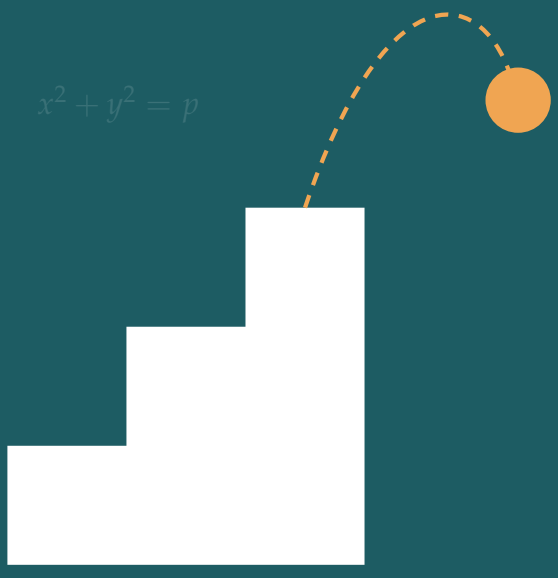
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

1997 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

1997 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

1997 年詳細解答

1997 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 42 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 硬幣組合的計數 純數學 . . . 3

第 2 題 反三角函數的導數 純數學 . . . 6

第 3 題 冪與個位數字 純數學 . . . 10

第 4 題 絕對值方程 純數學 . . . 13

第 5 題 幾何中的向量 純數學 . . . 16

第 6 題 以積分估計 π 的界限 純數學 . . . 19

第 7 題 高斯求積法 純數學 . . . 23

第 8 題 指數方程的根 純數學 . . . 26

第 9 題 相對速度 力學 . . . 30

第 10 題 圓周運動 力學 . . . 34

第 11 題 阻力的運動 力學 . . . 38

第 12 題 重心極限定理 概率與統計 . . . 42

第 13 題 條件概率 概率與統計 . . . 45

第 14 題 期望成本的最小化 概率與統計 . . . 48

STEP II

第 1 題 數字和與計數 純數學 . . . 51

第 2 題 遞推關係 純數學 . . . 54

第 3 題 部分分式積分法 純數學 . . . 57

第 4 題 餘式定理 純數學 . . . 60

第 5 題 複指數映射 純數學 . . . 63

第 6 題 三角方程 純數學 . . . 67

第 7 題 曲線描繪 純數學 . . . 71

第 8 題 以積分證明不等式 純數學 . . . 75

第 9 題 摩擦力與剛體平衡 力學 79
第 10 題 爆炸與彈性碰撞 力學 83
第 11 題 拋體運動 力學 87
第 12 題 項分佈的奇偶概率 概率與統計 91
第 13 題 蒲豐投針問題 概率與統計 95
第 14 題 道松過程 概率與統計 99

STEP III

第 1 題 指數冪級數 純數學 103
第 2 題 曲線描繪 純數學 107
第 3 題 單位根 純數學 111
第 4 題 算術幾何平均不等式 純數學 115
第 5 題 擺線的弧長 純數學 118
第 6 題 切比雪夫微分方程 純數學 121
第 7 題 e 的無理性 純數學 125
第 8 題 二次型的對角化 純數學 128
第 9 題 涉及彈簧的靜力學 力學 132
第 10 題 純滑動的滾動 力學 136
第 11 題 剛體轉動 力學 140
第 12 題 贈券收集問題 概率與統計 144
第 13 題 態分佈的矩生成函數 概率與統計 148
第 14 題 隨機變量的乘積 概率與統計 151

詳細解答

STEP I 1997，第 1 題

純數學 • 硬幣組合的計數

> **STEP I 1997，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

本題在 *Beyond STEP* 第 9.5 節湊零錢中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/making-change.html

關鍵思路

要數「方法」的數目，必須有一套系統，把每一個組合恰好列出一次。最自然的做法，是先定下面額最大的硬幣的數目，然後是次大的，如此類推。一旦只剩下 2p 和 1p 硬幣，數目便立即可得：2p 硬幣的數目決定了一切。這樣做還有一個好處：10p 的答案可以直接用於 20p 的答案。

解答

次序並不重要：一種「方法」就是選定每種硬幣各用多少個。因此我們要數的是非負整數（non-negative integer）解的數目。

基本組件：2p 和 1p 硬幣

要用 2p 和 1p 硬幣湊成 r 便士，我們選定 2p 硬幣的數目 b，它可以是 0 至 $\lfloor r/2 \rfloor$ 之間的任何整數。餘下的 $r - 2b \geq 0$ 便士便由 1p 硬幣湊成，而且恰好只有一種方法。所以方法的數目是

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

湊成 10 便士

- 使用一個 *10p* 硬幣。它獨自湊成整個金額：1 種方法。
- 不用 *10p* 硬幣。我們按 5p 硬幣的數目分類，即 0、1 或 2 個：

5p 硬幣數目	留給 2p 和 1p 的金額	方法數目 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

這樣共有 $1 + 3 + 6 = 10$ 種方法。

每一個組合都有確定的 10p 硬幣數目和 5p 硬幣數目，所以它恰好被數了一次，不多不少。總數是 $1 + 10 = 11$ 種方法，正如題目所求。

湊成 20 便士

以 $F(n)$ 表示用 5p、2p 和 1p 硬幣湊成 n 便士的方法數目。我們剛才已得出 $F(10) = 10$，而顯然 $F(0) = 1$（不用任何硬幣）。至於 $F(20)$，我們按 5p 硬幣的數目分類，由 0 至 4 個：

5p 硬幣數目	留給 2p 和 1p 的金額	方法數目
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

所以 $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$。

想一想 怎樣把 20p 和 10p 硬幣納入計算，而又不會重複計數？

再按大面額硬幣分類。要麼我們使用 20p 硬幣，那麼它必定是唯一的硬幣：1 種方法。要麼不用，這時我們按 10p 硬幣的數目分類：

- 兩個 10p 硬幣：沒有餘額，$F(0) = 1$ 種方法；
- 一個 10p 硬幣：餘下 10p，$F(10) = 10$ 種方法；
- 沒有 10p 硬幣：餘下 20p，$F(20) = 29$ 種方法。

這些情況互不相交（disjoint），並且涵蓋了所有可能，所以湊成 20 便士的方法數目是

$$1 + 1 + 10 + 29 = 41.$$

驗算

- 親手列出 10p 的情況：10；5+5；5+2+2+1、5+2+1+1+1、5+1 × 5；然後是 2 × 5、2 × 4+1 × 2、...、1 × 10（這類共六個）。合共 11 個。
- 用電腦簡單地數一次（對每種硬幣的數目逐一循環），得出 11 和 41。這同時確認了中間值 $F(10) = 10$ 和 $F(20) = 29$，以及不用 20p 硬幣時共有 40 種方法。
- 小的情況很容易親手驗算：用 5p、2p 和 1p 硬幣湊成 5p 共有 $F(5) = 4$ 種方法，與 $1 + 3$ 吻合。

常見錯誤

- 把次序也計算在內，以致 5+2+2+1 和 2+5+1+2 變成不同的「方法」。它們其實是同一組硬幣。
- 遺漏只用一個硬幣的方法：單獨一個 10p 硬幣，以及單獨一個 20p 硬幣。
- 只給出一個總數，卻看不出任何系統。題目已提醒，沒有解釋的答案不會得分，所以分類討論本身才是重點。

STEP 之外

這些其實是把 n 拆成取自某個固定集合的部分的分拆（partition）。處理它們的巧妙方法是使用生成函數（generating function）：方法的數目就是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

中 x^n 的係數，而我們的分類討論，不過是把這些因式逐個乘開而已。生成函數把計數問題化為代數，並由此通往歐拉（Euler）和拉馬努金（Ramanujan）關於分拆的研究。想進一步探索，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於數論方面，則可參考 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

詳細解答

STEP I 1997，第 2 題

純數學 • 反三角函數的導數

STEP I 1997，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q2

關鍵思路

在第 (i) 部分，f 的導數（derivative）會化簡為零，所以 f 是常數，但只限於它有定義的每一個區間（interval）之內：點 $x = -1$ 把實數線分成兩段，而兩邊的常數並不相同。在第 (ii) 部分，先求 x 對 y 的導數，再把結果倒轉過來會較為容易；功夫在於把 $\sin y^2$ 和 $\cos y^2$ 改寫成以 x 和 y 表示的式子，而 y 的取值範圍正正在這裏起作用。

解答

第 (i) 部分

這個函數對所有 $x \neq -1$ 都有定義。設 $u = \dfrac{1-x}{1+x}$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$（鏈式法則（chain rule）），

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

想一想 $\mathrm{f}'(x) = 0$ 是否表示 f 在所有地方都等於同一個常數？

不是。導數為零只能保證函數在一個區間上是常數（這是由中值定理（mean value theorem）得出的）。f 的定義域（domain）是 $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$，即兩個區間，所以 f 在

每一段上都是常數，而這兩個常數可以不同。要求出每個常數，可以代入一個方便計算的點，或者取極限（limit）。

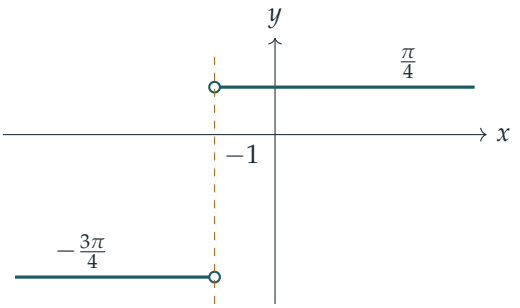
當 $x > -1$：取 $x = 0$。於是 $\mathrm{f}(0) = \tan^{-1} 0 + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$。

當 $x < -1$：令 $x \to -\infty$。這時 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$，而 $\dfrac{1-x}{1+x} \to -1$，所以 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \to -\frac{\pi}{4}$。由於 f 在這個區間上是常數，這個常數就等於該極限，即 $-\frac{3\pi}{4}$。（另一個做法：取 $x = -\sqrt{3}$，得 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}) = -\tan\frac{5\pi}{12}$，所以 $\mathrm{f}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$。）

因此

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

函數在 $x = -1$ 處出現大小為 π 的跳躍，是因為 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 在該處由 $-\infty$ 直衝到 $+\infty$，於是它的反正切（inverse tangent）便由 $-\frac{\pi}{2}$ 躍升至 $\frac{\pi}{2}$。



第 (ii) 部分

利用積法則（product rule）和鏈式法則，求 $x = y\sin y^2$ 對 y 的導數：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \sin y^2 + 2y^2 \cos y^2.$$

現在把兩個三角函數項都用 x 和 y 表示。

- 由於 $y > 0$，可以除以 y：$\sin y^2 = \dfrac{x}{y}$。
- 由於 $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos y^2 > 0$，所以取正平方根：

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

其中最後一步用到 $\sqrt{y^2} = y$，這是因為 $y > 0$ 才成立。

所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

這個式子嚴格為正，因為 $x > 0$、$y > 0$，而平方根是非負的。因此可以把它倒轉（反函數法則（inverse function rule）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，在 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$ 時成立）：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

這正是所要證明的結果。

想一想 為甚麼題目堅持要 $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$？

沒有這個條件，$\cos y^2$ 就有可能是負數，而正確的公式在平方根前面便要有一個負號。這個限制同時令 $y \sin y^2$ 在這個範圍內嚴格遞增（strictly increasing）（上面求得的導數是正數），由 0 上升至 $(\pi/2)^{1/2}$，所以在 $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$ 內的每一個 x 都恰好對應一個 y，y 才真正是 x 的函數。

驗算

- 第 (i) 部分：$\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$，而 $\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$。我們在 10,000 個隨機點上驗證過這兩個常數。
- 第 (ii) 部分：當 $x = 0.5$，以數值方法解 $y \sin y^2 = 0.5$ 得 $y \approx 0.81355$，而公式給出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$，與用數值方法求得的反函數的有限差分（finite difference）導數吻合。
- 在 $x = 0$ 附近，$y \sin y^2 \approx y^3$，所以 $y \approx x^{1/3}$，且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$；公式給出 $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$，兩者一致。

常見錯誤

- 斷定對所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) = \frac{\pi}{4}$，忘記了 $x = -1$ 把定義域分成兩部分。
- 寫出 $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$，卻沒有說明為甚麼應取正根。

STEP 之外

$\mathrm{f}' = 0$ 只能在定義域的各個連通（connected）部分上得出常數，這是中值定理的推論，而中值定理是大學分析（analysis）課程中最早遇到的重要結果之一。第 (ii) 部分是反函

數定理（inverse function theorem）的一個入門例子：導數不為零的函數可以在局部求反函數，而反函數的導數就是原來導數的倒數。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）對這兩個課題都有仔細的論述。

詳細解答

STEP I 1997，第 3 題

純數學 • 冪與個位數字

> **STEP I 1997，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q3

關鍵思路

動筆之前，先把 a_7 寫成 3 的單一個冪(power)：把 3 的冪取立方，只是把指數(exponent)乘以三。之後各部分其實是就同一個龐大的數提出不同的問題。個位數字（units digit）只取決於指數模（modulo）4 的值，因為 3 的冪的個位數字以周期（period）4 循環出現。大小的界只需要與 10 的冪作一個粗略的比較。最後一部分則建基於這個界：a_7 極大，$1/a_7$ 便小得可以忽略。

解答

首先求出封閉形式（closed form）。若 $a_n = 3^k$，則 $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$，所以每一步指數都乘以 3。由 $a_1 = 3^1$ 出發，用歸納法（induction）可得

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{所以} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

第 (i) 部分

乘積的個位數字只取決於各因數的個位數字。因此要追蹤 3^k 的個位數字，只需把上一個個位數字乘以 3，然後只保留個位：

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
個位數字：3^k	3	9	7	1	3	$\cdots$

到 $k = 4$ 時個位數字回到 1，此後 3, 9, 7, 1 這個規律便以周期 4 重複出現。（換句話說，$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$，所以 $3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$。）

? **想一想** 怎樣不用長除法求出 729 模 4 的值？

由於 $3 \equiv -1 \pmod 4$，我們有 $3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$。（直接計算：$729 = 4 \times 182 + 1$。）因此 $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$ 的個位數字與 3^1 的相同，即

故a_7 的個位數字是3.

第 (ii) 部分

把指數每三個分成一組：$729 = 3 \times 243$，所以

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

當中用到 $27 > 10$（以及正數取正數次冪後大小次序不變這個事實）。因此 $a_7 \geq 10^{100}$，正如所求。這個界遠遠談不上緊：事實上 a_7 有 348 位數字。

第 (iii) 部分

把分數拆開：

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

由於 $a_7 > 0$，第二項是正數。根據第 (ii) 部分，它同時極小：

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

因此

$$0.5 < \frac{a_7 + 1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

凡是嚴格介乎 0.5 與 0.505 之間的數，取至小數點後兩位都是 0.50：小數點後第三位是 0，遠遠未到需要進位的 5。所以

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = 0.50 \text{ （準確至小數點後兩位）。}$$

事實上，它的小數展開式以 0.5000... 開始，在 5 之後至少有 100 個零。

驗算

電腦可以精確地處理 3^{729}。把 3 連續取立方六次，可確認 $a_7 = 3^{729}$，這個數有 348 位數字，個位數字是 3，並且 $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$。用精確的分數運算，可確認 $\frac{a_7+1}{2a_7}$ 嚴格介乎 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{2} + 10^{-100}$ 之間。你也可以用較小的例子檢驗第 (i) 部分的方法：$a_2 = 3^3 = 27$ 的指數是 $3 \equiv 3 \pmod 4$，由此預測個位數字是 7，結果確實如此。

常見錯誤

- 把 a_7 看成 $3^{3\cdot 7}$ 或 3^{18}，而不是 3^{3^6}：每一步是把指數乘以 3，而不是加 3。

- 把指數對模 10 化簡，而不是對模 4 化簡。個位數字以周期 4 循環，所以起作用的是指數模 4 的值。
- 在第 (iii) 部分只寫「0.5」而不加任何理據。「準確至兩位小數」指的是 0.50，而且你需要用上下界說明這個值不可能達到 0.505。

STEP 之外

第 (i) 部分讓你初嘗模算術（modular arithmetic）和歐拉定理（Euler's theorem）的滋味：$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$，是因為 $\varphi(10) = 4$。數論學家要找出像 3^{3^3} 這類巨大冪塔（power tower）的末幾位數字，靠的正是逐層重複運用這種化簡。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 從零開始建立同餘（congruence）和元素的階（order of an element）的理論。

詳細解答

STEP I 1997，第 4 題

純數學 • 絕對值方程

STEP I 1997，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q4

關鍵思路

每個絕對值（modulus）項只會在其內部為零之處改變公式，因此四個「臨界點」（critical points）$x = -1, 0, 1, 2$ 把實數線分成五個區間（interval）。在每個區間上，每個絕對值都可以換成符號確定的普通括號，左邊於是變成線性函數（linear function），方程便容易處理。唯一要留意的是：線性方程的根，必須落在你正在處理的那個區間內才算數。

解答

設 $L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$。回想當 $t \geq 0$ 時 $|t| = t$，而當 $t < 0$ 時 $|t| = -t$。我們由右至左逐個區間處理。

$x \geq 2$。　四個絕對值的內部全部非負，所以

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

方程變成 $x + 2 = x + 2$，對每一個 $x \geq 2$ 都成立。所以整個區間 $x \geq 2$ 都是解。

? **想一想** 方程變成了恆等式（identity）。我們是否在代數運算上出了錯？

沒有。當 $x \to \infty$ 時，各絕對值中 x 的係數加起來是 $1 - 1 + 3 - 2 = 1$，常數項加起來是 $1 - 0 - 3 + 4 = 2$，恰好與右邊的 $x + 2$ 吻合。含絕對值的方程完全可以有一整個區間的解，而題目說「求所有解」，正是暗示可能會出現這種情況。快速檢驗一下：在 $x = 3$ 時，$L(3) = 4 - 3 + 6 - 2 = 5 = 3 + 2$。

$1 \le x < 2$。 此時 $x-2<0$，所以 $|x-2| = -(x-2)$，而

$$L(x) = (x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) = 5x - 6.$$

於是 $5x-6 = x+2$ 給出 $x=2$，它不在 $[1,2)$ 內。（它確是一個解，但我們已經把它計算在內。）沒有新的解。

$0 \le x < 1$。 此時 $x-1<0$ 亦成立，所以

$$L(x) = (x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) = -x.$$

於是 $-x = x+2$ 給出 $x=-1$，不在 $[0,1)$ 內。沒有解。

$-1 \le x < 0$。 此時還有 $|x| = -x$，所以

$$L(x) = (x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x.$$

方程 $x = x+2$ 根本沒有解。

$x < -1$。 四個絕對值的內部全部為負，所以

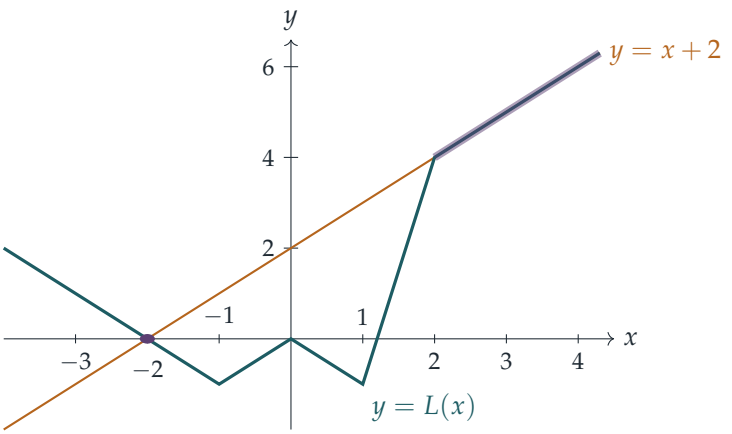
$$L(x) = -(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = -x - 2.$$

於是 $-x-2 = x+2$ 給出 $x=-2$，而 $-2 < -1$，所以這是一個真正的解。驗算：$L(-2) = 1-2+9-8 = 0 = -2+2$。

結論。 方程的解是

$$x = -2 \qquad \text{以及所有} x \ge 2.$$

圖像顯示了原因：$y = L(x)$（藍綠色）是由線段組成的折線，它與直線 $y = x+2$（琥珀色）在 $x=-2$ 處相交一次，然後由 $x=2$ 起與該直線重合。



驗算

代入幾個數值：$L(-2) = 0 = -2 + 2$，$L(5) = 6 - 5 + 12 - 6 = 7 = 5 + 2$，而在 $x = 0$ 時得 $L(0) = 1 + 3 - 4 = 0 \neq 2$。以電腦用精確分數運算，在 100,000 個隨機點上確認了 L 的五條線性公式；並發現在 $[-20, 20]$ 上步長為 0.01 的格點中，方程恰好在 $x = -2$ 以及所有 $x \geq 2$ 的格點上成立，其餘各處均不成立。

常見錯誤

- 在 $x \geq 2$ 時得到 $x + 2 = x + 2$，卻寫「無解」或「有無窮多個解，所以一定是哪裏出了錯」，而沒有看出這是一整個區間的解。
- 接受了像 $x = -1$（來自 $0 \leq x < 1$）這類落在所考慮區間之外的根。
- 遺漏了最外面的區域 $x < -1$，而孤立解 $x = -2$ 正正就在那裏。

STEP 之外

像 L 這樣的函數是分段線性（piecewise linear）的：它連續（continuous），並且在有限多個「角點」之間是線性的。這類函數是線性規劃（linear programming）和最優化（optimisation）的核心，在那裏，求絕對值之和 $\sum |x - a_i|$ 的最小值會引出中位數（median）而非平均數（mean）。它們也是「連續但在孤立點上不可微（not differentiable）」的函數的第一個例子，這個主題在 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）中有仔細的闡述。

詳細解答

STEP I 1997，第 5 題

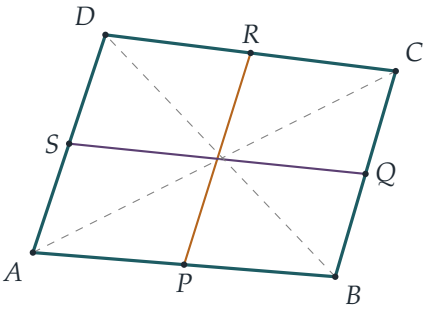
純數學 • 幾何中的向量

> **STEP I 1997，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q5

關鍵思路

長度的平方就是點積（dot product），中點（mid-point）就是平均，所以用位置向量（position vector）便可把整條恆等式化為代數運算。有用的竅門是看出等式兩邊其實都暗藏着對角線（diagonal）AC 和 BD：只要把每個差都用 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 表示出來，恆等式便水到渠成。至於其後的推論，只需用到四根桿的長度永遠不變這一事實。

解答



設 A, B, C, D 相對於任意原點的位置向量為 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$，並記 $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$。各中點為

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

四條邊

把每一項按 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ 展開，平方項 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$ 在兩邊各出現一次，互相抵消，餘下

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

（把 $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$ 乘開，即可核實這個因式分解。）用文字來說，這就是 $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$。

兩條中點連線

我們有

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

姑且這樣記。

> ? **想一想** 怎樣才可以求出 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$，而不必展開兩個四項式的平方？

利用向量的平方差公式（difference of two squares）：$|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$，此式成立是因為 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$。這裏

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

所以

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}\left(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

合併結果

把四條邊的結果加上中點連線結果的兩倍，

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2\left(|PR|^2 - |QS|^2\right)\\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

移項後得

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

這正是所要證明的。我們從沒有用過凸性（convexity），甚至沒有用過各點共面這一條件，所以恆等式對任意四點都成立，包括摺疊過來、以致其中兩根桿相交的四邊形。

推論

把恆等式移項，

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}\left(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2\right).$$

各桿都是剛性的，所以無論接合處怎樣屈曲，右邊的四個長度永遠不變。因此 $|PR|^2 - |QS|^2$ 在整個運動過程中是常數。換句話說，兩條對角線的純量積（scalar product）$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 保持不變，儘管對角線本身的長度和方向都在改變。

驗算

- 對於邊長為 a 和 b 的長方形，$|AB| = |CD| = a$ 而 $|AD| = |BC| = b$，而 PR 和 QS 連接對邊的中點，所以 $|PR| = b$ 及 $|QS| = a$。恆等式兩邊都等於 $2a^2 + 2b^2$。
- 對於菱形(rhombus)，四條邊全部相等，所以推論指出在任何位置都有 $|PR| = |QS|$。事實上，菱形的對角線互相垂直，所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$。
- 數值上，在 10^5 個隨機四邊形上，恆等式的誤差都在 10^{-12} 之內。對於一個 $|AB| = 3$、$|BC| = 4$、$|CD| = 5$、$|DA| = 6$ 的連桿機構（linkage），屈曲經過約 200 個位置，$|PR|^2 - |QS|^2$ 始終保持在 $\frac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$。

常見錯誤

- 搞錯哪些邊與哪條連線配對：PR 連接 AB 和 CD 的中點，而在恆等式中與 PR 放在一起的正是這兩條邊。
- 採用坐標設定，例如把 A 放在原點、B 放在坐標軸上，卻忘記了一般的四邊形需要其餘各點完全自由。用向量便可免去這些繁瑣的處理。

STEP 之外

P, Q, R, S 四點總是構成一個平行四邊形（瓦里尼翁定理，Varignon's theorem），而 PR、QS 就是它的對角線。這裏的恆等式與平行四邊形恆等式（parallelogram law）$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ 是近親；在大學一年級的線性代數課程中，後者恰好刻劃了那些由內積（inner product）導出的範數（norm）。機構運動時某個量保持不變，這種量稱為不變量（invariant），這個想法在數學中反覆出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是一個好去處，可以看到點積和內積如何得到嚴謹而完整的闡述。

詳細解答

STEP I 1997，第 6 題

純數學 • 以積分估計 π 的界限

STEP I 1997，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 4.3 節22/7 大於 π 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/twenty-two-sevenths.html

關鍵思路

被積函數（integrand）是一個有理函數（rational function），其分子的次數高於分母，所以第一步是以 x^2+1 作多項式除法（polynomial division）：得出一個多項式商式，積分起來毫不費力，再加上一個常數餘數除以 $1+x^2$，積分後得到反正切（arctangent）。π 正是由這個反正切而來。至於最後的不等式，則利用在 $[0,1]$ 上 $1 \leq 1+x^2$，把被積函數與 $x^4(1-x)^4$ 本身作比較。

解答

除法

以二項式定理（binomial theorem）展開，

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

我們以 x^2+1 作除式，每次消去首項：

$$\begin{aligned} x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\ -4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\ 5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\ -4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\ 4x^2 &= 4(x^2+1)-4. \end{aligned}$$

把 x^2+1 的各個倍數合併，

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

所以

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

快速驗算一下：當 $x=0$ 時，右方是 $4\cdot1-4=0$；當 $x=1$ 時，右方是 $(1-4+5-4+4)\cdot2-4=0$，兩次都與左方相符。

等於 $\frac{22}{7}-\pi$ 的積分

把恆等式兩邊除以 $1+x^2$（它永不為零），

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

在 $[0,1]$ 上逐項積分，並利用 $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$，

$$\begin{aligned} \int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{2}{3}x^6+x^5-\tfrac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\ &= \tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{3}+1-\tfrac{4}{3}+4\;-\;4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\ &= \tfrac{1}{7}+3-\pi\\ &= \frac{22}{7}-\pi, \end{aligned}$$

因為 $-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-2$ 及 $\arctan1=\frac{\pi}{4}$。這就是所求的結果。

$x^4(1-x)^4$ 的積分

利用開首的展開式，

$$\int_0^1x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{5}-\tfrac{4}{6}+\tfrac{6}{7}-\tfrac{4}{8}+\tfrac{1}{9}.$$

通分至公分母 $2520=5\cdot7\cdot8\cdot9$，

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π 的上下界

設 $f(x) = x^4(1-x)^4$，則當 $0 < x < 1$ 時 $f(x) > 0$。

上界（*upper bound*）。在 $(0,1)$ 上，被積函數 $f(x)/(1+x^2)$ 嚴格為正且連續(continuous)，所以它在 $[0,1]$ 上的積分嚴格為正。因此 $\frac{22}{7} - \pi > 0$，即 $\pi < \frac{22}{7}$。

下界（*lower bound*）。當 $0 < x < 1$ 時，$1 + x^2 > 1$，而由於 $f(x) > 0$，

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

想一想 為甚麼兩個積分之間的不等式是嚴格的，而不僅是 $\leq$？

兩者之差 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$ 在整個開區間 $(0,1)$ 上連續且嚴格為正，所以它在 $[0,1]$ 上的積分嚴格為正。（一個非負的連續函數，只要在某處為正，其積分便為正。）因此

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

移項後得 $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$。結合兩個界，

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

這正是所要證明的。

驗算

- 以數值計算，$\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$，而對第一個積分使用辛普森法則（Simpson's rule），所得的值準確至小數點後十二位都相同。
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$，明顯大於 0.0012645；上下界表示 $3.141270 < \pi < 3.142857$，而事實上 $\pi \approx 3.141593$。
- $\frac{1}{630}$ 這個值亦可由貝塔積分（beta integral）公式 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ 得出：它給出 $\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$。

常見錯誤

- 在長除法中漏掉 a_3 和 a_1 這兩個零係數：每一個冪次都要保留在原位，否則餘數便會算錯。
- 寫成 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$（與 $\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 混淆）；正確答案是 $4\arctan 1 = \pi$。

- 在最後一步只證明了 $\leq$。題目要求的是嚴格不等式（strict inequality），所以必須說明為何兩個積分不可能相等。

STEP 之外

這個優美的積分在二十世紀才被發現，它一舉說明了課本上的近似值 $\frac{22}{7}$ 高估了 π。同樣的想法——把 $x^n(1-x)^n$ 乘以簡單的函數後積分，再證明結果雖小但為正——正是證明 π 和 e 是無理數（irrational）的經典方法的核心：介乎 0 與 1 之間的整數並不存在。形如 $\int_0^1 x^m(1-x)^n \,\mathrm{d}x$ 的積分是貝塔函數（beta function）的值，在大學一年級的分析和概率課程中便會遇到。至於如何嚴謹地處理積分之間的嚴格不等式，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

詳細解答

STEP I 1997，第 7 題

純數學 • 高斯求積法

STEP I 1997，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q7

關鍵思路

等式兩邊對 P 都是線性（linearly）的，所以只要公式對四個基本的三次多項式（cubic）1、t、t^2 和 t^3 成立，它就對所有三次多項式成立。這樣一來，問題便化為含四個未知數的四條方程。這些方程雖然是非線性的，但奇次冪與偶次冪可以乾淨利落地分開，餘下的工作就交給關於 $t = 0$ 的對稱性（symmetry）。

解答

設 $\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$。則

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t,$$

而 $a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$ 也可以用完全相同的方式拆開。因此，公式對所有三次多項式成立，當且僅當它對 $\mathrm{P}(t) = t^k$，$k = 0, 1, 2, 3$ 成立。（「僅當」是因為每個 t^k 本身都是廣義的三次多項式；「當」則只需把各項加起來。）由於 $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ 在 $k = 0, 1, 2, 3$ 時分別為 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0，我們需要

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

? **想一想** 這些方程是非線性的。有沒有哪一個組合可以因式分解（factorise）？

取 (D) 減去 u_2^2 乘以 (B)：含 a_2 的項互相抵消，得

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

我們逐一排除前三個因式為零的情況。

- 若 $a_1 = 0$：由 (A) 得 $a_2 = 2$，由 (B) 得 $u_2 = 0$，於是 (C) 變成 $0 = \frac{2}{3}$。不可能。
- 若 $u_1 = 0$：由 (B) 得 $a_2u_2 = 0$，所以 $a_2u_2^2 = 0$，(C) 同樣變成 $0 = \frac{2}{3}$。不可能。
- 若 $u_1 = u_2$：兩點重合，(B) 變成 $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$，所以 $u_1 = u_2 = 0$，(C) 再次不成立。

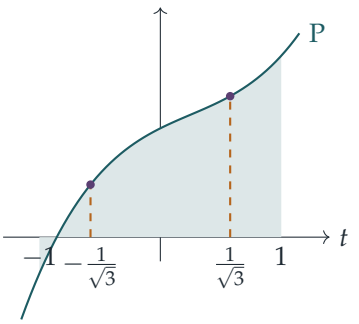
因此 $u_2 = -u_1$，且 $u_1 \neq 0$。這時 (B) 變成 $(a_1-a_2)u_1 = 0$，所以 $a_1 = a_2$，再由 (A) 得 $a_1 = a_2 = 1$。最後由 (C) 得 $2u_1^2 = \frac{2}{3}$，即 $u_1^2 = \frac{1}{3}$；(D) 隨之自動成立。所以

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

（或把 u_1 與 u_2 對調），也就是說，

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{對每一個三次多項式P.}$$

以上論證同時說明，除了重新標記之外，這是唯一的選擇。



無論畫的是哪一個三次多項式，陰影部分的面積都等於兩條虛線高度之和。

驗算

- $\mathrm{P}(t) = t^2$：積分為 $\frac{2}{3}$，而公式給出 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$。
- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$：積分為 $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$；公式給出 $2 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$，因為奇次項互相抵消。
- 這條公式對 t^4 並不準確：它給出 $2\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$，而積分卻是 $\frac{2}{5}$。可見三次多項式確實是極限。
- 數值上，以 10^4 個隨機三次多項式測試，兩邊相差不超過 10^{-14}。

常見錯誤

- 一開始就假設對稱（$u_2 = -u_1$，$a_1 = a_2$）。這樣做可以很快得到正確答案，卻沒有證明其他選擇都行不通；上面的因式分解則做到了這一點。
- 在除以某個量時，忘記考慮 $a_1 = 0$ 或 $u_1 = u_2$ 的情況。
- 只用 $\mathrm{P}(t) = 1$ 和 t^2 來檢驗：迫使對稱性出現的，正是奇次條件 (B) 和 (D)。

STEP 之外

這就是兩點高斯求積法（Gaussian quadrature）。只要適當選取 n 個點和相應的權（weights），就可以準確地求出所有次數不超過 $2n-1$ 的多項式的積分，是 n 個等距點所能做到的兩倍。最佳的點是勒讓德多項式（Legendre polynomials）的零點（這裏是 $\frac{1}{2}(3t^2-1)$，其零點為 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$），而這些多項式在 $[-1,1]$ 上是正交（orthogonal）的。正交多項式會在大學一年級的數值分析（numerical analysis）和求解微分方程（differential equations）時出現；Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）在級數解一章中會討論勒讓德方程。

詳細解答

STEP I 1997，第 8 題

純數學 • 指數方程的根

> **STEP I 1997，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

關鍵思路

方程 $x = a^x$ 的根必定是正數，因為 $a^x > 0$。因此我們可以取對數（logarithm），把問題轉化為研究 $f(x) = \ln x - x \ln a$ 在 $x > 0$ 上的零點（zero）。當 $a > 1$ 時，這個函數先升後降，所以只有在其極大值（maximum）不小於 0 時才有零點。當 $0 < a < 1$ 時，它嚴格遞增（strictly increasing），所以最多只能穿過零一次，問題就在於它究竟有沒有穿過。

解答

化為 $f(x) = 0$

全題中 $a > 0$，所以 $a^x = e^{x \ln a}$ 對所有實數 x 都有定義，而且是正數。若 $x \leq 0$，則 $a^x > 0 \geq x$，所以沒有滿足 $x \leq 0$ 的根。當 $x > 0$ 時，兩邊都是正數，而 ln 嚴格遞增，故

$$x = a^x \iff \ln x = x \ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{其中} f(x) = \ln x - x \ln a.$$

所以 $x = a^x$ 的實根正好就是 f 在 $(0, \infty)$ 上的零點。

當 $a > e^{1/e}$ 時沒有根

這時 $a > e^{1/e} > 1$，所以 $\ln a > 0$。求導數（derivative），得

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

它在 $0 < x < 1/\ln a$ 時為正，在 $x > 1/\ln a$ 時為負。所以 f 先遞增後遞減，它在 $(0,\infty)$ 上的極大值是

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

現在由 $a > e^{1/e}$ 得 $\ln a > 1/e$，再取一次對數（兩邊都是正數），得 $\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$。因此

$$f(x) \le -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{對所有} x > 0.$$

所以 f 永不為零，方程 $x = a^x$ 沒有實根，這正是所要證明的。

想一想 當 $a = e^{1/e}$ 時，以及當 $1 < a < e^{1/e}$ 時，情況究竟如何？

當 $a = e^{1/e}$ 時，極大值剛好是 0，在 $x = 1/\ln a = e$ 處取得，所以有一個（重）根 $x = e$：直線 $y = x$ 與 $y = a^x$ 在 (e,e) 相切（tangent）。當 $1 < a < e^{1/e}$ 時，極大值為正，而在兩端都有 $f \to -\infty$，所以有兩個根。（當 $a = 1$ 時，唯一的根是 $x = 1$。）題目並沒有要求討論這些情況，但它們說明 $e^{1/e}$ 正好就是分界點。

當 $0 < a < 1$ 時恰有一個根

現在 $\ln a < 0$，所以

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{對所有} x > 0,$$

故 f 在 $(0,\infty)$ 上嚴格遞增。因此 f 最多只有一個零點。

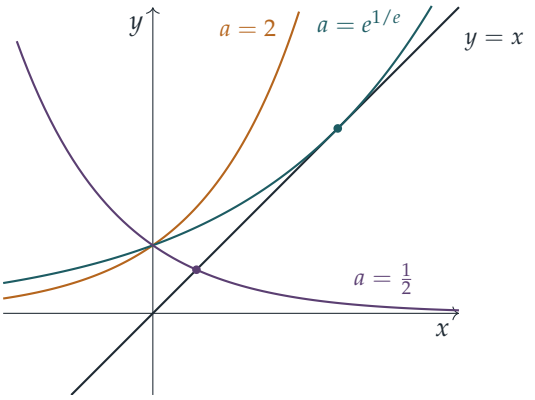
要說明它確實有一個零點，注意 f 在 $(0,\infty)$ 上連續（continuous），而且

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a\ln a = (1-a)\ln a < 0,$$

兩式都用到 $0 < a < 1$。根據介值定理（intermediate value theorem），f 在 a 與 1 之間有一個零點。

所以當 $0 < a < 1$ 時，方程 $x = a^x$ **恰有一個**實根，而且它位於區間 $(a,1)$ 之內。

從圖像看便一目了然：$y = a^x$ 遞減而且恆為正，而 $y = x$ 遞增，所以兩個圖像恰好相交一次。（等價地說，$g(x) = a^x - x$ 嚴格遞減，且 $g(0) = 1 > 0$，$g(1) = a - 1 < 0$。）



驗算

- 在分界處，$(e^{1/e})^e = e$，所以當 $a = e^{1/e} \approx 1.4447$ 時，$x = e$ 的確是一個根，與相切的情況吻合。
- 當 $a = \frac{1}{2}$ 時，用二分法（bisection）求得唯一的根 $x \approx 0.6412$，一如所料位於 $(\frac{1}{2}, 1)$ 之內。
- 數值上，隨機選取 200 個 $a > e^{1/e}$，函數 $a^x - x$ 在 $[-20, 20]$ 的細密格點上始終為正；$\ln x - x \ln a$ 的極大值與 $-1 - \ln \ln a$ 吻合；當 a 略小於 $e^{1/e}$ 時有兩個根；而隨機選取 500 個 $a \in (0, 1)$，每次都恰好只有一次變號。

常見錯誤

- 沒有先指出任何根都滿足 $x > 0$ 就取對數：否則 $\ln x$ 沒有定義，所以 $x \leq 0$ 的情況需要另作（一行的）論證。
- 當 $0 < a < 1$ 時只證明 f 遞增。這只證明了最多有一個根；你還需要找到一次變號，才能證明確實有一個根。
- 對 $\ln a > 1/e$ 取 ln 時把不等號的方向弄反；這一步之所以穩妥，是因為 ln 遞增，而且兩邊都是正數。

STEP 之外

當 $0 < a < 1$ 時，那個根是映射 $x \mapsto a^x$ 的不動點（fixed point），而反覆迭代 $x_{n+1} = a^{x_n}$ 就引出「無窮冪塔」（infinite power tower）$a^{a^{a^{\cdots}}}$。歐拉（Euler）證明了這個冪塔恰好在 $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ 時收斂（converge），所以同一個分界點 $e^{1/e}$ 再次出現。研究迭代何

時收斂，會引向大學一年級分析學中的壓縮映射定理（contraction mapping theorem）；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）涵蓋了介值定理及所需的背景知識。

詳細解答

STEP I 1997，第 9 題

力學 • 相對速度

> **STEP I 1997，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

關鍵思路

站在路邊看，一切都在移動；但從車上看，一切都是靜止的：汽車變成一排固定的方塊，方塊之間有長度為 c 的空隙，而小雞則以牠的相對速度（relative velocity）沿直線走過去。小雞要順利通過，唯一的條件是：當牠身處闊度為 a 的行車線內時，牠（相對於汽車）的橫向漂移不超過空隙長度 c。單憑這一個條件就能得出所求的不等式，而最小速率則來自求 $c\sin\theta + a\cos\theta$ 的最大值，這是標準的 $R\cos(\theta - \alpha)$ 做法。

解答

我們把小雞看成質點（particle），把汽車看成以速率 V 移動的長方形，每輛車都佔據橫跨道路、闊度為 a 的同一條帶狀區域。取 x 軸沿道路指向車流方向，y 軸橫跨道路，於是小雞的速度是 $(u\cos\theta, u\sin\theta)$，其中 $0 < \theta < \pi$。只有汽車所在的那條帶狀區域才需要考慮：在道路的其他地方，小雞毫無危險。

不等式

相對於汽車，小雞的速度是

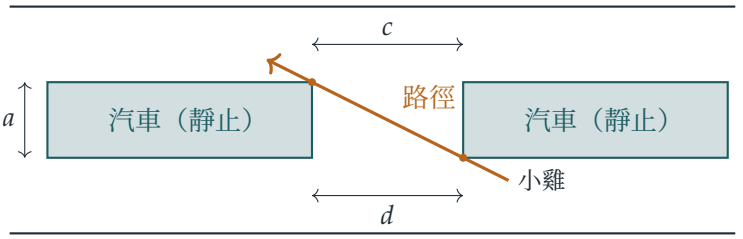
$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

在汽車的參考系（frame of reference）中，汽車靜止不動，小雞則以恆定速度 $\mathbf{w}$ 沿直線運動。牠橫過闊度為 a 的帶狀區域所需的時間是

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

而在這段時間內，牠（相對於汽車，逆着車流方向）向後滑移了

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$



圖中所示的是極端情況 $d = c$，此時路徑剛好沿着空隙的對角線。

想一想 為甚麼漂移量 d 最多只能是 c？

在汽車的參考系中，小雞穿過帶狀區域的路徑沿道路方向覆蓋了長度為 $|d|$ 的一段，而這一段上的每一點，小雞都會在行車線內的某個高度經過。靜止的汽車之間只留下長度為 c 的空隙，所以整段必須容納在同一個空隙之內：$|d| \le c$。（反過來說，若 $|d| \le c$，小雞可以選擇適當的出發時刻，使這一段落在某個空隙之內，從而安全橫過。）

特別地，$d \le c$，即

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

左邊是正數，所以凡是安全的橫過方式都有 $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$，我們可以把它除過去：

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

這正是所要證明的。（條件的另一半 $d \ge -c$，是防止跑得快的小雞越過空隙而撞上前面的汽車；它在下面求最小值的過程中不起作用。）

最小速率與橫過時間

寫成 $c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$，其中 α 是滿足以下條件的銳角：

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

所以 $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$，等號僅在 $\theta = \alpha$ 時成立。因此對每一個方向都有

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

而當 $\theta = \alpha$ 且 $u = Va/\sqrt{a^2 + c^2}$ 時，兩個不等式都取等號。這個選擇確實是安全的：它恰好給出 $d = c$（即圖中由一角到對角的路徑），而且 $-c \le d \le c$ 成立。所以最小可能的勻速率是 $Va/\sqrt{a^2 + c^2}$，方向角為 $\alpha = \arctan(c/a)$。

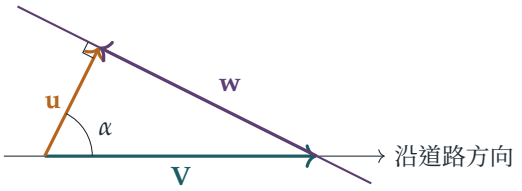
小雞以橫跨道路方向的速度分量 $u\sin\alpha$ 走過整個路闊 b，所以所需時間是

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

這就是所求的結果。

想一想 為甚麼最小速率出現在 $\tan\theta = c/a$ 的時候？

看看各個速度。小雞的速度是 $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$，而在最理想的情況下，相對速度 $\mathbf{w}$ 沿着空隙的對角線，方向為 $(-c, a)$。所以 $\mathbf{u}$ 的末端落在經過 $\mathbf{V}$ 的末端、沿該方向的直線上，而最短的 $\mathbf{u}$ 就是由原點到這條直線的垂線。它的方向 (a, c) 與道路成 $\arctan(c/a)$ 的角，而它的長度是 $V\sin(\text{對角線的傾角}) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$。



驗算

- 單位：$Va/\sqrt{a^2+c^2}$ 是速率，而 $\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ 是長度除以速率，即時間。
- 極限情況：若 $\theta = \frac{\pi}{2}$（垂直橫過），所得的界是 $u \geq Va/c$：小雞必須在一個空隙經過所需的時間 c/V 內走過闊度 a。這顯然是對的。
- 數值：取 $a = 1$，$c = 2$，$V = 2$，$b = 5$，最小速率是 $2/\sqrt{5} \approx 0.894$，此時 $\tan\theta = 2$，而橫過時間是 $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$。在道路參考系中直接模擬汽車和小雞的運動，結果與此吻合：以這個速率的 1.01 倍能找到安全的出發時刻，以 0.99 倍則找不到。

常見錯誤

- 在安全條件中使用橫過整條道路的時間 $b/(u\sin\theta)$。其實只有身處闊度為 a 的行車線內的那段時間才有關係。
- 弄錯相對速度的正負號：相對於汽車，小雞沿道路方向的速度是 $u\cos\theta - V$，而不是 $u\cos\theta + V$。

STEP 之外

轉換到障礙物靜止的參考系，是一個伽利略變換（Galilean transformation）；選取令問題變成靜態的參考系，是力學中最有用的習慣之一。這裏求最小值的過程也是一個小型的最優化（optimisation）問題：由一點到一條直線的最短向量就是垂線，你日後會在線性代數（linear algebra）中以正交投影（orthogonal projection）的形式再次遇上它。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）中有很多這類關於相對運動的題目。

詳細解答

STEP I 1997，第 10 題

力學 • 圓周運動

STEP I 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q10

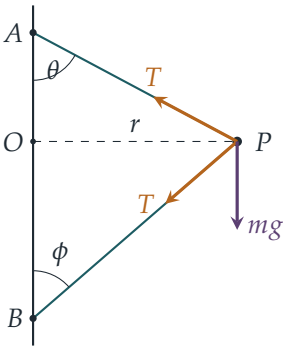
關鍵思路

由於小環是光滑(smooth)的，繩子可以自由地穿過它滑動，所以 P 兩邊的張力(tension)是相同的。沿垂直方向分解（沒有垂直加速度），再沿水平方向分解（加速度為 $r\omega^2$，指向轉軸），然後把一條方程除以另一條，令 T 和 m 消去。接着利用和差化積公式（sum-to-product formulae），這個比值便化為單一個半角的正切。

解答

模型與受力

我們把 P 視為一個質點（particle），繫於一條輕而不可伸長（light inextensible）的繩子上；小環是光滑的，所以 PA 和 PB 中的張力同為 T。設 O 為圓心，它在直線 AB 上，且 $OP = r$。作用於 P 的力有：它的重量 mg、沿 PA 的張力 T 和沿 PB 的張力 T。



繩段 PA 與垂直線成角 θ（即在 A 點 AB 與 AP 之間的夾角），所以它對 P 的拉力有向上

的分量 $T\cos\theta$ 和指向轉軸的分量 $T\sin\theta$。同樣，PB 在 B 點與垂直線成角 ϕ，它對 P 的拉力有向下的分量 $T\cos\phi$ 和指向轉軸的分量 $T\sin\phi$。

運動方程

P 以恆定速率沿水平圓周運動，所以它沒有垂直加速度，而有一個指向 O、大小為 $r\omega^2$ 的加速度。分解各力，得

$$\begin{aligned} \text{垂直方向：}\quad & T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ \text{水平方向：}\quad & T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

無論三角形的形狀如何，這兩條方程都成立（例如，假如 P 在 A 的上方，$\cos\theta$ 只不過變成負數而已）。由於 $mg > 0$，第一條方程給出 $\cos\theta > \cos\phi$，所以 $\phi > \theta$：下方的繩段與轉軸的傾斜角較大，正如圖中所示。

證明結果

把垂直方向的方程除以水平方向的方程，

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

由和差化積公式，

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

由於 $0 < \theta < \pi$ 及 $0 < \phi < \pi$（它們是一個真正的三角形 APB 的內角），我們有 $0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$，所以 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$，可以約去：

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

這正是所要證明的結果。

張力

> **想一想** 答案可以含有 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$，但不可含有 $\phi-\theta$。我們怎樣才能消去 $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$？

由水平方向的方程和第二條和差化積公式，

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

我們已知 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$ 的正切，所以可以借助一個對邊為 g、鄰邊為 $r\omega^2$ 的直角三角形求出它的餘弦。我們有 $0 < \phi - \theta < \pi$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，從而 $\cos\alpha > 0$：

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi - \theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}.$$

代入並約去 $r\omega^2$，

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)}.$$

這個結果有一個漂亮的解釋：$\sqrt{(mg)^2 + (mr\omega^2)^2}$ 是兩個張力的合力（resultant）的大小，而兩個大小同為 T、彼此夾角為 $\pi - (\theta + \phi)$（即角 APB）的力，其合力的大小為 $2T\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)$。

驗算

- 當 $\omega \to \infty$ 時，右邊趨向 0，所以 $\phi \to \theta$。小環被甩向外，直至與 AB 的中點處於同一水平，這正是重力可以忽略時我們預期的情況。
- 當 $\omega \to 0$ 時，$\tan\frac{1}{2}(\phi - \theta) \to \infty$，所以 $\phi - \theta \to \pi$：繩子筆直下垂，這是沒有旋轉時唯一可能的情況。
- 數值方面，我們隨機選取 A、B 和 P 的位置，直接由向量形式的運動方程求出 T 和 ω^2，再由坐標量度 θ 和 ϕ，然後與兩個結果比較：在約 8000 個個案中，最大的相對誤差為 3×10^{-12}。

常見錯誤

- 使用兩個不同的張力 T_1、T_2。小環光滑，就只有一條繩子和一個張力；若用兩個不同的張力，問題便無法確定。
- 把 PB 中張力的垂直分量的正負號弄錯：這段繩子是把 P 向下拉向 B 的。
- 為 $\cos\frac{1}{2}(\phi - \theta)$ 取負平方根，這樣會得出負的張力。

STEP 之外

對於給定的繩長，小環位於以 A 和 B 為焦點（foci）的橢圓（ellipse）上，而繩子與 P 點的切線成相等的角：這就是橢圓的反射性質（reflection property）。因此兩個張力的合力沿橢圓的法線（normal）方向，就像一條彎成這個形狀的光滑鐵線所施的反作用力一樣。把約束（constraints）看成垂直於曲面的力，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）

的起點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）收錄了許多這類旋轉系統的題目。

詳細解答

STEP I 1997，第 11 題

力學 • 有阻力的運動

STEP I 1997，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

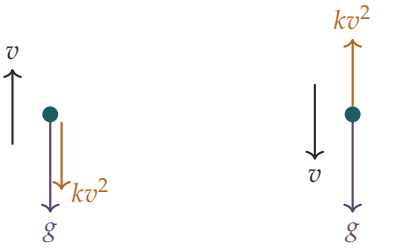
step.maths.org/questions/97-s1-q11

關鍵思路

阻力取決於速度，但我們想要的是速度作為距離的函數，而不是時間的函數。因此我們把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$。以 $w = v^2$ 為未知量，運動方程（equation of motion）便成為一條線性一階方程，用積分因子（integrating factor）即可一舉解出。最後一部分的關鍵在於一個物理事實：阻力永遠與運動方向相反，所以質點掉頭時，阻力的方向也隨之改變。

解答

我們把質點（particle）模擬為一個單位質量的點，沿鉛垂線運動，受其重量 g（向下）以及大小為 kv^2、方向與速度相反的阻力（resistance）作用。由拋射點起向上量度 s。



上升時　　下降時

上升運動

質點上升時，其速度 v 向上，所以阻力 kv^2 與重量一同向下作用。由牛頓第二定律(Newton's second law)（質量為 1）得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

這裏用到 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$。設 $w = v^2$，則 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

這條方程對 w 而言是線性的。乘以積分因子 e^{2ks}，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(w\,\mathrm{e}^{2ks}\right) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

當 $s = 0$ 時，$w = u^2$，所以 $C = u^2 + \frac{g}{k}$。因此

$$v^2 = \left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}\left(\mathrm{e}^{-2ks} - 1\right),$$

這正是所求的 $(*)$。（在 $v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$ 中分離變數（separating variables），得出一個對數，同樣可行。）

最大高度

當 $v = 0$ 時質點停止上升；由於 $(*)$ 的右方隨 s 嚴格遞減，這種情況恰好出現一次，就在最大高度 H 處。在 $(*)$ 中令 $v = 0$：

$$\left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

所以

$$H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{ku^2}{g}\right).$$

下降路徑

想一想 推導 $(*)$ 的過程從沒有提及運動方向。那麼它為甚麼不會繼續成立？

其實推導確實用到了方向，就在阻力的正負號上。下降時速度向下，所以阻力 kv^2 此時向上作用，與重量相反。仍然以向上量度 s，並以 v 表示向上的速度，方程變成

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

這是另一條微分方程（differential equation）。所以 $(*)$ 在下降路徑上並不成立。

為了具體看清這一點，我們以 $s = H$ 時 $w = 0$ 為條件解這條新方程。由積分因子 e^{-2ks} 得 $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$，而 $w(H) = 0$ 則迫使 $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$：

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

利用 $u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$，方程 $(*)$ 可以寫成 $v^2 = \frac{g}{k}\left(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1\right)$。設 $x = 2k(H-s) \ge 0$，這兩個式子分別是 $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$ 和 $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$，而

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}\right)^2 > 0 \quad \text{當} x > 0.$$

所以在最高點以下的每一點，$(*)$ 給出的速率都是錯的（兩者只在 $s = H$ 處相符，該處兩者皆為零）；它高估了下降時的速率。

還有一個簡捷的物理論證。方程 $(*)$ 把 v^2 表示為只與高度有關的函數，所以假如它在下降時也成立，質點經過每個高度時的速率便會與上升時相同，並以速率 u 返回起點。但阻力在整個運動過程中都作負功，所以質點損失了能量，返回時必定較慢。事實上，在 $s = 0$ 處，正確的公式給出

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，$\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$，所以 $H \to u^2/(2g)$，即大家熟悉的無阻力高度；而 $(*)$ 則趨向 $v^2 = u^2 - 2gs$（展開 $\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$）。
- 數值上，取 $u = 10$、$k = 0.05$、$g = 9.8$，對運動方程逐步計算得 $H \approx 4.1224$，與 $\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$ 吻合；質點返回時 $v^2 \approx 66.22$，與 $u^2/(1 + ku^2/g)$ 吻合，而不是 $u^2 = 100$。下降至一半時，$v^2 \approx 36.51$，而 $(*)$ 則會給出 44.87。

常見錯誤

- 用單一方程描述整個運動，並把阻力寫成 $-kv^2$：由於 $v^2 \ge 0$，這一項永遠指向同一方向，這正是一條公式無法同時涵蓋上升和下降兩段的原因。（若要用單一方程，便需要 $-kv|v|$。）
- 使用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 並解出以 t 表示的 v，然後苦於消去 t；用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ 則可直達答案。

STEP 之外

對於在空氣中高速運動的球，二次阻力（quadratic drag）是一個很好的模型，而下降方程顯示出*終端速度*（terminal velocity）：隨着下落距離增加，$v^2 \to g/k$。把阻力寫

成 $-kv|v|$，便得到一條描述整個運動的非線性方程；大學一年級力學有很大部分就是研究這類方程，其中力取決於速度，而能量並不守恆。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對取決於速度的力和終端速度有細緻的論述。

詳細解答

STEP I 1997，第 12 題

概率與統計 • 中心極限定理

> **STEP I 1997，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q12

關鍵思路

直接解出這個二次方程（quadratic equation），令 X 成為 T 的一個簡單函數。這樣，每個關於 X 的問題都變成關於 T 的問題，而後者的分佈（distribution）我們完全清楚。一個巧妙的簡化是：$1-T$ 同樣在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）。最後一部分涉及大量獨立（independent）副本之和，這正是提示我們使用中心極限定理（central limit theorem）。

解答

X 的分佈

由二次公式（quadratic formula），$x^2+2x+T=0$ 的根為 $x=-1\pm\sqrt{1-T}$。由於 $0\le T\le 1$，這兩個根都是實數，而較大的根取正號：

$$X=-1+\sqrt{1-T}.$$

當 T 取遍 $[0,1]$ 時，X 取遍 $[-1,0]$。

設 $U=1-T$。由於 T 在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈，U 亦然：把區間繞其中點反射，並不會改變均勻的密度（density）。所以 $X=\sqrt{U}-1$，其中 $U\sim \mathrm{U}[0,1]$。

$X>-\frac{1}{3}$ 的概率

由於 $X+1=\sqrt{U}$，而且兩邊皆為非負，

$$X>-\tfrac{1}{3} \iff \sqrt{U}>\tfrac{2}{3} \iff U>\tfrac{4}{9}.$$

因為兩邊皆為非負，平方後不等式的方向保持不變。因此

$$\mathrm{P}\left(X > -\tfrac{1}{3}\right) = \mathrm{P}\left(U > \tfrac{4}{9}\right) = 1 - \tfrac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

（等價地，$T < \frac{5}{9}$。）

平均值與方差

對於 $U \sim \mathrm{U}[0,1]$，其密度在 $[0,1]$ 上為 1，所以

$$\mathrm{E}(\sqrt{U}) = \int_0^1 u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{E}\big((\sqrt{U})^2\big) = \mathrm{E}(U) = \frac{1}{2}.$$

因此

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\big(\sqrt{U}\big) - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

減去一個常數並不會改變方差（variance），所以

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\big(\sqrt{U}\big) = \mathrm{E}(U) - \big(\mathrm{E}\sqrt{U}\big)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

正如所求。

> **想一想** 要求出這些矩（moments），我們需要 X 的概率密度函數（probability density function）嗎？

不需要。對任意函數 g，$\mathrm{E}\big(g(U)\big) = \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u$，所以我們可以直接用 U 來計算。如果你仍想知道密度：當 $-1 \le x \le 0$ 時，$\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}\big(U \le (x+1)^2\big) = (x+1)^2$，所以 X 在 $[-1,0]$ 上的密度為 $2(x+1)$。把 $x \cdot 2(x+1)$ 在該區間上積分，同樣得到 $-\frac{1}{3}$。

800 個根之和

由於各次實驗互相獨立，各個 X_i 亦互相獨立，而且每個的平均值（mean）為 $-\frac{1}{3}$，方差為 $\frac{1}{18}$。所以

$$\mathrm{E}(Y) = 800 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) = -\frac{800}{3}, \qquad \mathrm{Var}(Y) = 800 \cdot \frac{1}{18} = \frac{400}{9},$$

其中把方差相加時用到了獨立性。Y 的標準差（standard deviation）為 $\frac{20}{3}$。

由於 800 很大，中心極限定理指出 Y 近似服從 $\mathrm{N}\left(-\frac{800}{3}, \frac{400}{9}\right)$。我們要求

$$\mathrm{P}(Y \le K) \approx \Phi\left(\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3}\right) = 0.08.$$

查表得 $\Phi(1.405) \approx 0.92$，所以由對稱性 $\Phi(-1.405) \approx 0.08$。因此

$$\frac{K + \frac{800}{3}}{20/3} \approx -1.405,$$

$$K \approx -\frac{800}{3} - 1.405 \times \frac{20}{3} \approx -266.67 - 9.37 \approx -276.$$

想一想 這裏不是應該作連續性校正（continuity correction）嗎？

不需要。每個 X_i 都是連續隨機變量（continuous random variable），所以 Y 也是，因而無須作連續性校正。這種校正只用於以正態分佈（normal distribution）近似離散分佈（discrete distribution），例如二項分佈（binomial distribution）。

驗算

- 根是正確的：當 $T = 0$ 時，方程為 $x(x+2) = 0$，其較大的根為 $0 = -1 + \sqrt{1}$。
- $\mathrm{E}(X) = -\frac{1}{3}$ 位於 $[-1, 0]$ 之內，而密度 $2(x+1)$ 偏向 0 的一方，所以平均值高於中點 $-\frac{1}{2}$ 是合理的。
- 以 400 000 個 T 值進行模擬（simulation），得到 $\mathrm{P}(X > -\frac{1}{3}) \approx 0.555$，平均值 ≈ -0.3337，方差 ≈ 0.0556。直接模擬 Y 共 4000 次，得到 $\mathrm{P}(Y \leq -276.03) \approx 0.083$，與 0.08 吻合。

常見錯誤

- 在二次公式中取了負號。這樣得到的是較小的根。
- 寫成 $\mathrm{Var}(Y) = 800^2 \,\mathrm{Var}(X)$。這是 $800X_1$ 的方差，而不是 800 個獨立副本之和的方差。
- 用了 $+1.405$ 而不是 -1.405。概率 0.08 位於下尾，所以 K 必定低於平均值。

STEP 之外

把 $X = g(U)$ 寫成均勻變量 U 的函數，這個技巧也可以反過來用。如果 F 是任意一個連續的分佈函數（distribution function），那麼 $F^{-1}(U)$ 的分佈函數就是 F。這個*逆變換法*（*inverse transform method*）正是電腦利用均勻隨機數模擬隨機變量的方法。中心極限定理在這裏被當作黑箱使用，而在大學的第一個概率課程中，會用矩母函數（moment generating function）或特徵函數（characteristic function）來證明它。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）涵蓋了這兩個概念。

詳細解答

STEP I 1997，第 13 題

概率與統計 • 條件概率

STEP I 1997，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q13

關鍵思路

Blond 先生應否開燈，只取決於等着他的是哪一種陷阱，所以整道題歸結為一個條件概率（conditional probability）：在沒有金絲雀的情況下，陷阱是森蚺而不是炸彈的機會。刺客是誰之所以重要，只因為這會影響所用的武器。因此，我們用全概率公式（law of total probability）把兩層（先是刺客，然後是武器）結合起來，以「沒有金絲雀」為條件，再比較兩種做法的死亡風險。

解答

設定

設 M_i 為 i 先生佈下陷阱的事件，其中 $i = 1,2,3,4$，並設 A、B 和 C 分別為陷阱是森蚺、炸彈或金絲雀的事件。已知

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

這些數值互相吻合：$\frac{1+2+3+4}{10} = 1$，而且對每個 i，三個武器概率均為非負，其和為 $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$。牽涉其中的刺客恰好一名，武器亦恰好一種，所以事件 $M_i \cap A$、$M_i \cap B$ 和 $M_i \cap C$ 構成所有可能情況的一個劃分（partition）。

寂靜告訴他甚麼

根據全概率公式，

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(A \mid M_i) = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{100} = \frac{40}{100},$$
$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(M_i)P(B \mid M_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{100} = \frac{30}{100}.$$

所以 $P(C') = P(A) + P(B) = \frac{70}{100}$。（驗算一下：$P(C) = \frac{7+10+9+4}{100} = \frac{30}{100}$。）

> **想一想** 我們需要找出現在哪一名刺客的可能性最大嗎？

不需要。聽不到歌聲確實會改變每名刺客的可能性，但死亡風險只取決於武器。由於 $A \subseteq C'$ 及 $B \subseteq C'$，以 C' 為條件只是把這兩個概率按比例重新縮放：

$$P(A \mid C') = \frac{P(A)}{P(C')} = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}, \qquad P(B \mid C') = \frac{P(B)}{P(C')} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

有關刺客的資訊已經包含在這兩個數之中。

比較兩個選擇

設 K 為 Blond 先生被殺的事件。一旦以 C' 為條件，陷阱不是森蚺就是炸彈，而他的命運只取決於陷阱和他的選擇。

開燈。炸彈有 $\frac{1}{2}$ 的概率殺死他，森蚺則有 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 的概率殺死他。所以

$$P(K \mid C', \text{開燈}) = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{42} + \frac{8}{42} = \frac{17}{42}.$$

不開燈。炸彈必定不會殺死他，森蚺則有 $\frac{1}{2}$ 的概率殺死他。所以

$$P(K \mid C', \text{不開燈}) = \frac{3}{7}\cdot 0 + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{7} = \frac{12}{42}.$$

由於 $\frac{12}{42} < \frac{17}{42}$，**Blond 先生應該不開燈便進入寓所**。這樣他的生還機會是 $\frac{5}{7}$（約 71%），而開燈的話則是 $\frac{25}{42}$（約 60%）。

原因在於：森蚺雖然是較有可能出現的陷阱，但開燈真正令情況惡化的卻是炸彈。開燈把森蚺的風險由 $\frac{1}{2}$ 降至 $\frac{1}{3}$，卻把炸彈的風險由 0 升至 $\frac{1}{2}$。陷阱是森蚺的概率為 $\frac{4}{7}$，開燈可減少 $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{42}$ 的風險；陷阱是炸彈的概率為 $\frac{3}{7}$，開燈卻要付出 $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{42}$ 的代價。代價較大。

驗算

- 在他細聽之前，開燈的風險是 $\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{3}$，不開燈的風險是 $\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{2}$。這正是上面的答案乘以 $\frac{7}{10}$，理應如此，因為金絲雀對兩邊的比較都毫無影響。
- 只要 $p=P(A\mid C')$ 滿足 $\frac{1}{2}p<\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{3}p$，即只要 $p<\frac{3}{4}$，不開燈的策略便較佳。這裏 $p=\frac{4}{7}$，遠低於這個數值。
- 模擬 10^6 個晚上，得出開燈時的死亡率約為 0.404，不開燈時約為 0.286，與 $\frac{17}{42}\approx 0.405$ 及 $\frac{2}{7}\approx 0.286$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記以「沒有金絲雀」為條件，直接把 $P(A)=0.4$ 和 $P(B)=0.3$ 當作全部事實來計算。得出的建議相同，但死亡概率卻是錯的。
- 混淆生還與死亡：開燈時森蚺的數字是 $\frac{2}{3}$ 的生還機會，所以死亡機會是 $\frac{1}{3}$。
- 把各名刺客當作可能性均等，或者忽略刺客這一層，直接把武器概率取平均。

STEP 之外

這是決策論（decision theory）中的一道小題：我們選擇在後驗分佈（posterior distribution）下令期望損失（expected loss）最小的行動，而這裏的「損失」就是死亡的概率。只有 $P(A\mid C')$ 才起作用這一觀察，以及最佳行動隨之改變的臨界值 $p<\frac{3}{4}$，都是分析這類決策的典型手法：數據改變後驗分佈，後驗分佈決定行動。想進一步了解條件概率和貝葉斯更新（Bayesian updating），可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）。

詳細解答

STEP I 1997，第 14 題

概率與統計 • 期望成本的最小化

STEP I 1997，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q14

關鍵思路

成本 T 是隨機變量（random variable）X 的函數，所以它的期望值（expectation）就是該函數乘以概率密度函數（density）後的積分。在 $x = y$ 處把積分拆開，便可將 $\mathrm{E}(T)$ 寫成 y 的普通函數；之後求其最小值只是大學一年級程度的微積分練習：求導、令導數為零，再檢查駐點（stationary point）確實是極小值。

解答

我們取 $y \geq 0$，因為準備工作的份量為負數並無意義。記 $T = g(X)$，其中

$$g(x) = \begin{cases} y & x \leq y, \\ y + r + s(x - y) & x > y. \end{cases}$$

於是

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_y^\infty \big(r + s(x - y)\big)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

這裏我們把成本 y 抽了出來，因為無論發生甚麼事都要支付這筆費用。由於密度函數的積分為 1，第一個積分等於 y。

至於第二個積分，作代換 $u = x - y$，則 $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-u}$，而 u 由 0 變到 ∞：

$$\begin{aligned}\int_y^\infty (r + s(x-y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty (r+su)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-y}\Big(r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + s\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-y}(r+s),\end{aligned}$$

其中用到 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \big[-u\mathrm{e}^{-u}\big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（分部積分法，integration by parts）。因此

$$C(y) = \mathrm{E}(T) = y + (r+s)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

想一想 有沒有方法不用積分就能看出 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$ 這個因子？

有。水災造成損失的概率是 $\mathrm{P}(X > y) = \mathrm{e}^{-y}$。在已知損失發生的條件下，超出的部分 $X - y$ 仍然服從平均值為 1 的指數分佈（exponential distribution），因為指數分佈具有無記憶性（memoryless），所以損失的期望值是 $r + s\cdot 1$。兩者相乘便得 $(r+s)\mathrm{e}^{-y}$。

現在求最小值。求導得

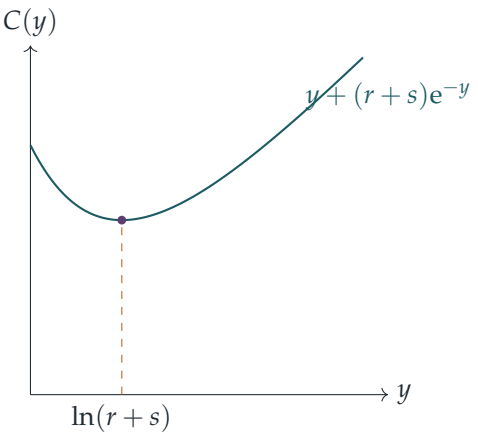
$$C'(y) = 1 - (r+s)\mathrm{e}^{-y}, \qquad C''(y) = (r+s)\mathrm{e}^{-y} > 0.$$

所以 $C'(y) = 0$ 當且僅當 $\mathrm{e}^y = r+s$，即 $y = \ln(r+s)$。由於對所有 y 都有 $C'' > 0$，C 是凸函數（convex），C' 遞增，因此 C 在 $y < \ln(r+s)$ 時遞減，在 $y > \ln(r+s)$ 時遞增。故此這個駐點就是全域最小值（global minimum），而要令總成本的期望值最小，應取

$$y = \ln(r+s),$$

這正是所求。成本期望值的最小值為 $C\big(\ln(r+s)\big) = \ln(r+s) + 1$。

以上需要 $\ln(r+s) \geq 0$，即 $r+s \geq 1$，題目隱含了這個假設。若 $r+s < 1$，則對每個 $y \geq 0$ 都有 $C'(y) > 0$，所以最佳選擇是 $y = 0$：損失實在太便宜，根本不值得作任何準備。



（草圖以 $r+s=3$ 繪畫。）

驗算

- 當 $y=0$ 時，我們必定要支付損失，而 $\mathrm{E}(T)=r+s\,\mathrm{E}(X)=r+s$，與 $C(0)$ 吻合。
- 取 $r=2$、$s=3$，公式給出 $y=\ln 5\approx 1.609$，最小成本為 $1+\ln 5\approx 2.609$；對 $C(y)$ 作精細的網格搜尋，找到的最小值點相同；另外在 $y=1$ 下模擬 4×10^5 年，得出平均成本為 2.844，而公式給出的值是 $1+5\mathrm{e}^{-1}\approx 2.839$。
- 當 $r+s$ 增大時，y 亦隨之增加：水災的代價愈高，就愈值得多作準備，這與常理相符。

常見錯誤

- 忘記準備成本 y 是每一年都要支付的，而不是只在 $X\le y$ 時才支付。
- 對 $sx\,\mathrm{e}^{-x}$ 積分時漏掉了 $-sy\,\mathrm{e}^{-x}$ 一項，結果得出 $\mathrm{e}^{-y}(r+s+sy)$ 而不是 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$。
- 找到駐點後，沒有證明它是極小值。

STEP 之外

這是不確定情況下作決策（decision-making under uncertainty）的一個小例子：選擇一個行動，使損失的期望值最小。同樣的結構，即在一筆確定的成本與一項預期的懲罰之間取得平衡，正是運籌學（operations research）中「報童問題」（newsvendor problem）以及統計學中貝葉斯決策（Bayes decisions）這個概念的基礎。上文用到的無記憶性，在連續分佈之中刻劃了指數分佈的特徵；Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教科書）涵蓋了這個性質，以及隨機變量函數的期望值。

詳細解答

STEP II 1997，第 1 題

純數學 • 數字和與計數

> **STEP II 1997，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

關鍵思路

不要把這些數逐一列出：先數清楚有多少個，再把每個位值（place value）的貢獻分開相加。在末三個數位上，每個可用的數字出現的次數都相同，所以這些和幾乎不用怎樣計算就出來了。更妙的是，這裏有一種對稱性（symmetry）：把每個數字 d 換成 $7-d$，就會把 $0 \leftrightarrow 7$ 和 $2 \leftrightarrow 5$ 互換，於是這些數可以兩兩配對，每對的和都相同，因數分解（factorisation）也隨即得出。

解答

哪些數符合條件？

介乎 1000 與 6000 之間而符合條件的數有四個數位，而它的千位數字必定是 $0, 2, 5, 7$ 其中之一。千位不可以是 0（否則不足四位），也不可以是 7（否則這個數會超過 7000）。所以千位數字是 2 或 5，而由 2000 至 5777 之間按此方式組成的每一個數都在範圍之內。兩個端點 1000 和 6000 本身含有數字 1 和 6，所以「之間」是否包括端點並無影響。

其餘三個數位各自可以獨立地取四個可用數字中的任何一個。所以共有

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

個數。

按位值相加

千位。這 128 個數之中有一半，即 64 個，以 2 開首，另外 64 個以 5 開首。千位數字的貢獻是

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

百位、十位和個位。固定其中一個數位。四個數字各自恰好在 $128/4 = 32$ 個數的這個數位上出現，因為不論這個數位上放的是哪個數字，其餘數位的選法數目都相同。因此這個數位上的數字總和是 $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$。這三個數位的權重分別是 100、10 和 1，所以它們合共的貢獻是

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

相加之後，所求的和是

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

寫成質數的乘積

我們有 $448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$，以及 $1111 = 11 \times 101$，其中 101 是質數（prime）（它不能被 2、3、5 或 7 整除，而且 $11^2 > 101$）。因此

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

想一想 有沒有方法可以不必逐個位值記帳，就看出答案？

有。如果 n 符合條件，那麼 $7777 - n$ 也符合條件：從 7777 逐位相減時不需要借位，而且每個數字 d 都會變成 $7-d$，這個變換把 $\{0,2,5,7\}$ 映射到它自身，並把首位數字 2 和 5 互換。所以這 128 個數可分成 64 對，每對的和都是 7777（沒有任何數會與自己配對，因為 7777 是奇數）。因此

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

與上面的計算結果一致。

驗算

用電腦在 1000 至 6000 之間作簡短的搜尋，可找到恰好 128 個符合條件的數，其和為 497 728，而 $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$。再從大小上檢查是否合理：符合條件的數的平均值是 $7777/2 = 3888.5$，正好穩穩落在 2000 至 5777 這個範圍的中間。

常見錯誤

- 容許 7 作為首位數字（得出超過 6000 的數），或者忘記 0 不可以放在首位。
- 以為每個數字在千位上也出現 128/4 次：千位上只會出現 2 和 5，各 64 次。
- 停在 497 728 或 448×1111，沒有把 1111 分解成 11×101。

STEP 之外

數算每個數字在每個數位上出現多少次，是算兩次（double counting）論證最簡單的例子：把同一個量按兩種次序求和，這裏就是按數和按數位。$7777 - n$ 的配對是一種對稱性論證，高斯（Gauss）的公式 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 也可以用同類的論證得出。數字取自某個固定集合的數，以及它們的和，是初等數論（elementary number theory）和組合數學（combinatorics）中的常見題材；Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）是很值得一讀的下一步。

詳細解答

STEP II 1997，第 2 題

純數學 • 遞推關係

> **STEP II 1997，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q2

關鍵思路

這一串等式其實是喬裝了的遞推關係（recurrence）：每一環都在說 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$，所以每一項都決定了下一項。先把頭幾項以分數形式算出來，再仔細觀察分子和分母。2 的冪很快就會出現；一旦有了猜想，遞推關係正好提供歸納法（induction）所需的那一步。

解答

找出規律

把這串等式逐個讀出來，得

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{及} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

因此

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

（這個遞推關係只在 $x_n \neq 3$ 時才有意義；我們稍後會看到，每個 x_n 都介乎 0 與 1 之間。）算出頭幾項：

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

分母 $3, 7, 15, 31$ 各自都比 2 的某個冪少一，即 $2^{n+1} - 1$，而每個分子又比它的分母少一。於是我們猜想

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

以歸納法證明

設 $P(n)$ 為命題 $x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$。

基礎情況（base case）。當 $n = 1$ 時，公式給出 $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$，所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟（inductive step）。假設對某個 $k \geq 1$，$P(k)$ 成立。為了令代數運算整潔一些，記 $N = 2^{k+1}$，於是 $x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$。那麼

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

它不等於零（事實上它大於 2，因為 $x_k < 1$），所以我們可以除以它：

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

> ? **想一想** 為甚麼這就是 $n = k+1$ 時的公式？

因為 $2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$。所以

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

這正是 $P(k+1)$。

由於 $P(1)$ 成立，而且對每個 $k \geq 1$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，根據歸納法，$P(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 都成立。這同時確認了對每個 n 都有 $0 < x_n < 1$，所以分母 $3 - x_n$ 永遠不會是零。

「其他方法」：線性化

這個猜想其實也可以推導出來。對於形如 $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$ 的遞推關係，只要引入一個各項均非零的新數列 (a_n)，並寫成 $x_n = 2a_n/a_{n+1}$，它就會變成線性（linear）的。代入後得

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3-\frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1}-2a_n}, \qquad \text{所以} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

輔助方程（auxiliary equation）$t^2 - 3t + 2 = 0$ 的根是 1 和 2，所以 $a_n = A + B \cdot 2^n$。取 $a_1 = 1$（我們可以隨意按比例縮放 a）及 $a_2 = 3$（使得 $x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$），便得 $a_n = 2^n - 1$，從而 $x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$，與之前的公式相同。

驗算

- 在公式中取 $n = 0$，得 $x_0 = 0$；而第一條等式 $3 = 2/x_1$ 確實就是一般的那一環 $x_0 + 2/x_1 = 3$ 在 $x_0 = 0$ 時的情況。這是一個漂亮的一致性檢查。
- 當 $n \to \infty$ 時，$x_n \to 1$。遞推關係的極限（limit）L 必須滿足 $L = 2/(3 - L)$，即 $L^2 - 3L + 2 = 0$，所以 $L = 1$ 或 $L = 2$，而我們的數列從下方趨近的正是 1。
- 由 $x_1 = \frac{2}{3}$ 出發，以精確分數反覆計算 $x_{n+1} = 2/(3 - x_n)$，結果對每個不超過 40 的 n 都與公式吻合；例如 $x_5 = \frac{62}{63}$。

常見錯誤

- 讀錯那串等式：方程是 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$，而不是 $x_{n+1} + 2/x_n = 3$。弄錯了就會得到另一個數列。
- 寫到「規律如此類推」就停筆。題目要求的是證明，而幾項數值只算是佐證。
- 在歸納步驟中，忘記把 $2 \cdot 2^{k+1}$ 改寫成 $2^{(k+1)+1}$，以致結論始終沒有明確顯示為命題 $P(k+1)$。

STEP 之外

形如 $x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ 的遞推關係，就是對一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）作迭代（iteration），而且總可以像「其他方法」那樣線性化。等價地，我們可以追蹤 2×2 矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的冪，它的特徵值（eigenvalues，這裏是 1 和 2）支配着長遠的變化。不動點（fixed points）1 和 2 分別是吸引的（attracting）和排斥的（repelling），這就是數列最終穩定於 1 的原因。關於矩陣的觀點，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）；至於數列收斂的一般理論，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析入門）。

詳細解答

STEP II 1997，第 3 題

純數學 • 部分分式積分法

STEP II 1997，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q3

關鍵思路

分母中的兩個二次式相乘得 x^4+4。這是經典的「喬裝了的平方差」（difference of two squares）：$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$。一旦求得部分分式（partial fractions），每一項都是標準積分。我們把每個分子拆成兩部分：一部分是其分母的導數（derivative）的倍數，積分後得對數（logarithm）；另一部分是常數，配方（completing the square）後得反正切（arctangent）。

解答

部分分式

首先留意

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

因此，把所求的恆等式兩邊同乘 x^4+4，我們需要

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{對所有} x.$$

展開左方得

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

與常數多項式 1 比較係數（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

由第一及第三條方程得 $c=-a$ 及 $d=b$。再由第四條方程得 $b=d=\frac{1}{4}$。最後，第二條方程變成 $\frac{1}{2}-4a=0$，所以 $a=\frac{1}{8}$。因此

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

即

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

（其實我們毋須任何代數運算，也可預料 $c=-a$ 及 $d=b$。以 $-x$ 代替 x，$\frac{1}{x^4+4}$ 保持不變，而兩個分母則互相對調。）

積分

想一想 我們怎樣求 $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ 的積分？

分母的導數是 $2x+2$。於是我們把分子寫成 $2x+2$ 的倍數，再加上餘下的部分：

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

配方得 $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$。因此

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

兩個二次式對所有實數 x 均為正數，所以每一項在 $[0,1]$ 上都是連續的。首兩項的形式為 f'/f，其中 $f>0$，積分後得 $\ln f$。最後兩項積分後得反正切。所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}\big[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)\big]\\ &\quad+\frac{1}{8}\big[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))\big]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\big[\tan^{-1}2-(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4})\big]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

正如所求。各個 $\ln 2$ 項和各個 $\frac{\pi}{4}$ 項都成對抵消，這正是上文留意到的對稱性所帶來的美妙結果。

驗算

- 當 $x = 0$ 時，部分分式給出 $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{0+4}$。當 $x = 1$ 時，則給出 $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{5}$，同樣正確。
- 被積函數（integrand）在 $[0,1]$ 上由 $\frac{1}{4}$ 遞減至 $\frac{1}{5}$，所以積分值必定介乎 0.2 與 0.25 之間。以數值計算，$\frac{1}{16}\ln 5 + \frac{1}{8}\tan^{-1} 2 \approx 0.100589 + 0.138394 = 0.238983$。對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule）得 0.2389834593，兩者吻合至約 16 位有效數字。

常見錯誤

- 試圖尋找實根，藉此在實數範圍內把 $x^4 + 4$ 因式分解（factorise）。它並沒有實根，所以因式必定是二次式。竅門在於加上再減去 $4x^2$ 來配方。
- 忘記反正切項的下限。$\tan^{-1}(0+1) = \frac{\pi}{4}$ 與 $\tan^{-1}(0-1) = -\frac{\pi}{4}$ 必須兩者都計算在內，才會互相抵消。

STEP 之外

因式分解 $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ 是熱爾曼（Sophie Germain）恆等式 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ 的特例。舉例說，它說明了 $n^4 + 4$ 只有在 $n = 1$ 時才是質數。更一般而言，每個實係數多項式都可分解成實係數的一次因式和二次因式，因為複數根總是以共軛對（conjugate pairs）的形式出現。所以，只要懂得部分分式，從而懂得對數和反正切，便足以求出任何有理函數（rational function）的積分。利用圍道積分（contour integration），你幾乎毋須計算便可求得 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）解釋了箇中原因。

詳細解答

STEP II 1997，第 4 題

純數學 • 餘式定理

> **STEP II 1997，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q4

關鍵思路

以一個次數（degree）為 d 的多項式作除式，所得餘式（remainder）的次數必小於 d，而且恆等式（identity）被除式 = 除式 × 商式 + 餘式 對每一個 x 都成立。因此，我們代入令除式變為零的 x 值：商式（quotient）那一項隨即消失，只剩下餘式。整道題目用的就是這一招，前後共用了三次。

解答

餘式定理（remainder theorem）

把 $\mathrm{p}(x)$ 除以一次多項式 $x-a$，得到商式 $\mathrm{s}(x)$ 和餘式 R，而餘式的次數小於 1，所以 R 是常數：

$$\mathrm{p}(x) = (x-a)\,\mathrm{s}(x) + R \qquad \text{對所有} x.$$

由於這是關於 x 的恆等式，我們可以代入 $x = a$。右邊第一項變成 $0 \cdot \mathrm{s}(a) = 0$，於是剩下 $\mathrm{p}(a) = R$。所以餘式就是 $\mathrm{p}(a)$，正如所求。

第 (i) 部分

根據餘式定理，題目給出的餘式表示

$$\mathrm{p}(1) = 3, \qquad \mathrm{p}(2) = 1, \qquad \mathrm{p}(3) = 5.$$

把 $x = 1, 2, 3$ 代入 $\mathrm{p}(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{q}(x) + \mathrm{r}(x)$，每次第一項都會變成零，所以

$$\mathrm{r}(1) = 3, \qquad \mathrm{r}(2) = 1, \qquad \mathrm{r}(3) = 5.$$

想一想 我們對 $\mathrm{q}(x)$ 一無所知。這會構成問題嗎？

不會：當 $x = 1, 2, 3$ 時，因式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 等於零，所以無論 q 是甚麼，它都沒有任何貢獻。三個函數值足以確定 r，因為它最多只有三個係數。

次數不超過二的多項式，可以方便地寫成

$$\mathrm{r}(x) = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$

因為這樣每次代入都會逐一消去某些項：

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad C = 3, \\ x = 2: &\quad B + C = 1 \;\Rightarrow\; B = -2, \\ x = 3: &\quad 2A + 2B + C = 5 \;\Rightarrow\; 2A - 4 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; A = 3. \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{r}(x) = 3(x-1)(x-2) - 2(x-1) + 3 = 3x^2 - 11x + 11.$$

驗算：$\mathrm{r}(1) = 3 - 11 + 11 = 3$，$\mathrm{r}(2) = 12 - 22 + 11 = 1$，$\mathrm{r}(3) = 27 - 33 + 11 = 5$。

第 (ii) 部分

（題目有一處寫作 $\mathrm{P}_n(x)$；它指的是同一個多項式 $\mathrm{P}(x)$。）根據餘式定理，我們需要

$$\mathrm{P}(a) = a \qquad \text{其中} a = 0, 1, \ldots, n.$$

多項式 x 本身已經符合這個要求，但它的次數不對。所以我們改為考慮 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$：我們需要 $\mathrm{D}(a) = 0$ 對 $a = 0, 1, \ldots, n$ 成立，於是根據因式定理（factor theorem，即餘式為 0 時的餘式定理），$x, x-1, \ldots, x-n$ 各自都整除 $\mathrm{D}(x)$。這 $n+1$ 個一次因式互不相同，所以它們的乘積整除 $\mathrm{D}(x)$，而這個乘積的次數是 $n+1$。

想一想 怎樣才能令 $\mathrm{P}(x)$ 的次數剛好是 $n+1$？

取 $\mathrm{D}(x)$ 為該乘積本身（喜歡的話也可以乘上一個非零常數）。加上 x 不可能抵銷它的首項（leading term）x^{n+1}，因為 $n+1 \geq 2$。所以

$$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

的次數是 $n+1$，並且 $\mathrm{P}(a) = a + 0 = a$ 對每個滿足 $0 \leq a \leq n$ 的整數 a 都成立。這就是一個符合要求的多項式。

事實上，這個論證找出了所有這樣的多項式：如果 P 的次數是 $n+1$，並且有題目所述的餘式，那麼 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$ 的次數最多是 $n+1$，又能被那個次數為 $n+1$ 的乘積整

除，所以 $\mathrm{D}(x) = k\,x(x-1)\cdots(x-n)$，其中 k 是常數，而且必須有 $k \neq 0$，次數才會是 $n+1$。一般的答案是

$$\mathrm{P}(x) = x + k\,x(x-1)(x-2)\cdots(x-n), \qquad k \neq 0.$$

驗算

- 當 $n = 1$ 時，$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1) = x^2$：除以 x 餘 0，除以 $x-1$ 餘 1，符合要求。
- 在 (i) 中，任取一個 q，例如 $\mathrm{q}(x) = x$，構作出 p，再用綜合除法（synthetic division）分別除以 $x-1$、$x-2$、$x-3$：所得餘式正是 $3, 1, 5$。
- 我們用電腦驗證了以下各項：以 1000 個隨機多項式檢驗餘式定理；第 (i) 部分取 100 個隨機選擇的 q；第 (ii) 部分取 $n = 1, \ldots, 11$ 及 $k = 1, -3, 7$。每一個餘式都完全吻合。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分，忘記了多項式 $\mathrm{P}(x) = x$ 本身雖然滿足各項條件，但次數是 1 而不是 $n+1$；正是那個乘積項把次數修正過來。
- 就 $ax^2 + bx + c$ 的係數解三條聯立方程並無不妥，只是較慢；採用嵌套形式 $A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C$ 則可免去消元的步驟。

STEP 之外

第 (i) 部分是多項式插值（polynomial interpolation）的一個例子：通過任意 m 個 x 坐標互不相同的點，恰好有一個次數小於 m 的多項式，而我們所用的嵌套形式就是它的牛頓（Newton）形式。同樣的推理，用環（ring）的語言來說，就是多項式的中國餘數定理（Chinese remainder theorem）：知道一個多項式模 $x-1$、$x-2$ 和 $x-3$ 的結果，等同於知道它模這三者乘積的結果。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）詳細講述了多項式環和這個定理。

詳細解答

STEP II 1997，第 5 題

純數學 • 複指數映射

STEP II 1997，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 5.7 節作爲映射的複指數函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/complex-exponential.html

關鍵思路

這個關係式其實就是 $z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$，只不過寫成了模—輻角形式（modulus–argument form）：u 決定 z 的模（modulus），v 決定它的輻角（argument）。一旦看出這一點，每一部分其實都是極坐標（polar coordinates）的問題。唯一要留神的是，輻角只能確定到相差 2π 的整數倍，所以這個映射是多對一（many-to-one）的；要得到一一對應（one-to-one correspondence），就必須把 u–v 平面裁成一條高度恰當的水平帶狀區域，並且小心決定哪些邊界要包括在內。

解答

當 $z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ 時求 w

由於 $\mathrm{e}^{u} > 0$ 而 $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$，這個關係式表示

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

當 $z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ 時，$|z| = \mathrm{e}$ 而 $\arg z = \frac{\pi}{2}$。所以 $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$，得 $u = 1$（實指數函數是一對一的）；又 $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$，所以 $\cos v = 0$ 且 $\sin v = 1$，得 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$。因此

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

這樣的 w 有無窮多個，它們在垂直線 $u = 1$ 上每隔 2π 出現一個。

直線 $u =$ 常數 的像

在直線 $u = c$ 上，點 z 的模是 e^c，輻角是 v。當 v 取遍所有實數時，$\cos v + \mathrm{i}\sin v$ 會繞單位圓走（無窮多圈），所以 z 描出的軌跡是

$$\text{圓} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{圓心} O, \text{ 半徑} \mathrm{e}^c.$$

c 愈大，圓就愈大；$c = 0$ 給出單位圓；當 $c \to -\infty$ 時，這些圓向 O 收縮，但永遠不會到達該點，因為 $\mathrm{e}^c > 0$。

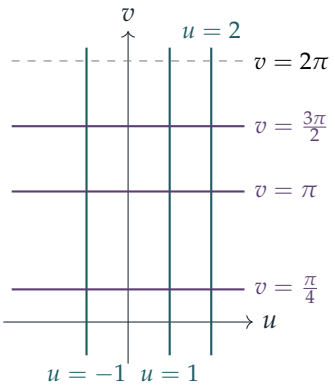
直線 $v =$ 常數 的像

在直線 $v = c$ 上，我們有 $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$，即固定的單位向量 $(\cos c, \sin c)$ 的正數倍。當 u 取遍 $\mathbb{R}$ 時，倍數 e^u 取 $(0, \infty)$ 中的每一個值恰好一次。所以它的像是

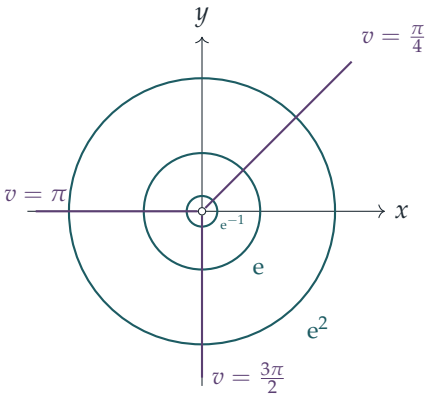
$$\text{由} O \text{ 出發、以角度} c \text{ 與正} x \text{ 軸相夾的半直線（half-line），但不包括} O \text{ 本身。}$$

直線 $v = c$ 與 $v = c + 2k\pi$ 給出同一條半直線。舉例說，用直角坐標表示時，$v = \frac{\pi}{4}$ 給出 $y = x$ 中 $x > 0$ 的部分，而 $v = \pi$ 給出負 x 軸。

下圖顯示 u–v 平面上由直線組成的網格及其像：垂直線變成圓，水平線變成射線。



u–v 平面



x–y 平面

（圖中的圓並非按比例繪畫：半徑 e^{-1}、e、e^2 增長得非常快。空心圓圈標示 O，這一點永遠不會到達。）

與第一象限一一對應的子集

點 z 位於開的第一象限（first quadrant），當且僅當 $z \neq 0$ 而且它有一個嚴格介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間的輻角。取

$$W_1 = \left\{(u, v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u, v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1 的每一點都映射到第一象限內，因為在那裏 $e^u\cos v > 0$ 且 $e^u \sin v > 0$。反過來，對第一象限的一點 z，等式 $z = e^u(\cos v + i\sin v)$ 成立當且僅當 $u = \ln|z|$ 且 $v = \theta + 2k\pi$，其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是它的主輻角（principal argument）。這些值之中恰好只有一個，即 $k = 0$ 的那個，落在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 內，所以 z 在 W_1 中恰有一個原像（preimage）。因此 W_1 與該象限一一對應。取 $k = 1$ 作同樣的論證，便適用於 W_2，它就是 W_1 向上平移 2π 而成。

（任何帶狀區域 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ 都同樣可行。）

與 $0 < |z| < 1$ 一一對應的子集

現在我們需要 $|z| = e^u < 1$，即 $u < 0$，而且每一個輻角都必須恰好取到一次，所以 v 必須取遍一個長度恰好是 2π 的區間。

> **想一想** 這條帶狀區域應該包括上邊界、下邊界、兩者都包括，還是兩者都不包括？

恰好包括其中一條。假如兩條都包括，例如 $0 \le v \le 2\pi$，那麼 $(u, 0)$ 和 $(u, 2\pi)$ 都會映射到正實軸上的同一點 e^u，這個對應就不是一對一的了。假如兩條都不包括，正實軸就完全取不到。只包括一條邊界，才能令每個輻角恰好出現一次。所以取

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

對於 W_3：若 $0 < |z| < 1$，則必然有 $u = \ln|z| < 0$，而在 z 的各個輻角 $\theta + 2k\pi$ 之中，恰好有一個落在 $[0, 2\pi)$ 內，因為這個區間的長度是 2π，而且只包含它的一個端點。所以每一個這樣的 z 在 W_3 中恰有一個原像，而 W_3 的每一點都映射到一個滿足 $0 < e^u < 1$ 的 z。對於 W_4，把區間換成 $(-\pi, \pi]$，同樣的論證依然成立，這個區間對應的正是主輻角。兩者都是把半平面 $u < 0$ 裁成高度為 2π 的半開帶狀區域。

驗算

- 代入 $u = 1$、$v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$：$z = e(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = ie$，符合要求。
- 數值上，我們對數以千計的隨機 (u, v) 作檢驗，發現 $|z| = e^u$ 及 $\arg z \equiv v$ 的誤差都在 10^{-9} 之內。對每個目標集合中的隨機點，我們發現它在 $W_1, \ldots, W_4$ 中相應的集合內都恰有一個原像。此外，點 $(-1, 0)$ 和 $(-1, 2\pi)$ 都給出 $z = e^{-1} \approx 0.3679$，這證實了閉的帶狀區域會造成重複計算。

常見錯誤

- 只寫出 $w = 1 + \frac{\pi}{2}i$，忘記了 $+2k\pi$。

- 把原點算進像之中：e^u 永遠不等於 0，所以那些圓永遠不會縮成一點，而那些射線的起點是不包括在內的。
- 為 W_3 選用閉的帶狀區域 $0 \leq v \leq 2\pi$（或開的帶狀區域 $0 < v < 2\pi$）：前者把正實軸重複計算，後者則漏掉了它。

STEP 之外

這裏的映射就是複指數函數（complex exponential）$w \mapsto e^w$。它把直角坐標的網格線變成極坐標的網格線，而且是周期函數，周期為 $2\pi i$。選擇一條令它成為一對一的帶狀區域，正正就是為它的反函數選擇一個*複對數的分支*（*branch of the complex logarithm*）。你捨去的那條邊界就是*分支切割*（*branch cut*），這解釋了為甚麼 $\log z$ 不能在整個 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上連續地定義。Tristan Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像闡釋複分析的著作）對這個映射以及一般的保角映射（conformal maps）都有十分精美的圖示。

詳細解答

STEP II 1997，第 6 題

純數學 • 三角方程

STEP II 1997，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q6

關鍵思路

把所有式子都用 $t = \tan\theta$ 表示。三倍角公式（triple-angle formula）把方程化為 t 的三次方程（cubic），而一旦看出一個容易的根，餘下的二次方程正好就是第一部分的那一個，因此它的根可以用一個二倍角（double-angle）條件來處理，而不必計算 $\tan^{-1}(1\pm\sqrt{2})$。餘切（cotangent）方程其實是同一個方程的變相：代換（substitution）$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ 把 cot 換成 tan。

解答

開首的結果

設 $t = \tan\phi$，其中 $t^2 = 2t + 1$。那麼 $1 - t^2 = -2t$。此外 $t \neq 0$，因為 $t = 0$ 不滿足 $t^2 = 2t + 1$；而且 $t^2 \neq 1$（否則 $2t = 0$）。所以 $\tan 2\phi$ 有定義，並且

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

這正是所要證明的。

逆命題(converse)同樣成立，而我們稍後會用到它。若 $\tan 2\phi = -1$，則 $2t = -(1 - t^2)$，即 $t^2 = 2t + 1$。所以

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

方程 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

要成為解，$\tan\theta$ 和 $\tan 3\theta$ 都必須有定義。設 $t = \tan\theta$。那麼

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

而且因為 $\tan 3\theta$ 有定義，所以 $1 - 3t^2 \neq 0$。因此

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1 - 3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

令上式等於 2，並把兩邊乘以 $1 - 3t^2$（它不等於零），得

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

各項係數之和為零，所以 $t = 1$ 是一個根，並且

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t - 1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$ 和 $t = 1 \pm \sqrt{2}$ 都不滿足 $3t^2 = 1$，所以每一個根都給出真正的解。

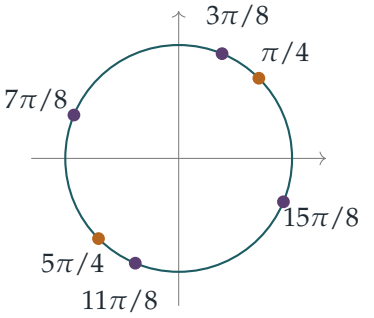
? **想一想** 怎樣把 $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$ 化為 π 的有理數倍？

我們利用第一部分。$t^2 - 2t - 1 = 0$ 的根正好就是滿足 $t^2 = 2t + 1$ 的 $\tan\theta$ 的值，而根據上面的等價關係（equivalence），這些正好就是滿足 $\tan 2\theta = -1$ 的 θ。

- $\tan\theta = 1$：$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$。在 $(0, 2\pi)$ 內，這給出 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$。
- $\tan 2\theta = -1$：$2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$，所以 $\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$。這裏 2θ 的取值範圍是 $(0, 4\pi)$，所以 $n = 0, 1, 2, 3$，而 $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$。

（例如 $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$，而 $\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$。）所以在 $0 < \theta < 2\pi$ 內的解是

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



琥珀色的點來自 $\tan\theta = 1$；梅紫色的點彼此相隔四分之一圈，來自 $\tan 2\theta = -1$。

方程 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

> **想一想** 我們是否要用 cot 把整個計算重做一遍？

不必。設 $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$。那麼 $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$。此外

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

這裏用到 cot 的周期（period）為 π 這個事實。每一邊有定義，當且僅當對應的 tan 有定義。所以方程變成

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

這就是前一個方程。範圍 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 變成 $0 < \psi < 2\pi$，正好就是前面的範圍。所以 ψ 取上面求得的六個值，而由 $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ 得

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$：$\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$，而 $2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$。當 $\theta = \frac{3\pi}{8}$：$\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$，而 $2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$。
- t 的三次方程最多有三個根，而 tan 的周期為 π，所以在長度為 2π 的區間內，我們預期最多有 $3 \times 2 = 6$ 個解。我們找到了六個。
- 以數值方法，在 $(0, 2\pi)$ 上用細密的格點掃描 $\tan x - \tan 3x - 2$，發現（在遠離極點（pole）之處）只在 $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ 出現變號。對餘切方程作同樣的掃描，找到的正好就是上面列出的六個值。

常見錯誤

- 在 $\tan 2\theta = -1$ 這一步只取 $n = 0, 1$ 就停下來。由於 θ 的取值範圍是 $(0, 2\pi)$，2θ 的取值範圍就是 $(0, 4\pi)$，這樣會得到四個解，而不是兩個。
- 未經檢查就除以某個式子，因而漏掉根 $t = 1$；或者忘記了 $\frac{5\pi}{4}$。
- 在最後一部分從頭解起，並把範圍弄錯。這個代換把題目所給的區間恰好映射到 $(0, 2\pi)$ 上，而這絕非巧合。

STEP 之外

恆等式（identity）$\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$ 其實就是 $(1 + \mathrm{i}t)^3$ 的實部與虛部；一般而言，$\tan n\theta$ 是 $\tan\theta$ 的兩個多項式之比，可以從 $(1 + \mathrm{i}t)^n$ 直接讀出。這些多項式的根是 π 的有理數倍的正切值，這就是為甚麼它們的因式分解（factorisation），例如這裏的 $t^2 - 2t - 1$，會如此整齊。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）展示了倍角公式（multiple-angle formulae）如何從複數乘法的幾何中自然得出。

詳細解答

STEP II 1997，第 7 題

純數學 • 曲線描繪

STEP II 1997，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q7

關鍵思路

右邊只透過 x^2 依賴於 x，因此可把它看成 $u = x^2$ 的二次式，然後配方（complete the square）：這樣一行就得出 y^2 的最大可能值，完全不需要微積分。至於作圖，把 $x \to -x$ 或 $y \to -y$ 時方程不變，所以只需弄清楚第一象限的情況，再作反射即可。值得確定的地方有：曲線與兩軸相交之處、在原點的斜率，以及曲線在原點以外與 x 軸相交之處的斜率。

解答

最大值與最小值

若 $a = 0$，方程變成 $y^2 = -x^4$，這迫使 $x = y = 0$：這條「曲線」只是單獨一點 $(0,0)$，而 y 唯一的值是 0。以下設 $a \neq 0$。方程中只出現 a^2，所以不妨設 $a > 0$，到最後才寫成 $|a|$。

由於 $y^2 \geq 0$，我們需要 $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$，即 $x = 0$ 或 $x^2 \leq a^2$。所以曲線位於帶狀區域 $-|a| \leq x \leq |a|$ 之內。對 x^2 配方，

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

等號成立當且僅當 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$。因此在曲線上處處有 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$，而 $y = \frac{1}{2}a^2$ 和 $y = -\frac{1}{2}a^2$ 兩個值都能取得，取於 $x = \pm|a|/\sqrt{2}$。所以

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{兩者皆取於} x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

想一想 這與微積分的結果是否吻合？$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 在哪裏成立？

作隱函數求導（implicit differentiation），$2y\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$。在 $y \neq 0$ 之處，斜率為零當且僅當 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$（根 $x = 0$ 對應 $y = 0$），這正是上面找到的四個點。$y = 0$ 的點需要另行小心處理，因為在那裏不能除以 y；我們接着就處理它們。兩種方法結果一致，但配方能即時證明這些駐值（stationary values）就是整體的最大值和最小值。

曲線的形狀

取 $a > 0$。解出 y 得到兩個分支，

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 及 \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

兩者互為對 x 軸的反射。在第一個分支上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **在原點**，斜率是 a，而在另一個分支上則是 $-a$。所以曲線兩次經過原點，並在那裏與自身相交，切線為 $y = \pm ax$。
- **在** $x = \pm a$，我們有 $y = 0$，而當 $x \to a^-$ 時斜率趨向 $-\infty$。所以曲線在 $(\pm a, 0)$ 與 x 軸相交，切線是鉛垂的；曲線在那裏平滑而圓渾，並非尖角。
- **在兩者之間**，第一個分支由 $(0,0)$ 上升至 $x = a/\sqrt{2}$ 處的最大值 $\frac{1}{2}a^2$，再下降回到 $(a,0)$。其餘象限的情況可由對兩軸的對稱性得出。

結果是一個橫臥的 8 字形，在 $x \geq 0$ 和 $x \leq 0$ 各有一個環，闊度為 $2|a|$，總高度為 a^2。

要一次過看清整條曲線，有一個簡潔的方法：設 $x = a\sin t$。那麼 $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$，所以 $y^2 = a^4 \sin^2 t \cos^2 t$，而曲線可由

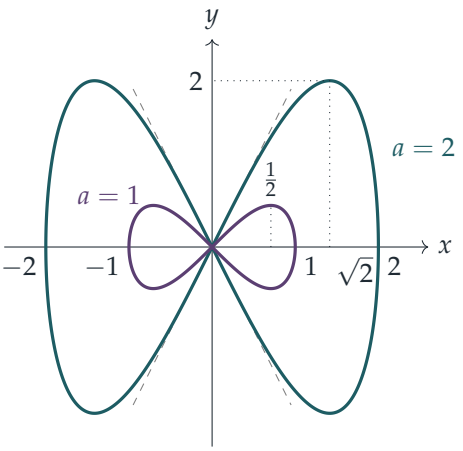
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2 \sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

描出，這再次顯示 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$。

$a = 1$ 與 $a = 2$ 的情況

	與 x 軸相交於	在 O 的切線	極值點
$a = 1$	$x = 0,\ \pm 1$	$y = \pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$
$a = 2$	$x = 0,\ \pm 2$	$y = \pm 2x$	$\left(\pm\sqrt{2}, \pm 2\right)$

要確定兩條曲線的相對位置：對於 $0 < |x| \le 1$，我們有 $x^2(1-x^2) < x^2(4-x^2)$，所以 $a = 1$ 的曲線嚴格位於 $a = 2$ 的曲線之內，唯一的公共點是原點。例如，在 $x = 1$ 處，$a = 1$ 的曲線位於 $y = 0$，而 $a = 2$ 的曲線則位於 $y = \pm\sqrt{3}$。



虛線是 $a = 2$ 時的切線 $y = \pm 2x$；當 $a = 1$ 時，在原點的切線是 $y = \pm x$，傾角為 45°。

驗算

- 對 50 個隨機的 a 值，在 $|x| \le |a|$ 上作網格搜尋，每次找到的最大 $|y|$ 都是 $\frac{1}{2}a^2$，位於 $|x| = |a|/\sqrt{2} \approx 0.7071|a|$。當 $a = 2$ 時，結果是 $y_{\max} = 2.000000$，位於 $|x| \approx 1.41421$。
- 最大值按 a^2 的比例變化，這是必然的：把 (x, y) 換成 (ax, a^2y)，就把 $a = 1$ 的曲線變成一般的曲線。所以 $a = 2$ 的曲線就是把 $a = 1$ 的曲線沿水平方向拉伸 2 倍、沿鉛垂方向拉伸 4 倍而成，這就是它高出那麼多的原因。

常見錯誤

- 只畫出 $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$。方程定義的是 y^2，所以 y 的正負兩個值都屬於圖像，得出的是兩個環，而不是 S 形。
- 在 $(\pm a, 0)$ 畫出尖角。那裏的斜率是無限大，所以曲線是鉛垂而平滑地穿過 x 軸的。
- 忘記曲線在原點與自身相交，斜率為 $\pm a$。正是這些斜率讓我們在 O 附近分辨出兩條曲線。

STEP 之外

這裏的原點是一個結點（node），即代數曲線（algebraic curve）與自身相交的點：在 O 附近，方程看起來就像 $y^2 \approx a^2x^2$，即一對直線 $y = \pm ax$。像這樣按最低次項把奇點（singular point）分類，是研究代數曲線的第一步。$x = a\sin t$ 這個技巧顯示這條曲線可以用三角函數參數化（parametrise）；這類曲線稱為利薩茹圖形（Lissajous figures）（這裏的頻率比為 1 : 2）。若想多練習描繪這類曲線，以及更廣泛地練習 STEP 的思考方式，可閱讀 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP II 1997，第 8 題

純數學 • 以積分證明不等式

> **STEP II 1997，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q8

關鍵思路

每個形如 $(x^p - 1)/p$ 的式子，其實都是喬裝了的積分（integral）：它就是 $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$。因此，比較兩個這樣的式子，歸根究底就是比較被積函數（integrand）t^{p-1} 與 t^{q-1}；只要留意到兩者的大小關係在 $t = 1$ 處對調，這個比較便很容易。至於最後的不等式（inequality），只需再積分一次，這次是對剛證明的不等式積分。

解答

對不等式積分

若在 $[a, b]$ 上有 $\mathrm{f}(t) \geq \mathrm{g}(t)$，則在該區間上 $\mathrm{f} - \mathrm{g} \geq 0$，所以 $\mathrm{f} - \mathrm{g}$ 的圖像與 t-軸之間的區域位於軸上或軸的上方，其有向面積（signed area）為非負：

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\mathrm{f}(t) - \mathrm{g}(t)\big)\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

注意這裏需要 $a \leq b$：若上下限的次序顛倒，兩個積分之間的不等號便會反轉。

$x \geq 1$ 的情況

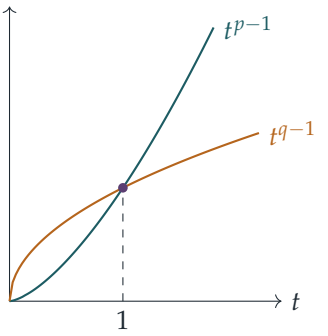
當 $t \geq 1$ 且 $p > q$ 時，有 $t^{p-1} = t^{q-1}t^{p-q} \geq t^{q-1}$，因為當 $t \geq 1$ 且 $p - q > 0$ 時 $t^{p-q} \geq 1$。由於 $x \geq 1$，區間 $[1, x]$ 的上下限次序正確，所以由第一部分可得

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

因為 $p, q > 0$，兩個積分都可以直接計算：

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x = \frac{x^p - 1}{p}, \qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^q - 1}{q}.$$

因此對 $x \geq 1$ 有 $\dfrac{x^p-1}{p} \geq \dfrac{x^q-1}{q}$，正如所求。



這幅草圖（以 $p = 2.5$、$q = 1.5$ 繪畫）說明了要點：當 $t > 1$ 時，次數較高的冪較大；當 $0 < t < 1$ 時則較小。

$0 \leq x \leq 1$ 的情況

想一想 當 $0 < t < 1$ 時，t^{p-1} 與 t^{q-1} 之間的不等號方向相反。為甚麼結論沒有跟着反轉？

兩次反轉互相抵消。當 $0 < t \leq 1$ 時，有 $t^{p-q} \leq 1$，所以 $t^{p-1} \leq t^{q-1}$。但現在 $x \leq 1$，所以次序正確的區間是 $[x, 1]$，而不是 $[1, x]$。

先考慮 $0 < x \leq 1$。在 $[x, 1]$ 上對 $t^{q-1} \geq t^{p-1}$ 積分（由於 $x > 0$，兩者在該區間上都連續（continuous）），得

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad \frac{1-x^q}{q} \;\geq\; \frac{1-x^p}{p}.$$

兩邊乘以 -1，不等號反轉，得 $\dfrac{x^p-1}{p} \geq \dfrac{x^q-1}{q}$。

當 $x = 0$ 時，我們直接驗證：不等式變成 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$，這是成立的，因為由 $p > q > 0$ 可得 $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$。（我們把 $x = 0$ 分開處理，是因為若 $q < 1$，則 t^{q-1} 在 0 附近無界（unbounded）。）所以不等式對所有 $0 \leq x \leq 1$ 成立；連同上一個情況，對每個 $x \geq 0$ 都成立。

最後的不等式

記 $\phi_p(t) = \dfrac{t^p - 1}{p}$。我們已經證明：只要 $p > q > 0$，對每個 $t \geq 0$ 都有 $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$。兩個函數在 $[0, \infty)$ 上都連續，所以當 $x > 0$ 時，我們可以在 $[0, x]$ 上對這個不等式積分：

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q - 1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\int_0^x \frac{t^p - 1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1} - x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big),$$

對 q 亦同樣。所以

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big),$$

兩邊除以 $x > 0$（不等號方向不變），得

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1} - 1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1} - 1\Big).$$

在 $x = 0$ 處，這個不等式變成 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$，我們已經知道它成立。至此，對所有 $x \geq 0$ 的證明完成。

驗算

- 在 $x = 1$ 處，中間的不等式是 $0 \geq 0$：兩條曲線在該處相交，與等號成立吻合。
- 在最後的不等式中取 $p = 2$、$q = 1$、$x = 3$：左邊是 $\frac{1}{2}(3 - 1) = 1$，右邊是 $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$，所以 $1 \geq \frac{1}{2}$。
- 隨機測試了 200,000 組滿足 $0 < q < p$ 及 $x \geq 0$ 的三元組 (p, q, x)，當中包括 $x = 0$、$x = 1$ 及極小的 x，兩個不等式都找不到反例（counterexample）。

常見錯誤

- 當 $x < 1$ 時在 $[1, x]$ 上積分，卻保持不等號方向不變：對不等式積分之前，上下限必須按遞增次序排列。
- 忘記端點 $x = 0$，在該處 t^{q-1} 甚至可能沒有定義。
- 試圖用微積分從頭證明最後一部分，而不是對剛建立的不等式積分。

STEP 之外

當 $q \to 0$ 時，$(x^q - 1)/q \to \ln x$，所以這個結果表明：當 p 遞減至 0 時，$(x^p - 1)/p$ 遞減至 $\ln x$。這是對數的一族精巧的界，也是統計學中 Box–Cox 變換（Box–Cox transformation）的基礎。積分保持不等式這個原理（積分的單調性，monotonicity of the integral），是分析（analysis）課程中關於黎曼積分（Riemann integral）最先證明的定理之一。參見 Abbott, *Understanding Analysis*。

詳細解答

STEP II 1997，第 9 題

力學 • 摩擦力與剛體平衡

STEP II 1997，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

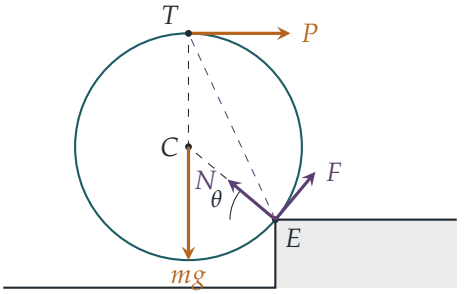
step.maths.org/questions/97-s2-q9

關鍵思路

由於球是被緩慢地拉上去的，它在每一瞬間都處於平衡（equilibrium）狀態，所以在每個位置我們面對的都是一道靜力學（statics）問題。球一旦離開地面，就只有三個力作用在它身上：重量、頂點處的拉力，以及台階邊緣的反作用力（reaction）。對邊緣取力矩（moments），便可消去未知的反作用力，從而求出拉力。然後，三力定則（three-force rule，即三條作用線（lines of action）必須交於一點）確切地告訴我們反作用力指向哪個方向，而摩擦力（friction）的條件也就幾乎唾手可得。

解答

設半徑為 $r = \frac{1}{2}d$，則台階的高度為 $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$。我們把球看成均勻的剛體（rigid body），它只在邊緣 E 處與台階接觸（邊緣是一條水平線，在通過球心的鉛垂截面中是一個點）。設 C 為球心，T 為最高點，水平力 P 作用於該點，方向指向台階。設 θ 為 EC 與水平線所成的角。



幾何關係

以 E 為原點，C 比 E 高出 $r\sin\theta$，與它的水平距離為 $r\cos\theta$，而 T 則在 C 之上再高出 r。開始時，球靜止在地面上，C 離地面的高度為 r，即比 E 高出 $\frac{1}{2}r$；因此 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = \frac{\pi}{6}$。當 C 位於 E 的正上方，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，球便完全登上台階。所以整個運動過程對應於 θ 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$。

最大的力

當球仍然接觸地面時，地面承擔了部分重量，而地面只能向上推。當 P 剛好大得足以令地面的反作用力降至零時，球便開始上升。從這時起，作用於球的力是：在 T 處的 P、在 C 處的重量 mg，以及邊緣在 E 處的反作用力，後者有沿 EC 方向的法向分量（normal component）N 和垂直於 EC 的摩擦力 F。

對 E 取力矩（反作用力對該點沒有力矩），P 的力臂是 T 高出 E 的高度，即 $r(1+\sin\theta)$，而重量的力臂是 $r\cos\theta$。由平衡條件得

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

在 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 上，分子遞減而分母遞增，所以 P 隨 θ 遞減。（在離地之前，P 只是逐漸增大至這個值。）因此最大值出現在 $\theta = \frac{\pi}{6}$，即球離開地面的一刻：

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

摩擦力的條件

> **想一想** 邊緣處的反作用力指向哪個方向？

三個互不平行的力若處於平衡，它們的作用線必定共點（concurrent）。P 的作用線是通過 T 的水平線，而重量的作用線是通過 C 的鉛垂線，這條線同樣通過 T。所以兩者交於 T，而 E 處的總反作用力必定沿 ET 作用。

現在 $CE = CT = r$，所以三角形 CET 是等腰三角形。在 C 處，CT（鉛垂向上）與 CE（向下，與水平線成 θ 角）之間的夾角是 $\frac{\pi}{2}+\theta$，所以每個底角是

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

這就是總反作用力與法線 EC 之間的夾角，所以

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

我們可以用分解（resolving）力的方法來驗證這個結果。反作用力是 $(-P,\, mg)$，因為它要抵消 P 和重量。它沿單位法向量 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 和沿單位切向量 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 的分量

分別是

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

所以 $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$，而根據半角公式（half-angle formulae），這等於 $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$。在整個過程中 F 和 N 都是正數，所以邊緣確實是在推着球，而摩擦力沿切線向上作用，正如圖中所畫。

只有當在每個位置都有 $F \le \mu N$ 時，球才不會在 E 處滑動，即

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{對所有} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

右邊隨 θ 增加而遞減，所以要求最嚴格的位置同樣是 $\theta = \frac{\pi}{6}$，這時它等於 $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$。在那一瞬間，摩擦力必須至少是法向反作用力的 $1/\sqrt{3}$ 倍；若 $\mu = 1/\sqrt{3}$ 恰好成立，摩擦力便達到極限（limiting），球正處於即將滑動的狀態，所以要安全地把球拉上去而不滑動，我們需要 $\mu > 1/\sqrt{3}$，這正是所要求的結果。

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，球心在邊緣的正上方：$P = 0$ 而且 $F = 0$，理應如此。
- 整個過程中 $N = mg$，這是合理的：反作用力是 $(-P, mg)$，而它沿法線方向的分量算出來恰好是 mg。
- 以數值方法驗算：讓 θ 由 $\frac{\pi}{6}$ 逐步增加至 $\frac{\pi}{2}$，分別用取力矩和分解力的方法計算，P/mg 和 F/N 的最大值都是 $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$，兩者都出現在起始位置。

常見錯誤

- 把 P 對 E 的力臂當作 $r\sin\theta$（C 的高度），而不是 $r(1+\sin\theta)$（T 的高度）。
- 假設邊緣處的反作用力純粹沿法線方向。這是不可能的：法線通過 C，這樣三個力便不能交於一點。

STEP 之外

三力的論證是一個普遍事實的特例：剛體處於平衡，當且僅當合力以及對任意一點的合力矩都等於零，而對於三個力的情況，這就迫使它們共點。反作用力與法線之間的夾角

（這裏是 $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$）就是「摩擦角」（angle of friction）的概念，它把摩擦力問題轉化為幾何問題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）從這些原理出發，建立剛體的靜力學和動力學。

詳細解答

STEP II 1997，第 10 題

力學 • 爆炸與彈性碰撞

STEP II 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q10

關鍵思路

把每個速度分解成沿軸的分量和垂直於軸的分量。圓柱面是光滑的，所以它只能沿徑向施力：它永遠不會改變軸向速度，而彈性反彈只是把橫向速度反轉。爆炸時的動量守恆（conservation of momentum）迫使兩塊碎片沿同一條直徑飛開，於是整個問題就變成兩面牆之間的一維運動，軸向運動只是順帶跟着走。

解答

建立模型

把碎片當作質點（particle）（它們很小），圓柱視為光滑而固定，並按題目指示忽略重力。取 z 軸沿圓柱的軸，並設爆炸在時間 $t = 0$ 發生於原點。

緊接爆炸之後，把質量為 qM 的碎片的速度寫成軸向分量 w_1 加上橫向分量 $\mathbf{u}_1$（垂直於軸），質量為 $(1-q)M$ 的碎片則同樣寫成 w_2、$\mathbf{u}_2$。爆炸期間沒有外力作用，所以動量守恆：

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

第二條方程說明兩個橫向速度方向相反，所以兩塊碎片沿同一條直徑、以相反方向離開軸。把這條直徑稱為 x 方向，碎片 1（質量 qM）以速率 u_1 向 $x = +L$ 運動，碎片 2 以速率 u_2 向 $x = -L$ 運動，其中

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

由於 $q \le \frac{1}{2}$，我們有 $u_1 \ge u_2$：較輕的碎片較快。

每塊碎片都是正面撞向牆壁（它沿半徑運動），所以光滑牆壁的衝量（impulse）沿該半徑方向。這會把橫向速度反轉（反彈是完全彈性的），而軸向速度則不受影響。因此每塊

碎片一直沿同一條直徑運動，而它的軸向速度自始至終保持不變。

證明 $q = \frac{3}{8}$

軸向運動。軸向位置為 $z_1 = w_1 t$ 和 $z_2 = w_2 t$。兩塊碎片在某個時間 $t > 0$ 相遇，所以 $w_1 = w_2$，再由動量方程得 $w_1 = w_2 = v$。兩塊碎片都與原來的物體本應到達的位置並肩前進。

橫向運動。碎片 1 在 $t = L/u_1$ 到達 $x = L$，然後折返，所以反彈之後

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

同理，碎片 2 反彈之後位於 $x_2 = -2L + u_2 t$。它們在兩者都反彈之後才碰撞，所以由 $x_1 = x_2$ 得

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

由 (1)，$u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$，所以 $u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$ 及 $u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$。因此碰撞點為

$$x = 2L(2q - 1).$$

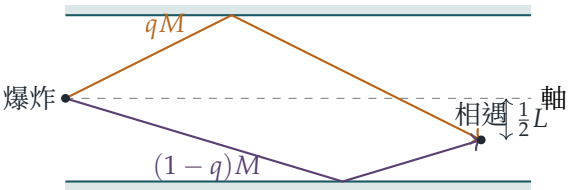
我們需要 $|x| = \frac{1}{2}L$，所以 $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$，得 $q = \frac{5}{8}$ 或 $q = \frac{3}{8}$。由於 $q \le \frac{1}{2}$，

$$q = \tfrac{3}{8},$$

正如所求。碰撞發生在 $x = -\frac{1}{2}L$，位於軸的較重碎片那一側。

想一想 這真的是第一次相遇，而且兩者都剛好各反彈了一次嗎？

當 $q = \frac{3}{8}$ 時，由 (1) 得 $u_2 = \frac{3}{5}u_1$。碎片 1 在 $t = L/u_1$ 反彈，碎片 2 在 $t = \frac{5}{3}L/u_1$ 反彈，而碰撞時間為 $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$，比兩者都遲。它們會否更早相遇？在碎片 1 反彈之前，兩者正在互相遠離；而碎片 1 在回程中要到 $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$ 才會追上碎片 2，那時碎片 2 早已掉頭。所以我們找到的相遇就是第一次相遇，而每塊碎片都剛好反彈了一次。



圖中所示是包含軸和該公共直徑的平面（軸向為橫向）；此圖按 $q = \frac{3}{8}$ 及下文求得的速率依比例繪畫。

爆炸所給予的能量

碰撞時間為

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

令它等於 $5L/v$，得 $u_1 = \frac{1}{2}v$，於是 $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$。

軸向速度維持在 v 不變，所以爆炸中所增加的動能（kinetic energy）純粹是橫向動能：

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M\left(\tfrac{1}{2}v\right)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M\left(\tfrac{3}{10}v\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

合併後的速度

緊接碰撞之前，每塊碎片的橫向速度都已因反彈而反轉：碎片 1 的橫向動量為 $-qMu_1$，碎片 2 的為 $+(1-q)Mu_2$。由 (1)，兩者之和為零。軸向動量為 $qMv + (1-q)Mv = Mv$。合併（coalescence）過程中動量守恆，所以質量為 M 的合併體的速度為

$$v，沿軸的方向,$$

與原來的物體相同，但它沿着一條與軸平行、距離軸 $\frac{1}{2}L$ 的直線運動。來自爆炸的 $\frac{3}{40}Mv^2$ 能量在合併中全部損失。

驗算

- $q = \frac{1}{2}$ 給出 $x = 0$：兩塊相等的碎片互為鏡像，必定在軸上相遇，合乎預期。
- 取 $L = v = 1$，$u_1 = 0.5$ 及 $u_2 = 0.3$：當 $t = 5$ 時，碎片 1 位於 $2 - 0.5\times 5 = -0.5$，碎片 2 位於 $-2 + 0.3\times 5 = -0.5$。一個在 $x = \pm 1$ 處設有反射的逐步時間模擬，重現了兩者各反彈一次後在 $t = 5.000$、$x = -0.500$ 相遇的結果。
- 最終的橫向動量為 $-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{10} = 0$，所以最終速度純粹是軸向的。

常見錯誤

- 讓牆壁改變了軸向速度。光滑的牆壁只會施加法向（徑向）力。
- 忘記反彈會把橫向動量反轉。總橫向動量要待兩塊碎片都反彈之後才回復為零。
- 保留 $q = \frac{5}{8}$：那是把兩塊碎片的標號對調後的同一個情況，已被 $q \le \frac{1}{2}$ 排除。

STEP 之外

把運動分解成沿對稱方向和垂直於對稱方向的分量，是一個重要思想的開端：系統的一種對稱性（symmetry）會帶來一個守恆量（conserved quantity）。這裏圓柱沿其長度處處看來都一樣，所以即使有牆壁存在，軸向動量仍然守恆（諾特定理（Noether's theorem）把這一點說得精確）。本題亦顯示，爆炸之後接着一次完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision），可以把能量以熱的形式交還，而軸向運動卻絲毫不受影響，照樣繼續。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種方式闡述動量和質心（centre of mass）運動。

詳細解答

STEP II 1997，第 11 題

力學 • 拋體運動

STEP II 1997，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

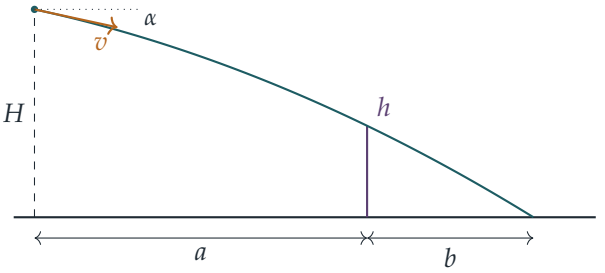
step.maths.org/questions/97-s2-q11

關鍵思路

先把軌跡（trajectory）寫成一條方程，以水平移動距離表示球比發球者擊球高度下降了多少。這樣，題目給出的兩項事實（球水平移動了 a 時高度為 h，水平移動了 $a+b$ 時高度為 0）就是關於兩個未知數 v 和 α 的兩條方程。至於上下界，則來自這個問題：這兩條方程的解在甚麼時候才真正具有物理意義？

解答

我們把球看成只受重力作用的質點（particle），即不考慮空氣阻力（air resistance）和旋轉。取擊球點正下方的地面為原點，x 軸沿水平方向指向球網，y 軸鉛垂向上。



v^2 的公式

初速度為 $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$。經過時間 t 後，

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去時間，並利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，得

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \qquad (*)$$

為方便起見，記 $T = \tan\alpha$ 及 $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$，於是 $y = H - xT - kx^2$。

球在 $x = a + b$ 處着地，所以在該處代入 $y = 0$：

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \qquad (1)$$

把 k 換回它的定義，再整理成 v^2 的表達式，得

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

這就是第一個結果。

$\tan\alpha$ 的公式

球剛好越過球網，所以在 $x = a$ 處 $y = h$。由 $(*)$ 得

$$H - h = aT + ka^2.$$

代入 (1) 中的 k，並將全式乘以 $(a+b)^2$：

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

把含 H 的項合併，並利用 $(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$，得

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

兩邊除以 $ab(a+b)$（此數為正），得

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}H - \frac{a+b}{ab}h,$$

正是所求。

H 的範圍

給定 a、b、h 和 H 後，第二條公式決定了 $\tan\alpha$，然後第一條公式決定了 v^2。當且僅當這些值都合理時，這樣的發球才存在：即 $\tan\alpha > 0$（球是向下擊出的，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$）以及 $v^2 > 0$。

想一想 v^2 的分子顯然是正數。那麼 $v^2 > 0$ 實際上要求甚麼？

它要求分母為正：$H - (a+b)\tan\alpha > 0$。代入 $\tan\alpha$ 的公式，

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

由於 $(a+b)/a > 0$，上式為正當且僅當

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

要使 $\tan\alpha > 0$，我們需要

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad\Longleftrightarrow\quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

這裏兩邊乘以了正數 $a(a+b)/(2a+b)$。

兩個條件合起來就是

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

反過來，在這個範圍內的任何 H 都給出合理的 α 和 v。這個區間非空，因為 $\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$。

兩個界限都有清晰的意義。上界是這樣的一個高度：由着地點經過網頂的直線，與發球者所在的鉛垂線相交之處。重力使路徑向下彎曲，所以球必須從這條直線下方出發（在 $H = (a+b)h/b$ 時，我們需要無限大的速率）。下界則對應 $\alpha = 0$ 的情況，即水平發球；若從比這更低的位置發球，球就必須向上擊出，才能越過球網而仍然落在指定的着地點。

驗算

- 取 $a = 12\,\text{m}$、$b = 6\,\text{m}$ 及 $h = 1\,\text{m}$，範圍為 $1.8\,\text{m} < H < 3\,\text{m}$。當 $H = 1.8$ 時，公式給出 $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$，與下界應有的結果一致。
- 在範圍內隨機選取 a、b、h 和 H，用兩條公式算出 α 和 v，再以數值方法逐步模擬運動，結果球每次都經過網頂，並落在 $x = a + b$ 處（就精確路徑而言，相對誤差低於 10^{-14}）。
- 量綱（dimensions）：$\tan\alpha$ 的每一項都是長度除以長度，而 v^2 的量綱是 $g\times$ 長度，正如所料。

常見錯誤

- 因角度向下而弄錯正負號：初始鉛垂速度是 $-v\sin\alpha$，而 $(*)$ 中的 $x\tan\alpha$ 一項是減去的。
- 寫到「$v^2 > 0$」就停下來，沒有留意到這其實是對分母的條件；要代入 $\tan\alpha$ 之後，它才變成對 H 的條件。

STEP 之外

在這題中，是兩個邊界條件（球網和着地點）決定了發射條件，而不是反過來：這是一個簡單的邊值問題（boundary-value problem），也是以數值方法求解微分方程（differential equations）的「打靶法」（shooting methods）背後的想法。一旦考慮空氣阻力和旋轉，方程就不再有閉合形式（closed-form）的解，那時正正要用這種方法來處理。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）討論了帶阻力的拋體運動，以及更多其他課題。

詳細解答

STEP II 1997，第 12 題

概率與統計 • 二項分佈的奇偶概率

STEP II 1997，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q12

關鍵思路

只需追蹤訊息此刻是對還是錯。每聽錯一次，訊息便對錯互換，所以傳回 Albert 的訊息正確，當且僅當耳語中出錯的次數是偶數。要抽出二項展開式（binomial expansion）中的偶數項，正好可以用 $(a+b)^n + (a-b)^n$，因為奇數項會互相抵消。至於修改後的遊戲，要留意一旦失敗一次，Albert 傳出去的便是錯的訊息，所以從那時起，每一輪都需要有奇數次聽錯。

解答

三名玩家

若有 n 名玩家，便有 n 次耳語：Albert 傳給 Bertha，Bertha 傳給下一位，如此類推繞一圈傳到 Zebedee，然後 Zebedee 傳回 Albert。每次耳語被正確聽到的概率（probability）是 p，而且各次互相獨立（independent）。Albert 聽到的是否真相，只取決於有多少次耳語被聽錯，與硬幣擲出的結果無關。

三名玩家時有三次耳語，每次正確的概率是 $\frac{2}{3}$。傳到 Albert 的訊息正確，條件是沒有耳語出錯，或者恰好有兩次出錯（第二次錯誤把第一次抵消了）。所以

$$\Pr(\text{獲勝}) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{6}{27} = \frac{14}{27}.$$

n 名玩家

設 $q = 1 - p$。聽錯的耳語次數服從 $\mathrm{B}(n, q)$ 分佈（distribution），而當這個次數是偶數時遊戲便獲勝：

$$P = \sum_{k\text{ 為偶數}} \binom{n}{k} q^k p^{n-k}.$$

現在

$$(p+q)^n + (p-q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k \left(1 + (-1)^k\right) = 2 \sum_{k\text{ 為偶數}} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k,$$

因為 k 為奇數的項互相抵消，而 k 為偶數的項則出現兩次。由於 $p + q = 1$ 及 $p - q = 2p - 1$，

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right).}$$

當 $n = 3$、$p = \frac{2}{3}$ 時，上式給出 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{14}{27}$，與第一部分的結果一致。

修改後的遊戲

設 N 為 Albert 向 Bertha 耳語的次數。把訊息繞圈傳足一周稱為一輪，所以每一輪都由 Albert 耳語開始。

> **想一想** 一輪失敗之後，下一輪是否只是把第一輪原封不動地重來一次？

不是。在第一輪，Albert 傳出的是正確的結果。如果他從 Zebedee 那裏聽錯了，他傳下去的是他聽到的內容，而那是錯的。由錯的訊息出發，這一輪結束時 Albert 聽到真相，當且僅當有奇數次耳語出錯，其概率為 $1 - P$。如果這一輪又失敗，Albert 便再一次聽到（並傳出）錯的訊息，所以之後的每一輪都與這一輪相同。由於各次聆聽互相獨立，各輪也互相獨立。

因此第一輪成功的概率是 P，而之後每一輪成功的概率是 $1 - P$，失敗的概率是 P。故此 $\Pr(N = 1) = P$，而對於 $k \geq 2$，

$$\Pr(N = k) = \underbrace{(1-P)}_{\text{第 1 輪失敗}} \underbrace{P^{k-2}}_{\text{第2,…,}k-1\text{ 輪失敗}} \underbrace{(1-P)}_{\text{第}k\text{ 輪成功}} = (1-P)^2 P^{k-2}.$$

假設 $0 < p < 1$，於是 $0 < P < 1$。那麼，在題目給出的和式中取 $x = P$，可得

$$\sum_{k=2}^{\infty} kP^{k-2} = \frac{1}{P}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kP^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right),$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= P + (1-P)^2 \cdot \frac{1}{P}\left(\frac{1}{(1-P)^2} - 1\right)\\ &= P + \frac{1-(1-P)^2}{P}\\ &= P + (2-P) = 2.\end{aligned}$$

Albert 向 Bertha 耳語次數的期望值（expectation）是 2，不論玩家有多少人，也不論 p 是多少。

還有一個更快捷的方法看出這個結果。已知第一輪失敗，其後所需的輪數服從幾何分佈（geometric distribution），成功概率為 $1-P$，所以其平均值是 $1/(1-P)$。故此 $\mathrm{E}(N) = 1 + (1-P)\cdot\frac{1}{1-P} = 2$。

（邊界情況：若 $p = 1$，或 $p = 0$ 而 n 為偶數，則 $P = 1$，Albert 只耳語一次。若 $p = 0$ 而 n 為奇數，則 $P = 0$，第二輪必定成功，所以 $N = 2$。）

驗算

- 以準確分數列出聽對與聽錯的全部 2^n 種組合，對 $n \le 8$ 及若干個 p 值都得出 $\frac{1}{2}(1 + (2p-1)^n)$，當中包括三名玩家時的 $\Pr(\text{獲勝}) = \frac{14}{27}$。
- $p = \frac{1}{2}$ 給出 $P = \frac{1}{2}$：訊息純粹是雜訊，理應如此。
- 以 $(n, p) = (3, \frac{2}{3})$、$(5, 0.9)$ 及 $(4, 0.3)$ 模擬 2×10^5 局修改後的遊戲，所得的平均耳語次數分別為 2.001、1.996 及 1.994。

常見錯誤

- 把耳語次數數成 $n-1$ 而不是 n：最後一次耳語，即由 Zebedee 傳回 Albert 的那一次，也要計算在內。
- 把修改後的遊戲中每一輪的獲勝概率都當作 P。這樣會得出 $1/P$，是錯的，因為失敗之後 Albert 傳出的是錯的訊息。

STEP 之外

訊息的對／錯狀態是一條兩狀態的馬可夫鏈（Markov chain），而 $2p-1$ 是其轉移矩陣（transition matrix）的第二個特徵值（eigenvalue）。這就是為甚麼 $(2p-1)^n$ 決定了訊息「忘記」硬幣結果的速度。同一個模型稱為二元對稱通道（binary symmetric channel），是資訊論（information theory）和糾錯碼（error-correcting codes）的起點。Grimmett 與

Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）以這個程度講解生成函數（generating functions）和馬可夫鏈。

詳細解答

STEP II 1997，第 13 題

概率與統計 • 布豐投針問題

STEP II 1997，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

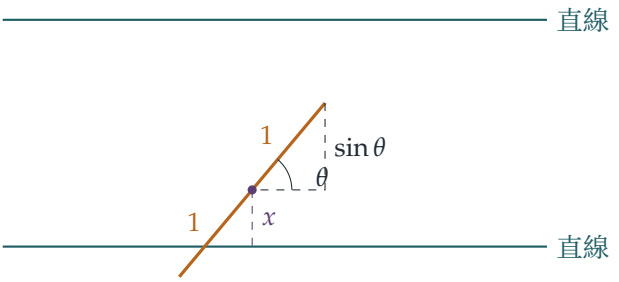
step.maths.org/questions/97-s2-q13

關鍵思路

這是布豐投針問題（Buffon's needle）。用兩個獨立（independent）的隨機量來描述針的位置：針的中心與最近一條直線的距離，以及針與直線所成的銳角。中心一旦固定，一切就取決於針在垂直於直線的方向上伸展多遠，也就是針的半長乘以該角的正弦。於是每一部分都化為關於一個均勻分佈（uniformly distributed）的角的問題。

解答

我們按慣常的方式為「隨機投下」建立模型：中心與最近一條直線的距離 X 在 $[0,1]$ 上均勻分佈（直線相距 2 cm，所以最近的一條至多相距 1 cm），而針與直線所成的銳角 θ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈，且與 X 獨立。（若取角在 $[0,\pi)$ 上均勻分佈，答案也一樣，因為兩種取法下 $\sin\theta$ 的分佈相同。）



針的每一半長度為 1，所以兩端分別在中心的上方和下方，垂直距離為 $\sin\theta$。

第 (i) 部分

設中心與最近一條直線相距 x，則針與該直線相交，當且僅當其中一端越過該直線，即

$$\sin\theta > x \iff \theta > \arcsin x,$$

因為 sin 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上遞增。由於 θ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈，

$$\mathrm{P}(\text{與最近的直線相交} \mid X = x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin x = \frac{2}{\pi}\arccos x.$$

第 (ii) 部分

假設針與最近的直線相交，即 $\theta > \arcsin x$。沿着針量度，交點與中心相距 $x/\sin\theta$（這是一個直角三角形的斜邊，其中 θ 的對邊為 x）。所以兩段的長度分別為 $1 + x/\sin\theta$ 和 $1 - x/\sin\theta$，較短的一段是

$$S = 1 - \frac{x}{\sin\theta}.$$

當 θ 由 $\arcsin x$ 變到 $\frac{\pi}{2}$ 時，S 由 0 遞增至 $1 - x$，所以 S 在 $[0, 1-x]$ 內取值。

在相交的條件下，θ 在 $(\arcsin x, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈，這個區間的長度為 $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$。對於 $0 \le s \le 1 - x$，

$$S \le s \iff \frac{x}{\sin\theta} \ge 1 - s \iff \sin\theta \le \frac{x}{1-s} \iff \theta \le \arcsin\frac{x}{1-s},$$

這裏用到了 $1 - s > 0$ 和 $x/(1-s) \le 1$（因為 $s \le 1 - x$），所以反正弦有意義。因此較短一段的累積分佈函數（cumulative distribution function）為

$$F(s) = \mathrm{P}(S \le s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{1-s}\right) - \arcsin x}{\arccos x}, & 0 \le s \le 1 - x, \\ 1, & s > 1 - x. \end{cases}$$

作為合理性檢查，中間的公式在 $s = 0$ 時給出 0，在 $s = 1 - x$ 時給出 $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)/\arccos x = 1$，所以 F 是連續的。

想一想 為甚麼得知針與直線相交之後，θ 仍然是均勻分佈的？

把一個均勻分佈的變量限制在某個子區間內（即以它落在該子區間為條件），它在該子區間上仍然是均勻分佈的：對於 $\arcsin x \le a \le \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{P}(\theta \le a \mid \theta > \arcsin x) = (a - \arcsin x)/(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$，這是 a 的線性函數。這正是我們所用到的。

第 (iii) 部分

最近的直線相距 $X \le 1$，而其他每一條直線都相距至少 $2 - X \ge 1$。針從中心最多伸展 $\sin\theta \le 1$，所以它要與最近那條以外的直線相交，只可能在 $X = 1$ 且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 恰好成立的情況下發生，而這個情況的概率為零。所以針不碰到任何直線，當且僅當它不碰到最近的直線，於是由第 (i) 部分得

$$\mathrm{P}(\text{不相交} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.$$

由於 X 在 $[0,1]$ 上均勻分佈（密度為 1），我們對 x 取平均：

$$\mathrm{P}(\text{不相交}) = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

用分部積分法（integration by parts），取 $u = \arcsin x$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(\text{針不碰到任何直線}) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.363.$$

驗算

- 第 (i) 部分在兩端的表現合理：當 $x = 0$ 時，中心在直線上，概率為 1；當 $x \to 1$ 時，只有垂直於直線的針才碰得到，概率趨向 0。
- 相交的概率為 $2/\pi \approx 0.637$，即布豐的經典答案 $2\ell/(\pi d)$，其中 $\ell = d = 2$。
- 模擬 10^6 次隨機投針，得出的不相交比率為 0.3626，而 $1 - 2/\pi = 0.3634$；對 $x = 0.2, 0.5, 0.7$ 模擬所得的 $F(s)$ 值與公式相符，誤差約為 0.002。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記取條件：除以 $\frac{\pi}{2}$ 而不是 $\arccos x$，會得出一個永遠達不到 1 的「分佈函數」。
- 把較短的一段取為 $1 - x\sin\theta$ 或 $1 - x/\cos\theta$：要查清楚三角形的哪一條邊是 x，哪一個角是 θ。
- 在第 (iii) 部分乘以 $\frac{1}{2}$，或取 X 在 $[0,2]$ 上均勻分佈而沒有相應調整相交的條件；與最近直線的距離是在 $[0,1]$ 上均勻分佈的。

STEP 之外

布豐投針問題（1777 年）是幾何概率（geometric probability）中最早的問題之一，而 π 的出現意味着投針可以給出 π 的一個（緩慢的）蒙地卡羅（Monte Carlo）估計。最簡潔的現代處理方法利用期望值的線性性質（linearity of expectation）：相交次數的期望值與針的長度成正比，即使針是彎曲的也一樣（「布豐麵條」，Buffon's noodle），由此可通往積分幾何（integral geometry）和克羅夫頓公式（Crofton formula）。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）討論了聯合分佈（joint distribution）和這一類幾何概率問題。

詳細解答

STEP II 1997，第 14 題

概率與統計 • 泊松過程

STEP II 1997，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q14

關鍵思路

雖然題目以力學為背景，這其實是一道泊松過程(Poisson process)的題目。運動學(kinematics）只是告訴我們哪些車輛要計算在內：一輛較快的車要在隧道內追上我，它進入隧道的時間必須在我之後某段時間之內。一旦知道這個時限，餘下的一切都變成關於泊松計數的問題。在後半部分，我們會用到以下事實：若把泊松車流中的每輛車隨機標記為快車或慢車，車流便會分拆成兩個獨立（independent）的泊松車流。我們還需要留意，一輛慢車會替我擋住它後面的所有快車。

解答

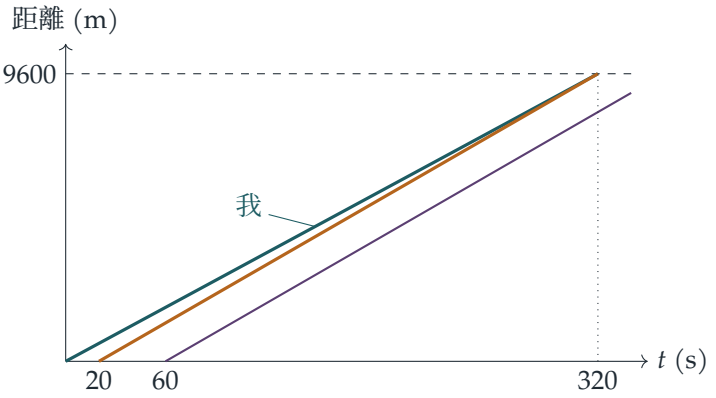
全題把車輛視為質點（particle）（不計車身長度），所以一輛車追上前車之後，便會一直以前車的速率行駛。以秒為單位量度時間 t，由我進入隧道的一刻起計。車輛以每分鐘 6 輛的率進入，即每秒 0.1 輛，所以在任何長度為 τ 秒的時段內進入的車輛數目服從 $\mathrm{Po}(0.1\tau)$，而且互不相交的時段內的數目互相獨立。

第一部分：誰能追上我？

我通過隧道需時 $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$。考慮一輛以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛、在時間 $t > 0$ 進入的車輛。在它追上我之前，於時間 s 我已駛入隧道 $30s$，而它則駛入了 $32(s-t)$。兩者在 $2s = 32t$ 時相等，即 $s = 16t$，此時距離隧道入口 $480t$ 米。所以它在我離開之前追上我，當且僅當

$$480t \le 9600 \iff t \le 20.$$

（等價地說：它通過隧道需時 $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$，所以它不遲於我到達出口，當且僅當 $t + 300 \le 320$。）



這幅距離－時間圖顯示了我（藍綠色）、一輛在 $t = 20$ 進入的快車（琥珀色）和一輛在 $t = 60$ 進入的快車（紫紅色）。琥珀色的車剛好在我們同時到達出口的一刻追上我；任何更遲進入的快車，例如紫紅色那一輛，在我離開時仍然在我後面。

其他車輛全部以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛，所以在 $(0, 20]$ 內進入的車輛在到達我身後之前，不會被任何東西阻慢：除我以外，在它前面的任何車輛同樣以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛，直至那輛車也追上我為止。比我先進入的車輛在我前面，與問題無關。所以我離開時身後的車龍，正好由在 $(0, 20]$ 內進入的車輛組成，其數目服從 $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$。我身後車龍中車輛數目的期望值（expected value）是

$$\boxed{2}.$$

第二部分：恰好有兩輛車進入並追上我

現在其他每輛車各有 $\frac{1}{2}$ 的概率是快車（$32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）或慢車（$30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$），並且與其他一切獨立。

> ? **想一想** 在 20 秒內進入的每一輛快車，是否仍然都能追上我？

不是。一輛在時間 $t' > 0$ 進入的慢車，會一直與我保持 $30t'$ 米的固定距離，所以它永遠追不上我。在它之後進入的快車會追上這輛慢車（或被慢車後面的其他車輛擋住），此後只能以 $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行駛，所以它同樣永遠到不了我身後。因此，一輛在 $(0, 20]$ 內進入的車輛能追上我，當且僅當它是快車，*而且*在我與它之間進入的每一輛車都是快車。在 $t = 20$ 之後進入的快車，即使前面毫無阻擋，也追不上我。

設 $K \sim \mathrm{Po}(2)$ 為在 $(0, 20]$ 內進入的車輛數目。這一部分所求的事件，是恰好有兩輛車在該時段內進入，而且兩輛都追上我。這需要 $K = 2$ 且兩輛車都是快車：

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K = 2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

最後部分：恰好有兩輛車在我身後排隊

現在，頭 20 秒內進入的車輛數目可以是任意的。把在 $(0,20]$ 內進入的 K 輛車按進入的先後次序排列。根據上面的論證，我在出口時身後的車龍，就是這個列表開首那一串連續不斷的快車。（在 $t=20$ 之後進入的車輛不可能加入車龍，因為它永遠追不上我。）所以車龍中恰好有兩輛車，當且僅當

- $K=2$ 且兩輛都是快車：已知 $K=2$ 時，概率為 $\frac{1}{4}$；或
- $K\geq 3$，且頭兩輛是快車、第三輛是慢車：已知 $K=k\geq 3$ 時，概率為 $\frac{1}{8}$。

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{車龍有兩輛車}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K=2)+\tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K\geq 3)\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot 2\mathrm{e}^{-2}+\tfrac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2}\\ &= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)}\approx 0.108.\end{aligned}$$

這個答案比上一個大，而這是必然的：上一個事件只是出現兩輛車車龍的其中一種情況。

> 一個巧妙的另解：把車流分拆成快車和慢車，得到兩個獨立的泊松過程，各自的率為 $0.05\,\mathrm{s}^{-1}$。車龍恰好有兩輛車，意思是在頭 20 秒內，最先到達的兩輛是快車，而下一輛到達的車（如果有的話）是慢車。遇到事件帶有標記的泊松題目時，從這兩個車流的角度去想，往往是最快捷的途徑。

驗算

- 極限情況：假如每輛車都是慢車，便沒有車能追上我；果然，當快車的概率為 0 時，車龍的公式給出 0。
- 若快車的概率是 p 而不是 $\frac{1}{2}$，同樣的論證給出 $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$。當 $p=1$ 時，這等於 $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$，與第一部分吻合，因為那裏的車龍長度正好服從 $\mathrm{Po}(2)$。
- 我們對不准超車的交通情況模擬了 4×10^5 次。結果是第一部分的平均車龍長度為 2.003，第二部分的兩個概率為 0.0674 和 0.1076，而準確值則是 0.0677 和 0.1081。

常見錯誤

- 忘記了一輛慢車會替我擋住它後面的所有快車，於是在最後部分答 $\mathrm{P}(20\text{ s 內恰好有兩輛快車}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。
- 把每分鐘 6 輛的率與以秒計的時間一併使用：20 秒內的平均數是 2，不是 120。
- 以為任何時間進入的車輛都會令車龍增長：只有在頭 20 秒內進入的車輛才能到達我身後。

STEP 之外

第二部分用到*稀疏化*（thinning）：若率為 λ 的泊松過程中，每個事件各自獨立地以概率 p 被保留，則被保留和被捨棄的事件分別構成率為 $p\lambda$ 和 $(1-p)\lambda$ 的兩個獨立泊松過程。不能超車的車龍是交通流理論（traffic flow theory）中的經典模型，其中慢車會造成我們在這裏見到的那種「車隊」（platoon）。關於泊松過程和稀疏化，可參閱 Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）。

詳細解答

STEP III 1997，第 1 題

純數學 • 指數冪級數

STEP III 1997，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q1

關鍵思路

把 $\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ 乘以一個多項式（polynomial），相當於把級數（series）逐項向後平移。於是 x^n 的係數（coefficient）就是 $1/n!$、$1/(n-1)!$、$1/(n-2)!$,… 的組合；以 $n!$ 作公分母通分後，分子是一個關於 n 的多項式。代入 $x = 1$，冪級數（power series）的恆等式就變成一個數值級數的恆等式。因此整道題的關鍵，在於選出能產生所需分子的多項式。下降階乘（falling factorials）n、$n(n-1)$、$n(n-1)(n-2)$ 是最自然的基本組件，因為 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$。

解答

在整個解答中，$\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ 對所有實數 x 都絕對收斂（converges absolutely）。把它乘以一個多項式，得到的是有限個這類級數之和，所以我們可以把這些級數逐項相加，然後代入 $x = 1$。我們約定：當 m 為負整數時，$1/m! = 0$。這樣，下面每一個和式都可以由 $n = 0$ 開始。

第 (i) 部分

我們有

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+2}}{n!} + 5\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

要合併 x^n 的係數，先把頭兩個和式重新編排下標（reindex）。該係數為

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!} &= \frac{n(n-1)+5n+4}{n!}\\ &= \frac{n^2+4n+4}{n!} = \frac{(n+2)^2}{n!}.\end{aligned}$$

這對所有 $n \geq 0$ 都成立，包括 $n = 0$ 和 $n = 1$：在這兩個情況下，約定 $1/m! = 0$ 會把不存在的項消去。（當 $n = 0$ 時，係數為 $4 = 2^2/0!$；當 $n = 1$ 時，係數為 $5+4 = 9 = 3^2/1!$。）因此

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

代入 $x = 1$ 得

$$10\,\mathrm{e} = \frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots = 4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

現在通項（general term）是 $(n+1)^2/n!$，所以我們要找一個二次式 x^2+bx+c，使其級數的係數為

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!} = \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

想一想 怎樣才能不靠猜測而求出 b 和 c？

把目標分子寫成下降階乘的形式：$n^2+2n+1 = n(n-1)+3n+1$。比較係數得 $b = 3$ 和 $c = 1$。於是，按照與第 (i) 部分完全相同的論證，

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

代入 $x = 1$ 得

$$(1+3+1)\,\mathrm{e} = 5\,\mathrm{e} = 1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

第 (iii) 部分

通項是 $(n+1)^3/n!$，所以這次需要一個三次式。$(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$ 中 x^n 的係數為

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!} = \frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

我們把目標分子展開成下降階乘。由於 $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ 及 $n^2 = n(n-1) + n$，

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= \big[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n\big] + 3\big[n(n-1) + n\big] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

（以 $n = 1$ 快速驗算：兩邊都等於 8。以 $n = 2$ 驗算：$27 = 0 + 12 + 14 + 1$。）所以 $a = 1$、$b = 6$、$c = 7$、$d = 1$，而

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

代入 $x = 1$，

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

想一想 為甚麼不能直接把級數逐項平方或立方？

因為 $\sum (n+1)^3/n!$ 並不能以任何簡單的方式由 $\sum (n+1)/n!$ 構造出來。和式對分子而言是線性的，所以我們能做的，是把分子拆成若干個 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 形式的部分；每一部分都與 $n!$ 約分，得出 e 的級數平移後的版本。每一個這樣的部分在 $x = 1$ 時都恰好貢獻 e。因此答案就是 e 乘以各下降階乘係數之和，即 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$。

驗算

- 計算至 $n = 60$ 的部分和（partial sums），得 27.1828…、13.5914… 和 40.7742…，在機器精度內與 10e、5e 和 15e 吻合。
- 三個分子恆等式中的係數，已就 $n = 0, \ldots, 39$ 逐一精確驗證。
- 一致性：第 (ii) 部分的級數是 $\sum (n+1)^2/n!$，第 (i) 部分的是 $\sum (n+2)^2/n!$。兩者之差 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$，確實等於 $10\mathrm{e} - 5\mathrm{e}$。

常見錯誤

- 忘記在重新編排和式的下標時，頭兩項（$n = 0, 1$）需要另行處理。約定 $m < 0$ 時 $1/m! = 0$ 可以處理這兩項，但你仍應親自檢查。
- 把 $(n+1)^3$ 與冪 n^3, n^2, n 比較係數，而不是與下降階乘比較，結果選錯了三次式。

STEP 之外

和式 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$ 等於 $B_k\,\mathrm{e}$，其中 B_k 是第 k 個貝爾數（Bell number），即把一個含 k 個元素的集合劃分（partition）的方法數目：$B_0,\ldots,B_4 = 1,1,2,5,15$。這就是 Dobiński 公式（Dobiński's formula）。事實上，設 $m = n+1$，第 (iii) 部分就是 $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$，而係數 $1,6,7,1$ 正是第二類斯特靈數（Stirling numbers of the second kind）$1,7,6,1$ 倒過來的次序。冪級數之所以可以逐項重排和合併，依據是絕對收斂，這是大學一年級分析學（analysis）的一個主題。理論方面可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多同類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP III 1997，第 2 題

純數學 • 曲線描繪

STEP III 1997，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q2

關鍵思路

取對數（logarithm）後，$x^y = y^x$ 變成 $y\ln x = x\ln y$，再除以 xy 便得 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$。所以題目的後半其實是在問前半的事：只要知道 f 的每個輸出值對應多少個輸入值，就知道每個 x 有多少個「拍檔」y。這條方程總有一個明顯的解 $y = x$；有趣的是另外那一個。

解答

f 的圖像

用商法則（quotient rule）求導，

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t\cdot\frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2\ln t - 3}{t^3}.$$

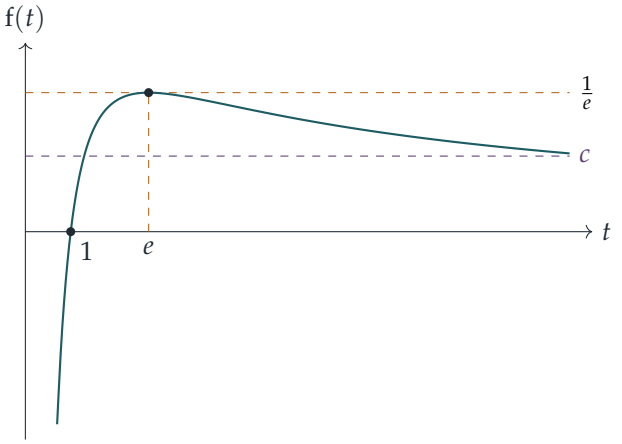
所以當 $0 < t < e$ 時 $\mathrm{f}'(t) > 0$，當 $t > e$ 時 $\mathrm{f}'(t) < 0$：f 在 $(0, e]$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 $[e, \infty)$ 上嚴格遞減（strictly decreasing）。極大值為

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

草圖還需要的其他特徵：

- 當 $0 < t < 1$ 時 $\mathrm{f}(t) < 0$，$\mathrm{f}(1) = 0$，而當 $t > 1$ 時 $\mathrm{f}(t) > 0$。
- 當 $t \to 0^+$ 時，$\ln t \to -\infty$ 而 $1/t \to +\infty$，所以 $\mathrm{f}(t) \to -\infty$：$y$-軸是一條漸近線（asymptote）。
- 當 $t \to \infty$ 時，$\mathrm{f}(t) \to 0^+$，因為 $\ln t$ 的增長比 t 慢。所以 t-軸是一條漸近線。

- 在 $t = e^{3/2}$ 處有一個拐點（point of inflection），該處 $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$。點算解的數目時用不着它，但有了它，草圖才算如實。



有多少個 t 給出數值 c？

由於 f 在 $(0, e]$ 和 $[e, \infty)$ 上各自連續（continuous）且嚴格單調（strictly monotonic），每一段對它取得到的任何值都恰好取一次。在 $(0, e]$ 上，f 由 $-\infty$ 遞增至 $\frac{1}{e}$；在 $[e, \infty)$ 上，它由 $\frac{1}{e}$ 向 0 遞減，但永遠不會達到這個值。因此，對給定的數值 c：

- $c > \frac{1}{e}$：**沒有** t 值；
- $c = \frac{1}{e}$：**一個**值，$t = e$；
- $0 < c < \frac{1}{e}$：**兩個**值，一個在 $(1, e)$ 內，一個在 (e, ∞) 內（即草圖中的水平線 c）；
- $c \leq 0$：**一個**值，在 $(0, 1]$ 內，因為遞減的那一支始終嚴格為正。

點算 $x^y = y^x$ 的解

對 $x, y > 0$，兩邊皆為正數，所以可以取對數；ln 是一對一（one-to-one）的，所以既不會多出解，也不會遺漏解：

$$x^y = y^x \iff y \ln x = x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

其中我們除以了 $xy > 0$。所以，對固定的 x，正數 y 的數目就是滿足 $\mathrm{f}(t) = c$ 的 t 的數目，其中 $c = \mathrm{f}(x)$。其中一個必定是 $y = x$。

? **想一想** $c = \mathrm{f}(x)$ 實際上可以落入上述四種情況中的哪幾種？

由於 c 是 f 的一個值，$c > \frac{1}{e}$ 這種情況不可能出現。把其餘情況轉換回關於 x 的條件：

- $0 < x \leq 1$：這時 $c = \mathrm{f}(x) \leq 0$，所以恰好有**一個** y，就是 $y = x$。
- $x = e$：這時 $c = \frac{1}{e}$，所以恰好有**一個** y，就是 $y = e$。
- $1 < x < e$ 或 $x > e$：這時 $0 < c < \frac{1}{e}$，所以恰好有**兩個** y 值：$y = x$ 和另外一個。若 $1 < x < e$，另外那個位於 (e, ∞) 內；若 $x > e$，它位於 $(1, e)$ 內。

例如，$x = 2$ 的拍檔是 $y = 4$，因為 $2^4 = 4^2 = 16$。

描繪解集

解集由直線 $y = x$（對所有 $x > 0$）和第二條曲線組成；第二條曲線由那些「另外的」解構成，完全位於 $x > 1, y > 1$ 的區域內。它的形狀如下：

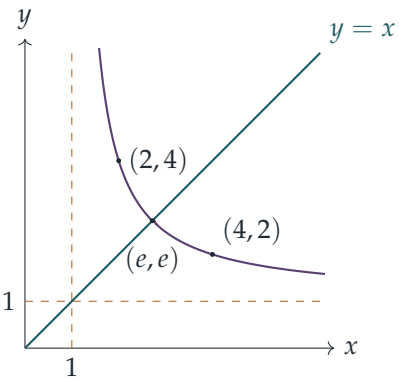
- 對稱性。把 x 和 y 對調，方程不變，所以曲線關於直線 $y = x$ 對稱。
- 遞減。當 x 在 $(1, e)$ 內增大時，$\mathrm{f}(x)$ 增大，所以拍檔 $y > e$ 必須移向 f 較大之處，即 y 減小。$x > e$ 時同理。所以在這一支上，y 是 x 的遞減函數。
- 漸近線。當 $x \to 1^+$ 時，$\mathrm{f}(x) \to 0^+$，所以拍檔 $y \to \infty$：直線 $x = 1$ 是一條漸近線。由對稱性，當 $x \to \infty$ 時，$y \to 1^+$，故 $y = 1$ 也是一條漸近線。
- 與直線 $y = x$ 相交。當 $x \to e$ 時，拍檔也趨向 e，所以曲線經過 (e, e)，並在該處穿過直線。在 $t = e$ 附近，利用 $\mathrm{f}'(e) = 0$ 和 $\mathrm{f}''(e) = -e^{-3}$，由泰勒定理（Taylor's theorem）得 $\mathrm{f}(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$。所以 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ 迫使 $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$，即 $y - e \approx \pm(x-e)$。取正號就是直線 $y = x$。取負號就是我們的曲線，因此它與直線成直角相交，斜率（gradient）為 -1。

想一想 我們能否把這條曲線明確地寫出來？

可以，只要用兩者之比作參數化（parametrise）。設 $y = tx$，其中 $t > 0, t \neq 1$。那麼 $x^{tx} = (tx)^x$；兩邊開 x 次方得 $x^t = tx$，所以 $x^{t-1} = t$，於是

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

在 $t = 2$ 時得到 $(2, 4)$，在 $t = \frac{1}{2}$ 時得到 $(4, 2)$。當 $t \to 1$ 時，兩個坐標都趨向 e，因為 $t^{1/(t-1)} \to e$。下圖的曲線就是這樣畫出來的。



驗算

- $2^4 = 4^2$ 是著名的整數例子，它確實落在曲線上，並如所料分別位於 $1 < x < e$ 和 $x > e$ 之內。
- 數值上，用細密的網格搜尋，得出 f 的極大值位於 $t \approx 2.718$，其值為 $0.367879 \approx 1/e$。用二分法（bisection）求得 $x = 1.01$ 的拍檔為 $y \approx 659$，而 $x = 100$ 的拍檔為 $y \approx 1.050$。這些結果與漸近線 $x = 1$ 和 $y = 1$ 吻合。
- 在 $x = e$ 處用中心差分（central difference），得出第二支的斜率為 -1.0000。

常見錯誤

- 說每個 $x \neq e$ 都有兩個拍檔。對 $0 < x \leq 1$，$\mathrm{f}(x)$ 的值並非正數，只有 $y = x$ 成立。
- 在最後的草圖中漏畫直線 $y = x$，或者把另一支畫成在 (e, e) 處與直線相切，而不是穿過直線。
- 除以 $\ln x$ 或 $\ln y$（它們可能為零），而不是除以 xy。

STEP 之外

第二條曲線是 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(y)$ 的一個水平集（level set），而 (e, e) 正是該函數的梯度為零的一點。這就是為何在該處有兩支曲線相交，而不是只有一條光滑曲線經過。大學一年級分析課程中會遇到的隱函數定理（implicit function theorem），解釋了水平集何時在局部上是一個圖像，以及不是的時候會發生甚麼事。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是打好基礎的入門好書。方程 $x^y = y^x$ 本身歷史悠久；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中還有更多同類風格的題目。

詳細解答

STEP III 1997，第 3 題

純數學 • 單位根

STEP III 1997，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q3

關鍵思路

n 次單位根（roots of unity）$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ 正好是 $z^n - 1$ 的全部根，所以這個多項式（polynomial）可以完全因式分解（factorise）；除去因式 $z - 1$ 便得到第一個恆等式（identity）。把多邊形放在複平面（complex plane）上，以 O 為原點，各頂點就是 $re^{i\theta}$ 乘以各個單位根。這樣，向量和就是一個等比級數（geometric series），而弦長的平方則可用點積（dot product）展開 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$ 而得。

解答

乘積恆等式

對 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，我們有 $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$，所以每個 ω^k 都是 $z^n - 1 = 0$ 的根。這 n 個數互不相同，因為它們的輻角（argument）$2\pi k/n$ 互不相同，而且全部位於 $[0, 2\pi)$ 之內。一個 n 次多項式，若首項係數（leading coefficient）為 1 並有 n 個相異的根，就等於相應的一次因式之積，所以

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

另一方面，由等比級數求和（或者直接乘開），

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

對每個 $z \neq 1$，我們可以把兩個式子同除以 $z - 1$，得出

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

想一想 題目說的是「任意複數 z」。那麼 $z=1$ 又如何？這時我們不能做除法。

兩邊都是 $n-1$ 次多項式，而它們在無窮多個點 $z \neq 1$ 上相等。於是兩者之差是一個有無窮多個根的多項式，所以它是零多項式（zero polynomial）。（另一個做法：兩邊都是 z 的連續（continuous）函數，所以令 $z \to 1$ 即可。）因此，恆等式對每個複數 z 都成立，包括 $z=1$，這正是所要證明的。

向量和

把圓所在的平面視為複平面，以 O 為原點，並以 a_k 表示代表 A_k 的複數。若 $a_1 = re^{i\theta}$，則把各頂點按逆時針方向依次標記（相鄰兩個頂點在 O 所對的角為 $2\pi/n$），便有

$$a_k = re^{i\theta}\,\omega^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

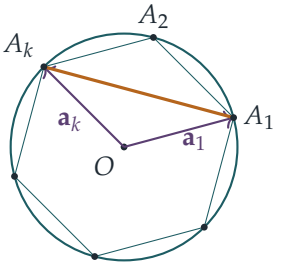
（若改為按順時針方向標記，只不過是把 ω 換成 $\bar{\omega} = \omega^{n-1}$，而它所遍歷的仍是同一組單位根；況且這個和本來就與頂點的次序無關。）

向量 $\overrightarrow{OA_k}$ 對應複數 a_k，而向量相加對應複數相加。所以我們要求的是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = re^{i\theta}\left(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}\right).$$

括號內的式子就是恆等式右邊在 $z = \omega$ 時的值。由於 ω 出現在左邊的因式之中（當 $n \geq 2$ 時），左邊含有因式 $\omega - \omega = 0$，所以括號內的值為 0。（同樣地，它是一個公比（common ratio）為 $\omega \neq 1$ 的等比級數，所以等於 $(\omega^n - 1)/(\omega - 1) = 0$。）因此

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}.$$



距離平方之和

現在把 $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$ 寫成向量，於是對每個 k 都有 $|\mathbf{a}_k| = r$，並且 $\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$。用點積展開，

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

這對 $k = 1$ 也成立，此時兩邊都是 0。對 $k = 1, \ldots, n$ 求和，並利用點積對加法的分配律，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2 n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2 n, \end{aligned}$$

這裏用了上一部分的結果。這就是所要證明的結果。

驗算

- $n = 2$：恆等式變成 $z - (-1) = 1 + z$。兩點是一條直徑的兩端，所以和為 $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2\cdot 2$。
- $n = 4$，$r = 1$：由正方形的一個角出發，各距離的平方為 $0, 2, 4, 2$，總和為 $8 = 2\cdot 1^2\cdot 4$。
- 數值上，隨機選取 2000 組 $n \le 20$、半徑和旋轉角度，向量和均為零，弦長平方之和與 $2r^2n$ 的誤差在 10^{-14} 以內；乘積恆等式也在隨機的 z（以及 $z = 1$）上驗證過，準確度相同。

常見錯誤

- 除以 $z - 1$ 之後，忘記了這樣只證明了恆等式在 $z \neq 1$ 時成立。
- 寫成 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$：交叉項 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$ 正是整個論證的關鍵。

STEP 之外

在乘積恆等式中代入 $z = 1$ 並取模（modulus），可得 $|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$：單位圓的內接正 n 邊形中，由一個頂點出發的各條弦長之積恰好是 n，與本題的平方和

相映成趣。把 $z^n - 1$ 按單位根因式分解，是分圓多項式（cyclotomic polynomials）和離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）的起點，兩者都會在大學課程的早期遇到。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析）是一本優美的書，很適合用來見識這類以複數處理的幾何。

詳細解答

STEP III 1997，第 4 題

純數學 • 算術幾何平均不等式

> **STEP III 1997，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q4

關鍵思路

題目原文有一處印刷錯誤：有四個根的多項式（polynomial）必定是四次多項式，而係數的規律 $1,4,6,4,1$ 告訴我們，題目原意的多項式是

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

這樣選取係數，是為了令 a, b^2, c^3, d^4 各自都是一個*平均值*：分別是各根的平均值、兩兩乘積的平均值、三三乘積的平均值，以及四個根全部相乘之積的平均值。之後每一個不等式，都是把算術平均－幾何平均不等式（AM–GM inequality）應用於 f、f′ 或 f″ 的根而得出，而羅爾定理（Rolle's theorem）則確保這些根仍然是相異的正數。

解答

設 $\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$。比較係數，得

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

第 (i) 部分

設 $P = pqrs = d^4$。由於沒有一個根是零，

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

映射 $t \mapsto P/t$ 在正實數上是一對一（one-to-one）的，而 p, q, r, s 互不相同，所以這四個乘積亦互不相同。

第 (ii) 部分

四個三三乘積是互不相同的正數，所以根據 AM–GM 不等式，

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > \big(pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq\big)^{1/4} = \big((pqrs)^3\big)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

每個根都恰好出現在四個乘積的其中三個之中，因此它們的積是 $(pqrs)^3$。由於 $c, d > 0$，而 $t \mapsto t^3$ 是遞增的，故由 $c^3 > d^3$ 可得 $c > d$。

第 (iii) 部分

把各根排序，使得 $0 < p < q < r < s$。多項式 f 可微（differentiable），並且在 p 和 q 處取值為零，所以根據羅爾定理，f′ 有一個根 α 滿足 $p < \alpha < q$。同理，還有根 $\beta \in (q, r)$ 和 $\gamma \in (r, s)$。這些開區間（open interval）互不重疊，所以 $\alpha < \beta < \gamma$ 互不相同。由於 f′ 是三次多項式，它再沒有其他根。還要留意，這三個根全是正數，因為 $\alpha > p > 0$。

第 (iv) 部分

求導，得

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4\big(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3\big),$$

所以 α, β, γ 是 $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$ 的根，並且

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

這是次數降低了一次的同一種規律，所以我們照搬第 (i) 和第 (ii) 部分的做法。兩兩乘積是 $\alpha\beta = c^3/\gamma$、$\beta\gamma = c^3/\alpha$、$\gamma\alpha = c^3/\beta$，由於 α, β, γ 是互不相同的正數，這些乘積亦互不相同。根據 AM–GM 不等式，

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > \big((\alpha\beta\gamma)^2\big)^{1/3} = c^2,$$

又因為 $b, c > 0$，所以 $b > c$。

想一想 為甚麼要先完成第 (iii) 部分，才可以對 f′ 使用 AM–GM？

AM–GM 不等式只適用於正實數，而且我們需要的是嚴格不等的版本。一個三次多項式根本不一定有三個實根。正是羅爾定理保證了 α, β, γ 是互不相同的正實數，因而兩兩乘積也是如此。

第 (v) 部分

把同樣的論證再用一次。由於 f′ 有相異的根 $\alpha < \beta < \gamma$，根據羅爾定理，

$$\mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12\big(x^2 - 2ax + b^2\big),$$

有根 $\mu \in (\alpha, \beta)$ 和 $\nu \in (\beta, \gamma)$，而且這兩個根是相異的正數。於是 $\mu + \nu = 2a$ 及 $\mu\nu = b^2$，再根據兩個數的 AM–GM 不等式，

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

（換一個說法：$x^2 - 2ax + b^2$ 有兩個相異實根，所以它的判別式（discriminant）$4a^2 - 4b^2$ 是正數，而兩者皆為正數，故 $a > b$。）綜合以上各部分，我們證明了

$$a > b > c > d.$$

驗算

- 取根為 $1, 2, 3, 4$：這時 $4a = 10$，$6b^2 = 35$，$4c^3 = 50$，$d^4 = 24$，所以 $a = 2.5$，$b \approx 2.415$，$c \approx 2.321$，$d \approx 2.213$，次序正確。
- 假如四個根全都等於 k，則 $\mathrm{f}(x) = (x - k)^4$ 而 $a = b = c = d = k$。這就是為甚麼要有「根互不相同」這個條件，才能得到嚴格不等式。
- 我們隨機測試了 20 000 組由四個相異正根組成的數據，當中包括幾乎重合的根，每一次 $a > b > c > d$ 都成立。

常見錯誤

- 直接對 f 的根使用 AM–GM。這樣可得 $a > d$，卻無法分開中間的兩項。
- 忘記檢查代入 AM–GM 的數是否互不相同的正數，而這正是第 (i) 和第 (iii) 部分的用意所在。
- 由 $c^3 > d^3$ 或 $b^2 > c^2$ 推出 $c > d$ 或 $b > c$ 時，沒有指出所有字母都代表正數。

STEP 之外

a, b, c, d 這些量是各根的對稱平均（symmetric means），而不等式鏈 $a > b > c > d$ 是麥克勞林不等式（Maclaurin's inequality）的一個特殊情況：對於正實數，k 重乘積的平均值的 k 次方根，隨 k 增加而遞減。藉求導來降低次數、同時保持各平均值不變，這個技巧也是通往牛頓（Newton）不等式的標準途徑。想了解更多，可參閱 Steele 的 *The Cauchy–Schwarz Master Class*（一本以柯西－施瓦茨不等式為主線的不等式專著），或哈代（Hardy）、李特爾伍德（Littlewood）與波利亞（Pólya）合著的經典 *Inequalities*（《不等式》）。

詳細解答

STEP III 1997，第 5 題

純數學 • 擺線的弧長

> **STEP III 1997，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q5

關鍵思路

滾動車輪邊緣上的一點，所描出的軌跡是一條擺線（cycloid）。只要把該點的位置用車輪轉過的角度表示出來，這道題就只是一個弧長（arc length）積分。滾動條件（不打滑）把輪心的運動與轉角連繫起來，而半角恆等式（half-angle identity）則令弧長公式中的平方根一下子化簡。

解答

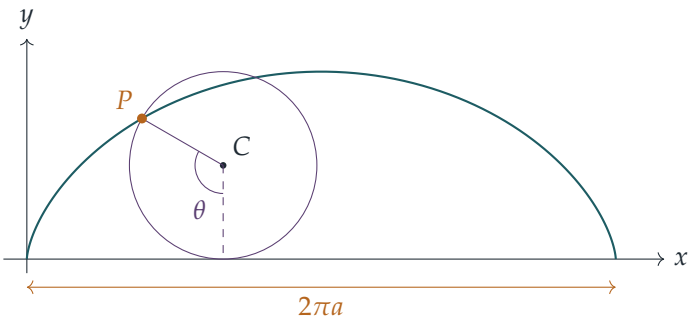
建立路徑

設車輪半徑為 a，沿 x 軸作無滑動的滾動。開始時，標記的點 P 在原點與地面接觸，並設 θ 為車輪轉過的角度（以弧度計）。

由於沒有打滑，車輪走過的地面長度等於與地面接觸過的輪緣長度，所以輪心 C 移動了距離 $a\theta$，位於 $(a\theta,\, a)$。相對於 C 而言，點 P 起初在它的正下方，其後轉過了角度 θ（車輪向右滾動，故為順時針方向），所以 P 位於 $C + (-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$。因此，車輪轉動一周時，

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

在這段時間內，車輪向前移動了距離 $2\pi a$。



弧長

求導數，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

其中用到 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$。

? **想一想** 取平方根時，結果是 $2a\sin\frac{\theta}{2}$ 還是 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$？在這裏有沒有分別？

平方根永遠是 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$。當 $0 \le \theta \le 2\pi$ 時，我們有 $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$，在這範圍內 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$，所以恰好轉動一周時，絕對值（modulus）符號可以省去。（若範圍更長，就必須把積分分段計算。）

因此，P 所走的距離為

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

比值

車輪移動了 $2\pi a$，而輪緣上的點則走了 $8a$，所以所求的比值為

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

這個比值與車輪的大小無關，而這亦是理所當然的：把車輪放大或縮小，兩段距離都會按相同的倍數改變。

驗算

- 該點所走的距離比車輪的長（$8a > 2\pi a \approx 6.28a$），這是合理的：它既向前移動，同時又上升和下降各 $2a$。事實上，$8a$ 恰好是四條直徑的長度。
- 一個粗略的估計：路徑由 $(0,0)$ 上升至 $(\pi a, 2a)$，再下降至 $(2\pi a, 0)$，所以它的長度至少是 $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$，而至多是 $2\pi a + 4a \approx 10.28a$。數值 $8a$ 正好落在兩者之間。
- 以數值方法驗證：在車輪滾動的過程中，追蹤輪緣上的點的 200 000 個位置，再把各段直線距離相加，當 $a = 1$ 時得出 7.99999999992，所以比值是 $0.78539816\ldots = \pi/4$。

常見錯誤

- 把參數式（parametrisation）中的正負號弄錯（例如 $x = a(\theta + \sin\theta)$），這樣得出的路徑相對於車輪是向後移動的。可在 $\theta = \pi$ 處檢查：P 應位於最高點 $(\pi a, 2a)$。
- 把被積函數（integrand）保留為 $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$，並試圖直接積分；半角恆等式正是令積分變得容易的一步。
- 把比值上下顛倒：題目要求的是車輪所走的距離除以該點所走的距離，即 $\pi/4$，而不是 $4/\pi$。

STEP 之外

擺線是數學中最著名的曲線之一。它是最速降線（brachistochrone），即在重力作用下，兩點之間下降得最快的曲線；它也是等時降線（tautochrone），即珠子無論從曲線上哪一點出發，都會在相同時間內到達最低點。這兩項事實都要用變分法（calculus of variations）來證明，你會在大學一年級或二年級的力學或數學方法課程中學到；而本題的弧長計算，正是兩者的第一步。如想嘗試更多同類的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP III 1997，第 6 題

純數學 • 切比雪夫微分方程

STEP III 1997，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q6

關鍵思路

因子 $1-x^2$ 與 $x=\cos\theta$ 並列，只暗示一件事：$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$。只要用鏈式法則（chain rule）小心地換元，這條關於 x 的棘手方程，就會變成關於 θ 的簡諧運動（simple harmonic motion）方程。我們解出該方程，再用兩個附帶條件定出常數。至於遞推關係（recurrence），其實是喬裝了的複角恆等式（compound-angle identity）。全題中 n 為非負整數。條件 $y_n(x)=(-1)^n y_n(-x)$ 只有在這個情況下才有意義。

解答

變數代換

設 $x=\cos\theta$，其中 $0<\theta<\pi$，故 $\sin\theta>0$，且 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta=-\sin\theta\neq 0$。為簡化記號，我們把 y_n 寫成 y。由鏈式法則，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

要再對 x 求導一次，我們先對 θ 求導，再乘以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x=-1/\sin\theta$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\&=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

現在利用 $1-x^2=\sin^2\theta$ 和 $x=\cos\theta$ 代入：

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y\\ &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.\end{aligned}$$

兩個一階導數項剛好互相抵消。因此題目所給的方程等價於 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$，正是所求。

想一想 為甚麼 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 不就是 $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$？

因為 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是一個乘積：$-1/\sin\theta$ 乘以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$。兩個因子都取決於 θ，所以用積法則（product rule）會得出兩項。多出來的那一項，恰好抵消了 $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 一項，這正是題目中有這一項的原因。

求解 y_n

當 $n\geq 1$ 時，$y''+n^2y=0$ 的通解（general solution）為

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

當 $n=0$ 時，方程是 $y''=0$，故 $y_0=A+B\theta$。

在 $x=1$ 的條件。 $x=1$ 對應 $\theta=0$，而由 $y_n(1)=1$ 可知兩種情況下都有 $A=1$。

對稱條件。 把 x 換成 $-x$，即是把 θ 換成 $\pi-\theta$，因為 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，而且 $\pi-\theta$ 仍然在 $[0,\pi]$ 之內。對於整數 $n\geq 1$，

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

所以 $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n\left[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta\right]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$。令此式對所有 θ 都等於 $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$，得 $2B\sin n\theta=0$，故 $B=0$。當 $n=0$ 時，條件變成對所有 θ 都有 $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$，同樣必須有 $B=0$。

因此，對每個非負整數 n，

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{即}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

關係式 $\theta=\arccos x$ 把 $[-1,1]$ 映滿 $[0,\pi]$，所以結果對 $|x|\leq 1$ 成立。端點 $x=\pm1$（$\theta=0,\pi$）則由連續性（continuity）補上。

推論

取 $n=0$ 和 $n=1$：$y_0=\cos 0=1$，$y_1=\cos\theta=x$。

至於遞推關係，把以下兩條複角公式相加：

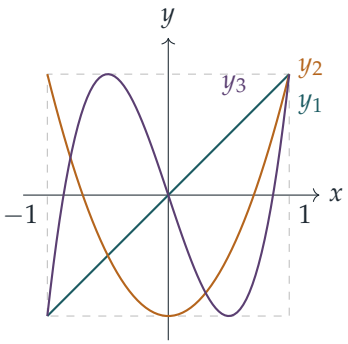
$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \qquad \cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta.$$

正弦項互相抵消，餘下 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$。以 x 表示，即

$$y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1),$$

這就是所要求的結果。

由 $y_0 = 1$ 和 $y_1 = x$ 出發，遞推關係會產生一個個多項式（polynomial）：$y_2 = 2x^2 - 1$、$y_3 = 4x^3 - 3x$、$y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$，如此類推。



每個 y_n 在 $[-1, 1]$ 上都介乎 -1 與 1 之間；它既然是餘弦，這是必然的。

驗算

- $y_2 = 2x^2 - 1$：此時 $(1-x^2)\cdot 4 - x\cdot 4x + 4(2x^2-1) = 0$。它滿足 $n = 2$ 時的方程，而且 $y_2(1) = 1$，並且是偶函數（even function）。
- y_n 的奇偶性（parity）與 $(-1)^n$ 吻合。例如 $y_3 = 4x^3 - 3x$ 是奇函數（odd function）。
- 數值上，取 $x = 0.3$：$\cos(2\arccos 0.3) = -0.82 = 2(0.3)^2 - 1$。再以有限差分（finite difference）檢驗 $y_n = \cos(n\arccos x)$（$0 \leq n \leq 8$）是否滿足原方程，所得殘差（residual）均小於 10^{-5}。

常見錯誤

- 求二階導數時忘記用積法則，以致一階導數項無法抵消。
- 保留了 $\sin n\theta$ 這個解。它滿足微分方程（differential equation）和 $y_n(1) = 1$（因為 $\sin 0 = 0$），但不符合對稱條件。題目設下這個條件，正是為了把它剔除。
- 忘記 $n = 0$ 要另外處理：這時通解是 $A + B\theta$，而不是一對餘弦和正弦。

STEP 之外

多項式 y_n 就是*切比雪夫多項式*（Chebyshev polynomials）$T_n(x)$。題目所給的方程就是切比雪夫方程。我們捨棄的第二個解 $\sin(n \arccos x)$，是 $\sqrt{1-x^2}$ 乘以一個多項式。切比雪夫多項式在逼近理論（approximation theory）中佔有核心地位。在所有 n 次首一多項式（monic polynomial）之中，$2^{1-n}T_n$ 在 $[-1,1]$ 上的最大絕對值最小，因此對許多數值方法而言，T_n 的零點是最佳的插值（interpolation）節點。至於這類方程的級數解（series solution），以及由此衍生的特殊函數（special functions），可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）。

詳細解答

STEP III 1997，第 7 題

純數學 • e 的無理性

STEP III 1997，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q7

關鍵思路

級數（series）a_n 正好就是 $n!\,\mathrm{e}$ 去掉整數部分（integer part）之後餘下的東西：把級數 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$ 乘以 $n!$，直至 $k = n$ 為止的每一項都變成整數，而尾段則變成 a_n。等比級數（geometric series）b_n 的作用，是逐項為 a_n 提供一個容易處理的上界（upper bound）。一旦知道尾段嚴格介乎 0 與 1 之間，假如 e 是有理數（rational number），就會有某個 $n!\,\mathrm{e}$ 既是整數，小數部分（fractional part）卻又不等於零，這是荒謬的。

解答

第 (i) 部分

級數 b_n 是等比級數，首項為 $\frac{1}{n+1}$，公比（common ratio）為 $r = \frac{1}{n+1}$。由於 $n \geq 1$，我們有 $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$，所以它收斂（converges），而且

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

第 (ii) 部分

把兩個級數的第 k 項分別寫成

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

u_k 的分母中有 k 個因子 $n+1, n+2, \ldots, n+k$，每一個都至少是 $n+1$，所以 $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$，因此

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{對所有} k \geq 1.$$

等號只在 $k=1$ 時成立；當 $k \geq 2$ 時，因子 $n+2$ 嚴格大於 $n+1$，所以 $u_k < v_k$。

所有項都是正數，並且不超過收斂級數 b_n 的對應項，所以 a_n 收斂（根據比較判別法（comparison test））；而且 $a_n \geq u_1 > 0$。至於上界，

$$b_n - a_n = \sum_{k\geq 1}(v_k - u_k) \;\geq\; v_2 - u_2 = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0,$$

因為每一項 $v_k - u_k$ 都是非負的。於是 $a_n < b_n = \frac{1}{n}$，合起來便得

$$0 < a_n < \frac{1}{n},$$

這正是所要證明的。

> **想一想** 為甚麼單憑「a_n 的每一項都不超過 b_n 的對應項」，並不足以得出嚴格不等式（strict inequality）？

逐項的 $\leq$ 在取極限後只能給出 $a_n \leq b_n$；把無窮多項相加時，嚴格不等式有可能變成等式。正因如此，我們挑出 $k=2$ 這一項，它的差距是一個確定的正數，再指出其餘各項的差距全都 ≥ 0。

第 (iii) 部分

利用級數 $\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$，乘以 $n!$，並在 $k=n$ 處把和式拆開：

$$n!\,\mathrm{e} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{N} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}.$$

當 $k \leq n$ 時，$\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots n$ 是整數，所以 N 是正整數。當 $k = n+j$ 而 $j \geq 1$ 時，

$$\frac{n!}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)} = u_j,$$

所以尾段正好就是 a_n。因此

$$n!\,\mathrm{e} = N + a_n, \qquad N \in \mathbb{Z}, \quad 0 < a_n < \tfrac{1}{n} \leq 1,$$

這裏用到第 (ii) 部分及 $n \geq 1$。一個形如（整數）+（$[0,1)$ 內的某數）的數，其整數部分就是那個整數，所以 $[n!\,\mathrm{e}] = N$，因此

$$a_n = n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}].$$

第 (iv) 部分

採用反證法（proof by contradiction），假設 $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$，其中 p, q 為正整數。取 $n = q$，則

$$n!\,\mathrm{e} = q! \cdot \frac{p}{q} = (q-1)!\,p$$

是整數，所以它等於自身的整數部分，而由第 (iii) 部分得 $a_q = 0$。但第 (ii) 部分指出 $a_q > 0$。這個矛盾說明 e 是無理數（irrational number）。

（任何 $n \geq q$ 同樣可行，因為 q 整除 $n!$；重點只在於必定有某個 $n!\,\mathrm{e}$ 是整數。）

驗算

當 $n = 1$ 時：$1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$，所以小數部分是 $0.71828\ldots$，而把 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$ 加起來同樣得到 $0.71828\ldots$，明顯小於 $b_1 = 1$。當 $n = 5$ 時，$a_5 \approx 0.19382$，僅僅略小於 $\frac{1}{5}$：隨着 n 增大，這個界相對而言愈來愈緊，因為 a_n 與 b_n 的首項相同。用電腦以精確分數驗算，可確認對 1 至 29 的每一個 n，都有 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 以及 $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$，其中 $[n!\,\mathrm{e}] = N$。

常見錯誤

- 僅僅因為對所有 k 都有 $u_k \leq v_k$，就聲稱 $a_n < b_n$。你需要有一項是嚴格較小的（這裏是 $k = 2$），才能保住嚴格不等式。
- 忘記了 $\sum_{k \leq n} n!/k!$ 為何是整數：原因是當 $k \leq n$ 時，$k!$ 整除 $n!$。
- 在第 (iv) 部分只用 $0 < a_n$，或只用 $a_n < 1$。兩邊都不可或缺：$a_n < 1$（來自第 (ii) 部分）令我們能夠確定 a_n 就是小數部分，而 $a_n > 0$ 則帶來矛盾。

STEP 之外

這是傅立葉（Fourier）對 e 是無理數的證明，而它的模式（證明一個本應是整數的量嚴格介乎 0 與 1 之間）是許多無理性證明的藍本，包括 π 的無理性，以及 $r \neq 0$ 為有理數時 e^r 的無理性。在大學第一門分析（analysis）課程中，你會嚴格地論證比較判別法和 e 的級數，並且明白這個論證之所以行得通，全靠 $\sum 1/k!$ 收斂得夠快：分數逼近 e 的效果，遠遠好於逼近任何有理數時所能做到的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 涵蓋級數方面的內容，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 則是有理逼近（rational approximation）的一本出色入門書。

詳細解答

STEP III 1997，第 8 題

純數學 • 二次型的對角化

> **STEP III 1997，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q8

關鍵思路

一個對稱矩陣（symmetric matrix）描述一個二次型（quadratic form）$ax^2 + 2bxy + cy^2$，而共軛（conjugate）後的矩陣 $R_{-\alpha}AR_\alpha$ 則描述同一個二次型在旋轉了 α 的坐標軸下的樣子。把它化成對角矩陣（diagonal matrix），xy 項便會消失，於是在新坐標軸下橢圓（ellipse）處於標準位置，其半軸（semi-axes）長度可以直接讀出。由於旋轉保持各點與原點的距離不變，這兩條半軸的長度正是我們要找的極端距離。

解答

全題記

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_\alpha^{\mathsf{T}}.$$

第 (i) 部分

設 $C = \cos\alpha$ 及 $S = \sin\alpha$。首先

$$AR_\alpha = \begin{pmatrix} aC + bS & -aS + bC \\ bC + cS & -bS + cC \end{pmatrix},$$

再從左邊乘以 $R_{-\alpha}$，右上角的元素是

$$\begin{aligned} C(-aS + bC) + S(-bS + cC) &= b(C^2 - S^2) - (a - c)SC \\ &= b\cos 2\alpha - \tfrac{1}{2}(a - c)\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

因為 A 是對稱的，所以 $R_{-\alpha}AR_\alpha = R_\alpha^{\mathsf{T}}AR_\alpha$ 也是對稱的（它的轉置（transpose）就是它本身），故左下角的元素與右上角相同，一個條件便同時處理了兩者。這個矩陣是對角

矩陣，當且僅當

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{故可取} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

若 $a = c$，條件變成 $b\cos 2\alpha = 0$，取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 即可（若同時有 $b = 0$，則 A 本身已是對角矩陣，任何 α 都可以）。

第 (ii) 部分

把橢圓的方程展開，得

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

而 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$。比較係數，得

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

於是 $a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$（因為 $0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$），並且

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

所以 $\alpha = \theta$ 滿足第 (i) 部分的條件：$R_{-\theta}AR_\theta$ 是對角矩陣。

至於對角線上的元素，按第 (i) 部分同樣的乘法可得

$$\text{左上角} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{右下角} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

這裏 $C = \cos\theta$，$S = \sin\theta$。設 $k = \cot 2\theta$ 及 $\mu = \cos 2\theta$，並利用 $2SC = \sin 2\theta$、$k\sin 2\theta = \mu$、$C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$、$S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$ 以及 $k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$。對於右下角的元素，

$$\begin{aligned}(1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta.\end{aligned}$$

用完全相同的方法，左上角的元素是 $1 + 2\mu + \dfrac{2\mu^2}{1-\mu} = \dfrac{1+\mu}{1-\mu} = \cot^2\theta$。所以

$$R_{-\theta}AR_\theta = \begin{pmatrix} \cot^2\theta & 0 \\ 0 & \tan^2\theta \end{pmatrix}.$$

想一想 有沒有快捷的方法，不必重做一次代數運算，也能確認這兩個元素是對的？

有。共軛不會改變矩陣的跡（trace）和行列式（determinant）。這裏 $\det A = ac - b^2 = 1 + 4k^2 - 4k^2 = 1$，而的確 $\cot^2\theta \tan^2\theta = 1$。另外 $\operatorname{tr} A = 2 + 4\cot^2 2\theta$，而由於 $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$，

$$\cot^2\theta + \tan^2\theta = (\cot\theta - \tan\theta)^2 + 2 = 4\cot^2 2\theta + 2.$$

第 (iii) 部分

以 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 引入新坐標，使 X 軸和 Y 軸就是原來的坐標軸旋轉 θ 所得。由於 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_\theta^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta}$，橢圓的方程變成

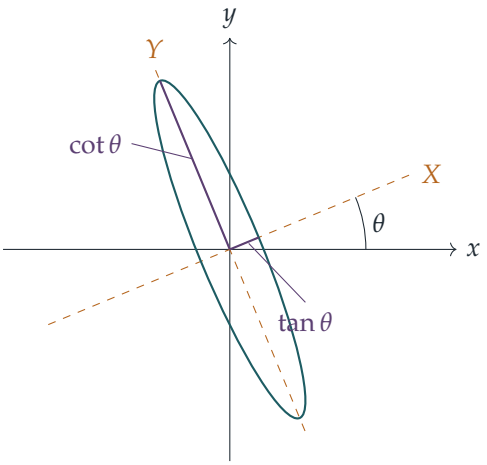
$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta} A R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{即} \qquad X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1.$$

這個方程在 $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$ 之下不變，所以橢圓的中心是原點。旋轉保持長度不變，因此中心到某一點的距離是 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$。

因為 $0 < \theta < \frac{1}{4}\pi$，我們有 $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$，所以 $\tan^2\theta < \cot^2\theta$。對橢圓上任何一點，

$$\tan^2\theta\,(X^2 + Y^2) \;\le\; X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1 \;\le\; \cot^2\theta\,(X^2 + Y^2),$$

所以 $\tan^2\theta \le r^2 \le \cot^2\theta$，即 $\tan\theta \le r \le \cot\theta$。左邊的不等式在 $X = 0$ 時取等號，即在 $(X, Y) = (0, \pm\cot\theta)$；右邊的不等式在 $Y = 0$ 時取等號，即在 $(X, Y) = (\pm\tan\theta, 0)$。兩個界限都能達到，所以中心到橢圓的最短和最長距離分別是 $\tan\theta$ 和 $\cot\theta$，正如題目所求。



上圖所示為 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 的情況，虛線是旋轉後的坐標軸。

驗算

- $(0, \pm 1)$ 在橢圓上，而 $\tan\theta < 1 < \cot\theta$，與上述界限吻合。
- 當 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 時，長軸（major axis）的端點在原坐標下是 $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$。這時 $\cot 2\theta = 1$，而 $0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$，正如所料。
- 數值上，對若干個 θ 值沿橢圓掃描 200 000 個方向，在 $\theta = 0.3$ 時得出最短距離 0.309336 和最長距離 3.232728，與 $\tan 0.3$ 和 $\cot 0.3$ 相符。

常見錯誤

- 把 xy 的係數當作 b 而不是 $2b$：二次型是 $ax^2 + 2bxy + cy^2$。
- 搞亂了哪個旋轉放在哪一邊：若 $\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$，行向量便是 $\mathbf{X}^{\mathsf{T}} R_{-\theta}$，這就是出現 $R_{-\theta} A R_\theta$ 的原因。
- 以為係數較大的那條軸較長：$\cot^2\theta X^2$ 的係數較大，所以橢圓在 X 方向上反而是短的。

STEP 之外

這是譜定理（spectral theorem）的二維情況：每個實對稱矩陣都可以用旋轉對角化（diagonalise），而對角線上的元素就是它的特徵值（eigenvalues）。二次型的特徵值可用來為圓錐曲線（conics）和二次曲面（quadric surfaces）分類；同一個想法在力學中給出慣量主軸（principal axes of inertia），在統計學中給出主成分（principal components）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對對稱矩陣和二次型的講解十分易讀。

詳細解答

STEP III 1997，第 9 題

力學 • 涉及彈簧的靜力學

> **STEP III 1997，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q9

關鍵思路

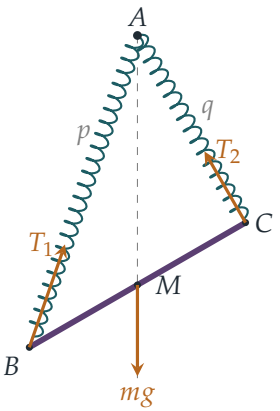
作用在桿上的力只有三個：兩條彈簧的張力（tension）和桿本身的重量。當一個物體在三個互不平行的力作用下處於平衡（equilibrium）時，這三個力的作用線（line of action）必定通過同一點。兩個張力的作用線都通過 A，所以重量的作用線也必須通過 A，亦即桿的中點位於 A 的正下方。之後，沿水平方向分解力，幾乎就完成餘下的工作。

解答

我們把桿視為均勻（uniform）的剛體（rigid body），質量為 m，中點為 M。兩條彈簧都是輕彈簧，遵從虎克定律（Hooke's law），彈簧常數同為 κ，而且都處於拉伸狀態。設彈簧 AB 和 AC 的自然長度（natural length）分別為 a 和 b，拉伸後的長度分別為 p 和 q，則張力為

$$T_1 = \kappa(p-a), \qquad T_2 = \kappa(q-b),$$

由於彈簧都被拉長，兩者皆為正數。



第 1 步：M 位於 A 的正下方

對桿取關於 A 的力矩（moment）。張力 T_1 沿 BA 作用，T_2 沿 CA 作用，所以兩條作用線都通過 A，兩者關於 A 的力矩均為零。因此，垂直通過 M 的重量關於 A 的力矩也必須為零，即通過 M 的鉛垂線通過 A。於是 M 位於 A 的正下方；設它在 A 下方的深度為 $h > 0$。

第 2 步：沿水平方向分解

以 A 為原點建立坐標軸，x 軸為水平方向（在桿所在的鉛垂平面內），y 軸鉛垂向上。則 $M = (0, -h)$，而由於 M 是 BC 的中點，我們可以寫成

$$B = (-d,\ -h-e), \qquad C = (d,\ -h+e)$$

其中 d、e 為某些常數。這裏 d 是桿在水平方向上的半闊度，而 $d \neq 0$ 正是因為桿並非鉛垂。

AB 中的張力作用於桿上的 B 點，方向由 B 指向 A，即沿向量 (vector) $\overrightarrow{BA} = (d,\ h+e)$，其長度為 p。所以這個力是 $\dfrac{T_1}{p}(d,\ h+e)$。同理，在 C 點的張力是 $\dfrac{T_2}{q}(-d,\ h-e)$。

沿水平方向分解，得

$$\frac{T_1}{p}\,d - \frac{T_2}{q}\,d = 0,$$

而由於 $d \neq 0$，

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

想一想 我們究竟在哪裏用到「桿並非鉛垂」這個事實？

只在約去 d 的時候。假如桿鉛垂懸掛，兩條彈簧便會落在同一條鉛垂線上，水平方向的

分解式只會變成 $0 = 0$，而兩個張力可以成任何比例，只需滿足鉛垂方向的平衡。這種鉛垂的平衡狀態確實會出現，而在這些情況下，結論一般並不成立。

第 3 步：引入虎克定律

代入張力，得

$$\frac{\kappa(p-a)}{p} = \frac{\kappa(q-b)}{q} \quad\Longrightarrow\quad 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{q} \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q},$$

所以

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

拉伸後長度之比等於自然長度之比，這正是所要證明的。 ■

為完整起見，沿鉛垂方向分解可得 $\frac{T_1}{p}(h+e) + \frac{T_2}{q}(h-e) = mg$，即 $2h\frac{T_1}{p} = mg$。我們用不着這條式，但它確定了 $T/$長度 這個共同的值。

驗算

- 詮釋。由於 $p/q = a/b$，兩條彈簧都按相同的倍數伸長：對某個 $\lambda > 1$，有 $p = \lambda a$ 及 $q = \lambda b$。所以這兩條彈簧就像一條均勻的彈簧按比例放大一樣，這是記住答案的一個好方法。
- 數值檢驗。我們隨機選取 m, κ, a, b 和桿的長度，以數值方法求勢能（potential energy）$mgy_M + \frac{1}{2}\kappa(p-a)^2 + \frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$ 的最小值，從而找出平衡狀態。例如，當 $a/b = 0.709972$ 時，一個傾斜的平衡狀態給出 $p/q = 0.709972$，而 M 位於 A 的正下方，誤差在 10^{-7} 之內。同一次搜尋亦找到一些 $p/q \neq a/b$ 的鉛垂平衡狀態（例如 $a/b = 1.526$ 但 $p/q = 1.192$），這證實了題目的假設確有必要。

常見錯誤

- 假設兩個張力相等，或假設兩條彈簧與鉛垂線所成的角相等。兩者一般都不成立；相等的是張力除以長度。
- 對 M 取力矩，結果糾纏於各個角度之中。對 A 取力矩簡潔得多，因為兩個張力的作用線都通過 A。
- 從沒用到「桿並非鉛垂」這個條件。完整的答案應指出哪裏需要這個條件。

STEP 之外

我們用到的向量 $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$ 是表示彈簧力的自然寫法。自然長度為零的彈簧所施的力，恰好與位移向量成正比，而這類「理想」彈簧能把許多平衡問題化為線性代數（linear algebra）。更一般地說，平衡狀態是勢能的駐點（stationary point），這正是我們數值檢驗背後的想法，也是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對靜力學（statics）和能量觀點都有細緻的闡述。

詳細解答

STEP III 1997，第 10 題

力學 • 有滑動的滾動

STEP III 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q10

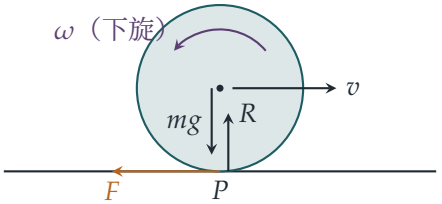
本題在 *Beyond STEP* 第 11.6 節後旋中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/backspin.html

關鍵思路

關鍵在於彈珠的底部是否正在桌面上滑動。只要它在滑動，摩擦力（friction）的大小和方向都固定不變，因此線運動和角運動都是勻減速的，可以準確地寫出來。當接觸點相對於桌面靜止時，滑動便告結束，此後彈珠作滾動，完全不受摩擦力。所以整道題目問的就是哪一件事最先發生：$v = 0$、$\omega = 0$，還是滑動速度（slip velocity）降至零。

解答

模型。 彈珠是質量為 m、半徑為 a 的均勻實心球，所以它對直徑的轉動慣量（moment of inertia）為 $I = \frac{2}{5}ma^2$。取 v 為球心的速度（以 v_0 的方向為正），ω 為向後轉動方向的角速度（angular velocity）（下旋（backspin）為正），於是 $v(0) = v_0 > 0$ 及 $\omega(0) = \omega_0 > 0$。手指只負責令彈珠開始運動；其後作用於彈珠的力只有重量 mg、法向反作用力（normal reaction）$R = mg$ 以及接觸點 P 處的摩擦力 F。



在下旋的情況下，彈珠底部相對於球心以速率 $a\omega$ 向前運動，所以接觸點的速度為

$$s = v + a\omega.$$

起初 $s = v_0 + a\omega_0 > 0$：彈珠在桌面上向前打滑，所以摩擦力向後作用，大小恆為 F。記 $F = mk$。

滑動期間的運動方程。 沿水平方向分解，得 $m\dot{v} = -F$。對球心取力矩（moment），底部向後的摩擦力會使彈珠朝向前滾動的方向轉動，因此它會減弱下旋：

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

兩者皆為常數，所以只要彈珠繼續向前滑動，

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

因此滑動速度降至零的時刻為

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

而在此之前摩擦力的方向一直不變，所以這些公式在整個區間 $0 \le t \le t_1$ 上都成立，即使 v 或 ω 在途中改變了符號亦然。

> ? **想一想** 在 $t = t_1$ 時會發生甚麼事？為甚麼彈珠不會隨即向相反方向滑動？

在 t_1 時接觸點靜止，所以 $v = -a\omega$：彈珠正在滾動。假如它繼續以恆定速率滾動，便不需要任何力去推動它，所以摩擦力（一旦沒有滑動，它只需要有多大便有多大）為零，而以恆定速度滾動與所有方程都相容。因此由 t_1 起，彈珠作勻速滾動，速度為

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

第 (i) 部分

要彈珠最終完全靜止，最後的滾動速度必須為零：$V = 0$，所以 $5v_0 = 2a\omega_0$，即

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

檢查一下這個情景是否合理：取這個比值時，$v = 0$ 發生於 $t = v_0/k$，而 $\omega = 0$ 發生於 $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$，是同一時刻，而這亦正是 t_1。所以線運動和角運動在彈珠仍在滑動時一同消失，此後彈珠保持靜止（沒有滑動，也沒有摩擦力）。

第 (ii) 部分

現在彈珠最終必須以速率 $v_0/7$ 向後滾動，所以 $V = -v_0/7$：

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad\Longrightarrow\quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

取這個比值時，v 在 $t = v_0/k$ 時降至零，這早於 $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$。在那一瞬間彈珠暫時不動，但仍帶有下旋 $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$，所以底部仍在向前打滑，摩擦力繼續把它往後拉。在 t_1 時我們得到 $v = -v_0/7$ 及 $a\omega = v_0/7$，所以它以速率 $v_0/7$ 朝起點滾回去，符合要求。

> **想一想** 有沒有更快捷的方法，毋須解出 t_1 便可求得 V？

有。在桌面上沿運動路線取一個固定點 O，考慮對該點的角動量（angular momentum）。摩擦力沿桌面作用，所以它對 O 沒有力矩，而 R 與 mg 的力矩互相抵消。以向前滾動的方向為正，對 O 的角動量等於 mva（球心位於高度 a 處）減去自旋部分 $\frac{2}{5}ma^2\omega$，所以這個量守恆：

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

再次得出 $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$。

驗算

- 沒有旋轉（$\omega_0 = 0$）時，公式給出 $V = \frac{5}{7}v_0$，這是不帶旋轉、打滑射出的球的標準結果。
- 若 $v_0 = 0$ 而只有下旋，則 $V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$：彈珠向後運動，任何彈過帶下旋彈珠的人都知道這一點。
- 以數值方法逐步推算這些方程（滑動速度一降至零便關掉摩擦力），當 $v_0 = 1$、$a\omega_0 = 3$ 時最終速度為 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$，而當 $v_0 = 2$、$a\omega_0 = 5$ 時則完全停下。

常見錯誤

- 在 $v = 0$ 時便停止計時。彈珠要到 $v + a\omega = 0$ 時才停止滑動；在 $v = 0$ 時它可能仍在旋轉，正如第 (ii) 部分的情況。
- 弄錯力矩（torque）的符號：底部向後的摩擦力會*減弱*下旋。
- 滾動開始後仍然保留摩擦力。一旦沒有滑動，保持恆定速度並不需要摩擦力，所以摩擦力降為零。

STEP 之外

這裏的摩擦力採用的是庫侖（Coulomb）的滑動摩擦模型：表面相對滑動時大小恆定，不滑動時則需要多少便有多少（不超過某個上限）。角動量的捷徑是剛體動力學（rigid-body dynamics）中一條普遍原則的例子：選取適當的參考點，使那個麻煩的未知力沒

有力矩。桌球（snooker）和英式撞球（billiards）球手打縮桿（screw-back）時，利用的正是這套物理。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種思路處理剛體轉動和帶滑動的滾動。

詳細解答

STEP III 1997，第 11 題

力學 • 剛體轉動

STEP III 1997，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q11

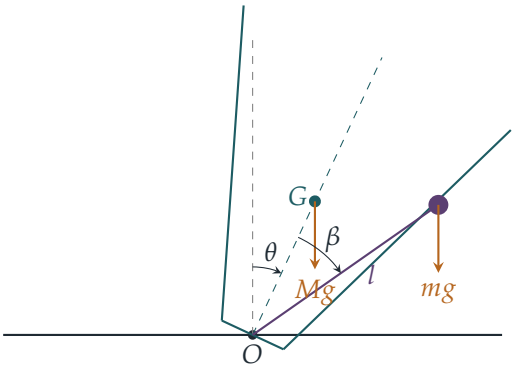
關鍵思路

只要鐘與鐘錘保持接觸，兩者便以相同的角速度（angular velocity）繞同一點 O 轉動，因此唯一能令它們分開的，就是角加速度（angular acceleration）的差異。不妨問：兩者各自獨立運動時，加速有多快？當自由擺動的鐘的角加速度剛好等於自由鐘錘的角加速度時，鐘錘與鐘便在那一瞬間分離。此時接觸力恰好為零，而角速度從頭到尾都沒有出現。

解答

模型。鐘是一個剛體（rigid body），可繞通過 O 的水平軸自由轉動，對該軸的轉動慣量（moment of inertia）為 Mk^2。鐘錘是一個質量為 m 的質點（particle），裝在長度為 l 的輕質剛桿上，同樣以 O 為樞軸。樞軸光滑，且沒有空氣阻力。所有角度均由向上的鉛垂線量起，以鐘錘相對於鐘軸所在的一側為正方向。設 θ 為鐘軸 OG 的角度。兩者接觸期間，鐘錘的桿與鐘軸一直保持夾角 β，所以桿的角度是 $\theta + \beta$。

在鐘內，鐘錘的球靠在內壁上，所靠的正是它本身會倒下去的那一側。因此內壁把球向後推（朝角度較小的方向），而根據牛頓第三定律（Newton's third law），球則把鐘向前推。設 $\Gamma \geq 0$ 為這個接觸力（包括任何摩擦力）對 O 的力矩（moment）。它對鐘錘的作用是 $-\Gamma$，對鐘的作用是 $+\Gamma$。



接觸期間的運動方程。分別對每個物體取對 O 的力矩（樞軸處的反作用力和桿中的張力對 O 均無力矩）：

$$\text{鐘錘：}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{鐘：}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

重量 mg 的作用點與 O 相距 l，所在的直線與鉛垂線成角 $\theta+\beta$，所以它的力矩是 $mgl\sin(\theta+\beta)$；作用於 G 的 Mg 亦同理。兩個物體一起運動，所以有相同的 $\ddot{\theta}$。

把兩式相加，便可消去 Γ：

$$\ddot{\theta} = \frac{g(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta)}{ml^2 + Mk^2}.$$

代回鐘錘的方程並化簡，得

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

釋放時 $\theta = 0$，而 $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$，所以鐘錘起初確實壓在鐘上，正如所料。

想一想 為甚麼不論角速度是多少，分離都恰好在 Γ 降至零的時候發生？

接觸只能推、不能拉，所以必須有 $\Gamma \geq 0$。當 $\Gamma > 0$ 時，自由的鐘錘會比鐘加速得更快，所以它被壓在內壁上，兩者一起運動。由於兩者以相同的角速度繞同一點 O 轉動，球與內壁之間的空隙只能因角加速度不同而出現。一旦 Γ 要變為負值，鐘本身的角加速度 $gh\sin\theta/k^2$ 便超過鐘錘的 $g\sin(\theta+\beta)/l$，內壁於是擺離球。所以分離發生在第一個令 $\Gamma = 0$ 的 θ。（在 $\theta = \pi$ 之前必定存在這樣的 θ，因為括號內的式子在 $\theta = 0$ 時是 $k^2\sin\beta > 0$，在 $\theta = \pi$ 時是 $-k^2\sin\beta < 0$。）

分離時的角度。設 $\alpha = \theta+\beta$，即分離時鐘錘的桿與向上鉛垂線所成的角。於是由 $\Gamma = 0$ 得

$$k^2\sin\alpha = hl\sin(\alpha-\beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

這裏 $0 < \alpha < \pi$，所以 $\sin\alpha \neq 0$，而且 $\sin\beta \neq 0$。兩邊除以 $hl\sin\alpha\sin\beta$：

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

即

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

這正是所求的結果。留意兩個質量都沒有出現。

驗算

- 短鐘錘。當 $l \to 0$ 時，修正項趨向無窮大，所以 $\cot\alpha \to -\infty$，$\alpha \to \pi$。這很合理：短的擺有很大的自由角加速度 $g\sin\alpha/l$，所以裝在極短桿上的鐘錘會一直推着鐘，直至 $\sin\alpha$ 接近零，即直至兩者幾乎倒轉為止。
- 等價形式。這個條件其實就是 $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$：自由的鐘錘與自由的鐘有相等的角加速度。
- 數值驗證。取 $k = 1$、$h = 0.6$、$l = 0.8$ 及 $\beta = 30°$，公式給出 $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$，所以 $\alpha \approx 157.7°$。由釋放一刻起對合併運動逐步作數值積分，到 Γ 首次降至零時停止，所得的角度與此相同，準確至小數點後多個位，而且 $M/m = 5$ 與 $M/m = 500$ 的情況皆然。

常見錯誤

- 用能量守恆（conservation of energy）求出 $\dot\theta$，然後試圖由圓周運動求「法向反作用力」。角速度是兩個物體共有的，對它們是否分離毫無影響。
- 由鐘軸而不是由向上的鉛垂線量度 α。在整段接觸期間，桿與鐘軸的夾角都是 β，所以 $\alpha = \theta + \beta$。
- 忘記 Mk^2 是對 O 而不是對 G 的轉動慣量。這裏無須用平行軸定理（parallel-axis theorem）作修正。

STEP 之外

要找出約束（constraint）何時失效，有一個通用的原則，而本題正是一個簡潔的例子：先解出受約束的運動，再計算約束力，然後找出它在何處變號。拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）利用拉格朗日乘數（Lagrange multipliers）把這個做法系統化，而這些乘數原來就是約束力。同樣的想法可以處理質點離開球面這個經典問題。

Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）涵蓋剛體繞固定軸的轉動，是極佳的預備讀物。

詳細解答

STEP III 1997，第 12 題

概率與統計 • 贈券收集問題

> **STEP III 1997，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q12

關鍵思路

第 (i) 部分是幾何分佈（geometric distribution），而它的概率生成函數（probability generating function）只需求導，便可給出平均值和方差：$\mathrm{E}(K) = \mathrm{G}'(1)$ 及 $\mathrm{E}\big(K(K-1)\big) = \mathrm{G}''(1)$。在第 (ii) 部分，竅門是把集齊全套的漫長等待拆成 52 段短等待，每段對應一張新牌。每段短等待都是一個「擲硬幣直至首次出現正面」的實驗，所以第 (i) 部分已經把工夫全做好了。

解答

第 (i) 部分

首次正面出現在第 k 次投擲，當且僅當頭 $k-1$ 次投擲都是反面，而第 k 次是正面。各次投擲互相獨立（independent），所以

$$\mathrm{P}(K = k) = q^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

因此

$$\mathrm{G}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}s^k = ps\sum_{j=0}^{\infty}(qs)^j = \frac{ps}{1-qs},$$

這裏用了等比級數（geometric series）求和，該級數在 $|qs| < 1$ 時收斂（特別是當 $p > 0$ 時，對接近 1 的 s 收斂）。這就是所要求的結果。

求導得

$$\mathrm{G}'(s) = \frac{p(1-qs)+psq}{(1-qs)^2} = \frac{p}{(1-qs)^2},$$
$$\mathrm{G}''(s) = \frac{2pq}{(1-qs)^3}.$$

由於 $\mathrm{G}'(s) = \sum k\,\mathrm{P}(K=k)s^{k-1}$ 及 $\mathrm{G}''(s) = \sum k(k-1)\mathrm{P}(K=k)s^{k-2}$，代入 $s=1$ 並利用 $1-q=p$，可得

$$\mathrm{E}(K) = \mathrm{G}'(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{E}\big(K(K-1)\big) = \mathrm{G}''(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(K) &= \mathrm{E}\big(K(K-1)\big) + \mathrm{E}(K) - \big(\mathrm{E}(K)\big)^2 \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

故此 $\mathrm{E}(K) = \dfrac{1}{p}$ 及 $\mathrm{Var}(K) = \dfrac{q}{p^2}$。

第 (ii) 部分

設 N_i 為已經見過恰好 $i-1$ 張不同的牌之後所抽的次數，計至並包括抽出第 i 張不同的牌的那一次。於是 $N_1 = 1$（第一張牌必定是新的），而

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_{52}.$$

? **想一想** 為甚麼每個 N_i 都是像 K 那樣的「首次正面」變量？

一旦見過 $i-1$ 張不同的牌，52 張牌之中仍有 $53-i$ 張未見過。由於抽牌後放回（with replacement），每次抽牌都與過去的結果獨立，而且抽出未見過的牌的概率都相同，即

$$p_i = \frac{53-i}{52}.$$

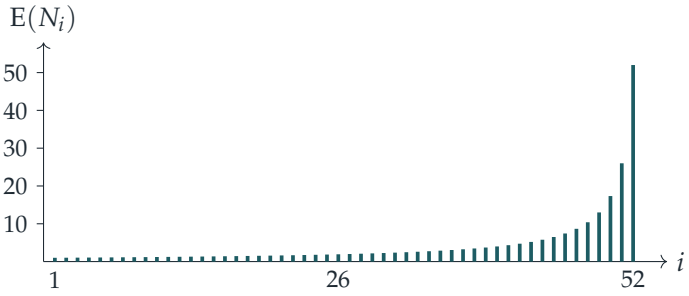
把這樣的一次抽牌稱為「正面」。那麼 N_i 就是計至並包括首次正面的抽牌次數，正正是第 (i) 部分中的變量 K，其中 $p = p_i$。因此

$$\mathrm{E}(N_i) = \frac{1}{p_i} = \frac{52}{53-i}.$$

期望值（expectation）是線性的（這裏毋須各個 N_i 互相獨立），所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{i=1}^{52} \frac{52}{53-i} = 52\left(\frac{1}{52} + \frac{1}{51} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) \\ &= 52\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{52}\right).\end{aligned}$$

早段的等待很短，最後幾段才是主導：單是最後一張牌，平均就要抽 52 次。



要作估算，可用 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\approx 0.5+\ln n$，取 $n=52$。至於 $\ln 52$：$2.7^2=7.29$ 而 $7.29^2\approx 53.1$，所以 $e^4\approx 53\approx 52$，得出 $\ln 52\approx 4$。因此

$$\mathrm{E}(N)\approx 52\,(0.5+4)=52\times 4.5=234.$$

所以平均而言，我們大約要抽 234 次，即約為整副牌張數的四倍半，才能見齊每一張牌。

驗算

- 在 (i) 中，$\mathrm{G}(1)=p/(1-q)=1$，任何概率生成函數都必須如此。若硬幣是公平的（$p=\frac{1}{2}$），便得 $\mathrm{E}(K)=2$ 及 $\mathrm{Var}(K)=2$；而當 $p\to 1$ 時，方差 $q/p^2\to 0$，這正是第一次投擲幾乎必然是正面時應有的結果。
- 準確值是 $52H_{52}\approx 235.98$，而模擬 10^5 次完整收集所得的平均值是 235.7。我們的估計值 234 相當接近；那少許差額來自近似式 $0.5+\ln n$（較精確的是 $\ln n+0.577$），以及把 $\ln 52\approx 3.95$ 上捨入為 4。

常見錯誤

- 把 N_i 的成功概率弄顛倒：抽到*新*牌的機會是 $(53-i)/52$，它隨着收集到的牌增多而減小。
- 取 $\mathrm{Var}(K)=\mathrm{G}''(1)-\mathrm{G}'(1)^2$，忘記了 $+\mathrm{G}'(1)$ 這一項；$\mathrm{G}''(1)$ 是 $\mathrm{E}(K(K-1))$，而不是 $\mathrm{E}(K^2)$。
- 以為各個 N_i 必須互相獨立，才可以把期望值相加。無論獨立與否，期望值的線性性質都成立（不過在這裏它們其實是獨立的）。

STEP 之外

這就是優惠券收集問題（coupon collector's problem）：若有 n 種出現機會均等的類型，集齊全部所需的期望時間是 $nH_n \approx n\ln n$。大學本科課程會更進一步，證明這個時間高度集中在 $n\ln n$ 附近，波動的量級為 n；而概率生成函數亦會成為處理這類獨立變量之和的標準工具。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction* 仔細講解生成函數和幾何分佈；Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability* 則討論優惠券收集問題及其多種變化。

詳細解答

STEP III 1997，第 13 題

概率與統計 • 正態分佈的矩生成函數

> **STEP III 1997，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q13

關鍵思路

一切都建基於一個積分：標準正態分佈（standard normal distribution）的矩母函數（moment generating function，簡稱 mgf），只要把指數部分配方（completing the square）便可求得。之後，獨立性（independence）把和的矩母函數化為乘積，而矩母函數的唯一性則讓我們可以直接讀出分佈。最後一部分其實是同一個計算換了個面貌：$Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$ 的冪，不過是 X 的某個倍數的指數函數而已。

解答

第 (i) 部分

設 $M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$。則

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

配方得 $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$，所以

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

其中用了代換 $u = x - \theta$。最後一個積分是標準正態概率密度函數（density）在整條實數線上的積分，其值為 1。因此，對任意實數 θ，

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

第 (ii) 部分

由於 X 與 Y 獨立，$\mathrm{e}^{\theta aX}$ 與 $\mathrm{e}^{\theta bY}$ 亦獨立，而獨立隨機變量（random variable）之積的期望值（expectation），等於各自期望值之積。把第 (i) 部分的 θ 分別換成 $a\theta$ 和 $b\theta$（並利用 Y 與 X 分佈相同這一事實），可得

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\theta(aX+bY)}\big) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{a\theta X})\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{b\theta Y}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

? **想一想** 為甚麼矩母函數相同，就足以斷定分佈相同？

若矩母函數對 0 附近的所有 θ 都存在，它便唯一地決定了分佈。所以，$aX+bY$ 與 X 分佈相同，當且僅當其矩母函數對所有 θ 都等於 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$，即

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{對所有}\theta.$$

取對數，並任選一個 $\theta \neq 0$，可知上式成立當且僅當

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

（「僅當」這個方向不用唯一性也顯而易見：$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$ 必須等於 $\mathrm{Var}(X) = 1$。）一般而言，$aX+bY$ 服從平均值（mean）為 0、方差（variance）為 a^2+b^2 的正態分佈；例如 $(X+Y)/\sqrt{2}$ 仍然是標準正態。

第 (iii) 部分

對任意實數 θ，

$$Z^\theta = \big(\mathrm{e}^{\mu+\sigma X}\big)^\theta = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{e}^{(\sigma\theta)X},$$

而 $\mathrm{e}^{\mu\theta}$ 是常數，所以把第 (i) 部分的 θ 換成 $\sigma\theta$，便得

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{(\sigma\theta)X}\big) = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = \mathrm{e}^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

這正是所要證明的結果。

取 $\theta = 1$ 便得平均值：

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

取 $\theta = 2$ 得 $\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - \big(\mathrm{E}(Z)\big)^2 = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \\ &= \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\big(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\big).\end{aligned}$$

驗算

- 對 $M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$ 求導，得 $M'(0) = 0$ 及 $M''(0) = 1$：平均值為 0，方差為 1，與應有的結果一致。
- 若 $\sigma = 0$，則 $Z = \mathrm{e}^{\mu}$ 是常數；我們的公式給出平均值 e^{μ} 和方差 0。
- 數值上，取 $\mu = 0.3$ 和 $\sigma = 0.5$，對正態密度函數積分，得 $\mathrm{E}(Z) \approx 1.5296$ 及 $\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$，與 $\mathrm{e}^{0.425}$ 和 $\mathrm{e}^{0.85}(\mathrm{e}^{0.25} - 1)$ 吻合。對 $0.6X + 0.8Y$ 進行模擬，所得樣本方差為 1.000。

常見錯誤

- 以「代入 X 的平均值」的方式寫出 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu}$。一般而言 $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$，而這裏指數函數的凸性（convexity）令平均值增大至 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}$ 倍。
- 把條件寫成 $a + b = 1$：相加的是方差，而不是係數。

STEP 之外

隨機變量 Z 服從對數正態（log-normal）分佈；凡是由許多細小的隨機因子連乘而增長的量，都以它為標準模型，例如布萊克–舒爾斯（Black–Scholes）模型中的股價。第 (ii) 部分讓我們窺見一個引人注目的事實：在方差有限的分佈之中，基本上只有正態分佈在適當縮放後求和，仍然留在同一個分佈族內，而這與中心極限定理（central limit theorem）息息相關。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正好以這個程度講解矩母函數、正態分佈和中心極限定理。

詳細解答

STEP III 1997，第 14 題

概率與統計 • 隨機變量的乘積

STEP III 1997，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s3-q14

關鍵思路

周界是長度與闊度的線性函數，因此它的平均值和方差可直接由獨立變量之和的法則得出。面積則是一個乘積，而對於獨立變量，乘積的期望值等於期望值的乘積；把這一點應用於 LB 和 L^2B^2，便得到平均值和方差。要證明兩者並非獨立，最乾淨利落的做法是找出一個非零的協方差（covariance），因為獨立變量的協方差必定為零。

解答

設 L 和 B 分別為隨機抽出的一塊板的長度和闊度，則 L 與 B 獨立（independent），且

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

設 $P = 2(L + B)$ 為周界，$A = LB$ 為面積。我們會多次用到 $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$，從而有 $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$ 及 $\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$。

周界

由期望值的線性性質（linearity of expectation），

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

由於 L 與 B 獨立，兩者之和的方差（variance）等於各自方差之和，所以

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2\big(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)\big) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{標準差}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

面積

因為 L 與 B 獨立，$\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$，所以

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

要求方差，我們需要 $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$。

> **想一想** 我們還可以把 $\mathrm{E}(L^2B^2)$ 拆成乘積嗎？

可以：獨立變量的函數仍然互相獨立，所以 L^2 與 B^2 獨立，而 $\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

以及

$$\text{標準差}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

留意乘積的方差並非只是 $\sigma_1^2\sigma_2^2$：每一個維度上的離散程度，都會被另一個維度的典型大小放大。

周界與面積並非獨立

假如 P 與 A 獨立，便會有 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$，即 $\mathrm{Cov}(P, A) = 0$。我們來計算協方差。首先，

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

再次利用獨立性（這次是 L^2 與 B 獨立，以及 L 與 B^2 獨立），

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

故此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P, A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2\big[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)\big] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2\big(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2\big).\end{aligned}$$

長度和闊度都是正數，所以 $\mu_1 > 0$ 及 $\mu_2 > 0$；題目已知標準差（standard deviation）不為零，所以 $\sigma_1^2 > 0$ 及 $\sigma_2^2 > 0$。於是 $\mathrm{Cov}(P, A) > 0$。

由於獨立變量的協方差為零，P 與 A 不可能獨立。這是合理的：一塊板若在任何一個方向上比平均大，它的周界和面積往往都會較大。

想一想 假如算出來的協方差是零，這能否說明 P 與 A 獨立？

不能。這個推論只是單向的：獨立必然導致協方差為零，但協方差為零並不保證獨立。所以非零的協方差能證明兩者相依，這正是我們現在的情況；若協方差為零，則甚麼結論也得不到。

驗算

- 取 L 與 B 獨立，各自以概率 $\frac{1}{2}$ 取值 1 或 3。則 $\mu_i = 2$，$\sigma_i^2 = 1$，而公式給出 $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$，與直接列舉四塊等可能的板所得的結果一致。兩者相依亦可直接看出：$\mathrm{P}(P=4) = \mathrm{P}(A=1) = \frac{1}{4}$，但 $\mathrm{P}(P=4 \text{ 且 } A=1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$，因為兩個事件都表示 $L = B = 1$。
- 以 $\mu_1 = 5$、$\mu_2 = 3$、$\sigma_1 = 0.7$、$\sigma_2 = 0.4$ 進行模擬，得到 標準差$(A) \approx 2.919$，而公式給出 2.913；又得到 $\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$，而公式給出 4.54。
- 若 $\sigma_2 \to 0$（闊度固定為 μ_2），則 標準差$(A) \to \mu_2\sigma_1$，這正是 $A = \mu_2 L$ 時應有的結果。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$，或寫成 $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$ 而漏掉了某些項；務必經由 $\mathrm{E}(L^2B^2)$ 來計算。
- 計算 $\mathrm{Var}(2(L+B))$ 時忘記把因子 2 平方。
- 以「因為兩者都取決於 L 和 B」為理由，斷言 P 與 A 相依。這只是直覺，不是證明；真正能下定論的，是協方差的計算（或一個概率不相等的具體例子）。

STEP 之外

不相關（uncorrelated）與獨立的隨機變量（random variable）之間的分別，是大學一年級概率課程的核心：獨立意味着聯合分佈（joint distribution）可以分解成乘積，這比單單一個矩（moment）的條件強得多。$\mathrm{Var}(LB)$ 的計算，也是實驗科學中廣泛使用的「誤差傳遞」（propagation of errors）公式的起點。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教科書）對獨立性、協方差及隨機變量的乘積有嚴謹細緻的討論。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

1997 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。