{e}^{12x}(12x^4-x^2-11)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (x-1)^{23}\mathrm{e}^{12x}\sqrt{1+x^2} + C.$$

第 (iii) 部分

多項式同樣是四次的，但這次代入 $x = 2$ 得 $64 + 8 - 2 = 70 \neq 0$，所以 $(x - 2)$ 不是因式，第 (ii) 部分的技巧行不通。

> ? **想一想** 如果 $(x - 2)$ 不是因式，多出來的那一次從何而來？

數一數次數。被積函數的分子次數是 $6 + 4 = 10$，但 $(*)$ 配上 $(x - 2)^6$ 只能給出次數 $6 + 3 = 9$。答案中若多一個因式 x，次數便會增加一，所以不妨試試對 xy 求導，其中 y

是 $a=2$、$b=4$、$n=7$ 時的函數：

$$y=(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2},\qquad q(x)=4x^3+(8-8)x^2+(4-2)x+(7-8)=4x^3+2x-1.$$

由積法則（product rule），$(xy)'=y+xy'$。把 y 也置於分母 $\sqrt{1+x^2}$ 之上，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)&=\frac{(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^3+2x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{1+x^2}}\Big[(x-2)(1+x^2)+4x^4+2x^2-x\Big].\end{aligned}$$

由於 $(x-2)(1+x^2)=x^3-2x^2+x-2$，括號內的式子是

$$x^3-2x^2+x-2+4x^4+2x^2-x=4x^4+x^3-2,$$

正是我們想要的四次多項式。因此

$$\int\frac{(x-2)^6\mathrm{e}^{4x}(4x^4+x^3-2)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}+C.$$

驗算

- 對每個答案求導再作比較：這是最確實的驗算方法，而每一次都只是再用一次 $(*)$（第 (iii) 部分另加積法則）。
- 快速數次數：對一個多項式次數為 d 的答案求導（不計平方根和指數函數），所得分子的次數是 $d+2$。在 (i) 中，$15+2=14+3$；在 (ii) 中，$23+2=21+4$；在 (iii) 中，$8+2=6+4$。
- 數值上，以森遜法則（Simpson's rule）計算 (iii) 的積分在 $[-1,1.2]$ 上的值，得 $-104.41424\ldots$，與 $F(1.2)-F(-1)$ 吻合至約 13 位有效數字，其中 $F(x)=x(x-2)^7\mathrm{e}^{4x}\sqrt{1+x^2}$；(i) 和 (ii) 同樣吻合得很好。

常見錯誤

- 忘記 n 比被積函數中的冪大一：在 (i) 中，答案含 $(x-4)^{15}$，而不是 $(x-4)^{14}$。
- 在 (ii) 中，試圖直接配對四次多項式，然後斷定無解，而沒有先把因式 $(x-1)$ 併入。
- 漏寫積分常數（constant of integration）。

STEP 之外

這裏的方法是「辨認式積分」（integration by recognition）：猜出原函數（antiderivative）的形狀，對它求導，然後比較係數。把這個想法寫成演算法，就成了 Risch 演算法

（Risch algorithm）；電腦代數系統（computer algebra system）用它來判定一個初等函數（elementary function）是否有初等原函數，若有的話便把它求出來。一個相關的想法，是猜一個帶有未知係數、具指定形式的解，這就是求解線性微分方程（linear differential equation）的待定係數法（method of undetermined coefficients），見 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）。想找更多 STEP 風格的積分，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）。

詳細解答

STEP II 2009，第 8 題

純數學 • 向量幾何

STEP II 2009，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q8

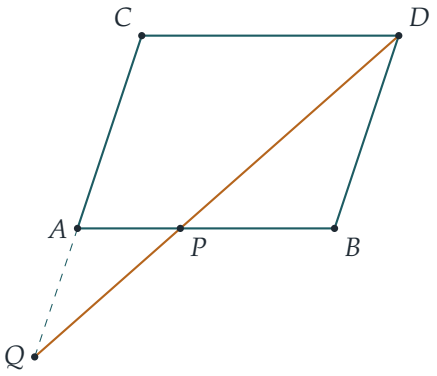
關鍵思路

把每個定義改寫成「從某一點出發，沿着一條邊移動若干倍」。於是 $\mathbf{p}-\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ 及 $\mathbf{q}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$，所以長度 BP 和 CQ 不過是 $\lambda\,AB$ 和 $\mu\,AC$，而長度條件就化為一條十分簡單的方程。要證明三點共線（collinear），只須證明連接它們的其中兩個向量（vector）平行。

解答

圖形

由於 $\mathbf{p}=\mathbf{b}+\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ 且 $0<\lambda<1$，點 P 位於線段 AB 上，嚴格介乎 A 與 B 之間。由於 $\mathbf{q}=\mathbf{c}+\mu(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ 且 $\mu>1$，點 Q 位於直線 CA 上，並在 A 之外：從 C 出發，走到 A，然後繼續向前走。下圖（以 $\lambda=0.6$ 繪畫）亦顯示了下文出現的點 D。



求 μ

由上面的改寫可得

$$BP = |\mathbf{p}-\mathbf{b}| = \lambda|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \lambda\, AB, \qquad CQ = |\mathbf{q}-\mathbf{c}| = \mu|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \mu\, AC,$$

其中用到 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$，才可把它們從模（modulus）中抽出。條件 $CQ \times BP = AB \times AC$ 變成 $\lambda\mu\, AB \cdot AC = AB \cdot AC$。由於 A、B、C 是相異的點，$AB \cdot AC \neq 0$，所以

$$\mu = \frac{1}{\lambda}.$$

這確實滿足 $\mu > 1$，因為 $0 < \lambda < 1$。

定點 D

設 $\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$。我們比較 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{PD}$。首先，

$$\begin{aligned}\mathbf{d}-\mathbf{p} &= -\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\lambda\mathbf{a}-(1-\lambda)\mathbf{b}\\ &= -(1+\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mathbf{c}.\end{aligned}$$

其次，代入 $\mu = 1/\lambda$，

$$\begin{aligned}\mathbf{q}-\mathbf{p} &= \left(\frac{1}{\lambda}-\lambda\right)\mathbf{a}+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{c}-(1-\lambda)\mathbf{b}\\ &= \frac{1-\lambda}{\lambda}\Big[(1+\lambda)\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b}-\mathbf{c}\Big],\end{aligned}$$

其中用到 $\frac{1}{\lambda}-\lambda = \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{\lambda}$ 及 $1-\frac{1}{\lambda} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$。

? **想一想** 怎樣看出這兩個向量平行？

方括號內的式子正好是 $-(\mathbf{d}-\mathbf{p})$。所以

$$\mathbf{q}-\mathbf{p} = -\frac{1-\lambda}{\lambda}(\mathbf{d}-\mathbf{p}), \qquad \text{即} \qquad \mathbf{d} = \mathbf{p} - \frac{\lambda}{1-\lambda}(\mathbf{q}-\mathbf{p}).$$

因為 $\lambda \neq 1$，這個係數是有限的；又因為 Q 不在直線 AB 上，所以 $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$。因此 D 位於直線 PQ 上。向量 $\mathbf{d}$ 只涉及 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$，所以對任何 λ 而言這都是同一點，正如題目所求。由於係數 $-\lambda/(1-\lambda)$ 是負數，P 位於 Q 與 D 之間，與圖中所見一致。

四邊形 $ABDC$

我們有

$$\mathbf{d}-\mathbf{c} = \mathbf{b}-\mathbf{a} \quad \text{及} \quad \mathbf{d}-\mathbf{b} = \mathbf{c}-\mathbf{a},$$

所以 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$。對邊相等且平行，所以 $ABDC$ 是**平行四邊形**（parallelogram），而 D 是與 A 相對的頂點。（由於 A、B、C 不共線，這個平行四邊形並非退化。）

驗算

- 以幾何方法覆核：由於 $BD \parallel AC$，三角形 PAQ 與 PBD 相似，所以 $AQ/BD = AP/BP$。這裏 $AQ = (\mu - 1)AC$、$BD = AC$、$AP = (1-\lambda)AB$ 及 $BP = \lambda AB$，得出 $\mu - 1 = (1-\lambda)/\lambda$，亦即再次得到 $\mu = 1/\lambda$。
- 取 $A = (0,0)$、$B = (4,0)$、$C = (1,3)$ 及 $\lambda = 0.6$（即圖中的情況），可得 $P = (1.6, 0)$、$Q = (-\frac{2}{3}, -2)$ 及 $D = (5,3)$。QP 與 PD 的斜率同為 $\frac{15}{17}$。
- 我們亦測試了 20,000 個隨機抽取的三維三角形。我們以數值方法從長度條件解出 μ，每一次的結果都與 $1/\lambda$ 吻合，誤差在 10^{-13} 以內，而且 P、Q、D 共線。

常見錯誤

- 寫成 $BP = (1-\lambda)AB$。在 $\mathbf{p}$ 中 $\mathbf{b}$ 的係數是 $1-\lambda$，但量度與 B 的距離的，卻是 A 處的權重。
- 沒有檢查頂點的次序，就說 $ABDC$ 是「平行四邊形」。這裏的次序是 $A \to B \to D \to C$，所以 AD 和 BC 是對角線。

STEP 之外

像 $\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}$ 這類係數之和為 1 的式子，稱為*仿射組合*（affine combination）。它們是描述點（而非向量）的自然語言，而共線是一種仿射性質：它不取決於原點的選擇。由此可以進一步認識重心坐標（barycentric coordinates），以及梅涅勞斯定理（Menelaus' theorem）等經典結果；該定理準確描述了一條直線在甚麼情況下與三角形的三條邊相交。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 詳細闡述向量方面的內容，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的向量幾何題。

詳細解答

STEP II 2009，第 9 題

力學 • 質心

> **STEP II 2009，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q9

關鍵思路

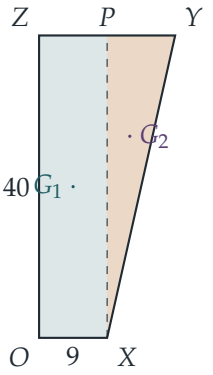
我們需要的每一個距離，都是垂直於同一個固定平面量度的：第 (i) 部分是邊 OZ，第 (ii) 部分是水箱的背面，而背面包含 OZ。因此我們由始至終只需要一個坐標。把每個圖形分割成質心（centre of mass）已知的若干部分（長方形和一個三角形），對該直線或平面取矩（take moments），再除以總質量。水箱的計算方法相同，只是高了一個層次：它的組成部分是兩塊梯形（trapezium）和三塊長方形的金屬薄片，然後再加上一塊液體。

解答

第 (i) 部分

取 O 為原點，x 軸沿 OX，y 軸沿 OZ。於是 $X = (9, 0)$，$Z = (0, 40)$，而且由於 YZ 平行於 OX 且長度為 18，故 $Y = (18, 40)$。驗算一下：$XY^2 = 9^2 + 40^2 = 1681 = 41^2$，與題目相符。與 OZ 的距離就是 x 坐標。

由 X 作一條平行於 OZ 的直線，與 ZY 相交於 $P = (9, 40)$。這條線把薄片（lamina）分割成長方形 $OXPZ$ 和直角三角形 XYP。



設薄片每 cm^2 的質量為 1，則質量等於面積。

- 長方形 $OXPZ$：面積為 $9 \times 40 = 360$，中心 G_1 位於 $x = 4.5$。
- 三角形 XYP：面積為 $\frac{1}{2} \times 9 \times 40 = 180$。均勻（uniform）三角形的質心位於三個頂點的平均位置，所以 G_2 的 $x = \frac{1}{3}(9 + 18 + 9) = 12$。

整塊薄片的面積為 540。對 OZ 取矩，

$$540\,\bar{x} = 360 \times 4.5 + 180 \times 12 = 1620 + 2160 = 3780,$$

所以 $\bar{x} = 7$。質心與 OZ 的距離為 7 cm，正如所求。

第 (ii) 部分

現在設金屬薄片每 cm^2 的質量為 1。背面 $OTWZ$ 位於平面 $x = 0$ 上，而由於闊度 d 的方向垂直於兩個端面，水箱上每一點的 x 坐標都與第 (i) 部分相同。因此我們對背面取矩。每個長方形的面都是均勻的，所以其質心位於其中心，而該中心的 x 坐標與梯形對應邊的中點相同。

組成部分	面積（cm^2）	中心的 x（cm）	矩
兩個端面	$2 \times 540 = 1080$	7	7560
底面 $OXUT$	$9d$	4.5	$40.5d$
背面 $OTWZ$	$40d$	0	0
正面 $XUVY$	$41d$	$\frac{1}{2}(9 + 18) = 13.5$	$553.5d$
總計	$1080 + 90d$		$7560 + 594d$

? **想一想** 傾斜的正面，中心在哪裏？

正面是一個長方形，其中一對邊是 XU 和 YV，分別位於 $x = 9$ 和 $x = 18$。它的中心在兩者的正中間，即 $x = 13.5$。計算它的面積時，用的是斜邊長度 $XY = 41$，而不是水平闊度 9。

所以空水箱的

$$\bar{x} = \frac{7560 + 594d}{1080 + 90d}.$$

每個係數都可被 18 整除：$7560 = 18 \times 420$，$594 = 18 \times 33$，$1080 = 18 \times 60$，$90 = 18 \times 5$。因此

$$\bar{x} = \frac{420 + 33d}{60 + 5d} = \frac{3(140 + 11d)}{5(12 + d)} \text{ cm},$$

這就是所求的與背面的距離。

注滿的水箱

液體注滿一個稜柱（prism），其橫切面（cross-section）是第 (i) 部分的梯形，長度為 d。它的體積是 $540d$，所以按我們的單位，它的質量是 $540dk$（每單位體積的質量是金屬每單位面積質量的 k 倍，而後者我們已取為 1）。每個橫切面都是同一個梯形，所以液體的質心位於 $x = 7$，與第 (i) 部分相同。

當 $d = 20$ 時，水箱的質量為 $1080 + 1800 = 2880$，對背面的矩為 $7560 + 594 \times 20 = 19440$。液體的質量為 $10800k$，矩為 $75600k$。所以注滿的水箱有

$$\bar{x} = \frac{19440 + 75600k}{2880 + 10800k} = \frac{27 + 105k}{4 + 15k} \text{ cm},$$

其中分子和分母已同時除以 720。這就是注滿的水箱的質心與背面的距離。

驗算

- 當 $k = 0$（沒有液體，或液體的密度可忽略不計）時，答案是 $\frac{27}{4} = 6.75$，而空水箱的公式在 $d = 20$ 時同樣得出 $\frac{3\times360}{5\times32} = 6.75$。
- 當 $k \to \infty$ 時，液體佔主導地位，$\bar{x} \to \frac{105}{15} = 7$，即液體本身的質心。
- 答案總是介乎 6.75 與 7 之間，因為它是兩者的加權平均（weighted average），理應如此。例如 $k = 1$ 時得出 $\frac{132}{19} \approx 6.947$。
- 數值驗算（以鞋帶公式（shoelace formula）求梯形的形心（centroid）、以蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算得出 $\bar{x} \approx 6.9994$，以及用精確分數計算兩條水箱公式）與以上所有結果吻合。

常見錯誤

- 計算正面的面積時用了 $9d$ 而不是 $41d$：這個面是傾斜的，所以它的闊度是斜邊長度 XY。
- 因為背面的矩為零而把它漏掉。它仍然為總質量貢獻 $40d$。
- 只計算一個端面，或者給水箱加上蓋。

STEP 之外

這裏我們把圖形分割成中心已知的若干部分，從而求出質心。在大學裏，薄片或立體的質心是用積分來定義的，例如 $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint x\,\rho\,\mathrm{d}A$，而「分割成若干部分」的方法，不過是「把區域切成幾部分後，積分可以逐部分相加」這個事實而已。同樣的積分還可給出轉動慣量（moment of inertia），它決定物體如何轉動。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這兩個概念都有嚴謹細緻的闡述。

詳細解答

STEP II 2009，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP II 2009，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q10

關鍵思路

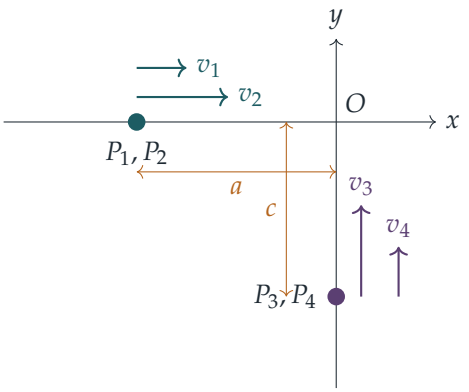
全題共有四次碰撞（collision），但只有頭兩次需要用到力學：它們決定了碰撞剛結束時的四個速率。其餘全是時間上的計算。兩個質點（particle）沿不同的軸運動而「在 O 碰撞」，其實就是在同一瞬間到達 O，所以其後每一次碰撞都給出一條形如「距離 / 速率 = 距離 / 速率」的方程。把其中一條時間方程除以另一條，未知的距離便會消去，剩下一個關於質量的條件。

解答

設定

我們把四件物體視為在光滑軸上運動的質點，所以在兩次碰撞之間，每個質點都以恆定速度運動。設 P_2 起初位於負 x 軸上與 O 相距 a 之處，P_3 起初位於負 y 軸上與 O 相距 c 之處。我們須證明 $a = c$。

取 $t = 0$ 為頭兩次碰撞（同時發生）的一刻。這兩次碰撞發生在 P_2 和 P_3 原本所在的位置，所以在 $t = 0$ 時，質點 P_1 和 P_2 與 O 的距離都是 a，而 P_3 和 P_4 與 O 的距離都是 c。



頭兩次碰撞

假設一個質量為 M、以速率 u 運動的質點正面撞向一個質量為 m 的靜止質點，恢復系數（coefficient of restitution）為 e，而碰撞後兩者沿原來運動方向的速度分別為 V 和 w。由動量守恆（conservation of momentum）和牛頓實驗定律（Newton's experimental law）可得

$$Mu = MV + mw, \qquad w - V = eu,$$

所以

$$w = \frac{M(1+e)u}{M+m}, \qquad V = \frac{(M-em)u}{M+m}.$$

把這個結果應用於 P_1 撞向 P_2，以及 P_4 撞向 P_3，可知在 $t = 0$ 剛過後，各質點朝向 O 的速度為

$$v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1 + m_2}, \qquad v_2 = \frac{m_1(1+e)u}{m_1 + m_2},$$
$$v_4 = \frac{(m_4 - em_3)u}{m_3 + m_4}, \qquad v_3 = \frac{m_4(1+e)u}{m_3 + m_4}.$$

顯然 $v_2, v_3 > 0$。由於 P_1 和 P_4 其後確實到達 O，它們必定仍在朝着它運動，所以同樣有 $v_1 > 0$ 和 $v_4 > 0$。

利用其後的碰撞

想一想 兩個質點分別在互相垂直的軸上，怎樣才能「碰撞」？

兩條軸唯一的公共點是 O。所以「P_2 和 P_3 在 O 碰撞」的意思不過是它們同時到達 O，P_1 和 P_4 亦然。由 $t = 0$ 至到達 O 為止，每個質點都以恆定速率運動（題目告訴我們，任何

一個質點所涉及的下一次碰撞都在 O 發生），所以到達時間就是距離除以速率：

$$\frac{a}{v_2} = \frac{c}{v_3} \qquad (P_2 \text{ 與} P_3 \text{ 相遇於} O), \tag{1}$$

$$\frac{a}{v_1} = \frac{c}{v_4} \qquad (P_1 \text{ 與} P_4 \text{ 相遇於} O). \tag{2}$$

把 (1) 除以 (2)，距離便會約去：

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}.$$

根據上面的公式，每個比之中的因子 u 和 $m_1 + m_2$（或 $m_3 + m_4$）都會約去，所以上式即是

$$\frac{m_1 - em_2}{m_1(1+e)} = \frac{m_4 - em_3}{m_4(1+e)},$$

兩邊同乘以 $m_1 m_4(1+e)$，得

$$m_4(m_1 - em_2) = m_1(m_4 - em_3), \qquad \text{所以} \qquad e\,m_2 m_4 = e\,m_1 m_3.$$

由於 $e > 0$，我們可以除以 e，於是 $m_1 m_3 = m_2 m_4$，即

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_4}{m_3} = k, \text{ 姑且如此記之。}$$

現在回到 v_2 和 v_3。把分子和分母分別同除以 m_2 和 m_3，得

$$v_2 = \frac{k(1+e)u}{k+1} = v_3.$$

所以 P_2 和 P_3 在頭兩次碰撞後以相等的速率離開，於是由 (1) 得 $a = c$。因此 P_2 和 P_3 起初與 O 等距，這正是所要證明的。

驗算

- 取 $m_1 = 2$、$m_2 = 1$、$m_3 = 3$、$m_4 = 6$（所以 $k = 2$）、$e = \frac{1}{2}$、$u = 1$ 及 $a = c = 1.7$。那麼 $v_2 = v_3 = 1$ 而 $v_1 = v_4 = \frac{1}{2}$：P_2 和 P_3 在 $t = 1.7$ 時一同到達 O，而 P_1 和 P_4 在 $t = 3.4$ 時一同到達，正如題目所說是在較後的時間。逐步模擬的結果與此吻合。
- 留意 $v_2 - v_1 = eu > 0$，所以 P_1 確實在 P_2 之後才到達，與「一段時間之後」相符。
- 若 $e = 0$，這個論證便會失效，而這是理所當然的：此時 $v_1 = v_2$ 且 $v_3 = v_4$，所以 (2) 與 (1) 完全相同，任何滿足 $a/c = v_2/v_3$ 的 a 和 c 都可以。這正是題目堅持 $e > 0$ 的原因。

常見錯誤

- 從 P_1 的起點量度它的路程。在 $t = 0$ 之後，它是從 P_2 原本所在的位置出發，與 O 相距 a，這就是為甚麼同一個 a 會同時出現在 (1) 和 (2) 之中。

- 不加說明便除以 e。$e = 0$ 的情況確實有所不同。
- 試圖分析 P_2 與 P_3 在 O 的碰撞。我們完全不需要知道這次碰撞的結果，只需要知道它們同時到達那裏。

STEP 之外

質量條件 $m_1 m_3 = m_2 m_4$ 說明這兩次碰撞是彼此按比例縮放的翻版：正面碰撞後的速度只取決於質量比和 e，這讓我們初次窺見量綱分析（dimensional analysis）與相似性（similarity）。在大學裏，碰撞問題放在質心參考系（centre-of-mass frame）中處理最為簡潔，在那裏恢復系數只是把相對速度（relative velocity）按比例縮放。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種方式闡述動量與碰撞。

詳細解答

STEP II 2009，第 11 題

力學 • 功率與阻力

STEP II 2009，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q11

關鍵思路

把整列火車視為一個質量為 $(n+1)M$、總阻力為 $(n+1)R$ 的物體。在功率（power）為 P 時，速率為 v 時的驅動力是 P/v，所以由牛頓第二定律（Newton's second law）可立即得出加速度。要求出達到某個速率所需的時間，可把加速度寫成 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，分離變數（separate the variables）後積分。最後一部分是能量收支：引擎所作的功轉化為動能（kinetic energy），以及克服阻力所作的功。

解答

把引擎和各節車卡看成一起運動的質點（particle）（車鉤保持拉緊且為剛性），於是整列火車是單一物體。設

$$m = (n+1)M, \qquad k = (n+1)R$$

分別為它的總質量和總阻力。

加速度

功率等於力乘以速率，所以在最大功率下、速率為 v 時，引擎的牽引力（tractive force）為 P/v。沿路軌方向分解，對整列火車應用牛頓第二定律，得

$$ma = \frac{P}{v} - k, \qquad \text{所以} \qquad a = \frac{P-(n+1)Rv}{(n+1)Mv}.$$

達到速率 V 所需的時間

設 $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，然後分離變數：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{mv}{P - kv}, \qquad T = m\int_0^V \frac{v}{P-kv}\,\mathrm{d}v.$$

要計算這個積分，可把分子用分母表示，即 $v = \frac{1}{k}\big(P - (P - kv)\big)$，從而把分式拆開：

$$\frac{v}{P-kv} = -\frac{1}{k} + \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{P-kv}.$$

因此

$$T = m\Big[-\frac{v}{k} - \frac{P}{k^2}\ln(P-kv)\Big]_0^V = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln\Big(1 - \frac{kV}{P}\Big).$$

由於 $m/k = M/R$ 及 $m/k^2 = M/\big((n+1)R^2\big)$，

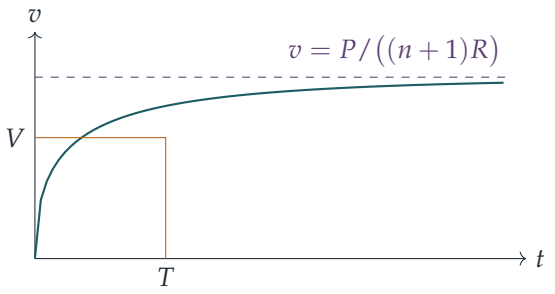
$$T = -\frac{MV}{R} - \frac{MP}{(n+1)R^2}\ln\Big(1 - \frac{(n+1)RV}{P}\Big).$$

? **想一想** 為甚麼 P 必須大於 $(n+1)RV$，而這不僅僅是令對數有意義的條件？

從物理上看，當 $v < P/k$ 時，加速度 $(P-kv)/(mv)$ 為正，而在 $v = P/k$ 時加速度會變為零。火車由 $v = 0 < P/k$ 出發並加速，但隨着 v 趨近 P/k，加速度逐漸消失。公式顯示火車永遠到不了這個速率：當 $V \to P/k$（由下方趨近）時，$\ln(1 - kV/P) \to -\infty$，所以 $T \to \infty$。因此 P/k 是終端速率（terminal speed），火車會不斷趨近它，卻無法在有限時間內達到，而等於或高於它的速率則永遠達不到。所以，只有當 $V < P/k$ 時才能達到速率 V，即

$$P > (n+1)RV,$$

這正是所需的結果。（等價地說，$P \le kV$ 意味着引擎即使全力輸出，也無法在速率 V 時抵消阻力。）



（此草圖只屬定性描繪：起初驅動力 P/v 很大，速率急升，其後逐漸趨平，接近終端速率。）

第 (i) 部分

設 $x = \dfrac{(n+1)RV}{P} = \dfrac{kV}{P}$，它是一個很小的量。於是 $\ln(1-x) \approx -x - \frac{1}{2}x^2$，再利用 $V = Px/k$，得

$$T = -\frac{mV}{k} - \frac{mP}{k^2}\ln(1-x) \approx -\frac{mP}{k^2}\,x + \frac{mP}{k^2}\left(x + \tfrac{1}{2}x^2\right) = \frac{mP}{2k^2}\,x^2 = \frac{mP}{2k^2}\cdot\frac{k^2V^2}{P^2} = \frac{mV^2}{2P}.$$

一階項剛好完全抵消，這就是我們需要 x^2 項的原因。因此

$$PT \approx \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2.$$

詮釋。PT 是引擎在時間 T 內所作的功，而 $\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ 是火車所獲得的動能。所以當 $(n+1)RV$ 遠小於 P 時（阻力乘以速率遠小於引擎的功率），引擎所作的功幾乎全部轉化為動能，只有極少耗於阻力：火車的表現就如同沒有阻力一樣。

第 (ii) 部分

在時間 T 內，引擎以恆定功率 P 運作，所作的功為 PT。在距離 X 內，恆定的總阻力 $(n+1)R$ 所作的功為 $-(n+1)RX$；換言之，火車克服阻力作了 $(n+1)RX$ 的功。火車由靜止出發，最後速率為 V，而路軌是水平的，所以勢能（potential energy）沒有改變。根據功能原理（work–energy principle），

$$PT = \tfrac{1}{2}(n+1)MV^2 + (n+1)RX.$$

移項整理，得

$$X = \frac{2PT - (n+1)MV^2}{2(n+1)R},$$

這正是所需的結果。這與第 (i) 部分吻合：若阻力可以忽略，$(n+1)RX$ 一項便會消失，剩下 $PT \approx \frac{1}{2}(n+1)MV^2$。

驗算

- 取 $n = 3$、$M = 2$、$R = 1$、$P = 40$、$V = 6$（於是 $(n+1)RV = 24 < 40$）。公式給出 $T \approx 6.3258$，繼而 $X \approx 27.258$。以數值方法把運動方程逐步向前推算，所得數值準確至四位有效數字都相同。
- 量綱（dimensions）：MV/R 是（質量）（速率）/（力），即時間，MP/R^2 亦然；對數則是無量綱的。
- 當 $V \to P/\big((n+1)R\big)$ 時，T 無止境地增大（以上述數值計算，在終端速率的 90%、99%、99.9% 時，$T \approx 28$、72、118），這印證了該條件。
- 當 x 很小時，比值 $PT\big/\frac{1}{2}(n+1)MV^2$ 約為 $1 + \frac{2}{3}x$，趨向 1，與第 (i) 部分的預測一致。

常見錯誤

- 只用引擎本身的質量和阻力，而不是整列火車的：引擎要拉動全部 $n+1$ 節車輛。
- 題目要求的是時間，卻寫成 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，或使用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。這條路得出的是距離，而不是時間。
- 在第 (i) 部分只把對數展開至一階：x 項互相抵消，結果得到 $T \approx 0$，答案就此丟失。

STEP 之外

方程 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = P/v - k$ 是一階非線性常微分方程（ODE），而且恰好是可分離變數的；終端速率 P/k 則是一個穩定平衡點（stable equilibrium），解會不斷趨近它，卻無法在有限時間內到達。這種現象在光滑常微分方程的平衡點附近十分典型，由解的唯一性（uniqueness of solutions）即可看出。第 (ii) 部分就是功能定理（work–energy theorem），它在大學力學中會成為貫穿全局的核心原理。想進一步了解，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門），至於常微分方程方面，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

詳細解答

STEP II 2009，第 12 題

概率與統計 • 半正態分佈

> **STEP II 2009，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s2-q12

關鍵思路

指數 $-2x^2$ 其實是一個喬裝了的正態分佈密度函數（normal density）。把它寫成 $-2x^2 = -\dfrac{x^2}{2\sigma^2}$，便得 $\sigma = \frac{1}{2}$，所以 f 恰好是 $Y \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{4})$ 的密度函數的兩倍，並在 0 處截斷。換句話說，X 與 $|Y|$ 有相同的分佈。一旦看出這一點，歸一化常數（normalising constant）、$\mathrm{E}(X^2)$ 和中位數（median）全都可以直接由正態分佈的性質得出。只有 $\mathrm{E}(X)$ 需要計算一個（非常容易的）積分。

解答

以下一律設 $Y \sim \mathrm{N}(0, \frac{1}{4})$ 及 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$，於是 Y 與 $\frac{1}{2}Z$ 有相同的分佈，而它的密度函數為

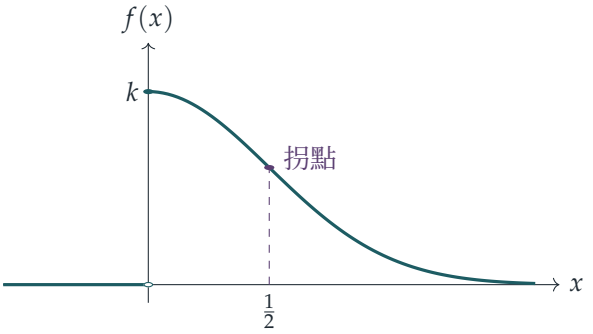
$$g(y) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/(2\cdot\frac{1}{4})} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-2y^2}.$$

第 (i) 部分

當 $x \geq 0$ 時，$f'(x) = -4kx\,\mathrm{e}^{-2x^2} \leq 0$，所以 f 由 $x = 0$ 處的最大值 k 開始遞減，而該處的斜率為零。另外

$$f''(x) = k(16x^2 - 4)\,\mathrm{e}^{-2x^2},$$

它在 $x = \frac{1}{2}$ 處變號，所以在 $x = \frac{1}{2}$ 處有一個拐點（point of inflection）。當 $x \to \infty$ 時，$f(x) \to 0$，而且趨近得非常快；當 $x < 0$ 時，$f(x) = 0$。圖像是鐘形曲線的右半部分（由第 (ii) 部分可知 $k \approx 1.60$），並在 $x = 0$ 處由 0 跳升至 k。



第 (ii) 部分

總概率必須等於 1。由於 g 關於 0 對稱，而且在整條實數線上的積分為 1，所以它在 $[0,\infty)$ 上的積分為 $\frac{1}{2}$：

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

因此 $k\cdot\dfrac{\sqrt{2\pi}}{4} = 1$，得

$$k = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 1.596.$$

留意當 $x \geq 0$ 時 $f(x) = 2g(x)$，這印證了 X 的分佈與 $|Y|$ 相同。

第 (iii) 部分

求平均值時，因子 x 令積分變得十分簡單，因為 $x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$ 是 e^{-2x^2} 的導數的常數倍：

$$\mathrm{E}(X) = k\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = k\Big[-\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x^2}\Big]_0^\infty = \frac{k}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.399.$$

? **想一想** 怎樣才能不用冗長的分部積分法（integration by parts）而求出 $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$？

再次利用正態分佈。函數 $x^2g(x)$ 是偶函數（even function），所以

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty x^2\cdot 2g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty x^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{4},$$

因為 $\mathrm{E}(Y) = 0$。（取 $u = x$、$\mathrm{d}v = x\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$ 作分部積分，亦得相同結果：$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4k}$。）因此

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi-2}{4\pi} \approx 0.0908.$$

第 (iv) 部分

中位數 m 滿足 $\mathrm{P}(X \le m) = \frac{1}{2}$。由於 X 的分佈與 $|Y|$ 相同，而 Y 的分佈與 $\frac{1}{2}Z$ 相同，

$$\mathrm{P}(X \le m) = \mathrm{P}(|Z| \le 2m) = 2\Phi(2m) - 1,$$

這裏用到了標準正態分佈（standard normal distribution）的對稱性。（直接計算：$\mathrm{P}(X \le m) = \int_0^m 2g(x)\,\mathrm{d}x = 2\big(\mathrm{P}(Y \le m) - \frac{1}{2}\big)$。）令上式等於 $\frac{1}{2}$，得

$$\Phi(2m) = \frac{3}{4}.$$

查表得 $\Phi^{-1}(0.75) = 0.6745$，所以 $2m = 0.6745$，而

$$m \approx 0.337 \quad \text{（準確至三位有效數字）}.$$

驗算

取 $k = 2\sqrt{2/\pi}$，以數值方法（辛普森法則，Simpson's rule）在 $[0, 10]$ 上對 f 積分，得總概率為 1.0000、$\mathrm{E}(X) = 0.39894$ 及 $\mathrm{Var}(X) = 0.090845$，與 $1/\sqrt{2\pi}$ 和 $(\pi - 2)/(4\pi)$ 吻合。以數值方法解 $\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，得 $m = 0.33724$。以 200 000 個標準差（standard deviation）為 $\frac{1}{2}$ 的正態隨機數模擬 $|Y|$，得平均值 0.399 及方差（variance）0.091，並有 50.0% 的數值小於 0.337。合理性檢查：中位數 0.337 小於平均值 0.399，對於一個右尾較長的分佈來說，理應如此。

常見錯誤

- 從指數誤取 $\sigma^2 = 2$ 或 $\sigma = \frac{1}{4}$：應把 $2x^2$ 與 $x^2/(2\sigma^2)$ 對照，得 $\sigma^2 = \frac{1}{4}$。
- 忘記因子 2：在半條實數線上，正態密度函數的積分只有 $\frac{1}{2}$。
- 解 $\Phi(2m) = \frac{1}{2}$，結果得出 $m = 0$。X 在 m 以下的那一半概率，對應的是 Y 中間的那一半概率，所以條件應為 $\Phi(2m) = \frac{3}{4}$。

STEP 之外

X 是一個半正態（half-normal）隨機變量（random variable），而當 Y 服從正態分佈時，$|Y|$ 就是隨機變量的變換（transformation of a random variable）最簡單的例子。一般而言，若 $X = h(Y)$，則 X 的密度函數可由 Y 的密度函數對所有原像（preimage）求和而得，這正是此處因子 2 的由來。同樣的想法可以證明 Z^2 服從自由度（degree of freedom）為一的卡方分佈（chi-squared distribution），而這正是許多統計學內容的起點。Grimmett

and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率入門教材）對隨機變量的函數有仔細的論述。

詳細解答

STEP II 2009，第 13 題

概率與統計 • 二項分佈的期望成本

STEP II 2009，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s2-q13

關鍵思路

發生故障的引擎數目服從二項分佈（binomial distribution），所以維修費用是一個二項隨機變量（random variable）的簡單函數，而其期望值（expectation）只是一個簡短的和。要得出簡潔的形式 $(*)$，竅門是不要把「全部更換」的情況逐一相加：改用補集（complement），然後利用因式分解 $1-q^n = p(1+q+\cdots+q^{n-1})$ 抽出因子 p。

解答

我們按照題目的原意，假設各引擎是否發生故障互相獨立（independent），每個引擎發生故障的概率均為 p，並記 $q = 1-p$。所有費用一律以 K 為單位計算，直到最後為止。

Andover 型

設 X 為 Andover 型引擎中發生故障的數目，則 $X \sim \mathrm{B}(4, p)$；又設 C_A 為維修費用。於是

$$C_A = \begin{cases} 0 & X = 0, \\ K & X = 1, \\ 4K & X \geq 2. \end{cases}$$

現在 $\mathrm{P}(X=0) = q^4$ 及 $\mathrm{P}(X=1) = 4pq^3$，所以 $\mathrm{P}(X \geq 2) = 1 - q^4 - 4pq^3$。因此

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(C_A) &= K \cdot 4pq^3 + 4K\left(1 - q^4 - 4pq^3\right) \\ &= 4K(1-q^4) - 12Kpq^3. \end{aligned}$$

由於 $1-q^4=(1-q)(1+q+q^2+q^3)=p(1+q+q^2+q^3)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_A) &= 4Kp\big(1+q+q^2+q^3\big)-4Kp\cdot 3q^3\\ &= 4Kp\big(1+q+q^2-2q^3\big),\end{aligned}$$

這正是所要求的 $(*)$。

Basingstoke 型

設 $Y\sim \mathrm{B}(6,p)$ 為 Basingstoke 型引擎中發生故障的數目，C_B 為維修費用。則當 $Y\le 2$ 時 $C_B=YK$，而當 $Y\ge 3$ 時 $C_B=6K$。由

$$\mathrm{P}(Y=0)=q^6,\qquad \mathrm{P}(Y=1)=6pq^5,\qquad \mathrm{P}(Y=2)=15p^2q^4,$$

可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(C_B) &= K\cdot 6pq^5+2K\cdot 15p^2q^4+6K\big(1-q^6-6pq^5-15p^2q^4\big)\\ &= 6K(1-q^6)-30Kpq^5-60Kp^2q^4.\end{aligned}$$

利用 $1-q^6=p(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5)$ 並抽出 $6Kp$，

$$\mathrm{E}(C_B)=6Kp\big(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5-5q^5-10pq^4\big).$$

> **想一想** 括號內仍然有一個 p。怎樣才能把它化成「與 $(*)$ 相似的形式」？

形式 $(*)$ 是因子 p 乘以一個只含 q 的多項式（polynomial），所以我們把餘下的 p 換成 $1-q$：$10pq^4=10q^4-10q^5$。合併各項後，

$$\boxed{\mathrm{E}(C_B)=6Kp\big(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5\big).}$$

Andover 型的費用何時是 Basingstoke 型費用的 $\frac{2}{3}$？

我們需要 $\mathrm{E}(C_A)=\frac{2}{3}\mathrm{E}(C_B)$，即

$$4Kp\big(1+q+q^2-2q^3\big)=4Kp\big(1+q+q^2+q^3-9q^4+6q^5\big).$$

兩邊都有因子 $4Kp$，而 $K>0$，所以此式成立當且僅當 $p=0$ 或

$$-2q^3=q^3-9q^4+6q^5 \iff 3q^3-9q^4+6q^5=0 \iff 3q^3(1-q)(1-2q)=0.$$

所以 $q=0$、$q=1$ 或 $q=\frac{1}{2}$，即 $p=1$、$p=0$ 或 $p=\frac{1}{2}$。三個值都在 $[0,1]$ 之內，故所求的值為

$$p=0,\qquad p=\tfrac{1}{2},\qquad p=1.$$

$p=0$ 這個值最乏味：引擎永不發生故障，兩個期望費用都是零。當 $p=1$ 時，每個引擎都發生故障，費用分別為 $4K$ 和 $6K$。真正有趣的值是 $p=\frac{1}{2}$。

驗算

當 $p = \frac{1}{2}$ 時，$(*)$ 給出 $\mathrm{E}(C_A) = 2K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 3K$，而 Basingstoke 型的公式給出 $\mathrm{E}(C_B) = 3K\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{9}{16} + \frac{6}{32}\right) = \frac{9}{2}K$，果然 $3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}$。我們亦取了 200 個有理數 p 值，把兩條公式與直接按二項分佈逐一列舉所得的結果作精確比對，並以模擬方式驗證：當 $p = 0.3$ 時，2×10^5 次模擬發射所得的平均費用為 $1.811K$ 和 $2.483K$，而公式所得的則是 $1.805K$ 和 $2.485K$。

常見錯誤

- 當有兩個或以上 Andover 型引擎發生故障時，把費用算作 XK 而不是 $4K$：一旦超過門檻，所有引擎都要更換，包括完好的那些。
- 在 Basingstoke 型的括號內留下一個 p，以致答案不符合題目要求的形式。
- 在最後的方程中除以 p 而漏掉 $p = 0$，或除以 q^3 而漏掉 $p = 1$。

STEP 之外

這是在門檻策略（threshold policy）下計算期望費用的一個小例子，而這類計算正是可靠性理論（reliability theory）和運籌學（operational research）的家常便飯：管理者要選定門檻，在更換完好零件的費用與更頻密維修的費用之間取得平衡。我們所用的尾和（tail sum）處理手法，即把 $\mathrm{P}(X \geq k)$ 寫成一減去首幾項，與得出非負整數值變量的公式 $\mathrm{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathrm{P}(X \geq k)$ 背後的想法如出一轍。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對這些想法有嚴謹細緻的闡述。

詳細解答

STEP III 2009，第 1 題

純數學 • 圓的坐標幾何

STEP III 2009，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

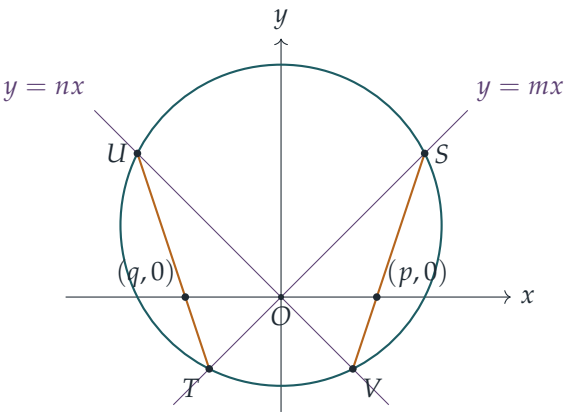
step.maths.org/questions/09-s3-q1

關鍵思路

四個點全部位於通過原點的直線上，所以每個點都可以用一個數來描述：它的 x 坐標。把圓與直線 $y = mx$ 相交，會得到一條二次方程（quadratic），它的兩個根就是 s 和 t；我們始終不需要求出這兩個根本身，只需要它們的和與積。最後的恆等式（identity），來自把 $p + q$ 的分子適當分組，使當中只出現 st、$s + t$、uv 和 $u + v$。

解答

在整個解答中，S 和 T 位於直線 $y = mx$ 上，U 和 V 位於 $y = nx$ 上，兩條直線都通過原點 O。我們假設 $m \neq n$（否則四個點全在同一條直線上），並假設 SV 和 UT 都不是水平線，使它們確實與 $y = 0$ 相交；即 $ms \neq nv$ 及 $mt \neq nu$。



截距 p 和 q

通過 $S(s, ms)$ 和 $V(v, nv)$ 的直線，斜率（gradient）為 $\dfrac{nv - ms}{v - s}$，所以線上的點滿足

$$y - ms = \frac{nv - ms}{v - s}(x - s).$$

代入 $y = 0$ 和 $x = p$，得 $p - s = -\dfrac{ms(v - s)}{nv - ms}$，所以

$$p = \frac{s(nv - ms) - ms(v - s)}{nv - ms} = \frac{nsv - msv}{nv - ms} = \frac{(m - n)sv}{ms - nv},$$

這正是所要求的結果。（若 $v = s$，直線 SV 是鉛垂線，所以 $p = s$；公式仍然給出 $\frac{(m-n)s^2}{(m-n)s} = s$。）

直線 UT 把 $y = mx$ 上的 $T(t, mt)$ 與 $y = nx$ 上的 $U(u, nu)$ 連起來，情況與 SV 連接 S 和 V 完全一樣。把 s 換成 t，v 換成 u，得

$$q = \frac{(m - n)tu}{mt - nu}.$$

s 和 t 所滿足的二次方程

點 (x, mx) 位於 $x^2 + (y - c)^2 = r^2$ 上，當且僅當 $x^2 + (mx - c)^2 = r^2$，即

$$(1 + m^2)x^2 - 2mc\,x + c^2 - r^2 = 0.$$

s 和 t 都滿足這條方程。取 S 和 T 為該直線與圓的兩個（相異）交點，則 s 和 t 就是方程的兩個根，所以根據根與係數的關係（relations between roots and coefficients），

$$st = \frac{c^2 - r^2}{1 + m^2}, \qquad s + t = \frac{2mc}{1 + m^2}.$$

證明 $p + q = 0$

對直線 $y = nx$ 作同樣的論證，可知 u 和 v 是 $(1 + n^2)x^2 - 2nc\,x + c^2 - r^2 = 0$ 的兩個根，所以

$$uv = \frac{c^2 - r^2}{1 + n^2}, \qquad u + v = \frac{2nc}{1 + n^2}.$$

現在把兩個截距通分相加：

$$p + q = (m - n)\,\frac{sv(mt - nu) + tu(ms - nv)}{(ms - nv)(mt - nu)}.$$

? **想一想** 分子同時涉及 s, t, u, v 四個量，我們該怎樣把它馴服？

把它展開，再按係數 m 或 n 把各項配對：

$$\begin{aligned} sv(mt-nu)+tu(ms-nv) &= m\,stv - n\,suv + m\,stu - n\,tuv \\ &= m\,st(u+v) - n\,uv(s+t). \end{aligned}$$

現在每一項都是我們已知的對稱函數（symmetric function）。代入後，

$$\begin{aligned} m\,st(u+v) - n\,uv(s+t) &= m\cdot\frac{c^2-r^2}{1+m^2}\cdot\frac{2nc}{1+n^2} - n\cdot\frac{c^2-r^2}{1+n^2}\cdot\frac{2mc}{1+m^2} \\ &= \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} - \frac{2mnc(c^2-r^2)}{(1+m^2)(1+n^2)} = 0. \end{aligned}$$

根據我們的假設，分母 $(ms-nv)(mt-nu)$ 不等於零，所以 $p+q=0$，證明完畢。

驗算

如圖中所示，取 $c=1$、$r^2=5$、$m=1$、$n=-1$。兩條二次方程分別是 $x^2-x-2=0$ 和 $x^2+x-2=0$，所以 $s=2$、$t=-1$，而 $u=-2$、$v=1$。於是 $st=-2=\frac{1-5}{2}$，$s+t=1=\frac{2}{2}$，與預期一致。由 $S(2,2)$ 到 $V(1,-1)$ 的直線斜率為 3，與 $y=0$ 相交於 $p=\frac{4}{3}$，與 $\frac{2\cdot2\cdot1}{2+1}$ 吻合；由 $U(-2,2)$ 到 $T(-1,-1)$ 的直線則相交於 $q=-\frac{4}{3}$。以電腦隨機選取 16 000 組圓和直線作檢驗，每一次 $|p+q|$ 都小於 10^{-12}。

常見錯誤

- 把點配錯：q 來自 U 和 T，所以應作的代換是 $s\to t$、$v\to u$；若改為對調 $s\leftrightarrow v$，得到的仍然是 p。
- 試圖直接解二次方程，把 s,t,u,v 明確求出來。平方根會令代數運算無從入手；正是 $m\,st(u+v)-n\,uv(s+t)$ 這個分組，才令整個式子化簡為零。

STEP 之外

直線 $y=0$ 與圓相交所成的弦（chord），中點是 O，因為圓心 $(0,c)$ 在 y 軸上。所以這道題其實證明了蝴蝶定理（butterfly theorem）：若兩條弦 ST 和 UV 都通過某條弦的中點 O，則 SV 和 UT 與該弦的交點到 O 的距離相等。我們的證明從沒用過 $c^2<r^2$，所以即使 O 在圓外，證明依然成立；這暗示了這個結果真正的歸宿是射影幾何（projective geometry），在那裏它是笛沙格（Desargues）對合定理（involution theorem）的一個特例。Coxeter 與 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《幾何學的新探索》）是進一步閱讀的上佳之選。

詳細解答

STEP III 2009，第 2 題

純數學 • 冪級數解

> **STEP III 2009，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q2

關鍵思路

若 y 是冪級數（power series），則 y'、y'' 和 x^3y 也是冪級數，而微分方程（differential equation）所說的，就是把它們合併而成的一個冪級數恆等於零。一個對所有 x 都等於零的冪級數，每個係數（coefficient）都必定是零，於是微分方程就化為一連串聯繫各個 a_n 的簡單方程。真正要下工夫的是整理工作：在比較係數之前，先把求和指標平移，使每個級數都以 x 的同一個冪寫出。

解答

第 (i) 部分

逐項求導（term-by-term differentiation）（題目已說明所有級數均收斂，所以我們視此做法為可行），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_n x^n\right) = n a_n x^{n-1}.$$

$n = 0$ 的一項 a_0 是常數，其導數為 0，所以求和由 $n = 1$ 開始：

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

這就是所要求的結果。再做一次，y' 中 $n = 1$ 的一項 a_1 是常數，所以

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

逐項寫出至 a_3：

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$
$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \cdots.$$

第 (ii) 部分

我們把 $xy'' - y' + 4x^3y$ 的每一項都寫成以 x^{n-1} 表示的級數。首先，

$$xy'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

這個和式中 $n = 1$ 的一項本應是 $1 \cdot 0 \cdot a_1 = 0$，所以也可以讓它由 $n = 1$ 開始。於是

$$xy'' - y' = \sum_{n=1}^{\infty} \big[n(n-1) - n\big]a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-1}.$$

至於最後一項，$4x^3y = \sum_{m=0}^{\infty} 4a_m x^{m+3}$，代入 $m = n - 4$ 便可令冪次變成 x^{n-1}：

$$4x^3y = \sum_{n=4}^{\infty} 4a_{n-4}\, x^{n-1}.$$

想一想 為甚麼我們可以比較係數？

方程說的是：在級數收斂的區間內，對每一個 x 都有 $xy'' - y' + 4x^3y = 0$，所以合併後的冪級數在該區間上是零函數。一個收斂的冪級數若在某區間上恆等於零，則它的所有係數必定都是零（代入 $x = 0$ 得出常數項，除以 x，然後重複這個步驟）。因此 x 的每個冪的係數都必須等於零。

各係數如下：

- x^0（$n = 1$）：$1 \cdot (-1)\, a_1 = 0$，所以 $a_1 = 0$，正如所求。
- x^1（$n = 2$）：$2 \cdot 0 \cdot a_2 = 0$，此式自動成立，所以 a_2 可任意取值。
- x^2（$n = 3$）：$3 \cdot 1 \cdot a_3 = 0$，所以 $a_3 = 0$。
- x^{n-1}，其中 $n \geq 4$：$n(n-2)a_n + 4a_{n-4} = 0$。

由於當 $n \geq 4$ 時 $n(n-2) \neq 0$，我們可以除以它，從而得到

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}\, a_{n-4} \qquad (n \geq 4),$$

正如所求。（a_0 也可任意取值，因為沒有任何方程單獨涉及它。）

$a_0 = 1$、$a_2 = 0$ **的情況**。 這個遞推關係（recurrence relation）只把 a_n 與 a_{n-4} 聯繫起來，所以各係數按 n 模（modulo）4 的餘數分成四條鏈。由 $a_1 = 0$、$a_2 = 0$ 和 $a_3 = 0$ 開始的三條鏈全部為零，所以只有 a_{4k} 可能不等於零。代入 $n = 4k$，其中 $k \geq 1$，

$$a_{4k} = -\frac{4}{4k(4k-2)}\, a_{4k-4} = -\frac{1}{2k(2k-1)}\, a_{4k-4}.$$

由 $a_0 = 1$ 出發，每一步都乘以 -1，並除以階乘（factorial）中接下來的兩個因數，所以

$$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}.$$

（驗算：$a_4 = -\frac{1}{2}$，$a_8 = -\frac{1}{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$。）因此

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \cos(x^2),$$

這裏用到馬克勞林級數（Maclaurin series）$\cos u = \sum_k (-1)^k u^{2k}/(2k)!$，並取 $u = x^2$。這就是所要求的結果。

$a_0 = 0$、$a_2 = 1$ **的情況**。 這次由 a_0、a_1 和 a_3 開始的三條鏈全部為零，只有 a_{4k+2} 保留下來。代入 $n = 4k+2$，其中 $k \geq 1$，

$$a_{4k+2} = -\frac{4}{(4k+2)\,4k}\, a_{4k-2} = -\frac{1}{(2k+1)\,2k}\, a_{4k-2},$$

再由 $a_2 = 1$ 得 $a_{4k+2} = (-1)^k/(2k+1)!$。所以

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x^2).$$

驗算

直接代入。對於 $y = \sin(x^2)$，有 $y' = 2x\cos(x^2)$ 和 $y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$，所以

$$xy'' - y' + 4x^3 y = 2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2) = 0.$$

$\cos(x^2)$ 的情況亦同樣成立。數值上，餘弦級數在 $x = 1.2$ 處的首 40 項之和為 0.1304237…，與 $\cos(1.44)$ 吻合。此外，兩個答案在 $x = 0$ 處都合理：$\cos 0 = 1 = a_0$，而在 0 附近 $\sin(x^2) \approx x^2$，所以 $a_2 = 1$。

常見錯誤

- 未平移指標就比較係數，以致把一個級數中的 a_n 與另一個級數中的 a_n 配對，儘管它們所乘的是 x 的不同冪。

- 忘記 $a_3 = 0$，而這正是消去 $a_3, a_7, a_{11}, \ldots$ 這條鏈所必需的。
- 除以 $n(n-2)$ 時沒有指出它在 $n \geq 4$ 時不等於零。當 $n = 2$ 時它等於零，這正是 a_2 可任意取值的原因。

STEP 之外

這是弗羅貝尼烏斯方法（method of Frobenius）最簡單的形式。點 $x = 0$ 是這個方程的正則奇點（regular singular point），因為 y'' 的係數在該處等於零；一般理論解釋了為甚麼單憑一個普通的冪級數在這裏行得通，而在別的情況下有時卻會失敗（指標根（indicial roots）0 和 2 相差一個整數）。同樣的方法可以得出貝塞爾函數（Bessel functions）和勒讓德函數（Legendre functions）。要嚴格論證逐項求導的合理性，需要用到一致收斂（uniform convergence），那是大學一年級分析課的內容。關於這兩個課題，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門教材）。

詳細解答

STEP III 2009，第 3 題

純數學 • 極限與曲線描繪

STEP III 2009，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q3

關鍵思路

這個函數在 $t = 0$ 處沒有定義，純粹是因為出現了 $0/0$，所以冪級數（power series）可以告訴我們它在該處「應該」取甚麼值。第 (ii) 部分只需把各項通分，寫在公分母（common denominator）之上；當中出現的偶函數（even function）其實就是喬裝了的 $\frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$。至於第 (iii) 部分，$f'(t)$ 的正負完全取決於它的分子，而這個分子恰好就是 $\mathrm{e}^t(1-t)-1$，這正是題目給出該不等式的原因。

解答

第 (i) 部分

利用 $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots$，當 $t \neq 0$ 時可以約去一個因子 t：

$$f(t) = \frac{t}{t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \cdots} \longrightarrow 1 \quad \text{當} t \to 0,$$

因為分母趨向 1。所以 $\lim_{t\to 0} f(t) = 1$。

由商法則（quotient rule），

$$f'(t) = \frac{(\mathrm{e}^t - 1) - t\,\mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t - 1)^2}.$$

分子和分母都趨向 0，所以把兩者分別展開。分子是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^t - 1 - t\,\mathrm{e}^t &= \left(t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots\right) - \left(t + t^2 + \tfrac{1}{2}t^3 + \cdots\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + \cdots,\end{aligned}$$

而分母是 $\left(t+\frac{1}{2}t^2+\cdots\right)^2 = t^2\left(1+\frac{1}{2}t+\cdots\right)^2$。把分子和分母同除以 t^2，

$$f'(t) = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t+\cdots}{\left(1+\frac{1}{2}t+\cdots\right)^2} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{當} t \to 0.$$

第 (ii) 部分

設 $g(t) = f(t) + \frac{1}{2}t$。通分後，

$$g(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{2t + t(\mathrm{e}^t - 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

現在以 $-t$ 代替 t，再把分子和分母同乘以 e^t：

$$g(-t) = \frac{-t\,(\mathrm{e}^{-t} + 1)}{2(\mathrm{e}^{-t} - 1)} = \frac{-t\,(1 + \mathrm{e}^t)}{2(1 - \mathrm{e}^t)} = \frac{t\,(\mathrm{e}^t + 1)}{2(\mathrm{e}^t - 1)} = g(t).$$

所以 $f(t) + \frac{1}{2}t$ 是偶函數，正如題目所求。（把分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{t/2}$，可見 $g(t) = \frac{t}{2}\coth\frac{t}{2}$，是兩個奇函數（odd function）之積，這是另一個看出此結果的方法。）

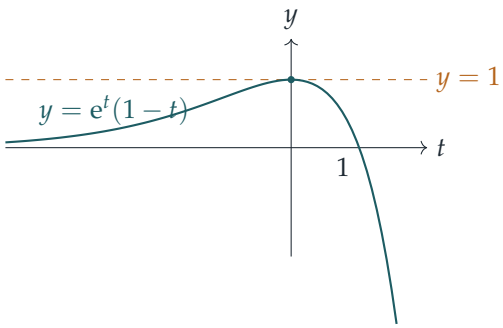
這對繪畫草圖有一個有用的推論：$f(t) - f(-t) = -t$，所以 f 的圖像就是一個偶函數的圖像被直線 $y = -\frac{1}{2}t$ 傾斜而成。

第 (iii) 部分

設 $h(t) = \mathrm{e}^t(1-t)$。則

$$h'(t) = \mathrm{e}^t(1-t) - \mathrm{e}^t = -t\,\mathrm{e}^t,$$

它在 $t < 0$ 時為正，在 $t > 0$ 時為負。所以 h 一直遞增至 $t = 0$，其後遞減：它唯一的轉向點（turning point）是極大點，$h(0) = 1$。此外，當 $t \to -\infty$ 時 $h(t) \to 0$，而當 $t > 1$ 時 $h(t) < 0$。



曲線在 $t = 0$ 處與 $y = 1$ 相切，在其餘各處都嚴格位於其下方，所以

$$\mathrm{e}^t(1-t) \le 1, \quad \text{等號成立當且僅當} t = 0.$$

想一想 這個不等式怎樣告訴我們有關 $f'(t)$ 的資訊？

再看一次第 (i) 部分中 $f'(t)$ 的分子：

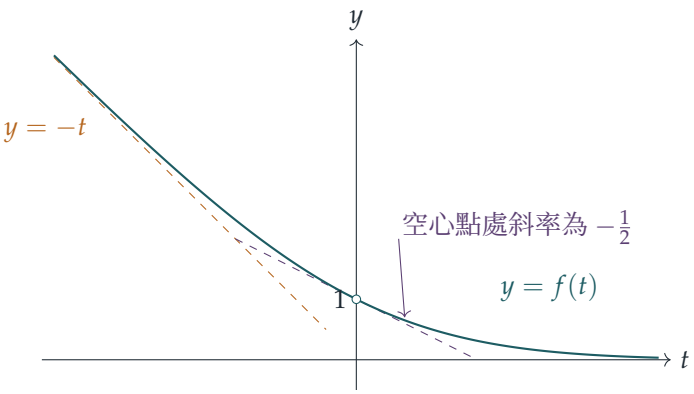
$$e^t - 1 - te^t = e^t(1-t) - 1.$$

根據上面的嚴格不等式，當 $t \neq 0$ 時它嚴格為負。分母 $(e^t-1)^2$ 在 $t \neq 0$ 時嚴格為正。因此對所有 $t \neq 0$ 都有 $f'(t) < 0$；特別地，$f'(t) \neq 0$，所以 f 沒有駐點（stationary point），並且在 0 的兩側都是遞減的。

f 的草圖

把各項事實整理如下。

- 對所有 $t \neq 0$ 都有 $f(t) > 0$，因為 t 與 $e^t - 1$ 同號。
- 在 0 附近，圖像以斜率 $-\frac{1}{2}$ 趨近 $(0,1)$（第 (i) 部分）；該點本身並不在圖像上，因為 $f(0)$ 沒有定義。
- f 處處遞減（第 (iii) 部分）。
- 當 $t \to \infty$ 時，$f(t) = t/(e^t-1) \to 0^+$，因為指數函數的增長勝過 t。
- 當 $t \to -\infty$ 時，$f(t) + t = \dfrac{te^t}{e^t-1} \to 0$，所以 $y = -t$ 是一條斜漸近線（oblique asymptote）。這也可由第 (ii) 部分得出：$f(t) = f(-t) - t$ 而 $f(-t) \to 0$。



驗算

- 第 (ii) 部分預測 $f(-1) - f(1) = 1$。以數值計算，$f(1) = 1/(e-1) \approx 0.58198$ 而 $f(-1) = e/(e-1) \approx 1.58198$，兩者之差恰好是 1。

- 把 $t = \pm 10^{-4}$ 代入導數公式，得 -0.49998 和 -0.50002，與極限 $-\frac{1}{2}$ 吻合。
- 由 coth 的形式可得，當 t 很小時 $g(t) \approx 1 + \frac{1}{12}t^2$，所以 $f(t) \approx 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{12}t^2$，與第 (i) 部分的兩個極限都相符。

常見錯誤

- 對 $f'(t)$ 用了一次洛必達法則（L'Hôpital's rule）後，遇到另一個 $0/0$ 便停下來。把分子和分母都展開至 t^2 階，就可避免這個問題。
- 只證明了 $\mathrm{e}^t(1-t) \le 1$，便聲稱 $f'(t) \neq 0$。你需要該不等式在 $t \neq 0$ 時是嚴格的，而這是由 $t = 0$ 是 h 唯一的駐點得出的。
- 繪畫草圖時把 $(0,1)$ 畫成實心點：f 在該處並無定義。

STEP 之外

展開式 $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n \ge 0} B_n \dfrac{t^n}{n!}$ 定義了伯努利數（Bernoulli numbers）B_n。第 (i) 部分表明 $B_0 = 1$ 和 $B_1 = -\frac{1}{2}$，而第 (ii) 部分表明對每個奇數 $n \ge 3$ 都有 $B_n = 0$。這些數出現在歐拉—麥克勞林求和公式（Euler–Maclaurin summation formula）、冪和 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$，以及歐拉（Euler）關於 $\sum 1/n^{2k}$ 的公式之中。把像 $t = 0$ 處那樣的「洞」補上，正是可去奇點（removable singularity）的概念；若想看極限與連續性的嚴謹論述，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

詳細解答

STEP III 2009，第 4 題

純數學 • 拉普拉斯變換

STEP III 2009，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q4

關鍵思路

第 (i) 至 (iii) 部分各自只需對定義所用的積分（integral）施以一行微積分運算：(i) 只是把兩個指數函數合併，(ii) 是代換法（substitution），而 (iii) 是分部積分法（integration by parts）。第 (iv) 部分可以連續兩次分部積分來完成，但更簡潔的做法是使用 (iii) 兩次，讓 sin 和 cos 的變換互相確定對方。至於最後一部分，可把目標 $\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ 看成分三步構造而成：$\sin t \to \cos t \to \cos qt \to \mathrm{e}^{-pt}\cos qt$，每一步都是四個結果的其中之一。

解答

以 $\mathcal{L}[g](s)$ 表示函數 g 的拉普拉斯變換（Laplace transform），於是 $F = \mathcal{L}[f]$。「合適」是指有關積分收斂（converge）；特別地，我們假設對 $s > 0$，當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$。

第 (i) 部分

把指數函數合併，

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-bt}f(t)\right](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{-bt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+b)t}f(t)\,\mathrm{d}t = F(s+b),$$

這正是 F 的定義在 $s+b$ 處的取值。由於 $s+b > 0$，這一步是成立的。

第 (ii) 部分

代入 $u = at$，於是 $t = u/a$ 及 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/a$。由於 $a > 0$，積分上下限 0 和 ∞ 保持不變，所以

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s/a)u}f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),$$

這裏同樣用到 $s/a > 0$。

第 (iii) 部分

使用分部積分法，對 e^{-st} 求導，對 $f'(t)$ 積分：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'](s) &= \Big[\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-s)\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \big(0 - f(0)\big) + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= sF(s) - f(0),\end{aligned}$$

其中上限處的項為零，因為當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{e}^{-st}f(t) \to 0$（這是 f 為合適函數的條件之一）。

第 (iv) 部分

設 $S(s) = \mathcal{L}[\sin t](s)$ 及 $C(s) = \mathcal{L}[\cos t](s)$。對 $s > 0$，兩個積分都收斂，因為 $|\mathrm{e}^{-st}\sin t| \le \mathrm{e}^{-st}$，cos 的情況亦類似；而且 $\mathrm{e}^{-st}\sin t$ 和 $\mathrm{e}^{-st}\cos t$ 都趨向 0，所以 (iii) 對兩者均適用。

取 $f = \sin$ 應用 (iii)，其導數（derivative）為 cos，且 $\sin 0 = 0$：

$$C(s) = sS(s).$$

取 $f = \cos$ 應用 (iii)，其導數為 $-\sin$，且 $\cos 0 = 1$：

$$-S(s) = sC(s) - 1.$$

（$-\sin t$ 的變換是 $-S(s)$，因為常數因子可以直接提到積分號外。）把第一條方程代入第二條，

$$-S(s) = s^2S(s) - 1 \quad\Longrightarrow\quad (s^2+1)S(s) = 1 \quad\Longrightarrow\quad S(s) = \frac{1}{s^2+1},$$

這正是所需的結果。順帶可得

$$C(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

最後一部分

想一想 怎樣才能不作任何新的積分，就把 $\sin t$ 變成 $\cos qt$？

求導把 sin 變成 cos（這是 (iii)），把 t 重新縮放會把 $\cos t$ 變成 $\cos qt$（這是 (ii)），而乘以一個指數函數就是 (i)。所以我們分三步進行。

第 1 步：$\cos t$。由 (iii)，取 $f(t) = \sin t$，並以 (iv) 的結果作為 F，

$$\mathcal{L}[\cos t](s) = s\cdot\frac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

（這就是第 (iv) 部分順帶得到的結果。）

第 2 步：$\cos qt$。由 (ii)，取 $f(t)=\cos t$ 及 $a=q>0$，

$$\mathcal{L}[\cos qt](s)=\frac{1}{q}\cdot\frac{s/q}{(s/q)^2+1}=\frac{1}{q}\cdot\frac{sq}{s^2+q^2}=\frac{s}{s^2+q^2}.$$

第 3 步：$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$。由 (i)，取 $f(t)=\cos qt$ 及 $b=p>0$，我們把 s 換成 $s+p$：

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-pt}\cos qt\right](s)=\frac{s+p}{(s+p)^2+q^2}}\qquad(s>0).$$

驗算

- 令 $p\to 0$ 及 $q=1$，得 $s/(s^2+1)$，即第 1 步中 $\cos t$ 的變換。令 $q\to 0$，得 $1/(s+p)$，而事實上 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+p)t}\,\mathrm{d}t=1/(s+p)$。
- 當 $s\to\infty$ 時，$sF(s)\to 1=\cos 0$，這是必然的：當 s 很大時，權重 $s\mathrm{e}^{-st}$ 集中在 $t=0$ 附近，所以 $sF(s)$ 趨向函數在 0 處的值。
- 數值上，取 $s=1$、$p=\frac{1}{2}$、$q=2$，公式給出 $1.5/6.25=0.24$，而對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule）所得的結果與此吻合。電腦亦在隨機選取的參數值下驗證了 (i) 至 (iv) 及最終答案，誤差在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 在 (ii) 中，遺漏了由 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u/a$ 而來的因子 $1/a$，或把 $F(s/a)$ 寫成 $F(as)$。
- 在第 3 步中，只平移了部分的 s：每一個 s 都要變成 $s+p$，所以分子是 $s+p$，而不是 s。
- 在 (iii) 中弄錯 $f(0)$ 的正負號：邊界項是 $0-f(0)$。

STEP 之外

這些法則正是以拉普拉斯變換法求解微分方程（differential equation）的核心：(iii) 把求導變成乘以 s，於是一條常係數線性常微分方程（linear ODE with constant coefficients）就變成關於 $F(s)$ 的代數方程，你把它解出來，然後在一個由本題這類結果編成的表中「查表」即可。平移法則 (i) 正好解釋了為甚麼阻尼振盪（damped oscillation）$\mathrm{e}^{-pt}\cos qt$ 會表現為位於 $s=-p\pm \mathrm{i}q$ 的極點（pole）。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）有一整章講述這個方法。

詳細解答

STEP III 2009，第 5 題

純數學 • 根的對稱函數

STEP III 2009，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q5

關鍵思路

這一題的一切都圍繞着三個基本對稱函數（elementary symmetric functions）

$$e_1 = x + y + z, \qquad e_2 = yz + zx + xy, \qquad e_3 = xyz,$$

因為一旦知道它們的值，x、y 和 z 就是一條已知三次方程（cubic）$t^3 - e_1 t^2 + e_2 t - e_3 = 0$ 的根。每一項新資料，都是把兩個已知的冪和（power sums）相乘，再看看出現了哪些交叉項而得來的。遞推關係（recurrence）則可由這條三次方程直接得出：x、y、z 各自滿足該方程，所以它們的各次冪也同樣滿足。

解答

設 $S_n = x^n + y^n + z^n$，則已知 $S_1 = 1$、$S_2 = 2$、$S_3 = 3$。

$yz + zx + xy$ 的值

把 S_1 平方，

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz + zx + xy),$$

所以 $1 = 2 + 2(yz + zx + xy)$，由此得

$$yz + zx + xy = -\tfrac{1}{2},$$

正如所求。

$\sum x^2y$ 的值，然後是 xyz

設 $T = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$，即所有形如（一個變數的平方）×（另一個不同的變數）的六項之和。把 S_2 乘以 S_1 會得到九項：三個立方項和 T 的六項：

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = (x^3 + y^3 + z^3) + T.$$

因此 $2 \times 1 = 3 + T$，於是

$$T = -1,$$

這就是第二個結果。

> **想一想** 已知的量當中，哪兩個相乘會同時包含 T 和 xyz？

試試 $(x + y + z)(yz + zx + xy)$。展開後得到九項。其中六項的形狀是 $x \cdot xy = x^2y$，而這些正好就是 T 的六項。其餘三項是 $x \cdot yz$、$y \cdot zx$ 和 $z \cdot xy$，每一項都等於 xyz。所以

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = T + 3xyz.$$

代入已知的值，$1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3xyz$，所以 $3xyz = \frac{1}{2}$，而

$$xyz = \frac{1}{6},$$

正如所求。

遞推關係

現在我們知道 $e_1 = 1$、$e_2 = -\frac{1}{2}$ 和 $e_3 = \frac{1}{6}$。由於

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3 = t^3 - t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6},$$

x、y、z 各自都是這條三次方程的根。特別地，

$$x^3 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6},$$

y 和 z 亦同樣如此。乘以 x^{n-2} 得

$$x^{n+1} = x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{1}{6}x^{n-2},$$

把 x 換成 y 或 z 也有同樣的式子。把三條等式相加，

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{6}S_{n-2},$$

所以

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{1}{6}.$$

想一想 「對所有 n」這個條件，在負數次冪上會否出問題？

當 $n \geq 2$ 時，乘以 x^{n-2} 並無問題。對於較小的 n，我們需要用到 x、y 和 z 的負數次冪，而這些冪是存在的，因為三者都不是零：它們的積是 $\frac{1}{6} \neq 0$。所以這個關係對每一個整數 n 都成立。（即使 x、y、z 並非全是實數，它仍然成立，而事實上它們的確不全是實數：這條三次方程有一個實根，約為 1.431，另有兩個互為共軛的複數根（complex conjugate roots）。）

驗算

- 取 $n = 2$ 時，遞推關係應該重現已知的數據，當中用到 $S_0 = 3$：果然 $S_2 + \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{6}S_0 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 = S_3$。
- 遞推關係預測 $S_4 = 3 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$ 及 $S_5 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 6$。以數值方法解這條三次方程（根為 1.43085 和 $-0.21542 \pm 0.26471\,\mathrm{i}$），再把四次冪和五次冪分別相加，得到 4.16667 和 6.00000，兩者吻合。這些根在 n 為負數時同樣滿足遞推關係。

常見錯誤

- 弄錯三次方程中的正負號：它是 $t^3 - e_1t^2 + e_2t - e_3$，所以這裏 $b = -e_2 = +\frac{1}{2}$ 而 $c = e_3 = \frac{1}{6}$。
- 在 $n = 2$ 檢驗遞推關係時，忘記了 $S_0 = 3$，而不是 1。

STEP 之外

這些就是牛頓恆等式（Newton's identities），它們把冪和與基本對稱函數聯繫起來，適用於任意數目的變數。在它們背後的是對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）：每一個以 $x_1, \ldots, x_k$ 為變數的對稱多項式，都是 $e_1, \ldots, e_k$ 的多項式。S_n 的遞推關係是一個線性遞推關係（linear recurrence），其特徵方程（characteristic equation）正是那條三次方程本身；同一個想法可用來解線性差分方程（linear difference equations），並給出斐波那契（Fibonacci）數列的通項公式。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）正是本着這種精神來闡述多項式及其根。

詳細解答

STEP III 2009，第 6 題

純數學 • 托勒密定理

STEP III 2009，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q6

關鍵思路

單位圓（unit circle）上兩點之間的距離只取決於兩點之間的夾角，而求這個距離的竅門是抽出「平均」角：$e^{i\beta} - e^{i\alpha}$ 等於 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$ 乘以一個純虛數（purely imaginary number）。一旦把每條弦（chord）都寫成半角差的正弦，那條大恆等式就變成一條三角恆等式（trigonometric identity），用積化和差公式（product-to-sum formulae）兩三行便可解決。這四點於是構成一個內接於圓的四邊形，而該恆等式正是關於這種四邊形的一條著名定理。

解答

弦長

抽出因子 $e^{i(\alpha+\beta)/2}$：

$$\begin{aligned} e^{i\beta} - e^{i\alpha} &= e^{i(\alpha+\beta)/2}\left(e^{i(\beta-\alpha)/2} - e^{-i(\beta-\alpha)/2}\right) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)/2} \cdot 2i \sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

由於 $\left|e^{i(\alpha+\beta)/2}\right| = 1$ 及 $|2i| = 2$，

$$\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\left|\sin \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)\right|.$$

最後，由 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ 得 $0 < \frac{1}{2}(\beta - \alpha) < \pi$，所以正弦值為正，模（modulus）的符號可以除去：$\left|e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right| = 2\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$，此即所求。

? **想一想** 為甚麼題目要設 $\alpha < \beta$ 這個條件？

若沒有這個條件，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ 便可能落在 $(-\pi,0)$ 之內，正弦值為負，公式就會給出負的長度。正是因為各角按大小排列，我們才可以除去模的符號。另外留意 $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}| = |e^{i\beta}-e^{i\alpha}|$，所以模內兩項的次序並不重要。

恆等式

因為 $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta<2\pi$，恆等式中出現的每一對角都是由小至大排列的，所以第一個結果適用於全部六個模。兩邊同除以公因子 $2\cdot 2=4$ 後，我們需要證明

$$\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma)+\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)=\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\beta).$$

最自然的變量是相鄰兩點之間的三個間距。設

$$x=\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),\qquad y=\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta),\qquad z=\tfrac{1}{2}(\delta-\gamma),$$

則 $\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=x+y$、$\frac{1}{2}(\delta-\beta)=y+z$ 及 $\frac{1}{2}(\delta-\alpha)=x+y+z$。要證明的是

$$\sin x\sin z+\sin y\sin(x+y+z)=\sin(x+y)\sin(y+z).$$

對每個乘積使用 $2\sin P\sin Q=\cos(P-Q)-\cos(P+Q)$：

$$\begin{aligned}2\sin x\sin z&=\cos(x-z)-\cos(x+z),\\ 2\sin y\sin(x+y+z)&=\cos(x+z)-\cos(x+2y+z),\\ 2\sin(x+y)\sin(y+z)&=\cos(x-z)-\cos(x+2y+z).\end{aligned}$$

把首兩行相加，$\cos(x+z)$ 項互相抵消，剛好得到第三行。因此這條三角恆等式成立（事實上對所有 x,y,z 都成立），再乘回 4 並使用弦長公式，便得

$$|e^{i\alpha}-e^{i\beta}|\,|e^{i\gamma}-e^{i\delta}|+|e^{i\beta}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\alpha}-e^{i\delta}|=|e^{i\alpha}-e^{i\gamma}|\,|e^{i\beta}-e^{i\delta}|,$$

此即所求。

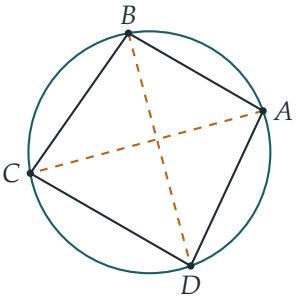
想一想 這條三角恆等式對所有 x、y、z 都成立。那麼我們在哪裏用到 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ 這個次序？

就在把每個模換成 $2\sin$(半角差) 而不加模符號的那一步。假如各點的次序亂了，其中一些正弦值便會是負數，各長度之間的恆等式一般就不成立。例如取角度為 $0.3, 2, 1, 4$（即 $\gamma<\beta$），左邊約為 4.84，右邊約為 1.15。

詮釋

設 A,B,C,D 為點 $e^{i\alpha},e^{i\beta},e^{i\gamma},e^{i\delta}$。它們都在單位圓上，而各角的大小次序表示沿逆時針方向走時，我們會依次遇上 A,B,C,D。所以 $ABCD$ 是一個（凸的）圓內接四邊形（cyclic quadrilateral），邊為 AB,BC,CD,DA，對角線為 AC、BD，而恆等式說的是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$



任何圓都可以由單位圓經縮放和平移得出，而等式兩邊按相同的倍數（即縮放因子的平方）縮放，所以這個結果對每個圓內接四邊形都成立：*在圓內接四邊形中，兩組對邊乘積之和等於兩條對角線的乘積*。這就是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。

驗算

- 內接於單位圓的正方形（$\alpha, \beta, \gamma, \delta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$）邊長為 $\sqrt{2}$，對角線長為 2：$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = 2 \cdot 2$。
- 邊長為 a, b 的長方形給出 $a^2 + b^2 =$ (對角線)^2：托勒密定理包含了畢氏定理(Pythagoras' theorem)。
- 數值上，隨機抽取 10^5 組按大小排列的四個角，兩邊之差都不超過 2×10^{-15}。

常見錯誤

- 寫下 $|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2 \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ 而沒有檢查正弦值是否為正。
- 用複角公式（compound-angle formulae）把 $\sin \frac{1}{2}(\delta - \alpha)$ 等各項按原來的四個角展開：這樣做是行得通的，但比使用三個間距 x, y, z 繁複得多。
- 忘記恆等式要求各頂點按環繞圓周的次序排列：右邊的是兩條對角線，而不是隨便兩條弦。

STEP 之外

對於處於一般位置的四點，同樣的量只滿足托勒密不等式（Ptolemy's inequality）$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$，等號成立當且僅當四點按該次序共圓（concyclic）；有一個巧妙的證明，用的是複數恆等式 $(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = (a-c)(b-d)$ 和三角不等式（triangle inequality）。這背後是交比（cross-ratio），它是莫比烏斯變換（Möbius transformations）下的不變量，而莫比烏斯變換把圓映射到圓，是複幾何的核

心。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像直觀講解複分析）把這些想法闡述得十分精彩。

詳細解答

STEP III 2009，第 7 題

純數學 • 逐次微分與數學歸納法

STEP III 2009，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q7

關鍵思路

一切都源自一條看似平平無奇的恆等式（identity）：$(1+x^2)f_0(x)=1$。把它反覆求導，就會得出相鄰各階導數（derivative）之間的關係式；而對某個 n 成立的關係式，再求導一次便得到下一條，這正好就是歸納步驟的模樣。在第 (ii) 部分，乘以 $1+x^2$ 的適當次冪便可消去所有分母，再用第二次歸納法（induction）追蹤首項，從而確定次數。

解答

第 (i) 部分

把 $f_n(x)$ 簡記為 f_n，並以 $P(n)$ 表示以下命題：

$$(1+x^2)f_{n+1}+2(n+1)xf_n+n(n+1)f_{n-1}=0.$$

基礎情況（*base case*）。由於對所有 x 都有 $(1+x^2)f_0=1$，求導（並利用 $f_0'=f_1$）得

$$(1+x^2)f_1+2xf_0=0.$$

再求導一次，對每一項使用積法則（product rule），

$$(1+x^2)f_2+2xf_1+2xf_1+2f_0=0, \qquad \text{即} \qquad (1+x^2)f_2+4xf_1+2f_0=0,$$

這就是 $P(1)$。

歸納步驟（*inductive step*）。假設對某個 $n\geq 1$，$P(n)$ 對所有 x 成立。由於它是關於 x 的

恆等式，我們可以對它求導。利用 $f_k' = f_{k+1}$，

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x^2)f_{n+2} + 2xf_{n+1} + 2(n+1)f_n + 2(n+1)xf_{n+1} + n(n+1)f_n \\ &= (1+x^2)f_{n+2} + 2(n+2)xf_{n+1} + (n+1)(n+2)f_n, \end{aligned}$$

因為 $2+2(n+1) = 2(n+2)$ 及 $2(n+1)+n(n+1) = (n+1)(n+2)$。這就是 $P(n+1)$。因此根據歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 成立，證明完畢。

（等價地，也可以用萊布尼茲法則（Leibniz's rule）把 $(1+x^2)f_0 = 1$ 求導剛好 $n+1$ 次：由於 $1+x^2$ 的三階導數為零，只有三項會留下來，而它們正是 $P(n)$ 的三項。）

第 (ii) 部分

首三個。我們有 $P_0 = (1+x^2)f_0 = 1$。其次，

$$f_1 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad \text{所以} \qquad P_1 = (1+x^2)^2 f_1 = -2x.$$

用商法則（quotient rule）對 f_1 求導，

$$f_2 = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3},$$

所以 $P_2 = (1+x^2)^3 f_2 = 6x^2 - 2$。（在第 (i) 部分取 $n = 1$ 會得到相同的結果：$(1+x^2)f_2 = -4xf_1 - 2f_0$。）

遞歸關係（recurrence）。用積法則對 $P_n = (1+x^2)^{n+1} f_n$ 求導：

$$P_n' = 2(n+1)x(1+x^2)^n f_n + (1+x^2)^{n+1} f_{n+1}.$$

全式乘以 $1+x^2$，每一項都會變成一個 P：

$$(1+x^2)P_n' = 2(n+1)x\,(1+x^2)^{n+1} f_n + (1+x^2)^{n+2} f_{n+1} = 2(n+1)xP_n + P_{n+1}.$$

移項後，

$$P_{n+1} - (1+x^2)P_n' + 2(n+1)xP_n = 0$$

對每個 $n \geq 0$ 成立，證明完畢。這裏不需要用歸納法；這是對每個 n 都成立的直接計算。

> **想一想** 我們怎樣知道次數恰好是 n，而不會因為最高次項互相抵消而變得更小？

我們證明一個稍強的命題，讓它把所需的資料一路帶過整個歸納過程：P_n 是一個 n 次多項式（*polynomial*），其首項係數（*leading coefficient*）$a_n \neq 0$。$n = 0$ 的情況成立，因為 $P_0 = 1$。

假設命題對某個 $n \geq 0$ 成立，即 $P_n = a_n x^n +$ (較低次冪)，其中 $a_n \neq 0$。根據遞歸關係，

$$P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n.$$

右邊是一個多項式，因為 P_n 是多項式，所以 P_n' 也是。現在 $P_n' = na_n x^{n-1} + \cdots$（當 $n = 0$ 時這是 0，與 $na_n = 0$ 吻合），所以 $(1+x^2)P_n'$ 的次數至多為 $n+1$，而 x^{n+1} 的係數是 na_n。另外，$2(n+1)xP_n$ 的次數為 $n+1$，首項係數是 $2(n+1)a_n$。因此 P_{n+1} 的次數至多為 $n+1$，而它的 x^{n+1} 係數是

$$a_{n+1} = na_n - 2(n+1)a_n = -(n+2)a_n.$$

這個數不等於零，因為 $a_n \neq 0$ 而 $n+2 > 0$。所以最高次項不可能抵消，P_{n+1} 的次數恰好是 $n+1$。根據歸納法，對每個 $n \geq 0$，P_n 都是 n 次多項式。

額外的收穫是：由 $a_{n+1} = -(n+2)a_n$ 及 $a_0 = 1$ 可得 $a_n = (-1)^n(n+1)!$，與上面的 $a_1 = -2$ 和 $a_2 = 6$ 吻合。

驗算

- 第 (i) 部分，取 $x = 0$、$n = 1$：由 P_n 可得 $f_0(0) = 1$、$f_1(0) = 0$、$f_2(0) = -2$，而 $f_2 + 0 + 2f_0 = -2 + 2 = 0$。
- 遞歸關係，取 $n = 1$：$(1+x^2)P_1' - 4xP_1 = -2 - 2x^2 + 8x^2 = 6x^2 - 2 = P_2$。
- 數值上，在 $x = 0.7$ 處，中心差分（central difference）給出 $f_0''(0.7) \approx 0.284164$，而 $(6x^2-2)/(1+x^2)^3 = 0.284164$。我們亦以有理數運算，在 200 個隨機有理點上精確驗證了第 (i) 部分和遞歸關係，直至 $n = 12$。

常見錯誤

- 所證明的基礎情況與題目指定的範圍不符：第 (i) 部分的恆等式由 $n = 1$ 開始，所以基礎情況必須是 $n = 1$，這需要用到 f_2。
- 只說「次數每次增加一」，卻沒有檢查 $(1+x^2)P_n'$ 與 $2(n+1)xP_n$ 的 x^{n+1} 項不會互相抵消。它們的確不會抵消，因為 $n \neq 2(n+1)$，但這一點必須寫出來。

STEP 之外

利用複數（complex numbers）把它分解成部分分式（partial fractions），$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$，每一階導數都變得容易計算，並得出閉合形式（closed form）$P_n(x) = (-1)^n\, n!\, \operatorname{Im}(x+\mathrm{i})^{n+1}$（不妨用 $n = 1, 2$ 試試）。再設 $x = \cot\theta$，便可看出 P_n 的零

點是 $\cot \frac{k\pi}{n+1}$，其中 $k = 1, \ldots, n$：全部都是實數而且互不相同，就像經典正交多項式（orthogonal polynomials）的零點一樣，而那些多項式同樣是由反覆對一個簡單函數求導而產生的。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是個絕佳的去處，可以從中看到複數為何能把這類計算變得服服貼貼。

詳細解答

STEP III 2009，第 8 題

純數學 • 極限與歸約公式

> **STEP III 2009，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q8

本題在 *Beyond STEP* 第 4.5 節大二學生之夢中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/sophomores-dream.html

關鍵思路

每一部分都圍繞着對數（logarithm）的「弱」：在 0 附近，$\ln x$ 趨向無窮的速度極慢，以致 x 的任何正數次冪都能壓倒 $\ln x$ 的任何次冪。代換（substitution）$x = \mathrm{e}^{-t}$ 把這件事化為題目給出的事實：指數函數勝過冪函數。分部積分（integration by parts）時，正是這個極限（limit）令邊界項（boundary term）消失。在最後一部分，把指數函數的級數（series）用於 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$，得出的恰好就是第 (ii) 部分的積分。

解答

第 (i) 部分

由於 $\ln x$ 只在 $x > 0$ 時有定義，這個極限的意思是 $x \to 0^+$。設 $x = \mathrm{e}^{-t}$，則 $\ln x = -t$，而 $x \to 0^+$ 恰好相當於 $t \to \infty$。於是

$$x^m (\ln x)^n = \mathrm{e}^{-mt}(-t)^n = (-1)^n \mathrm{e}^{-mt} t^n.$$

因子 $(-1)^n$ 只是一個固定的正負號，而根據題目給出的結果，當 $t \to \infty$ 時 $\mathrm{e}^{-mt}t^n \to 0$。因此

$$\lim_{x\to 0} x^m (\ln x)^n = 0.$$

至於第二個結果，取 $m = n = 1$：由此得當 $x \to 0$ 時 $x\ln x \to 0$。由於指數函數是連續

（continuous）的，

$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{當} x \to 0,$$

這正是所要證明的。

第 (ii) 部分

首先，這個積分是有意義的。被積函數（integrand）$x^m(\ln x)^n$ 在 $(0,1]$ 上連續，而且根據第 (i) 部分，當 $x \to 0$ 時它趨向 0。所以它在 $(0,1]$ 上有界（bounded），I_n 是一個普通的（收斂（convergent）的）積分。

對 I_{n+1} 作分部積分，取 $u = (\ln x)^{n+1}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = x^m$，於是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$ 及 $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$：

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot\frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{m+1}(\ln x)^{n+1}}{m+1}\right]_0^1 - \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

> **想一想** 在 $x = 0$ 處，$\ln x$ 根本沒有定義，那麼該處的邊界項是甚麼？

下限其實是指 $x \to 0^+$ 時的極限。根據第 (i) 部分，以 $m+1$ 和 $n+1$ 代替 m 和 n（兩者都符合條件，因為 $m+1 \geq 1$ 及 $n+1 \geq 0$），可得 $x^{m+1}(\ln x)^{n+1} \to 0$。在上限處，$\ln 1 = 0$ 而 $n+1 \geq 1$，所以該項也是 0。因此方括號內的一項為零，於是

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1}\,I_n,$$

這正是所要證明的。

要計算 I_n，由

$$I_0 = \int_0^1 x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}.$$

出發。遞推關係（recurrence）的每一步都乘以 $-\dfrac{k}{m+1}$，其中 $k = 1, 2, \ldots, n$，所以

$$I_n = \left(-\frac{1}{m+1}\right)\left(-\frac{2}{m+1}\right)\cdots\left(-\frac{n}{m+1}\right)\frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n\,n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

（用一行歸納法（induction）便可確認：若結果對 n 成立，則由遞推關係得 $-\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(m+1)^{n+2}}$。）

第 (iii) 部分

對於 $0 < x \leq 1$，寫 $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$，並使用指數級數：

$$x^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(\ln x)^n}{n!}.$$

（函數在 $x = 0$ 處的值不影響積分；根據第 (i) 部分，函數 x^x 在該處趨向 1，所以它有界，這個積分是普通的積分。）

現在逐項積分（integrate term by term）。$n = 0$ 的一項是 $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$。對於 $n \geq 1$，第 n 項就是第 (ii) 部分的 I_n，其中 $m = n$（符合條件，因為此時 m 是正整數）：

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

這條公式在 $n = 0$ 時同樣給出 1。所以

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^4 + \cdots,$$

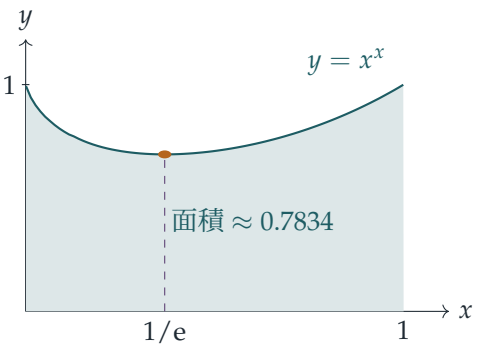
這就是所求的結果。

想一想 我們可以對無窮級數逐項積分嗎？

並非必然可以，但在這裏是穩妥的，因為 $x\ln x$ 始終很小。它的導數是 $\ln x + 1$，所以在 $(0,1]$ 上它在 $x = 1/\mathrm{e}$ 處取得最小值，而且 $|x\ln x| \leq 1/\mathrm{e} < 1$。設 $u = x\ln x$，若在 u^N 項之後截斷級數，則餘項（remainder）滿足

$$\left|\sum_{n>N}\frac{u^n}{n!}\right| \leq \sum_{n>N}\frac{|u|^n}{n!} \leq \sum_{n>N}\frac{1}{n!} \leq \frac{2}{(N+1)!}$$

對 $(0,1]$ 內的每一個 x 都成立。在長度為 1 的區間上積分，截斷後逐項積分的誤差最多是 $2/(N+1)!$，而它趨向 0。所以積分等於級數的和。



驗算

- 在第 (ii) 部分取 $m = 1$、$n = 1$：$\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}$，與直接分部積分的結果一致（$[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2]_0^1 = -\frac{1}{4}$）。
- 數值上，用中點法則（midpoint rule）可得 $\int_0^1 x^x \, dx \approx 0.7834305$，而部分和（partial sums）$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} + \frac{1}{3125} - \cdots$ 只需寥寥數項便穩定於 0.7834305，因為各項縮小得極快。
- 圖像位於其最小值 $e^{-1/e} \approx 0.69$ 與 1 之間，所以面積必定介乎 0.69 與 1 之間，事實亦確是如此。

常見錯誤

- 不加說明便略去 0 處的邊界項。這正是第 (i) 部分的全部用意，而且需要 $m + 1 \geq 1$。
- 弄錯 I_n 的正負號：在 $(0, 1)$ 上 $\ln x < 0$，所以 I_n 的正負號與 $(-1)^n$ 相同。
- 在第 (iii) 部分忘記 $n = 0$ 的一項，而首項的 1 正是由此而來。

STEP 之外

最後這條恆等式稱為「二年級生之夢」（sophomore's dream），由約翰·伯努利（Johann Bernoulli）於 1697 年發現。我們需要論證的那一步，即交換積分與無窮求和的次序，是大學一年級分析課的核心課題：當級數一致收斂（converges uniformly）時，這樣做是穩妥的，而我們的餘項估計所證明的正是這一點（它是魏爾斯特拉斯 M 判別法（Weierstrass M-test）的一個例子）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對一致收斂以及逐項積分何時可行，有十分易讀的講解。

詳細解答

STEP III 2009，第 9 題

力學 • 拋體軌道的角度

STEP III 2009，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

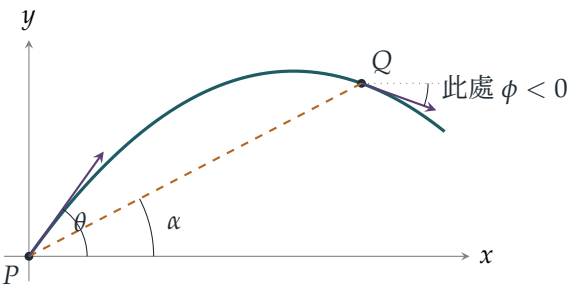
step.maths.org/questions/09-s3-q9

關鍵思路

在拋體運動（projectile motion）中，水平速度始終不變，而垂直速度則以恆定的變率改變。因此，由 P 到 Q 之間的平均垂直速度，就是它在兩端的值的平均數，而弦（chord）PQ 的斜率（gradient）就是兩端斜率的平均數。這樣一行就得出第 (i) 部分。至於第 (ii) 部分，軌跡（trajectory）方程是 $\tan\theta$ 的二次方程（quadratic）（只要把 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ 代入），餘下的工作交給根之和與根之積（sums and products of roots）便可。

解答

我們把質點（particle）視為在恆定重力 g 之下自由運動，不計空氣阻力（air resistance）。取 P 為原點，x 軸沿水平正方向，y 軸垂直向上。設 u 為拋射速率，並設 $Q = (X, Y)$。我們假設 $X > 0$：Q 位於 P 的正方向一側，所以水平速度 $u\cos\theta$ 為正，而所有角 $\theta, \phi, \theta', \phi'$ 都在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內。（假如 Q 在 P 的正上方或正下方，在 P 和 Q 的角便都是 $\pm\frac{\pi}{2}$，題目就沒有任何內容可言。）於是 $\tan\alpha = Y/X$。



第 (i) 部分

水平速度恆為 $u\cos\theta$。垂直速度在 P 是 $u\sin\theta$，在 Q 設為 v_Q，並且以恆定的變率 g 遞減，所以它是時間的線性函數（linear function）。因此，若由 P 飛行到 Q 需時 T，則

$$X = (u\cos\theta)\,T, \qquad Y = \frac{u\sin\theta + v_Q}{2}\,T,$$

因為線性函數在一個區間上的平均值，就是它兩個端點值的平均數。在每一點，運動方向就是速度的方向，所以 $\tan\theta = \dfrac{u\sin\theta}{u\cos\theta}$ 及 $\tan\phi = \dfrac{v_Q}{u\cos\theta}$。兩式相除，得

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{1}{2}\left(\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta} + \frac{v_Q}{u\cos\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\tan\theta + \tan\phi),$$

即 $\tan\theta + \tan\phi = 2\tan\alpha$，正是所求。

第 (ii) 部分

二次方程。 從 $x = ut\cos\theta$、$y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$ 中消去 t，得軌跡

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\theta\right).$$

記 $k = \dfrac{gX^2}{2u^2}$，它是正數。由於路徑通過 (X, Y)，$T = \tan\theta$ 滿足

$$kT^2 - XT + (Y + k) = 0.$$

第二條軌跡有相同的 u、X 和 Y，所以 $\tan\theta'$ 滿足同一條方程。兩條軌跡並不相同，所以 $\theta \neq \theta'$；又因為 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一對一（one-to-one）的，$\tan\theta$ 和 $\tan\theta'$ 就是那兩個根。因此

$$\tan\theta + \tan\theta' = \frac{X}{k}, \qquad \tan\theta\tan\theta' = \frac{Y + k}{k} = 1 + \frac{Y}{k}.$$

第一個結果。 由複角公式（compound-angle formula），

$$\tan(\theta + \theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta\tan\theta'} = \frac{X/k}{-Y/k} = -\frac{X}{Y} = -\cot\alpha.$$

這裏需要 $Y \neq 0$。若 $Y = 0$（於是 $\alpha = 0$，而 $\cot\alpha$ 無定義），兩根之積為 1，這表示 $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$，也就是大家熟悉的情況：在水平地面上，射程相同的一對拋射角互為餘角（complementary angles）。從這個意義上說，結果依然成立。

第二個結果。 記 $t = \tan\alpha = Y/X$ 及 $s = \tan\theta + \tan\theta' = X/k$。於是 $Y/k = ts$，所以 $\tan\theta\tan\theta' = 1 + ts$。把第 (i) 部分分別應用於兩條軌跡，得

$$\tan\phi = 2t - \tan\theta, \qquad \tan\phi' = 2t - \tan\theta'.$$

所以

$$\tan\phi + \tan\phi' = 4t - s,$$
$$1 - \tan\phi\tan\phi' = 1 - \left(4t^2 - 2ts + \tan\theta\tan\theta'\right) = 1 - 4t^2 + 2ts - 1 - ts = t(s - 4t).$$

這兩個量不可能同時為零：若 $\tan\phi' = -\tan\phi$，則 $\tan\phi\tan\phi' = -\tan^2\phi \le 0 \ne 1$。當 $Y \ne 0$（於是 $t \ne 0$）且 $s \ne 4t$ 時，

$$\tan(\phi + \phi') = \frac{4t - s}{t(s - 4t)} = -\frac{1}{t} = -\cot\alpha = \tan(\theta + \theta').$$

在其餘情況下，要麼 $1 - \tan\phi\tan\phi'$ 和 $1 - \tan\theta\tan\theta'$ 同時為零($t = 0$)，要麼 $\tan(\phi + \phi')$ 和 $\tan(\theta + \theta')$ 同為無窮大，所以在任何情況下，$\phi + \phi'$ 與 $\theta + \theta'$ 要麼正切相同，要麼同為 $\frac{\pi}{2}$ 的奇數倍。無論如何，

$$\theta + \theta' - (\phi + \phi') = n\pi \quad \text{對某個整數} n.$$

想一想 正切相等，只能把角確定到相差 π 的某個倍數。我們怎樣知道這個倍數剛好是一個 π？

我們利用各角的大小。在每條軌跡上，斜率是 $\tan\theta - \dfrac{gx}{u^2\cos^2\theta}$，它隨 x 增加而嚴格遞減。由於 $X > 0$，我們得到 $\tan\phi < \tan\theta$，所以 $\phi < \theta$；同理 $\phi' < \theta'$。四個角全都在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內，所以 $0 < \theta - \phi < \pi$ 及 $0 < \theta' - \phi' < \pi$。兩式相加，

$$0 < n\pi = (\theta + \theta') - (\phi + \phi') < 2\pi,$$

所以 $n = 1$，而 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$，正是所求。

驗算

- 取 $X = 1$、$Y = \frac{1}{2}$ 及 $u^2 = 4g$，則 $k = \frac{1}{8}$。二次方程變成 $T^2 - 8T + 5 = 0$，其根為 $4 \pm \sqrt{11}$。於是 $\tan(\theta + \theta') = 8/(1 - 5) = -2 = -\cot\alpha$。以數值計算，$\theta + \theta' \approx 2.0344$ 而 $\pi + \phi + \phi' \approx 2.0344$，其中 $\tan\phi = 1 - \tan\theta$ 及 $\tan\phi' = 1 - \tan\theta'$。
- 水平地面（$Y = 0$）：$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$，而根據對稱性，$\phi = -\theta$、$\phi' = -\theta'$。所以 $\pi + \phi + \phi' = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$，與預期相符。
- 我們以數值方法逐步模擬運動，確認了第 (i) 部分；又隨機選取 20,000 組容許兩條軌跡存在的 u、X 和 Y，檢驗了第 (ii) 部分的兩個結果。

常見錯誤

- 單憑正切相等就斷定 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$。正切相等只能把角確定到相差 π 的某個倍數，你需要不等式 $\phi < \theta$ 和 $\phi' < \theta'$ 才能判定是哪一個倍數。

▶ 忘記說明為甚麼 $\tan\theta$ 和 $\tan\theta'$ 是同一條二次方程的兩個不同的根。它們不同，是因為兩條軌跡不同，而 tan 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是一對一的。

STEP 之外

第 (ii) 部分可以從可逆性（reversibility）的角度作一個頗為有趣的解讀。把任何一條路徑倒過來走，就得到一個由 Q 到 P、以角 $\phi + \pi$ 拋出的拋體。所以這四個角是由兩端之間的一種對稱性聯繫起來的，而關係式 $\theta + \theta' = \pi + \phi + \phi'$ 正好把它表達出來。牛頓（Newton）定律（在沒有摩擦力或阻力的情況下）的時間反演對稱性（time-reversal symmetry），是貫穿整個大學力學的主題。若想看大學一年級程度、對拋體以至更多課題的透徹論述，可參閱 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學導論）。

詳細解答

STEP III 2009，第 10 題

力學 • 簡諧運動

> **STEP III 2009，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q10

關鍵思路

題目給出平衡(equilibrium)時的壓縮量 d，是為了讓我們無須另外設定彈簧的勁度(stiffness）也能知道它的大小：平衡時彈簧的力與重量互相抵消，所以 $k/m = g/d$。之後，由牛頓第二定律（Newton's second law）可知，運動是以平衡位置為中心的簡諧運動(simple harmonic motion），而下落高度 h 只透過初速度影響結果。當彈簧再也無法推動質點時，質點便離開彈簧，這發生在壓縮量回到零的一刻。

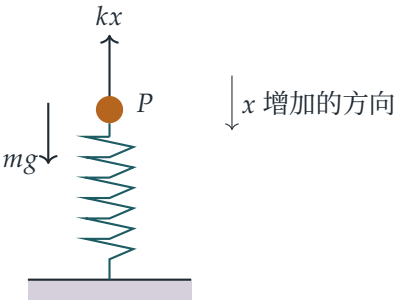
解答

微分方程

把 P 視為質量為 m 的質點（particle），彈簧視為輕彈簧（light spring），服從胡克定律(Hooke's law)，勁度為 k，並忽略空氣阻力。當 P 靜止在彈簧上時，作用於它的力是向下的重量 mg 和向上的彈簧力 kd，所以

$$kd = mg, \qquad \text{即} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{d}.$$

現在考慮質點從高處落下的情況。取 x 向下為正（它就是壓縮量），並以碰到彈簧的一刻為 $t = 0$。當 P 與彈簧接觸時，作用於它的力如圖所示。



由於彈簧是輕的，它施於 P 的力恰好是向上的 kx（輕彈簧會把兩端所受的力原封不動地傳遞過去）。取向下為正，由牛頓第二定律得 $m\ddot{x} = mg - kx$，所以

$$\ddot{x} + \frac{g}{d}x = g, \qquad 0 \le t \le T.$$

解方程

這是以 $x = d$ 為中心的簡諧運動，其中

$$\omega = \sqrt{g/d}.$$

常數 $x = d$ 是一個特解（particular solution），而餘函數（complementary function）是 $B\cos\omega t + C\sin\omega t$，所以通解（general solution）是

$$x = d + B\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

初始條件（initial conditions）來自下落的過程。在 $t = 0$ 時質點剛剛碰到彈簧，所以 $x(0) = 0$；而 P 已自由下落了高度 h，所以它的速率是 $\sqrt{2gh}$，方向向下，亦即 x 增加的方向。因此

$$\begin{aligned} x(0) = d + B = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = -d, \\ \dot{x}(0) = C\omega = \sqrt{2gh} \quad &\Rightarrow \quad C = \sqrt{2gh}\,\sqrt{d/g} = \sqrt{2hd}. \end{aligned}$$

所以

$$x = d - d\cos\omega t + \sqrt{2hd}\,\sin\omega t, \qquad A = d, \quad B = -d, \quad C = \sqrt{2hd}, \quad \omega = \sqrt{g/d}.$$

分離的時刻

想一想 P 究竟在甚麼時候失去接觸？

彈簧並沒有繫在 P 上，所以它只能推，不能拉。作用於 P 的接觸力就是彈簧力 kx，當 $x > 0$ 時它保持為正，而當 x 回到 0 時它降至零，此時 P 正在向上運動。假如運動越

過這一點後仍按原來的方程進行，彈簧便要提供向下的拉力，但它做不到。所以 T 是使 $x = 0$ 的第一個正的時刻。

要求出這個時刻，可把振動的部分寫成單一個餘弦。設 $R = \sqrt{d^2 + 2hd}$，並以下式定義銳角 φ：

$$\cos\varphi = \frac{d}{R}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2hd}}{R},$$

於是 $\tan\varphi = \sqrt{2h/d}$，而 $\varphi = \arctan\sqrt{2h/d}$。那麼 $d\cos\omega t - \sqrt{2hd}\sin\omega t = R\cos(\omega t + \varphi)$，並且

$$x = d - R\cos(\omega t + \varphi).$$

所以 $x = 0$ 當且僅當 $\cos(\omega t + \varphi) = d/R = \cos\varphi$。當 t 由 0 開始增加時，角 $\omega t + \varphi$ 由 φ 出發，而在區間 $\varphi < \omega t + \varphi < 2\pi - \varphi$ 上有 $\cos(\omega t + \varphi) < \cos\varphi$，所以在該處 $x > 0$。餘弦值第一次回到 $\cos\varphi$ 是在

$$\omega T + \varphi = 2\pi - \varphi, \qquad \text{即} \qquad \omega T = 2\pi - 2\varphi.$$

除以 $\omega = \sqrt{g/d}$，得

$$T = \sqrt{d/g}\left(2\pi - 2\arctan\sqrt{2h/d}\right),$$

這正是所求的結果。

驗算

- 若 $h = 0$，質點是以零速率放在處於自然長度(natural length)的彈簧上，此時 $\varphi = 0$，而 $T = 2\pi\sqrt{d/g}$：剛好是一個完整的週期（period），之後 P 以零速率回到最高點。這完全正確。
- 當 $h \to \infty$ 時，$\varphi \to \frac{\pi}{2}$ 而 $\omega T \to \pi$：速度極快的質點只在彈簧上停留半個週期，因為與振幅（amplitude）相比，平衡位置的偏移 d 變得微不足道。
- 根據能量守恆（energy conservation），P 離開時的速率應為 $\sqrt{2gh}$。事實上 $\dot{x}(T) = R\omega\sin(2\pi - \varphi) = -R\omega\sin\varphi = -\sqrt{2gh}$。
- 數值上，取 $d = 0.1\,\mathrm{m}$、$h = 0.2\,\mathrm{m}$ 和 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 逐步模擬這個運動，得出接觸時間為 0.411 s，與公式吻合。隨機選取的 d 和 h 值亦吻合至小數點後六位。

常見錯誤

- 從平衡位置量度位移，卻忘記了題目中的 x 是壓縮量，結果得出 $A = 0$。
- 把初速率取為 $\sqrt{2gh}$，但正負號弄錯了：向下才是 x 增加的方向。

- 假設分離發生在平衡位置 $x = d$，或發生在半個週期之時。其實彈簧會一直推着質點，直至回復自然長度為止。

STEP 之外

這是單邊約束（unilateral constraint）最簡單的例子：彈簧能推而不能拉。運動在不同階段服從不同的微分方程，而各階段之間靠位置和速度的吻合來銜接，正如本題中自由下落階段與彈簧階段的銜接一樣。同樣的想法貫穿了碰撞和彈跳系統的理論。想進一步了解振子（oscillator），以及上文驗算中所用的那類能量方法，可參閱 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

詳細解答

STEP III 2009，第 11 題

力學 • 變質量運動

STEP III 2009，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q11

關鍵思路

當質量會改變時，$F = ma$ 並不是正確的定律：我們必須使用「力 = 動量（momentum）的變化率」。塵埃本身是靜止的，所以它沒有帶來任何動量，而彗星的動量 $M(1+bx)v$ 只會因外力而改變。這樣馬上便得到一個首次積分（first integral）。再寫成 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，它就變成一條可分離變量方程（separable equation），其解是一條關於 x 的二次方程。

解答

我們把彗星視為一個質點（particle）。它所收集的塵埃原本是靜止的，所以不會為彗星帶來動量，而作用於整個系統（彗星加上已收集的塵埃）的唯一的力，就是沿運動方向的引力 Mf。

第 (i) 部分

當 $f = 0$ 時沒有外力，所以動量守恆（conserved）。進入塵埃雲時動量為 MV；在時間 t 時動量為 $M(1+bx)v$。因此

$$(1+bx)\,v = V.$$

現在代入 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 並分離變量：

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t V\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = Vt,$$

其中用到了 $x = 0$ 當 $t = 0$。所以 $bx^2 + 2x - 2Vt = 0$，而由於 $x \geq 0$，我們要取平方根為正的那個根：

$$x = \frac{\sqrt{1+2bVt} - 1}{b}.$$

第 (ii) 部分

現在外力是 Mf，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[M(1+bx)v\big] = Mf.$$

由於 M 和 f 都是常數，由 0 積分至 t 可得 $M(1+bx)v - MV = Mft$（在 $t=0$ 時，$x=0$ 且 $v=V$）。因此

$$v = \frac{ft+V}{1+bx},$$

這正是所求。

? **想一想** 為甚麼我們不能直接寫 $M(1+bx)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Mf$？

那條方程忽略了把每一粒新塵埃由靜止加速至速率 v 所需的動量。積法則（product rule）顯示出兩者的分別：動量的變化率是 $M(1+bx)\dot{v} + Mb\dot{x}\,v$，而第二項正正就是這個「追上去」的代價。

與第 (i) 部分一樣，寫成 $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 並分離變量：

$$\int_0^x (1+bu)\,\mathrm{d}u = \int_0^t (fs+V)\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad x + \tfrac{1}{2}bx^2 = \tfrac{1}{2}ft^2 + Vt.$$

所以 $bx^2 + 2x - (ft^2 + 2Vt) = 0$，再次取非負根，得

$$x = \frac{\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1}{b}.$$

（設 $f=0$ 便回到第 (i) 部分的結果。）

恆定速率。彗星以恆定速率 V 運動，當且僅當對所有 t 都有 $x = Vt$，即 $\sqrt{1+bft^2+2bVt} = 1+bVt$。兩邊平方，這要求

$$1 + bft^2 + 2bVt = 1 + 2bVt + b^2V^2t^2 \quad \text{對所有}t,$$

而這恰好在 $f = bV^2$ 時成立。此時 $v = \dfrac{bV^2t+V}{1+bVt} = V$，所以在這個選擇下彗星確實以恆定速率運動：引力剛好提供了加速它所掃起的塵埃所需的動量。

極限速率。一般而言，利用由 x 的公式得出的 $1+bx = \sqrt{1+bft^2+2bVt}$，

$$v = \frac{ft+V}{\sqrt{1+2bVt+bft^2}} = \frac{f+V/t}{\sqrt{bf+2bV/t+1/t^2}} \longrightarrow \frac{f}{\sqrt{bf}} = \sqrt{\frac{f}{b}} \quad \text{當}t\to\infty,$$

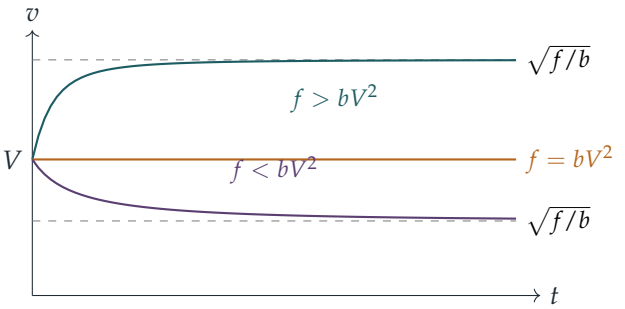
其中我們把分子和分母同除以 $t>0$，並用到了 $bf>0$（我們需要 $f>0$，因為力是沿運動方向作用的）。所以速率趨向常數 $\sqrt{f/b}$。

想一想 這與恆定速率的情況一致嗎？

一致：若 $f = bV^2$，則 $\sqrt{f/b} = V$，即彗星一直以來的速率。事實上，對 v^2 求導可得

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{2(ft+V)(f-bV^2)}{(1+2bVt+bft^2)^2},$$

所以若 $f > bV^2$，速率會穩步上升趨向 $\sqrt{f/b}$；若 $f < bV^2$，速率會穩步下降趨向它；若 $f = bV^2$，速率則保持為 V。



驗算

- 單位：b 的單位是 1/長度，而 f 是加速度，所以 f/b 的單位是速率的平方，$\sqrt{f/b}$ 則是速率；bft^2 和 bVt 都是無量綱（dimensionless）的，在平方根內也必須如此。
- 取 $b = 1$、$V = 1$、$f = 3$，以數值方法逐步計算方程 $\dot{x} = p/(1+bx)$、$\dot{p} = f$，結果與 x 和 v 的公式吻合至小數點後八位，而在 $t = 10^6$ 時速率為 $1.7320508\ldots \approx \sqrt{3}$。
- 當 $b \to 0$（沒有塵埃）時，$x = \left(\sqrt{1+bft^2+2bVt}-1\right)/b \to \frac{1}{2}ft^2 + Vt$，即常見的勻加速結果。

常見錯誤

- 對質量正在改變的物體使用 (質量) $\times\, \dot{v} =$ 力。
- 取了二次方程的負根，結果得出 $x < 0$。
- 對動量方程積分時，忘記了積分常數（constant of integration）MV。

STEP 之外

變質量問題是大學一年級的經典課題：同樣的動量帳目可推出火箭方程（rocket equation），而雨點穿過雲層下墜時不斷增大，所引出的方程也與這裏的十分相似。極限速率 $\sqrt{f/b}$ 是一個終端速度（terminal velocity），此時力剛好抵銷動量耗用於新增質量的速率。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對變質量系統有仔細的論述。

詳細解答

STEP III 2009，第 12 題

概率與統計 • 概率生成函數

> **STEP III 2009，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q12

關鍵思路

在第 (i) 部分，每擲一輪，硬幣數目的期望值（expectation）便減半，但擲的次數本身是隨機的，所以我們以它為條件（conditioning）：已知上一輪的數目，下一輪的數目便服從二項分佈（binomial distribution），其平均值很容易求得。這樣各個期望值便構成一個等比數列（geometric sequence）。在第 (ii) 部分，總數是若干個獨立同分佈（independent, identically distributed）部分之和，而概率生成函數（probability generating function）可把「獨立變量之和」化為「生成函數之積」。

解答

第 (i) 部分

每次擲出正面的概率為 $\frac{1}{2}$，且各次獨立，所以 $X_1 \sim \mathrm{B}(k, \frac{1}{2})$，並且

$$\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{2}k.$$

已知 $X_1 = x_1$ 時，Albert 會重新擲 x_1 次，各次互相獨立，所以 $X_2 \mid X_1 = x_1 \sim \mathrm{B}(x_1, \frac{1}{2})$，並且

$$\mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}x_1.$$

（若 $x_1 = 0$，他一次也不擲，$X_2 = 0$，與上式吻合。）對 X_1 所有可能的取值求平均，由全期望定律（law of total expectation）得

$$\mathrm{E}(X_2) = \sum_{x_1=0}^{k} \mathrm{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_1=0}^{k} x_1\,\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}(X_1) = \tfrac{1}{4}k,$$

正如所求。

想一想 為甚麼不能直接說「X_2 服從 $\mathrm{B}(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2})$」？

因為第二輪擲的次數是隨機變量（random variable）X_1，而不是數值 $\frac{1}{2}k$；事實上 $\frac{1}{2}k$ 甚至不一定是整數。以 X_1 為條件，擲的次數才得以固定，這時才可以使用二項分佈的平均值。

完全相同的論證適用於每一個階段：已知 $X_i = x_i$ 時，$X_{i+1} \sim \mathrm{B}(x_i, \frac{1}{2})$，所以 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_i)$。由歸納法（induction）得

$$\mathrm{E}(X_i) = \frac{k}{2^i} \qquad (i \geq 1),$$

再把這個等比級數（geometric series，公比為 $\frac{1}{2}$）求和，得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_i) = k\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots\right) = k.$$

第 (ii) 部分

就一枚硬幣而言，$Y_i = n$ 表示先擲出 n 次正面，然後擲出一次反面，所以

$$\mathrm{P}(Y_i = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot \tfrac{1}{2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

它的概率生成函數是一個等比級數，在 $|t| < 2$ 時收斂（convergent）：

$$G_{Y_i}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} t^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{1}{2 - t}.$$

這 k 枚硬幣是分開擲的，所以 $Y_1, \ldots, Y_k$ 互相獨立，而獨立變量之和的生成函數等於各自生成函數之積。因此

$$G_Y(t) = \mathrm{E}\big(t^{Y_1 + \cdots + Y_k}\big) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{E}\big(t^{Y_i}\big) = (2 - t)^{-k}.$$

平均值與方差（variance）。 求導數，得

$$G_Y'(t) = k(2 - t)^{-k-1}, \qquad G_Y''(t) = k(k+1)(2 - t)^{-k-2},$$

所以 $G_Y'(1) = k$ 及 $G_Y''(1) = k(k+1)$。因此

$$\mathrm{E}(Y) = G_Y'(1) = k,$$

而且，由於 $G_Y''(1) = \mathrm{E}\big(Y(Y-1)\big)$，

$$\mathrm{Var}(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - \big(G_Y'(1)\big)^2 = k(k+1) + k - k^2 = 2k.$$

分佈。 $\mathrm{P}(Y=r)$ 是 $G_Y(t)$ 中 t^r 的係數。寫成

$$G_Y(t) = 2^{-k}\left(1-\tfrac{1}{2}t\right)^{-k},$$

並使用負指數的二項級數（binomial series，在 $|t|<2$ 時成立）：

$$(1-x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}x^r.$$

（其係數為 $\dfrac{k(k+1)\cdots(k+r-1)}{r!}$，即 $\binom{k+r-1}{r}$。）取 $x=\frac{1}{2}t$，得

$$\mathrm{P}(Y=r) = \binom{k+r-1}{r}\frac{1}{2^{k+r}}, \qquad r=0,1,2,\ldots$$

想一想 有沒有方法可以直接看出這條公式？

有。設想把所有擲幣結果排成一長列：$Y=r$ 表示第 k 次反面出現在第 $k+r$ 次擲幣。這樣一個由 $k+r$ 次擲幣組成的特定序列，概率為 $2^{-(k+r)}$，而最後一次必定是反面，所以我們只需選擇首 $k+r-1$ 次擲幣中哪 r 次是正面：共有 $\binom{k+r-1}{r}$ 種方法。這就是負二項分佈（negative binomial distribution）。

驗算

- 當 $k=1$ 時，$\mathrm{P}(Y=r)=2^{-(r+1)}$，即單一硬幣的幾何分佈（geometric distribution），而 $\mathrm{E}(Y)=1$、$\mathrm{Var}(Y)=2$，正是 $p=\frac{1}{2}$、由 0 起計的幾何變量為人熟悉的數值。
- $G_Y(1)=1$，這是每個生成函數都必須滿足的。
- 當 $k=2$ 時，$\mathrm{P}(Y=0)=\frac{1}{4}$（兩枚硬幣第一次都擲出反面），而 $\mathrm{P}(Y=1)=\binom{2}{1}\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$（一枚硬幣先正面後反面，另一枚擲出反面：有兩種次序，每種的概率為 $\frac{1}{8}$）。
- 以分數作精確計算，已核實對於 $k\le 7$ 及 $i<40$ 有 $\mathrm{E}(X_i)=k/2^i$（所以部分和趨近 k），並且對於 $k\le 6$，$\mathrm{P}(Y=r)$ 的公式、平均值 k 及方差 $2k$ 均正確。

常見錯誤

- 取 $\mathrm{P}(Y_i=n)=(\frac{1}{2})^n$，忘記了最後的那次反面；這樣各概率之和便是 2。
- 使用 $\mathrm{Var}(Y)=G''(1)-\big(G'(1)\big)^2$，漏了 $G'(1)$ 一項，結果得出 k 而不是 $2k$。
- 把係數寫成 $\binom{k+r}{r}$：最後一次擲幣已固定為反面，所以只有 $k+r-1$ 次擲幣可以自由選擇。

STEP 之外

第 (i) 部分是一個分支過程（branching process）：每個「個體」（一次正面）在下一代有隨機數目的「後代」，這裏後代數目服從 $\mathrm{B}(1, \frac{1}{2})$，而由於後代數目的平均值小於 1，這個族羣終會滅絕。取條件的那一步 $\mathrm{E}(X_{i+1}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_{i+1} \mid X_i)\big)$ 就是塔性質（tower property），而在大學一年級的課程中，會證明 X_i 的生成函數是後代生成函數的 i 重複合（composition）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）對生成函數和分支過程均有論述。

詳細解答

STEP III 2009，第 13 題

概率與統計 • 中心極限定理

> **STEP III 2009，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/09-s3-q13

關鍵思路

一切都是單一角度 θ 的函數：$X = \cos\theta$ 及 $Y = \sin\theta$。因此，X 的分佈可由累積分佈函數（cumulative distribution function）求得（找出圓上哪一段弧使 $\cos\theta \le x$），而平均值、方差（variance）和協方差（covariance）不過是三角函數在一整圈上的平均。在第 (ii) 部分，$\overline{X}$ 是許多獨立同分佈（independent, identically distributed）變量的平均，這正是中心極限定理（central limit theorem）適用的情況。

解答

第 (i) 部分

由於 P 在單位圓上，$X = \cos\theta$ 及 $Y = \sin\theta$，其中 θ 在 $[0, 2\pi)$ 上的密度為 $\frac{1}{2\pi}$。

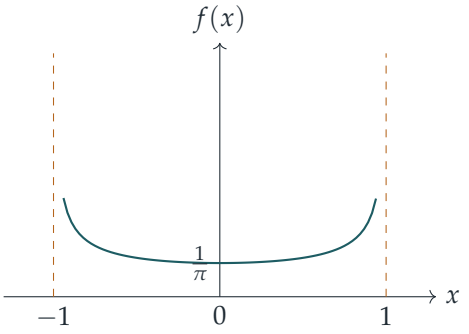
X 的密度。 顯然 $-1 \le X \le 1$。取 $-1 < x < 1$，並設 $\alpha = \arccos x \in (0, \pi)$。在 $[0, 2\pi)$ 上，$\cos\theta > x$ 當且僅當 $\theta < \alpha$ 或 $\theta > 2\pi - \alpha$，這是一段總長度為 2α 的弧。因此

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = 1 - \frac{2\alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\arccos x}{\pi}.$$

利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 求導，得

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1),$$

而在其他情況下 $f(x) = 0$。（簡單驗算一下：$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = 1$。）



密度在 $x = 0$ 處最小，在 $x = \pm 1$ 處趨向無窮大：點 P 在水平直徑兩端附近的水平移動最慢，所以 X 大部分時間都停留在那裏。

方差。 由對稱性（f 是偶函數），$\mathrm{E}(X) = 0$。直接用 θ 計算，

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2},$$

所以

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

同理（或因為 $\theta - \frac{\pi}{2}$ 同樣在一整圈上均勻分佈），$\mathrm{E}(Y) = 0$ 及 $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{2}$。

不相關（uncorrelated）。 我們有

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta \,\mathrm{d}\theta = 0,$$

所以 $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0 - 0 = 0$。因此 X 與 Y 不相關。

並非獨立。 它們肯定不是獨立的，因為 $X^2 + Y^2 = 1$：一旦知道 X，Y 就只能是 $\pm\sqrt{1 - X^2}$ 其中之一。舉一個具體事件為例：$\mathrm{P}(X > 0.8) > 0$ 及 $\mathrm{P}(Y > 0.8) > 0$，但 $\mathrm{P}(X > 0.8 \text{ 及 } Y > 0.8) = 0$，因為那樣的話 $X^2 + Y^2 > 1.28$。若兩者獨立，這個聯合概率便須等於那個（正的）乘積。相關係數為零只表示沒有線性關係；這裏的關係是一個圓，它足夠對稱，以致完全沒有線性趨勢。

第 (ii) 部分

每一對 (X_i, Y_i) 都服從第 (i) 部分的分佈，而由於各點是獨立選取的，下標不同的各對互相獨立。

$\overline{X}$ 與 $\overline{Y}$ 不相關。 協方差是雙線性（bilinear）的，所以

$$\operatorname{Cov}(\overline{X},\overline{Y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Cov}(X_i,Y_j).$$

當 $i \neq j$ 時，X_i 只取決於 P_i，Y_j 只取決於 P_j，而這兩點互相獨立，所以 $\operatorname{Cov}(X_i,Y_j)=0$。當 $i=j$ 時，由第 (i) 部分得 $\operatorname{Cov}(X_i,Y_i)=0$。每一項都等於零，所以 $\operatorname{Cov}(\overline{X},\overline{Y})=0$：$\overline{X}$ 與 $\overline{Y}$ 不相關。

近似概率。 各 X_i 獨立同分佈，平均值為 0，方差為 $\frac{1}{2}$。所以

$$\mathrm{E}(\overline{X})=0, \qquad \operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{2n},$$

這裏可以把方差相加，是因為各 X_i 互相獨立。

> **想一想** X 一點也不像正態分佈（normal distribution）（看看它的密度）。為甚麼我們可以用正態近似？

中心極限定理只要求各項獨立同分佈且方差有限，不論其分佈形狀如何。所以當 n 很大時，$\overline{X}$ 近似服從 $\mathrm{N}\left(0,\frac{1}{2n}\right)$，標準差（standard deviation）為 $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$。現在

$$\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2}{\sqrt{2n}} = 2\sigma,$$

所以設 $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$，則

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|\overline{X}| \le \sqrt{\tfrac{2}{n}}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}|}{\sigma} \le 2\right) &\approx \mathrm{P}(|Z|\le 2)\\ &= 2\Phi(2)-1 = 2(0.9772)-1 \approx 0.954 \approx 0.95,\end{aligned}$$

正如題目所求。

驗算

- 方差 $\frac{1}{2}$ 是合理的：$X^2+Y^2=1$，而由對稱性 $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{E}(Y^2)$，所以兩者都必定是 $\frac{1}{2}$。根本不用積分！
- 用 4×10^5 個隨機角度進行模擬，結果在多個 x 值上與 $F(x)=1-\frac{1}{\pi}\arccos x$ 吻合至約小數點後三位，並得出 $\operatorname{Var}(X)\approx 0.5007$ 及 $\operatorname{Cov}(X,Y)\approx 0.001$。
- 取 $n=50$ 並重複 40 000 次，模擬所得的 $\operatorname{Var}(\overline{X})$ 為 0.00997（理論值 0.01），而 $|\overline{X}| \le \sqrt{2/50} = 0.2$ 所佔的比例為 0.954，對比 $\mathrm{P}(|Z|\le 2)=0.9545$。

常見錯誤

- 對 $1 - \frac{1}{\pi}\arccos x$ 求導時弄錯正負號，得出一個負的「密度」。密度永遠不可能是負數，所以要檢查正負號。
- 由協方差為零推斷兩者獨立。獨立可推出協方差為零，但反過來並不成立。
- 使用 $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$：$n$ 個獨立副本的平均值，其方差是單個方差除以 n；按 $1/\sqrt{n}$ 的比例變化的是*標準差*。

STEP 之外

密度 $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$ 就是*反正弦分佈*（arcsine distribution），它出現的頻繁程度出人意表，例如它是隨機遊走（random walk）處於正值的時間所佔比例的極限分佈。這道題的其餘部分，談的是不相關與獨立之間的差距，以及中心極限定理；在大學一年級的概率課程中，你會用矩母函數（moment generating function）或特徵函數（characteristic function）來證明這個定理。事實上，$(\overline{X}, \overline{Y})$ 近似服從二元正態分佈（bivariate normal distribution），而對於聯合正態的變量，相關係數為零*確實*可推出獨立。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）對以上各點都有很好的講解。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

2009 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。