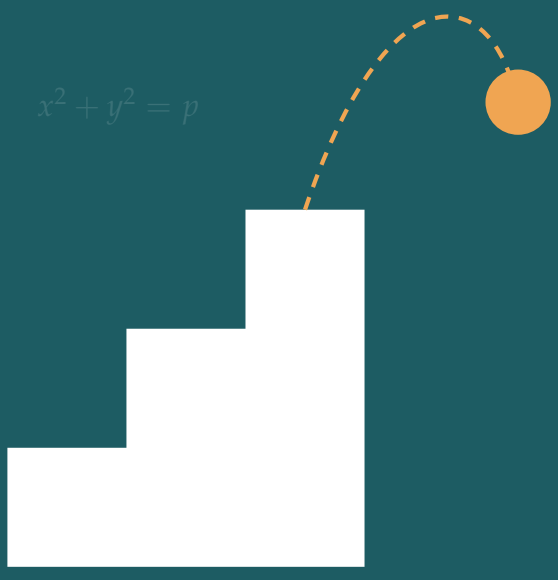
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

1996 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

1996 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

1996 年詳細解答

1996 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 42 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 圓柱的最優化 純數學 . . . 3

第 2 題 Beta 積分 純數學 . . . 7

第 3 題 整數的整除性 純數學 . . . 10

第 4 題 以配方法積分 純數學 . . . 13

第 5 題 複數的平方根 純數學 . . . 16

第 6 題 三角函數求和與積分 純數學 . . . 20

第 7 題 一階微分方程 純數學 . . . 23

第 8 題 循環小數 純數學 . . . 27

第 9 題 彈性繩與能量 力學 . . . 30

第 10 題 動量守恆 力學 . . . 33

第 11 題 拋體運動 力學 . . . 36

第 12 題 隨機樣本的最大值 概率與統計 . . . 39

第 13 題 離散分佈與期望值 概率與統計 . . . 42

第 14 題 游程與條件概率 概率與統計 . . . 45

STEP II

第 1 題 二項式級數的係數 純數學 . . . 48

第 2 題 非線性聯立方程 純數學 . . . 51

第 3 題 以數學歸納法證明斐波那契恆等式 純數學 . . . 54

第 4 題 代換積分法 純數學 . . . 57

第 5 題 單位根 純數學 . . . 60

第 6 題 因數的計數 純數學 . . . 63

第 7 題 坐標幾何中的軌跡 純數學 . . . 66

第 8 題 二階微分方程 純數學 . . . 69

第 9 題 穩定性與質心 力學 72
第 10 題 旋轉輪拋出的拋體 力學 76
第 11 題 簡諧運動 力學 80
第 12 題 最大值與最小值的分佈 概率與統計 84
第 13 題 網格上的隨機漫步 概率與統計 87
第 14 題 獨與中心極限定理 概率與統計 91

STEP III

第 1 題 雙曲函數的冪 純數學 95
第 2 題 聯立線性方程 純數學 99
第 3 題 半角代換 純數學 102
第 4 題 最大乘積分拆 純數學 106
第 5 題 倍角公式 純數學 109
第 6 題 矩陣群 純數學 112
第 7 題 根的對稱函數 純數學 116
第 8 題 莫比烏斯變換 純數學 120
第 9 題 圓周運動 力學 125
第 10 題 滑及摩擦力的平衡 力學 129
第 11 題 微小振動 力學 134
第 12 題 馬可夫鏈 概率與統計 138
第 13 題 切比雪夫不等式 概率與統計 142
第 14 題 離狀態馬可夫過程 概率與統計 146

詳細解答

STEP I 1996，第 1 題

純數學 • 圓柱的最優化

> **STEP I 1996，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

關鍵思路

描述這個罐子需要兩個量：半徑 r 和高 h。體積的約束條件讓我們可以消去其中一個，於是 S 變成只含 r 的函數，用普通的微分法（differentiation）就可以求出它的最小值。最優的罐子原來有一個非常整齊的形狀。一旦看出這個形狀，兩條關於球體的問題都歸結為觀察一個通過軸的截面（cross-section）。

解答

求表面積的最小值

設罐子的半徑為 $r > 0$，高為 $h > 0$。則

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

其中 $2\pi r^2$ 來自兩個底面，$2\pi rh$ 來自曲面側面。對於固定的 V，我們有 $h = V/(\pi r^2)$，所以 $2\pi rh = 2V/r$，而

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

求導得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

當 $r^3 < V/(2\pi)$ 時它是負的，當 $r^3 > V/(2\pi)$ 時它是正的。所以 S 先遞減後遞增，它在 $r > 0$ 上的最小值出現在

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

這是全局最小值（global minimum），而不僅是局部最小值，因為它是唯一的駐點（stationary point），而且導數在該處由 $-$ 變為 $+$。（從公式也可以看出這一點：當 $r \to 0^+$

和當 $r \to \infty$ 時，都有 $S \to \infty$。）

在這個半徑下 $V = 2\pi r^3$，所以

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

最好的罐子，高度與闊度恰好相等。這時 $2V/r = 4\pi r^2$，所以

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

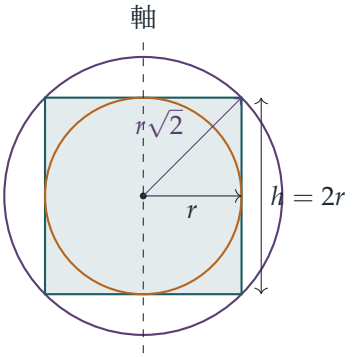
這就是所要求的最小值。

想一想 為甚麼用 r 而不用 h 來計算？

兩個變量都可行。不過消去 h 比較容易，因為 h 在兩條公式中都只以一次項出現，所以代入 $h = V/(\pi r^2)$ 便得到一個簡單的 r 的函數。消去 r 則會引入 $\sqrt{V/(\pi h)}$，代數運算會變得較為繁複。

罐內最大的球

從現在起，罐子滿足 $h = 2r$。用一個通過其軸的平面把它切開：截面是一個 $2r \times 2r$ 的正方形。



罐內任何一個球的半徑都滿足 $\rho \le r$。要看出這一點，可把球投影到底面所在的平面上：得到一個半徑為 ρ 的圓盤，它位於半徑為 r 的底面圓盤之內。另外 $2\rho \le h = 2r$，這給出相同的上界。以罐子中心為球心、半徑為 r 的球（截面圖中的琥珀色圓）與兩個底面及曲面側面都相切，所以它放得進去。利用 $r^3 = V/(2\pi)$，最大的球的體積因此是

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

正如所求。

包含罐子的最小的球

在頂面的邊緣上取一點，再在底面的邊緣上取與它沿直徑方向相對的一點。這兩點是正方形截面的一對對角頂點，所以它們之間的距離是

$$\sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}\,r.$$

任何包含罐子的球都包含這兩點，所以它的直徑至少是 $2\sqrt{2}\,r$，半徑至少是 $\sqrt{2}\,r$。

> **想一想** 我們怎樣知道半徑為 $\sqrt{2}\,r$ 的球真的夠大？

把球心放在罐子的中心 O。罐子上任何一點與軸的距離為 $\rho \le r$，並位於 O 之上或之下高度 z 處，其中 $|z| \le r$。因此它與 O 的距離是 $\sqrt{\rho^2 + z^2} \le \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$。所以整個罐子都位於這個球之內（梅紫色的圓通過正方形的全部四個頂點）。

因此，能容納罐子的最小的球半徑為 $\sqrt{2}\,r$，體積為

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}\,r^3 = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\,V.$$

驗算

- 取 $V = 1$，在一個細密的 r 值網格上以窮舉方式求 $2\pi r^2 + 2/r$ 的最小值，得 $S \approx 5.5358$，與 $3(2\pi)^{1/3} \approx 5.5358$ 吻合。
- 兩個球的體積之比應為 $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$，即半徑之比的立方。果然 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V \big/ \frac{2}{3}V = 2\sqrt{2}$。
- 大小次序合理：$\frac{2}{3}V < V < \frac{4\sqrt{2}}{3}V \approx 1.886\,V$，所以內球比罐子小，外球比罐子大。

常見錯誤

- 漏掉一個或兩個底面，寫成 $S = \pi r^2 + 2\pi r h$ 或 $S = 2\pi r h$。這樣會得出不同的最優形狀。
- 只證明 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r = 0$，卻沒有說明為甚麼該駐點是最小值。
- 把外球的半徑取為 r 或 h，而不是罐子空間對角線的一半。

STEP 之外

這是約束優化（constrained optimisation）：在 $V(r,h)$ 固定的條件下，求 $S(r,h)$ 的最小值。在大學你會學到拉格朗日乘數（Lagrange multipliers），它不必消去變量就能處理這類問題。條件 $\nabla S = \lambda \nabla V$ 幾乎立刻就給出 $h = 2r$。這兩個球也說明了凸體（convex

body）的「內切」球（inscribed ball）和「外接」球（circumscribed ball），它們是凸幾何（convex geometry）的核心概念。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等數學問題集）。

詳細解答

STEP I 1996，第 2 題

純數學 • Beta 積分

> **STEP I 1996，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q2

關鍵思路

(i) 和 (ii) 的被積函數（integrand）其實是同一個函數的兩種寫法：$\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$。因此，同一個積分用兩種方法計算，便得到同一個關於 α 的多項式（polynomial）的兩種描述。第 (i) 部分給出閉合形式（closed form），第 (ii) 部分把各項係數寫成積分，餘下的工作只需比較係數（comparing coefficients）便可完成，完全不需要用分部積分法（integration by parts）。

解答

第 (i) 部分

作代換（substitution）$u = 1 + (\alpha - 1)x$，則 $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$；當 $x = 0$ 時 $u = 1$，當 $x = 1$ 時 $u = \alpha$。由於 $\alpha \neq 1$，我們可以除以 $\alpha - 1$：

$$\int_0^1 \big(1 + (\alpha - 1)x\big)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

這正是所求。（即使 $\alpha < 1$ 或 $\alpha < 0$，這個代換仍然成立：它是線性的，而且無論上下限的次序如何，公式 $\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$ 都成立。換個做法，直接對 $\big(1 + (\alpha - 1)x\big)^{n+1} / \big((n+1)(\alpha - 1)\big)$ 求導亦可。）

第 (ii) 部分

把 αx 和 $1 - x$ 視為兩項，用二項式定理（binomial theorem）展開被積函數：

$$\big(\alpha x + (1-x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha x)^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

這是有限和，所以可以逐項積分；對 x 積分時，α 是常數：

$$\int_0^1 \big(\alpha x + (1-x)\big)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \left[\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x \right].$$

每個方括號內都是一個與 α 無關的數，所以這是一個關於 α 的多項式，次數至多為 n，而對於 $0 \le k \le n$，α^k 的係數是 $\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$，這正是所求。

第 (iii) 部分

把 (ii) 中的多項式記作 $P(\alpha)$。由於 $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$，第 (i) 部分表明，對每一個 $\alpha \neq 1$，

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{n+1}\big(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n\big),$$

這裏用了等比級數（geometric series）的因式分解 $\alpha^{n+1} - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n)$。

> **想一想** 我們只知道這兩個多項式在 $\alpha \neq 1$ 時相等。為甚麼可以比較係數？

兩邊之差是一個次數至多為 n 的多項式，而且在每一個 $\alpha \neq 1$ 處都等於零，所以它有無限多個根。一個次數至多為 n 的非零多項式最多只有 n 個根，因此這個差是零多項式：每一項係數都相同。（另一個說法是：兩邊都是連續的，所以在 $\alpha = 1$ 處也相等。）

在右邊，每個 α^k（$0 \le k \le n$）的係數都等於 $\frac{1}{n+1}$。與 (ii) 比較，得

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

因此

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

這就是所求的結果。

驗算

- $k = 0$：$\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$，而公式給出 $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$。
- $n = 2$，$k = 1$：$\int_0^1 (x - x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$。
- 數值上，$\int_0^1 x^2 (1-x)^3 \,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!\,3!}{6!}$；我們隨機選取 α 和 n，用辛普森法則（Simpson's rule）驗證了 (i)，並對所有 $0 \le k \le n \le 12$ 精確地驗證了 (iii)。
- 一個賞心悅目的推論：P 的各項係數全部相等，所以 $\int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$ 與 k 無關。

常見錯誤

- 比較係數時沒有指出 (i) 只在 $\alpha \neq 1$ 的情況下得證；只要補上一句關於多項式（或連續性）的說明，便可填補這個漏洞。
- 在 (ii) 中把 $(1+(\alpha-1)x)^n$ 按 $(\alpha-1)$ 的冪展開：這樣得到的多項式是對的，卻不是按 α 的冪排列。應改為展開 $\big(\alpha x+(1-x)\big)^n$。

STEP 之外

積分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ 就是歐拉（Euler）的貝塔函數（beta function）$B(a,b)$，而本題的結果正是 $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ 在整數情況下的特例。在概率論中，它的意思是：若在 $[0,1]$ 上均勻地選取 p，然後擲 n 枚出現正面的概率為 p 的硬幣，則正面的數目由 0 到 n 每一個都同樣可能出現，概率各為 $\frac{1}{n+1}$（這正是「所有係數相等」的含義），而這亦是貝葉斯（Bayes）本人那篇著名論文的出發點。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）詳細闡述了這背後的貝塔分佈和伽瑪分佈（beta and gamma distributions）。

詳細解答

STEP I 1996，第 3 題

純數學 • 整數的整除性

> **STEP I 1996，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q3

關鍵思路

要處理被合成數（composite number）如 24 整除（divisibility）的問題，最簡單的做法是逐個質數冪（prime power）處理：$24 = 3 \times 8$，而 3 與 8 互質（coprime），所以我們分別證明可被 3 整除和可被 8 整除。因式分解（factorise）之後會得到連續整數之積，而任意 k 個連續整數之中，必有一個是 k 的倍數。其餘兩部分也可用同一習慣解決：因式分解，或者把 n 寫成能顯示其餘數的形式。

解答

第 (i) 部分

抽出公因式，再運用平方差公式（difference of two squares），

$$n^5 - n^3 = n^3(n^2 - 1) = n^3(n-1)(n+1) = n^2\,(n-1)\,n\,(n+1).$$

可被 3 整除。$n-1$、n、$n+1$ 是三個連續整數，所以其中恰好有一個是 3 的倍數。因此 $3 \mid (n-1)n(n+1)$，從而 $3 \mid n^5 - n^3$。

可被 8 整除。我們按 n 的奇偶性（parity）分情況討論。

- 若 n 是偶數，設 $n = 2m$，則 $n^3 = 8m^3$，是 8 的倍數。
- 若 n 是奇數，則 $n-1$ 和 $n+1$ 是連續偶數。任意兩個連續偶數之中，一個是 4 的倍數，另一個是 2 的倍數，所以 $8 \mid (n-1)(n+1)$。

無論哪種情況，都有 $8 \mid n^3(n-1)(n+1) = n^5 - n^3$。

想一想 為甚麼知道 $3 \mid N$ 和 $8 \mid N$ 就可以推出 $24 \mid N$？換成 $4 \mid N$ 和 $6 \mid N$，結論還成立嗎？

由於 3 和 8 沒有公因數，$8 \mid N$ 表示 $N = 8a$，於是 $3 \mid 8a$ 迫使 $3 \mid a$（因為 3 是質數，而且不整除 8）。所以 $N = 24b$。這個論證對 4 和 6 並不成立，因為兩者有公因數 2：12 可同時被兩者整除，卻不能被 24 整除。

因此，對每個正整數 n，$n^5 - n^3$ 都可被 24 整除，證畢。

第 (ii) 部分

寫成 $2^{2n} = 4^n$。運用因式分解 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$，取 $x = 4$，

$$2^{2n} - 1 = 4^n - 1 = (4-1)\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1\right) = 3\left(4^{n-1} + \cdots + 1\right).$$

括號內是整數，所以 $2^{2n} - 1$ 可被 3 整除。

用模算術（modular arithmetic）來說，這等價於：$4 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $4^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3$。用歸納法（induction）證明也可以：若 $4^k - 1 = 3a$，則 $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 3(4a + 1)$。

第 (iii) 部分

由於 $3 \mid n - 1$，可寫 $n = 3k + 1$，其中 $k \geq 0$ 為某個整數。因式分解得

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

第一個因式是 $n - 1 = 3k$。至於第二個，

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (9k^2 + 6k + 1) + (3k + 1) + 1 \\ &= 9k^2 + 9k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 3k + 1). \end{aligned}$$

所以每個因式各提供一個 3：

$$n^3 - 1 = 3k \cdot 3(3k^2 + 3k + 1) = 9k(3k^2 + 3k + 1),$$

它可被 9 整除，證畢。（當 $n = 1$ 時，$k = 0$，$n^3 - 1 = 0$，同樣可被 9 整除。）

重點在於 $n - 1$ 只提供一個因數 3；第二個來自 $n^2 + n + 1$。要看出這第二個因數，有一個巧妙的方法：$n^2 + n + 1 = (n-1)^2 + 3n$，只要 $3 \mid n - 1$，這就是兩個 3 的倍數之和。

驗算

- 第 (i) 部分：$n = 2$ 給出 $32 - 8 = 24$，$n = 3$ 給出 $243 - 27 = 216 = 9 \times 24$。由於 $n = 2$ 時剛好得到 24，沒有更大的數能整除每一個 $n^5 - n^3$，所以 24 已是最佳結果。
- 第 (ii) 部分：$n = 1, 2, 3$ 分別給出 3、15、63。
- 第 (iii) 部分：$n = 4$ 給出 $63 = 7 \times 9$，$n = 7$ 給出 $342 = 38 \times 9$，與 $9k(3k^2 + 3k + 1)$ 在 $k = 1$ 和 $k = 2$ 時的值吻合。

我們用電腦對所有小於 5000 的 n 驗證了全部三個結果（第 (ii) 部分則驗證了 $n < 2000$），並確認 $n^5 - n^3$ 各個值的最大公因數（highest common factor）恰好是 24。

常見錯誤

- 論證時寫「$(n-1)n(n+1)$ 可被 6 整除，而 n^2 是 ...」，結果弄不清因數 8 從何而來。偶數的情況需要用到 n^3，而不只是 n。
- 由可被 4 整除和可被 6 整除推斷可被 24 整除；兩個因數必須互質。
- 在第 (iii) 部分，寫到「$n - 1$ 可被 3 整除，所以 $n^3 - 1 = (n-1)(\dots)$ 可被 3 整除」便停下來，這樣只得到一個因數 3。

STEP 之外

這三部分其實都是模算術中的命題：模 m 的整數構成一個環（ring），而第 (iii) 部分說的是：若 $n \equiv 1 \pmod 3$，則 $n^3 \equiv 1 \pmod 9$。這是一個稱為*指數提升*（*lifting the exponent*）的一般現象的第一步：若 $p \mid n - 1$，則 $p^{j+1} \mid n^{p^j} - 1$。費馬小定理（Fermat's little theorem，$n^p \equiv n \pmod p$）也能解釋第 (i) 部分，因為它直接給出 $3 \mid n^3 - n$。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本講高等算術的數論入門書）是這些思想的一本優美入門讀物。

詳細解答

STEP I 1996，第 4 題

純數學 • 以配方法積分

> **STEP I 1996，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

關鍵思路

每當分母是二次式，就先配方（complete the square）：$x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$。一切取決於 $1-a^2$ 的正負。若它是正數，分母是「平方和」，積分會得出反正切（inverse tangent）；若它是負數，分母是平方差（difference of squares），可拆成部分分式（partial fractions），積分會得出對數。之後真正要花工夫的，是把答案整理成題目所給的形式。

解答

以下一律以 I 表示在 $[0,1]$ 上的積分。配方得

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$ 的情況

設 $b=\sqrt{1-a^2}>0$。利用 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$，其中 $u=x+a$，得

$$I=\frac{1}{b}\Big[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\Big]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{其中 } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

（分母在 $[0,1]$ 上永不為零，因為它至少是 $b^2>0$，所以這個積分沒有問題。）我們需要的是單獨一個反正切，所以取 $\alpha-\beta$ 的正切：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1+a}{b}-\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

這裏用了 $b^2 + a^2 = 1$。最後

$$\frac{b}{1+a} = \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

這一步成立，是因為 $1 + a > 0$。

想一想 由 $\tan(\alpha - \beta) = t$ 真的可以得出 $\alpha - \beta = \tan^{-1} t$ 嗎？

只有當 $\alpha - \beta$ 位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，即 $\tan^{-1}$ 的值域（range）之內才可以，所以我們必須驗證這一點。由於 $(1+a)/b > 0$，有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，而 $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$。此外 $\alpha > \beta$，因為 $\tan^{-1}$ 是遞增函數，而 $(1+a)/b > a/b$。所以 $0 < \alpha - \beta < \pi$。在這個區間上，tan 只在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上取正值，而我們已求得 $\tan(\alpha - \beta) > 0$；因此 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$，於是

$$I = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \qquad (|a| < 1),$$

正是所求。

（一個更巧妙的看法：設 $a = \cos\varphi$，$0 < \varphi < \pi$，可得 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ 和 $\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$，所以 $\alpha - \beta = \frac{\varphi}{2}$，而確實有 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)} = \tan\frac{\varphi}{2}$。）

$|a| > 1$ 的情況

設 $c = \sqrt{a^2 - 1} > 0$。這時分母是兩個平方之差：

$$x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 - c^2 = (x + a - c)(x + a + c),$$

拆成部分分式得

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c} - \frac{1}{x+a+c}\right).$$

這個二次式的根是 $-a \pm c$，兩根之積為 1，兩根之和為 $-2a$。

先假設 $a > 1$。這時 $a > c$（因為 $a^2 > a^2 - 1$），所以當 $x \geq 0$ 時，$x + a - c$ 和 $x + a + c$ 都是正數。因此

$$I = \frac{1}{2c}\left[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\right]_0^1 = \frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c} - \ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

利用 $(a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = 1$，兩個分數都可以化簡：

- $(1+a-c)(a+c) = (a+c) + (a-c)(a+c) = 1 + a + c$，所以 $\dfrac{1+a-c}{1+a+c} = \dfrac{1}{a+c}$；
- $a - c = \dfrac{1}{a+c}$，所以 $\dfrac{a-c}{a+c} = \dfrac{1}{(a+c)^2}$。

於是

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

這就是題目所述的結果，因為這裏 $a+\sqrt{a^2-1} > 0$，所以它等於自己的絕對值（modulus）。

那麼 $a < -1$ 又如何？這時兩根 $-a \pm c = |a| \pm c$ 都是正數，而且乘積為 1，所以較小的一個根 $|a| - \sqrt{a^2-1}$ 嚴格介乎 0 與 1 之間。被積函數（integrand）在 $[0,1]$ 之內有一個單極點（simple pole），在根 r 附近的表現就像某個常數乘以 $1/(x-r)$。所以這個積分並不收斂（converge），嚴格來說，公式只對 $a > 1$ 成立。（用 $\ln|\cdot|$ 重做同樣的部分分式計算，可知公式給出的是柯西主值（Cauchy principal value），即在 r 兩旁對稱地挖去一小段之後，積分的極限。這就解釋了題目中為何有絕對值符號。）

驗算

- $a = 0$：積分是 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$，而公式給出 $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$。
- $a = 2$：用辛普森法則（Simpson's rule）算得 0.380173，與 $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ 吻合。
- 當 $a \to 1$ 時，兩個分支都趨向 $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$。對第二個分支，當 c 很小時 $\ln(a+c) \approx c$；對第一個分支，$\tan^{-1}t \approx t$，而 $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$。

常見錯誤

- 寫下 $\tan^{-1}A - \tan^{-1}B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$，卻沒有驗證兩者之差位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內。
- 忘記了當 $a < -1$ 時，分母會在 $[0,1]$ 之內變為零。

STEP 之外

這兩個答案其實是 a 的同一個函數。在第一個答案中設 $a = \cos\varphi$，在第二個答案中設 $a = \cosh t$，分別得到 $\varphi/(2\sin\varphi)$ 和 $t/(2\sinh t)$；借助複數（$\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$），其中一個正是另一個的解析延拓（analytic continuation）。$a < -1$ 時積分發散（divergence），再靠主值來補救，這讓我們初次領略複分析（complex analysis）如何處理積分路徑上的極點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是領會這一點的絕佳去處。

詳細解答

STEP I 1996，第 5 題

純數學 • 複數的平方根

> **STEP I 1996，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

關鍵思路

每一部分都為下一部分鋪路。第 (i) 部分的重點是比較有理部分與無理部分，並告訴我們 $4-2\sqrt{3}$ 是一個完全平方（perfect square）。第 (ii) 部分要求一個複數平方根（complex square root），經過慣常的「比較實部與虛部」一步之後，問題便歸結為第 (i) 部分。第 (iii) 部分是一條二次方程，其判別式（discriminant）原來正是第 (ii) 部分那個數的四倍，所以我們需要的平方根早已準備好了。

解答

第 (i) 部分

展開得

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

我們希望這等於 $4-2\sqrt{3}$。由於 r 和 s 是有理數（rational number），r^2+3s^2 和 $2rs$ 也是有理數。若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，其中 a,b,c,d 為有理數且 $b\neq d$，則 $\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$ 會是有理數，但事實並非如此。因此我們可以比較有理部分和 $\sqrt{3}$ 的係數：

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

於是 $r\neq 0$，所以 $s=-1/r$，而第一條方程變成

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

若取 $r^2=3$，則 $r=\pm\sqrt{3}$，並非有理數。所以 $r^2=1$，解為

$$r=1,\ s=-1 \qquad \text{和} \qquad r=-1,\ s=1,$$

即 $r+s\sqrt{3}=\pm(1-\sqrt{3})$。的確 $(1-\sqrt{3})^2=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}$。

第 (ii) 部分

展開得 $(p+q\mathrm{i})^2=(p^2-q^2)+2pq\,\mathrm{i}$。由於 p 和 q 是實數，我們可以比較實部（real part）與虛部（imaginary part）：

$$p^2-q^2=3-2\sqrt{3},\qquad pq=1-\sqrt{3}.$$

第二條方程顯示 $p\neq 0$，所以 $q=(1-\sqrt{3})/p$，而 $q^2=(1-\sqrt{3})^2/p^2=(4-2\sqrt{3})/p^2$。代入第一條方程並乘以 p^2，得

$$p^4-(3-2\sqrt{3})\,p^2-(4-2\sqrt{3})=0.$$

> **想一想** 這是一條以 p^2 為未知數的二次方程，係數看來相當麻煩。有沒有快捷的方法把它因式分解？

p^2 的兩個根之和必為 $3-2\sqrt{3}$，之積必為 $-(4-2\sqrt{3})$。試試 -1：另一個根便會是 $4-2\sqrt{3}$，而的確 $-1+(4-2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$。所以

$$\left(p^2+1\right)\left(p^2-(4-2\sqrt{3})\right)=0.$$

由於 p 是實數，$p^2\neq -1$，所以由第 (i) 部分得 $p^2=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$。因此 $p=\pm(\sqrt{3}-1)$，而 $q=(1-\sqrt{3})/p=\mp 1$。解為

$$p=\sqrt{3}-1,\ q=-1\qquad 和\qquad p=1-\sqrt{3},\ q=1.$$

換句話說，$(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$ 的平方根是 $\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)$。驗算一下：$\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)^2=(4-2\sqrt{3})-1-2(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$，正是所求的數。

第 (iii) 部分

由二次公式（quadratic formula）（它對複數係數同樣成立，因為配方法在 $\mathbb{C}$ 上一樣行得通），

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{1\pm\sqrt{1-(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{1+\mathrm{i}},$$

其中 $\pm\sqrt{\ }$ 代表兩個複數平方根。根號內的量是

$$1-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}-2)\mathrm{i}=(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$

這正正是第 (ii) 部分的那個數。它的平方根是 $\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)$，所以

$$z=\frac{1\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)}{1+\mathrm{i}},\quad 由此得\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

把分子和分母同乘以 $1-\mathrm{i}$（使分母變成 2）：

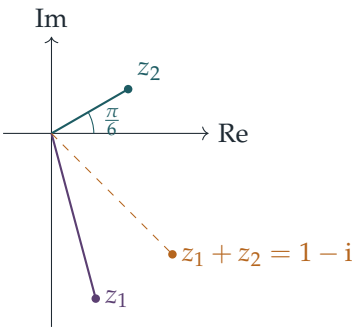
$$z_1 = \frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2 = \frac{\big((2-\sqrt{3})+\mathrm{i}\big)(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

想一想 這算是「盡可能簡單的形式」嗎？兩個根當中，有沒有哪一個可以再整理一下？

第二個根可以因式分解：$(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$，而 $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$。至於第一個根，$|z_1|^2 = \frac{1}{4}\big((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})\big) = 2$，而 $z_1 = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是 $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ 除以 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 的商。所以解為

$$z_1 = \tfrac{1}{2}\big((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\big) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

兩種形式（直角坐標形式 (Cartesian form) 或模—輻角形式 (modulus–argument form)）都是完全合格的最終答案。



驗算

- 根之和與根之積：對於 $az^2+bz+c=0$，我們需要 $z_1+z_2 = -b/a = 2/(1+\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$ 以及 $z_1z_2 = c/a = (2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。由直角坐標形式，$z_1+z_2 = \frac{1}{2}(2-2\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$；由極式（polar form），$z_1z_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。兩者都吻合。
- 數值上，$z_1 \approx 0.366 - 1.366\mathrm{i}$ 而 $z_2 \approx 0.634 + 0.366\mathrm{i}$，把任何一個代入 $(1+\mathrm{i})z^2 - 2z + 2\sqrt{3} - 2$，結果在機器精度之內都是 0。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分，忘記說明爲甚麼可以比較 $\sqrt{3}$ 的係數：這有賴於 r, s 是有理數而 $\sqrt{3}$ 是無理數（irrational number）。沒有這個條件，便有無窮多個實數解。
- 在第 (ii) 部分，保留了 $p^2 = -1$，或者把 p 和 q 的正負號配錯：$pq = 1 - \sqrt{3} < 0$ 迫使兩者異號。
- 在第 (iii) 部分，把整條公式除以 2 時出錯，或者讓 $1 + \mathrm{i}$ 留在分母而沒有把分母實數化。

STEP 之外

第 (i) 部分之所以行得通，是因為 1 和 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上線性獨立（linearly independent），所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$ 的表現就像有理數上的一個二維空間；第 (ii) 部分用的是同一個想法，只是換成 $\mathbb{R}$ 上的 1 和 i。這是域擴張（field extension）的起點，大學一年級的代數課程會由此一路發展到伽羅瓦理論（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）涵蓋了這些內容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（複分析的幾何視角）則為複數平方根提供了一個優美的幾何觀點。

詳細解答

STEP I 1996，第 6 題

純數學 • 三角函數求和與積分

STEP I 1996，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q6

關鍵思路

題目給出的恆等式（identity）正是為了裂項相消（telescoping）而設：若把和式 $\sum \cos kx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，每一項都會變成兩個正弦之差，而相鄰的差會互相抵消。一旦把 f 寫成餘弦之和，(ii) 中看似棘手的積分就變成單個餘弦的積分，其中大部分在 $[0,\pi]$ 上都等於零。

解答

以下 n 均為正整數。

第 (i) 部分

設 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$。乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，並逐項運用題目給出的公式，

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= \big(\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x\big)+\big(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x\big)+\cdots+\big(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x\big)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

因為每個中間項都以正負號各出現一次，互相抵消。因此

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

當 $0<x\le\pi$ 時，$0<\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\pi$，故 $\sin\frac{1}{2}x>0$，可以用它來除：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

? **想一想** f 在 $x = 0$ 處沒有定義。那麼 $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 這個積分到底有沒有意義？

有。根據第 (i) 部分，在 $0 < x \le \pi$ 上，函數 f 與餘弦多項式 $1 + 2\sum \cos kx$ 相等，而後者在整個 $[0, \pi]$ 上連續（continuous）（在 0 處的值為 $2n + 1$）。改變單獨一點的函數值，或讓該點沒有定義，都不會影響積分，所以我們可以改為對餘弦之和積分。

第一個積分。對每個整數 $k \ge 1$，

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

因為 $\sin k\pi = 0$。所以只有常數項留下來：

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

第二個積分。現在

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx \cos x\,\mathrm{d}x.$$

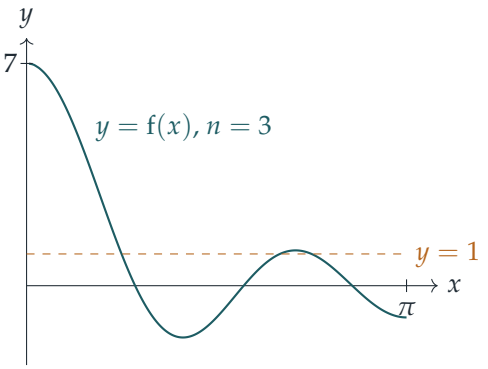
第一個積分是 $[\sin x]_0^\pi = 0$。至於其餘的積分，利用 $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$：

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

這裏 $k+1 \ge 2$，所以第一個積分如上所述等於 0。第二個積分也等於 0，除非 $k - 1 = 0$，此時被積函數（integrand）是 1，積分等於 π。所以只有 $k = 1$ 的一項有貢獻，於是

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

（假如容許 n 取 0，則 $\mathrm{f} \equiv 1$，這個積分就會是 0；對每個 $n \ge 1$，它都等於 π。）



這幅圖說明了為何第一個答案與 n 無關：0 附近那個高聳的尖峯（高度為 $2n+1$）被其後的振盪抵銷，淨面積始終等於常數項所佔的面積，即 π。

驗算

- 當 $x \to 0$ 時，$\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$，而餘弦之和在 $x=0$ 處的值為 $1+2n$。兩者吻合。
- 在 $x=\pi$ 處：$\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$，同時亦有 $1+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$。
- 對 $n = 1,\ldots,7$，以中點法則（midpoint rule）對原來的商式作數值積分，兩個積分都得出 3.14159265…，與 π 相符。

常見錯誤

- 忘記說明為何可以除以 $\sin\frac{1}{2}x$：它不等於零，正是因為 $0 < x \le \pi$。
- 寫成對所有 k 都有 $\int_0^\pi \cos kx \cos x\,\mathrm{d}x = 0$，於是第二個積分得出 0；其實 $k=1$ 的一項給出 $\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

函數 f 就是狄利克雷核（*Dirichlet kernel*），是傅立葉級數（Fourier series）理論的核心對象。第 (ii) 部分的計算是正交性（orthogonality）的例子：$\cos kx$ 與 $\cos mx$ 相乘後在 $[0,\pi]$ 上的積分為零，除非 $k=m$。傅立葉係數正是這樣提取出來的，而把一個函數與狄利克雷核相乘再積分，就得到它的傅立葉級數的第 n 個部分和（partial sum）。至於這些部分和在甚麼情況下收斂（converge），嚴謹的論述可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本實分析入門教材）。

詳細解答

STEP I 1996，第 7 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP I 1996，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q7

關鍵思路

「以與水量成正比的速率流出」可以直接寫成一條一階微分方程（first-order differential equation）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$，其中 $k > 0$，其解是一個指數函數（exponential）。把 e^{-k} 記作單一個數 b，指數函數便化為 b^t；同一個代換 $k = -\ln b$ 亦可用來改寫第 (ii) 部分的方程。該方程是線性的，所以用積分因子（integrating factor）便可完成。

解答

第 (i) 部分

水是流出的，所以 y 以與 y 成正比的速率減少：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{其中常數} k > 0.$$

只要水箱內仍有水，便有 $y > 0$，所以可以分離變數（separate the variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

當 $t = 0$ 時 $y = 1$，所以 $c = \ln 1 = 0$。因此

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{其中} b = \mathrm{e}^{-k}.$$

由於 $k > 0$，我們有 $0 < b < 1$；特別地，$b < 1$，正如題目所要求。留意以下結果，稍後會用到：

$$\ln b = -k, \qquad \text{所以} \qquad k = -\ln b > 0.$$

第 (ii) 部分

流出的情況與之前完全相同，速率為 ky，常數 k 亦不變；此外，水以速率 a 流入。所以淨變化率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

? **想一想** 這條方程只涉及 k，那麼 $\ln b$ 是從何而來的？

常數 b 是在第 (i) 部分以 $b = \mathrm{e}^{-k}$ 定義的，所以它只描述流出的情況，與其他因素無關；在這裏它仍然是同一個數。代入 $k = -\ln b$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

這就是所要求的方程。

這是一條關於 y 的常係數線性方程。積分因子是

$$\exp\left(-\int \ln b\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

全式乘以 b^{-t} 後，左方成為一個恰當導數（exact derivative），因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\,b^{-t}\right) = a\,b^{-t}.$$

兩邊積分，並利用 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$（因 $\ln b \neq 0$ 而成立），

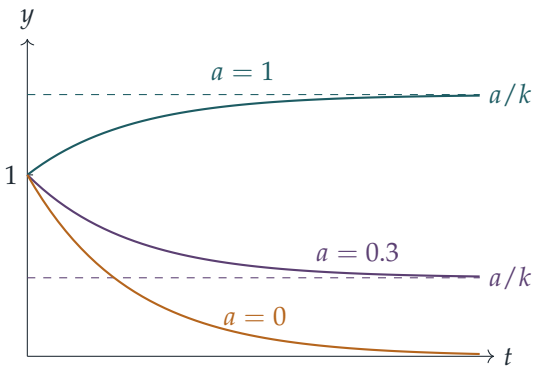
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

當 $t = 0$ 時 $y = 1$，所以 $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$，得 $C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$。全式乘以 b^t，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right)b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

兩種形式都可以接受。第二種較易理解，因為 $-\ln b = \ln(1/b) > 0$：它就是第 (i) 部分的解 b^t，再加上由流入的水所產生的一個正項。

當 $t \to \infty$ 時，$b^t \to 0$（因為 $0 < b < 1$），所以 $y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$。這是平衡水平（equilibrium level），此時流出量 ky 剛好與流入量 a 相抵。若 $a > k$，水箱的水量會上升並趨向這個水平；若 $a < k$，水量則會下降並趨向這個水平。



草圖所示為 $b = \frac{1}{2}$（故 $k = \ln 2 \approx 0.693$）的情況，分別取 $a = 1$、$a = 0.3$，並畫出第 (i) 部分的曲線 $a = 0$ 以作比較。

驗算

- 取 $a = 0$：答案化為 $y = b^t$，即第 (i) 部分的結果。
- 當 $t = 0$ 時：$y = 1 + \frac{a(1-1)}{-\ln b} = 1$。
- 對 $y = b^t + \frac{a}{\ln b}(b^t - 1)$ 求導：得 $y' = b^t \ln b + ab^t$，而 $y \ln b + a = b^t \ln b + a(b^t - 1) + a = b^t \ln b + ab^t$，兩者吻合。
- 數值上，取 $b = \frac{1}{2}$、$a = 1$、$t = 2$，公式給出 $y \approx 1.3320$；以龍格－庫塔法（Runge–Kutta method）逐步求解該微分方程，得到相同的值，而一般而言，對隨機選取的 a、b、t，兩者相差約在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$，之後卻忘記了因為水是流出的，$k$ 必須是負數；正是這個符號令 $b < 1$ 必然成立。
- 在第 (ii) 部分把 b 當作一個新的未知數。它完全由流出的情況決定，所以 $\ln b = -k$ 可以直接沿用。
- 把 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -b^{-t}/\ln b$ 的符號弄錯；可用求導來檢查。

STEP 之外

這是最簡單的房室模型（compartment model）：一個水箱，輸入恆定，輸出與存量成正比。同一條方程亦可描述以穩定速率注入血液、再經腎臟清除的藥物，或者經電

阻器充電的電容器。每一個解都以指數方式趨向平衡值 a/k，這是穩定不動點（stable fixed point）的一個例子；當你學到微分方程組時，這個概念會變得十分重要。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）討論了一階線性方程，以及許多這類混合問題。

詳細解答

STEP I 1996，第 8 題

純數學 • 循環小數

> **STEP I 1996，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

關鍵思路

循環的數字節其實是一個喬裝了的等比級數（geometric series）：每重複一次，數字節就比上一次向右移 k 個位，亦即乘以 10^{-k}。第 (i) 部分是最簡單的情況。在第 (ii) 部分，我們把展開式分成開始循環之前的部分（一個有限小數）和循環的尾段（一個等比級數），結果兩部分都是整數除以十的冪或除以 $10^k - 1$。

解答

第 (i) 部分

數字節 38 每兩個位重複一次，所以

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

這裏把公比（ratio）為 $\frac{1}{100}$ 的等比級數求和；由於 $\left|\frac{1}{100}\right| < 1$，這樣做是容許的。因為 $38 = 2 \times 19$ 與 $99 = 3^2 \times 11$ 沒有公共的質因數（prime factor），所以這已是最簡分數（lowest terms）：

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

第 (ii) 部分

（題目印出的展開式 $0 \cdot a_1 a_2 a_2 \cdots$ 是 $0 \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots$ 之誤。）每個 a_n 都是 0 至 9 的數字，而

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

我們在 $n = N$ 處把這個和分開。

首 N 個數字。 設 b 為十進制數字依次是 $a_1 a_2 \ldots a_N$ 的整數（容許開首有零），即

$$b = \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n}.$$

於是

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^N} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n} = \frac{b}{10^N}.$$

尾段。 條件 $a_{n+k} = a_n$ 對所有 $n > N$ 成立，反覆運用它，可得對所有 $m \geq 0$ 及 $1 \leq j \leq k$ 都有 $a_{N+mk+j} = a_{N+j}$（對 m 用歸納法（induction）：下標 $N + (m-1)k + j$ 大於 N，所以可以給它加上 k）。因此在第 N 個位之後，展開式就是數字節 $a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}$ 不斷重複。設 c 為由這些數字組成的整數，

$$c = \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j}.$$

把尾段每 k 項分成一組；由於所有項均為非負，而且級數收斂（converges），這樣分組是容許的。對給定的 $m \geq 0$，相應的一組是

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}} = \frac{1}{10^{N+(m+1)k}} \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j} = \frac{c}{10^N} \left(\frac{1}{10^k} \right)^{m+1}.$$

? **想一想** 為甚麼每一組恰好是前一組的 10^{-k} 倍？

由第 m 組到第 $m+1$ 組，所用的數字相同（因為有週期性（periodicity）），但每個數字都向右多移了 k 個位，於是每一項都除以 10^k。這就是隱藏在循環小數（recurring decimal）裏的等比級數。

把公比為 $10^{-k} < 1$ 的等比級數求和，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{c}{10^N} \cdot \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} = \frac{c}{10^N (10^k - 1)}.$$

把各部分合起來。 把兩部分相加，

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N (10^k - 1)},$$

其中 b 是由首 N 個數字 $a_1 \ldots a_N$ 組成的整數，c 是由一個週期 $a_{N+1} \ldots a_{N+k}$ 組成的整數。這就是題目要求的形式。

有理性。 通分後，

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

分子是整數，而由於 $k \geq 1$ 可得 $10^k - 1 \geq 9$，分母是正整數。所以 x 是兩個整數之比，即 x 是有理數（rational）。

驗算

- 第 (i) 部分是沒有循環前部分（pre-period）而 $k = 2$、$c = 38$ 的情況：公式給出 $38/(10^2 - 1) = 38/99$。（若取 $N = 1$，則 $b = 3$ 及 $c = 83$，而 $\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$，結果一致。）
- 取 $0.12345345\ldots$，其中 $N = 2$、$k = 3$、$b = 12$、$c = 345$：$\frac{12}{100} + \frac{345}{100 \times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\ldots$
- 我們還隨機選取了 500 組循環前部分和循環節，以精確算術把公式與展開式求和的結果比較；全部一致。

常見錯誤

- 忘記尾段的因子 10^{-N}：循環節由第 $N + 1$ 個位開始，而不是由第 1 個位開始。
- 分母用了 10^k 而不是 $10^k - 1$：等比級數的首項是 $c\,10^{-N-k}$，而不是 $c\,10^{-N}$。
- 在 (i) 中沒有檢查是否最簡分數：要說明為甚麼 $\gcd(38, 99) = 1$。

STEP 之外

逆命題（converse）也成立：每個有理數的小數展開式最終都會循環，因為用 q 作長除法（long division）時只有 q 個可能的餘數，所以其中一個必定重複出現。因此，無理數（irrationals）正是小數展開式永不進入循環的那些實數。$1/q$ 的週期長度與 10 模 q 的階（order）有關，這是初嘗羣論（group theory）在數論中的滋味。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）把這些關於同餘（congruences）和週期的想法闡述得十分精彩。

詳細解答

STEP I 1996，第 9 題

力學 • 彈性繩與能量

STEP I 1996，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q9

關鍵思路

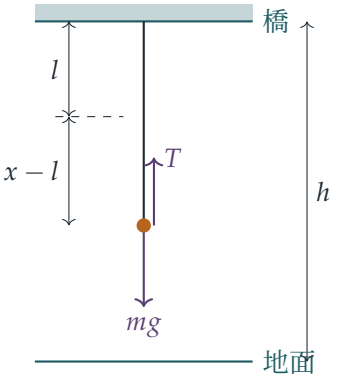
這一題從頭到尾都是能量的問題。只有重力和繩的張力（tension）在作功，而兩者都是守恆力（conservative force），所以我們根本不必完整地解運動方程（equation of motion）。「僅僅避過地面」的意思是：她到達地面的一刻，速率剛好為零。最大速率出現在加速度變號之處，也就是張力與她的重量互相平衡的位置。

解答

我們把跳躍者視為一個從橋上由靜止出發的質點（particle），把繩視為輕繩並服從胡克定律（Hooke's law），同時忽略空氣阻力。設 x 為她已下落的距離。當 $x \leq l$ 時，繩是鬆弛的，她處於自由下落（free fall）狀態。當 $x > l$ 時，伸長量（extension）為 $x - l$，由胡克定律得張力

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

而繩中儲存的彈性勢能（elastic energy）為 $\frac{mg}{k} \cdot \frac{(x-l)^2}{2l}$。



橋的高度

在最低點，她瞬間靜止。她僅僅避過地面，所以這個最低點就是地面本身，即 $x = h$。顯然 $h > l$：假如繩從未拉緊，她便會一直自由下落，並以相當的速率撞向地面。由離開橋面到最低點，動能（kinetic energy）在開始和結束時都是零，所以失去的重力勢能全部轉移到繩中：

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

兩邊乘以 $2kl/(mg)$，得 $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$，所以

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

這正是所需的結果。由二次公式（quadratic formula），

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k+1 \pm \sqrt{k^2+2k}\right).$$

? **想一想** 我們要的是哪一個根？另一個根又為甚麼會出現？

由於 $k > 0$，我們有 $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$，所以取負號時會得出 $h < l(k+1-k) = l$。但能量方程假設了繩被拉長了 $h-l$，這只有在 $h > l$ 時才有意義。這個多餘的根來自平方：對於一個繩實際上無法提供的「壓縮」，它給出相同的 $(h-l)^2$ 值。（兩根之積為 l^2，所以其中一個大於 l，另一個則小於它。）因此

$$h = l\left(k+1+\sqrt{k^2+2k}\right).$$

最大速率

繩仍然鬆弛時，她以 g 向下加速。繩一旦拉緊，沿向下方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

當 $x - l < kl$ 時，此式為正，其後則為負。所以她一直加速，直至伸長量為 kl，即張力等於她的重量的那一點，此後便開始減速。因此她的最大速率在 $x = l + kl$ 處達到。由橋面到這一點應用能量守恆（conservation of energy），

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k}\cdot\frac{(kl)^2}{2l}\\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

乘以二再除以 m，

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

這正是所需的結果。

驗算

- 當 $k \to 0$ 時，繩變得非常硬。這時 $h \to l$（她幾乎沒有把繩拉長），而 $v^2 \to 2gl$，即下落距離 l 後的自由下落速率；這是合理的，因為繩幾乎立刻把她停住。
- 隨機選取 k 和 l，以數值方法逐步求解運動方程，所得的最低點和最大速率與公式吻合至小數點後五位。例如，$k = 1.5$、$l = 10\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 給出 $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$ 和 $v^2 = 343$，所以 $v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。

常見錯誤

- 以為最大速率出現在繩剛拉緊的一刻。那時她仍在加速，因為張力為零。
- 計算彈性勢能時，用了整段下落距離 x，而不是伸長量 $x - l$。
- 保留 h 的兩個根，而沒有檢查是否 $h > l$。

STEP 之外

繩一旦拉緊，運動便是以平衡伸長量 kl 為中心的簡諧運動（simple harmonic motion），所以下落的後半段是正弦曲線的一部分，角頻率（angular frequency）為 $\sqrt{g/(kl)}$。像這樣在自由下落與振子之間切換的分段系統，正好讓人初步認識能量方法和相平面（phase plane）圖像如何處理不光滑的力。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）在這個程度上仔細地闡述了能量守恆和振動。

詳細解答

STEP I 1996，第 10 題

力學 • 動量守恆

STEP I 1996，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q10

關鍵思路

這裏要用到兩個守恆關係：動量守恆（momentum is conserved；爆炸前動量為零），以及爆炸後的動能（kinetic energy）為 E。只要知道質量如何分配，這兩個關係合起來便能確定兩個速率，於是相對速率（relative speed）就成為質量分配方式的函數。要把它減至最小，歸根究底只需一個不等式，而由於 $m_1 + m_2$ 是固定的，算術–幾何平均不等式（AM–GM inequality）正是最自然的工具。

解答

我們把兩個部分看作質點（particles），假設爆炸過程中沒有質量損失，所以 $m_1 + m_2 = M$，並假設爆炸期間沒有外力（external forces）作用。



動量。 太空船起初靜止，所以爆炸前的總動量為零，爆炸後亦因此為零。兩個動量 $m_1\mathbf{v}_1$ 與 $m_2\mathbf{v}_2$ 必須互相抵消，所以兩個部分沿同一直線朝正好相反的方向運動，並且

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

其中 $p > 0$ 是兩者動量的共同大小。由於兩個部分朝相反方向運動，它們的相對速率確實是 $v_1 + v_2$。

能量。 爆炸後的全部動能都來自爆炸，所以

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

因此 $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$。

相對速率。 利用 $v_1 = p/m_1$ 和 $v_2 = p/m_2$，

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

所以

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

想一想 E 和 M 都是固定的。剩下唯一可以由我們自由改變的是甚麼？我們又希望它朝哪個方向變化？

可以改變的只有質量的分配方式；要使 v_1+v_2 盡量小，就要在 $m_1+m_2 = M$ 的條件下，使乘積 m_1m_2 盡量大。根據算術–幾何平均不等式（兩個質量皆為正數），

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

等號成立當且僅當 $m_1 = m_2 = \tfrac{1}{2}M$。（等價地，$m_1m_2 = \tfrac{1}{4}M^2 - \tfrac{1}{4}(m_1-m_2)^2$。）因此

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

而由於速率是非負的，我們可以取平方根：

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

當太空船分裂成相等的兩半時，這個界便可達到，此時每一半的速率都是 $\sqrt{2E/M}$。所以相對速率的最小可能值是 $(8E/M)^{1/2}$，正如題目所求。

驗算

- 相等的兩半：每一半的動能為 $\tfrac{1}{2}E = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}Mv^2$，所以 $v = \sqrt{2E/M}$，而 $2v = \sqrt{8E/M}$，與所得的界吻合。
- 極端的分配：當 $m_1 \to 0$ 時，$m_1m_2 \to 0$，相對速率趨向無窮大。這是合理的，因為一塊極小的碎片若帶走一部分能量，就必須運動得非常快。

- 單位：E/M 的單位是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，所以它的平方根是速率。
- 數值上，取 $M = 7$ 和 $E = 3$，讓 m_1 在 $(0,7)$ 上逐一取值，所得的最小相對速率為 $1.85164\ldots$，在 $m_1 = 3.5$ 時出現，與 $\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$ 相符。

常見錯誤

- 忘記說明兩個部分為何朝相反方向運動；正是這一點令相對速率是 $v_1 + v_2$ 而不是 $|v_1 - v_2|$。
- 對 m_1 求最小值時沒有用到 $m_1 + m_2 = M$；正是這個約束條件令問題變成一維。
- 只證明了 $(8E/M)^{1/2}$ 是下界（lower bound），卻沒有指出這個下界確實可以達到（當 $m_1 = m_2$ 時）。

STEP 之外

這是在質心參考系（centre-of-mass frame）中處理問題的最簡單例子：在這個參考系中，二體分裂所產生的動量總是大小相等、方向相反，而動能為 $p^2/(2\mu)$，其中 $\mu = m_1 m_2/M$ 是約化質量（reduced mass）。這裏 $(v_1 + v_2)^2 = 2E/\mu$，而約化質量在兩個質量相等時最大。核衰變和二體軌道的背後也是同一個想法；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對此有仔細的闡述。

詳細解答

STEP I 1996，第 11 題

力學 • 拋體運動

STEP I 1996，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

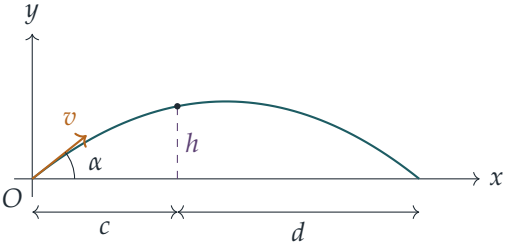
step.maths.org/questions/96-s1-q11

關鍵思路

拋體（projectile）的路徑是一條拋物線（parabola），而我們知道它與地面相交的兩個位置：$x = 0$ 和 $x = c + d$。二次函數（quadratic）一旦知道了根（roots），就只差一個常數未定，所以軌跡（trajectory）必定是 $y = kx(c + d - x)$，其中 k 為某個常數。點 (c, h) 決定了 k 的值，再與標準的軌跡方程比較，便可把 k 化為 $\tan\alpha$，繼而化為 v^2。

解答

我們把質點（particle）視為只受重力作用而自由運動的點質量（point mass），不計空氣阻力（air resistance）；取 O 為原點，x 軸沿運動方向水平，y 軸鉛垂向上。設射程（range）為 $R = c + d$，並記 $T = \tan\alpha$。



拋射角

初速度的分量為 $v\cos\alpha$ 和 $v\sin\alpha$，因此經過時間 t 後的位置是 $x = vt\cos\alpha$，$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$。利用 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去時間，得軌跡方程

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

質點在 $x = R$ 處着地，所以該處 $y = 0$。由於 $R \neq 0$，我們可以除以 R：

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

把這個結果代回軌跡方程，

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{T\,x(R-x)}{R}.$$

? **想一想** 為甚麼值得在使用點 (c,h) 之前，先把 $g/(2v^2\cos^2\alpha)$ 換掉？

因為 $(*)$ 把 v 完全消去，只剩下一條以 T 為唯一未知數的方程。從幾何角度看，我們已把拋物線寫成因式分解的形式，它的兩個根 0 和 R 一目了然。現在點 (c,h) 在路徑上，而 $R - c = d$，所以

$$h = \frac{T\,cd}{c+d}, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

這正是所要證明的結果。

拋射速率

把 $(*)$ 移項，並利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

由第一個結果，$\dfrac{R}{T} = \dfrac{cd}{h}$ 及 $RT = \dfrac{(c+d)^2h}{cd}$。因此

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

全題至此完成。

驗算

- 根據算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality），$\frac{R}{T} + RT \geq 2R$，所以 $v^2 \geq gR$，而等號恰好在 $T = 1$ 時成立。這就是大家熟悉的事實：在給定速率下，最大射程為 v^2/g，並在 45° 時達到。

- 如果點 (c, h) 是飛行路徑的最高點，則 $c = d$，且 $\tan\alpha = 2h/c$，這與標準結果吻合：最大高度等於射程的四分之一乘以 $\tan\alpha$。
- 數值上，取 $g = 9.81$、$c = 3$、$d = 5$ 和 $h = 2$，公式給出 $\tan\alpha = \frac{16}{15}$ 及 $v^2 \approx 78.64$。以細小的時間步長逐步模擬運動，質點在 $x = 3$ 處經過高度 2.000，並在 $x = 8.000$ 處着地。

常見錯誤

- 漏掉軌跡方程中的 $\cos^2\alpha$，或者把 $\sec^2\alpha$ 換成 $1 + \tan\alpha$ 而不是 $1 + \tan^2\alpha$。
- 試圖直接由「在 $x = c$ 處高度為 h」和「在 $x = c + d$ 處高度為 0」這兩條方程解出 v 和 α。這樣做是可行的，但代數運算比先用 $(*)$ 消去 v 繁重得多。

STEP 之外

把二次函數用它的根來表示，這個技巧是一個重要思想的小小例子：多項式由它的零點決定，只差一個常數倍，由此可引伸至插值（interpolation），以及複數（complex numbers）範圍內的因式定理（factor theorem）。在力學中，固定 v 而讓 α 變化，會得到一族拋物線，它們的包絡線（envelope）就是「安全拋物線」（parabola of safety），即拋體所能到達的所有點的邊界。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力學導論）以大學一年級的程度討論拋體運動及其延伸課題（包括空氣阻力）。

詳細解答

STEP I 1996，第 12 題

概率與統計 • 隨機樣本的最大值

STEP I 1996，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q12

關鍵思路

閱卷員的選擇，歸根究底就是從 $\{1,2,\ldots,m\}$ 中選出一個由 n 個不同分數組成的集合，而每一個這樣的集合出現的機會均等。因此，概率（probability）就是集合的數目除以 $\binom{m}{n}$。說最高分數是 k，即是固定了其中一個分數，餘下的 $n-1$ 個則要從比它小的分數中選出。恆等式（identity）隨之唾手可得，因為各概率之和為 1。至於期望值（expectation），竅門是把 $k\binom{k-1}{n-1}$ 還原成單獨一個二項式係數（binomial coefficient），這樣便可以再次使用同一條恆等式。

解答

K 的分佈

閱卷員給出 n 個互不相同的分數，而根據對稱性，$\{1,\ldots,m\}$ 中每一個大小為 n 的子集（subset），成為所用分數集合的機會均等。（哪一份答卷得到哪一個分數，對 K 並無影響。）這樣的子集共有 $\binom{m}{n}$ 個。

事件 $K=k$ 發生，當且僅當該集合包含 k，而其餘 $n-1$ 個分數全部落在 $\{1,\ldots,k-1\}$ 之內。選出這 $n-1$ 個分數的方法有 $\binom{k-1}{n-1}$ 種。這需要 $k-1\geq n-1$，即 $k\geq n$：n 個互不相同的正整數之中，最大的一個至少是 n。此外，當然還有 $k\leq m$。



（圖中所示為 $m=10$、$n=4$、$k=7$ 的情況。）因此

$$\mathrm{P}(K=k)=\binom{k-1}{n-1}\Big/\binom{m}{n},\qquad n\le k\le m.$$

恆等式

K 必定恰好取 $n, n+1, \ldots, m$ 其中一個值，所以這些概率之和為 1：

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n-1}\Big/\binom{m}{n}=1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n-1}=\binom{m}{n}.$$

這對所有滿足 $1\le n\le m$ 的整數都成立，下一步正要用到這一點。

期望值

根據定義，

$$\mathrm{E}(K)=\frac{1}{\binom{m}{n}}\sum_{k=n}^{m}k\binom{k-1}{n-1}.$$

? **想一想** 怎樣才能消去因子 k，使恆等式可以再次派上用場？

把它併入二項式係數之中：

$$k\binom{k-1}{n-1}=\frac{k\,(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}=n\cdot\frac{k!}{n!\,(k-n)!}=n\binom{k}{n}.$$

現在 $\binom{k}{n}=\binom{(k+1)-1}{(n+1)-1}$。當 k 由 n 取到 m 時，$j=k+1$ 由 $n+1$ 取到 $m+1$。於是，以 $n+1$ 和 $m+1$ 代替 n 和 m 來使用恆等式（這是容許的，因為 $1\le n+1\le m+1$），便得

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\sum_{j=n+1}^{m+1}\binom{j-1}{(n+1)-1}=\binom{m+1}{n+1}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K)&=\frac{n\binom{m+1}{n+1}}{\binom{m}{n}}=n\cdot\frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!}\cdot\frac{n!\,(m-n)!}{m!}\\&=\frac{n(m+1)}{n+1}.\end{aligned}$$

驗算

- $n=m$：每個分數都用上了，所以必定有 $K=m$，而確實 $\frac{m(m+1)}{m+1}=m$。
- $n=1$：K 是單獨一個分數，在 $\{1,\ldots,m\}$ 上均勻分佈，平均值為 $\frac{m+1}{2}$，與公式吻合。

- $m = 6$、$n = 2$：列出 $\{1,\ldots,6\}$ 中全部 15 對，得 $\mathrm{E}(K) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$，而公式給出 $\frac{2\cdot 7}{3} = \frac{14}{3}$。我們已就所有 $1 \le n \le m \le 9$ 逐一列出每個子集，驗證了分佈、恆等式和平均值。
- 有一個漂亮的方法可以看出答案：選出的 n 個分數把餘下的 $m-n$ 個分數分成 $n+1$ 個間隔，各間隔的期望大小相等，均為 $\frac{m-n}{n+1}$。於是 $\mathrm{E}(K) = m - \frac{m-n}{n+1} = \frac{n(m+1)}{n+1}$。

常見錯誤

- 分子數的是把分數分配給答卷的有序方式，分母數的卻是無序的集合（或者反過來）。只要前後一致，兩種數法都可行，因為因子 $n!$ 會互相抵消。
- 用了 $\binom{k}{n}$ 而不是 $\binom{k-1}{n-1}$。前者數的是所有分數都*不超過* k 的集合，而不是最高分數*等於* k 的集合。

STEP 之外

這條恆等式就是帕斯卡三角形（Pascal's triangle）中的「曲棍球棒」恆等式（hockey-stick identity），而我們在這裏是用兩種方法數同一樣東西來證明它，這是組合數學中的標準技巧。K 是不放回抽取的隨機樣本中的最大值，屬於*順序統計量*（order statistic）。「德國坦克問題」（German tank problem）把本題倒過來，由觀察所得的 K 去估計 m：從 $\mathrm{E}(K) = \frac{n(m+1)}{n+1}$ 解出 m，便得到無偏估計量（unbiased estimator）$\frac{n+1}{n}K - 1$。想進一步了解順序統計量和計數論證，可參閱 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材）。

詳細解答

STEP I 1996，第 13 題

概率與統計 • 離散分佈與期望值

> **STEP I 1996，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q13

本題在 *Beyond STEP* 第 12.11 節郵票、杯子與 e 中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/stamps-and-e.html

關鍵思路

遊戲在第一次猜錯時結束，所以 $N = k$ 的意思是「用 $2, 3, \ldots, k-1$ 個杯時都猜中，然後用 k 個杯時猜錯」。把這些概率（probability）相乘，分母便會出現階乘（factorial）；而求和式中出現階乘，正強烈暗示指數級數（exponential series）$\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ 即將登場。計算期望值的竅門，是把 k 的因子與 $k!$ 約去，使每個和都變成 $\sum 1/n!$ 平移後的版本。

解答

N 的分佈

把 c 個杯打亂之後，Jim 實際上是隨機亂猜，所以他猜中的概率是 $1/c$，猜錯的概率是 $1 - 1/c$。每一回合都重新打亂一次，所以各回合互相獨立（independent）。

由於杯的數目至少有兩個，故 $N \geq 2$。對於 $k \geq 2$，事件 $N = k$ 發生，當且僅當 Jim 用 $2, 3, \ldots, k-1$ 個杯時都猜中，然後用 k 個杯時猜錯。由獨立性，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N = k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{k-1}{k!}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

（當 $k = 2$ 時，猜中部分的乘積是空積，我們得到 $\frac{1}{2}$，正如所料。）

值得留意的是，這個結果有一個簡潔的等價形式：$N > k$ 表示 Jim 用 $2, \ldots, k$ 個杯時都

猜中，所以

$$\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!} \qquad (k \geq 1).$$

事實上 $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$，與上面的公式吻合。當 $k \to \infty$ 時，這個概率趨向 0，所以遊戲以概率 1 結束，而各概率之和為 1。

期望值

把 k 與 $k!$ 約去，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e},\end{aligned}$$

其中設 $j = k-2$，並在 $x = 1$ 處使用 $\mathrm{e}^x = \sum_{j\geq 0} x^j/j!$。這就是所要求的結果。

方差

> **想一想** 這裏哪一個二階矩（second moment）最容易求和：$\mathrm{E}(N^2)$ 還是 $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$？

兩者皆可，因為 $k^2\,\mathrm{P}(N = k) = k \cdot \dfrac{k(k-1)}{k!}$ 中的因子 $k(k-1)$ 本身已能乾淨利落地約去。我們求得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N^2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+2}{j!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} + 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 3\mathrm{e},\end{aligned}$$

其中在中間一步，$\sum j/j!$ 的 $j = 0$ 項為零，而當 $j \geq 1$ 時 $j/j! = 1/(j-1)!$。因此

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \big(\mathrm{E}(N)\big)^2 = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e}) \approx 0.766.$$

驗算

- 各概率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{30}, \ldots$ 之和為 1，這可由尾部形式 $\mathrm{P}(N > k) = 1/k!$ 看出。
- 利用尾部公式，$\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}$，這是得出同一答案的另一條獨立途徑。
- 方差（variance）為正數，這是必然的，因為 $\mathrm{e} < 3$。精確求和得 $\mathrm{E}(N) = 2.71828\ldots$ 及 $\mathrm{Var}(N) = 0.76579\ldots$，而模擬 400 000 局遊戲所得的平均值為 2.720，方差為 0.767。

常見錯誤

- 把分佈由 $k = 1$ 開始：遊戲一開始已有兩個杯，所以 $N \geq 2$。
- 漏掉代表猜錯的最後一個因子 $1 - \frac{1}{k}$，結果得出 $1/(k-1)!$，而這些「概率」之和是 $\mathrm{e} - 1$，而不是 1。
- 寫成 $\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)$，而沒有減去 $\big(\mathrm{E}(N)\big)^2$。

STEP 之外

尾和公式（tail-sum formula）$\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$ 對任何取值於 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 的隨機變量（random variable）都成立，是大學一年級的標準工具，往往能把繁複的期望值計算化為一行算式，正如本題所見。要把所有矩一併整理起來，更簡潔的方法是使用概率生成函數（probability generating function）$G(s) = \mathrm{E}(s^N)$。在本題中可算出 $G(s) = 1 + (s-1)\mathrm{e}^s$，由此 $G'(1) = \mathrm{e}$ 及 $G''(1) = 2\mathrm{e}$ 立即給出平均值和方差。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）正是以這種精神闡述生成函數。

詳細解答

STEP I 1996，第 14 題

概率與統計 • 游程與條件概率

STEP I 1996，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s1-q14

關鍵思路

按當前這一段連續結果如何結束來取條件（conditioning）。硬幣一旦換面，之前發生的一切就再無關係：舊的一段連續結果已被打斷，而新的一段長度為一。因此，擲出正面之後，只要一出現反面，遊戲便隨即「重新開始」，所處的狀態與第一次投擲就擲出反面時完全相同；反之亦然。由此得到兩條含兩個未知數的線性方程。

解答

記 $x = \mathrm{P}(A \mid H)$ 及 $y = \mathrm{P}(A \mid T)$。各次投擲自始至終互相獨立（independent）。我們取 $r, s \geq 1$。

$\mathrm{P}(A \mid H)$ 的方程

假設第一次投擲得正面。此時我們有一段長度為一的連續正面，而連續反面尚未開始。考慮接下來的 $r-1$ 次投擲（第 2 至第 r 次）。

- 若這些投擲全為正面，其概率為 p^{r-1}，則在第 r 次投擲時完成一段 r 個連續正面。期間完全沒有出現過反面，所以必定沒有 s 個連續反面搶先出現，故 A 發生。
- 否則，其概率為 $1 - p^{r-1}$，在連續正面的長度達到 r 之前，第 $2, \ldots, r$ 次投擲之中出現了反面。在第一個這樣的反面出現時，連續正面未達到 r 便被打斷，而此前並無反面出現，所以 s 個連續反面亦未曾出現。此刻我們手上恰好有一段長度為一的連續反面，而之前的一切都不可能對日後任何一段連續結果有所貢獻。

? **想一想** 為甚麼從該個反面起計，A 發生的概率恰好是 $\mathrm{P}(A \mid T)$？

第一次投擲得反面之後，情況是：有一段長度為一的連續反面，沒有進行中的連續正面，而且往後的投擲與過去獨立。這正正是上述第二種情形中第一個反面出現時的情況。由於往後的投擲與之前的投擲獨立，而兩種連續結果中哪一種先出現，只取決於當前這一段連續結果和往後的投擲，所以從該刻起 A 的條件概率（conditional probability）為 y。因此，根據全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

所以 $\alpha = r - 1$。

$\mathrm{P}(A \mid T)$ 的方程

假設第一次投擲得反面。考慮第 2 至第 s 次投擲。

- 若全為反面（概率為 q^{s-1}），則在任何正面出現之前已完成一段 s 個連續反面，故 A 不發生。
- 否則（概率為 $1 - q^{s-1}$），在反面連續出現 s 次之前出現了正面。在該個正面出現時，我們有一段長度為一的連續正面，而反面方面並無任何進行中的連續結果，這正是第一次投擲得正面之後的情況。所以從該處起，A 發生的概率為 x。

因此

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

所以 $\beta = s - 1$。

（邊界情況同樣吻合。若 $r = 1$，第一條方程給出 $x = 1$，這是對的，因為單單一個正面已經是一段長度為 r 的連續正面。若 $s = 1$，第二條方程給出 $y = 0$。）

求解

把第二條方程代入第一條：

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

現在

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

此式為正數（當 $0 < p < 1$ 時，它至少為 $p^{r-1} > 0$，因為 $q^{s-1}(1 - p^{r-1}) \geq 0$）。所以我們可以除以它。記 $D = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}$，則

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s-1}\right)}{D}.$$

最後，以 $\mathrm{P}(H) = p$ 及 $\mathrm{P}(T) = q$ 應用全概率公式：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p + q - q^{s}\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s}\right)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

其中用到 $p + q = 1$。

驗算

- 對稱性：對於公平硬幣且 $r = s$，答案應為 $\frac{1}{2}$。取 $p = q = \frac{1}{2}$ 及 $r = s = n$，分子為 $2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，分母為 $2^{2-n} - 2^{2-2n} = 2 \cdot 2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，得 $\frac{1}{2}$。
- 簡單情況：$r = 1$ 時得 $\mathrm{P}(A) = 1 - q^{s}$，即首 s 次投擲並非全為反面的概率，這是正確的。
- 當 $p = \frac{1}{2}$、$r = 3$、$s = 2$ 時，公式給出 $\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{P}(A \mid T) = \frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$。我們已透過精確求解整條馬可夫鏈（Markov chain）確認這個結果，而模擬 200 000 局遊戲所得的結果為 0.298。

常見錯誤

- 用了 p^{r} 而非 p^{r-1}：第一個正面已經給定，所以只需再多 $r - 1$ 個。
- 忘記 $\mathrm{P}(A)$ 最後還須以 p 和 q 加權。單是條件概率並不是答案。

STEP 之外

這個論證是對馬可夫鏈所作的*首步分析*（first-step analysis）：狀態是「當前的面和連續長度」，而重新開始這一性質就是馬可夫性質（Markov property）。同一方法可求出任何正反面圖樣的吸收概率（absorption probability）和期望等待時間（expected waiting time），並進一步引向 Penney 遊戲（Penney's game），當中某些圖樣竟然出人意表地勝過另一些圖樣。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）以合適的程度講解馬可夫鏈和首步分析。

詳細解答

STEP II 1996，第 1 題

純數學 • 二項式級數的係數

> **STEP II 1996，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q1

關鍵思路

三個括號相乘後，某一項的係數（coefficient）等於一個總和：從每個括號各選一項，使各項的冪次加起來等於目標冪次，再把所有這樣的選法加起來。在 (i) 中，這意味著要小心整理一個有限的計數。在 (ii) 中，係數 $1, -2, 3, -4, \ldots$ 可以認出是 $(1+x)^{-2}$ 的係數，而括號內多出來的項，正好足以令截斷在 x^6 處不產生任何影響。

解答

第 (i) 部分

把括號寫成 $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$，其中

$$a_k = (-1)^k (k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

從三個因式中分別選出 $a_p x^p$、$a_q x^q$、$a_r x^r$，當且僅當 $p+q+r = 6$ 時才會對 x^6 有貢獻，所以我們要求的係數是

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0 \le p,q,r \le 4}} a_p a_q a_r.$$

每一項的符號都是 $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$，因此可以不理會符號，只需把乘積 $(p+1)(q+1)(r+1)$ 加起來。

> **想一想** 怎樣才能確保沒有遺漏任何一種指數的選法，也沒有重複計算？

先列出所有總和為 6、且每個數都不超過 4 的無序三元組 $\{p, q, r\}$，然後乘以從三個（可區分的）括號中取出這些指數的次序數目：若三個數各不相同，有 6 種次序；若恰好有

兩個相等，有 3 種；若三個都相等，則只有 1 種。

指數	乘積 $(p+1)(q+1)(r+1)$	次序數目	貢獻
$4,2,0$	$5\cdot 3\cdot 1=15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot 2\cdot 2=20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot 4\cdot 1=16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot 3\cdot 2=24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot 3\cdot 3=27$	1	27

以上已包括所有可能：最大的數只能是 4、3 或 2（不可能更小，因為 $3\times 1<6$；也不可能超過 4），而對於每個最大的數，我們已列出把餘下部分拆成兩個較小部分的所有方法。相加得

$$90+60+48+144+27=369,$$

所以 x^6 的係數是 $\boxed{369}$。

第 (ii) 部分

現在括號是 $Q(x)=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$。二項展開式（binomial expansion）在 $|x|<1$ 時成立，給出

$$(1+x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

這是因為 $\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!}=(-1)^k(k+1)$。所以 $Q(x)$ 就是 $(1+x)^{-2}$ 的展開式在 x^6 項之後截斷的結果：

$$(1+x)^{-2}=Q(x)+x^7R(x)$$

其中 $R(x)$ 是某個冪級數（power series）。

? **想一想** 為甚麼缺少了的尾段 $x^7R(x)$ 不會影響立方中 x^6 的係數？

取立方，得

$$(1+x)^{-6}=Q(x)^3+3Q(x)^2\,x^7R(x)+3Q(x)\,x^{14}R(x)^2+x^{21}R(x)^3.$$

第一項之後的每一項都是 x^7 乘以一個冪級數，所以不含任何低於 x^7 的 x 的冪。因此 $Q(x)^3$ 中 x^6 的係數等於 $(1+x)^{-6}$ 中 x^6 的係數。（換個說法：指數加起來等於 6 的乘積，絕不可能用到任何一個因式中次數為 7 或以上的項。）

再用一次二項展開式，

$$\binom{-6}{6}=\frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720}=\binom{11}{5}=462.$$

所以 $Q(x)^3$ 中 x^6 的係數是 $\boxed{462}$。

驗算

第 (ii) 部分可以獨立地驗證第 (i) 部分。兩個括號的分別只在於 $-6x^5$ 和 $7x^6$ 這兩項，所以 $462 - 369$ 應該等於所有用到其中一項的貢獻的總和。用到 $7x^6$ 的項，必須從另外兩個括號各取 1：有 3 個位置，每個給出 7，合共 21。用到 $-6x^5$ 的項，必須從另外兩個括號取 $-2x$ 和 1：有 $3 \times 2 = 6$ 種排法，每種給出 $(-6)(-2)(1) = 12$，合共 72。果然 $21 + 72 = 93 = 462 - 369$。用電腦把立方直接乘開，亦得出 369 和 462。

常見錯誤

- 忘記計算次序：指數 $4, 2, 0$ 可以用 6 種方式從三個括號中取得，而不是 1 種。
- 在第 (i) 部分把含有 5 或 6 的三元組也計算在內，但該括號只到 x^4 為止。
- 逐項擔心符號：由於指數的和總是 6，每一個貢獻都是正數。

STEP 之外

(ii) 中的論證是形式冪級數（formal power series）理論的起點：級數可以逐個係數相乘，完全不必考慮收斂（convergence）問題，而乘積中 x^n 的係數只取決於每個因式中直至 x^n 為止的各項。以這種方式透過生成函數（generating function）來處理數列，是一種強大的計數工具；例如，$(1 - x)^{-m}$ 中 x^n 的係數，就是把 n 寫成 m 個非負整數的有序和的方法數目。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 進階題解）收錄了更多這類展開式的 STEP 式練習。

詳細解答

STEP II 1996，第 2 題

純數學 • 非線性聯立方程

> **STEP II 1996，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q2

關鍵思路

這組方程對 x、y、z 而言並非線性，但每一項都只是三個乘積 yz、zx、xy 其中之一。把這三個乘積當作未知數，方程組便化為三條線性（linear）方程，可以用消元法（elimination）求解。把三個乘積相乘便得 $(xyz)^2$，再把 xyz 逐一除以各個乘積，就能還原出每個變數。

解答

偽裝起來的線性方程組

設

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

於是三條方程變成

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

由 (2) 得 $a = 1 + b - 2c$。代入 (1)：

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

代入 (3)：

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

連同 $b = 3c$ 可得 $c = 2$，所以 $b = 6$，$a = 1 + 6 - 4 = 3$。係數矩陣（coefficient matrix）的行列式（determinant）為 $-3 \neq 0$，因此這是該線性方程組的唯一解：

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

證明 $xyz = \pm 6$

把三個乘積相乘，

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

所以 $xyz = 6$ 或 $xyz = -6$，正如題目所求。

? **想一想** 現在我們已知 xyz，以及 yz、zx、xy 各自的值。怎樣才能單獨求出 x？

三個乘積全都不是零，所以 x、y、z 全都不是零，我們可以放心相除：

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

可能的取值

若 $xyz = 6$，則 $x = 6/3 = 2$，$y = 6/6 = 1$，$z = 6/2 = 3$。

若 $xyz = -6$，則 $x = -2$，$y = -1$，$z = -3$。

以上每一步都是必然的結果，所以只有這兩組候選解；兩者都滿足原來的方程（方程只涉及兩個變數的乘積，所以把三個變數同時變號，方程保持不變）。因此

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{或} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

驗算

代入 $(2, 1, 3)$：$yz = 3$，$zx = 6$，$xy = 2$，所以三條方程的左方分別是 $6 + 6 - 10 = 2$、$3 - 6 + 4 = 1$ 和 $3 - 12 + 12 = 3$。三者全部吻合。用電腦搜尋所有由分數 p/q（其中 $|p| \leq 12$，$1 \leq q \leq 4$）組成的三元組，結果恰好找到上述兩組解；精確運算亦確認該線性方程組有唯一解 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$。

常見錯誤

- 由 $(xyz)^2 = 36$ 出發，對每個變數各自開方，例如把 $x = \pm 2$、$y = \pm 1$、$z = \pm 3$ 當作互不相干地寫出來。這樣會得到八個三元組，但只有兩個成立：三個正負號是互相牽連的，因為 xyz 只有一個正負號。

► 遺漏負根，只給出 $(2, 1, 3)$。

STEP 之外

把棘手的式子重新命名，令非線性問題變成線性問題，這個技巧隨處可見：由取對數來擬合 $y = Ae^{kx}$ 這類曲線，到用代換法解微分方程（differential equation），都是同一道理。方程組一旦成為線性，矩陣和行列式便能立即告訴你解是否唯一，而這正是線性代數（linear algebra）入門課程的起點。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是本着這種精神講解消元法和行列式。

詳細解答

STEP II 1996，第 3 題

純數學 • 以數學歸納法證明斐波那契恆等式

> **STEP II 1996，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q3

關鍵思路

這裏的一切都源自遞推關係（recurrence），所以歸納法（induction）是最自然的工具。對於乘積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$，竅門是比較相鄰的兩個值：用一次遞推關係，每個值就變成前一個值的相反數。至於加法公式（addition formula），巧妙的做法是對 k 作歸納，同時讓歸納假設（induction hypothesis）對每一個 n 一併成立，這樣我們就可以用 $n+1$ 代替 n 來應用它。

解答

最初幾項的值

在 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ 中取 $n = 1, 2, 3$：

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

正如題目所求。繼續算下去，

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

乘積 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

對 $n \geq 1$，記 $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$。由數值表可得：

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$13 \cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

這些值正負交替，所以我們猜想

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{對所有} n \geq 1.$$

想一想 只用遞推關係，怎樣才能由 C_n 得到 C_{n+1}？

把 C_{n+1} 中下標較大的一項展開。對 $n \geq 1$，

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && \text{(遞推關係用於} F_{n+2}\text{)} \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && \text{(因為} F_{n+1} - F_n = F_{n-1}\text{，其中} n \geq 1\text{)} \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

這樣一來，歸納法便水到渠成。基礎步驟（base case）是 $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$。若對某個 $n \geq 1$ 有 $C_n = (-1)^n$，則 $C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$。因此由歸納法可得

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{對每一個} n \geq 1.$$

加法公式

對每個正整數 k，設 $P(k)$ 為以下命題：

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{對所有正整數} n.$$

基礎步驟 $k = 1$。右邊是 $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$，正是左邊。所以 $P(1)$ 成立。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $P(k)$ 對某個 $k \geq 1$ 成立，並設 n 為任意正整數。

想一想 歸納假設說的是 F_{n+k}，但我們需要的是 F_{n+k+1}。應該把哪一個 n 代進去？

由於 $P(k)$ 對每一個正整數都成立，而 $(n+1)+k = n+(k+1)$，我們可以用 $n+1$ 代替 n 來應用它：

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_kF_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(由} P(k)\text{，取} n+1\text{)} \\ &= F_k(F_{n+1} + F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(遞推關係用於} F_{n+2}\text{)} \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_kF_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n && \text{(遞推關係，因} k \geq 1\text{)}. \end{aligned}$$

對這個 n 而言，這正是 $P(k+1)$，而 n 是任意的。所以由歸納法，$P(k)$ 對每一個正整數 k 都成立，即

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \qquad \text{對所有正整數} n, k,$$

正如題目所求。

（另一個做法是固定 n，對 k 作兩步歸納：先驗證 $k=1$ 和 $k=2$，再把 $k-1$ 和 k 的公式相加。兩條路都可行；上面的做法只需要一個基礎步驟。）

驗算

- 卡西尼（Cassini）恆等式，取 $n=6$：$F_7F_5 - F_6^2 = 13\cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$。
- 加法公式，取 $n=3$、$k=4$：$F_7 = 13$，而 $F_4F_4 + F_3F_3 = 9+4 = 13$。
- 取 $k=n$ 可得 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$；當 $n=3$ 時，這就是 $F_6 = 2\cdot(3+1) = 8$。

電腦已驗證乘積公式對 $1 \le n < 150$ 成立，以及加法公式對所有 $1 \le n, k < 90$ 成立。

常見錯誤

- 把正負號弄反：$C_1 = -1$，所以答案是 $(-1)^n$，而不是 $(-1)^{n+1}$。
- 在加法公式中，固定 n 對 k 作歸納，卻又在 $n+1$ 處使用歸納假設：只有當歸納假設是對所有 n 陳述時，這樣做才合理。
- 使用 $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ 時，沒有指出它需要 $n \ge 1$。

STEP 之外

這兩個恆等式都是同一個矩陣（matrix）事實的投影：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$。取行列式（determinant）便立即得到乘積公式（卡西尼恆等式，Cassini's identity），而寫出 $M^{n+k} = M^k M^n$ 則得到加法公式。卡西尼恆等式還說明相鄰的兩個斐波那契數（Fibonacci numbers）互質（coprime），再配合加法公式，更可以證明一個令人驚歎的結果：$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是探索這類數論的好去處，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 則透過特徵值（eigenvalues）來處理斐波那契數。

詳細解答

STEP II 1996，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP II 1996，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

關鍵思路

看到平方根 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$，最自然的做法就是代入 $x=\cos t$，因為半角公式（half-angle formulae）可把 $1\pm\cos t$ 化為完全平方。根號消去之後，和式 $\cos\theta+\sin\theta$ 可合併成單一個餘弦，整個分母於是變成 $1+\cos(\text{某個角})$，這又是一個完全平方。最後一次代換（substitution）把積分區間重新置中，使分子變成 $\cos 4u$，這正是題目要先證明該恆等式（identity）的原因。

解答

恆等式

兩次運用 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$，並設 $c=\cos u$：

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4c^4-4c^2+1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

得證。

第一次代換

設 $x=\cos t$，則 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$。當 x 由 -1 變到 1 時，t 由 π 遞減至 0；負號正好把上下限對調回來，得

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

現在 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$，而 $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$。

想一想 $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$ 真的等於 $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，而不是 $\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ 嗎？

一般而言應取絕對值（modulus），但這裏 $0 \le t \le \pi$，所以 $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{t}{2}$ 和 $\sin\frac{t}{2}$ 皆為非負。這正是選取 $t \in [0, \pi]$（而不是例如 $[-\pi, 0]$）的關鍵所在。因此

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

設 $v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，使得 $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$，則分母為

$$2 + 2\cos 2v = 2(1+\cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

所以

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

得證。

第二次代換

設 $u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，則 $t = 4u + \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$。上下限 $t = 0$ 和 $t = \pi$ 分別變成 $u = -\frac{\pi}{8}$ 和 $u = \frac{\pi}{8}$。分子為

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

開首的恆等式正好在這裏派上用場。於是

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

除以 $\cos^2 u$ 並無問題，因為在這個區間上 $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$。利用 $8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$，被積函數（integrand）為 $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$，所以

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

方括號內是 u 的奇函數（odd function），所以其值等於它在 $\frac{\pi}{8}$ 處取值的兩倍：

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

其中用到 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及題目給出的 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$。這就是所求的結果。

驗算

- 數值上，$4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0.51526$。把辛普森法則（Simpson's rule）分別應用於原來關於 x 的積分、關於 t 的積分和關於 u 的積分，結果都是 0.515262。
- 大小檢查：在 $[-1,1]$ 上，和式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 介乎 $\sqrt{2}$（在 $x=\pm1$ 處）與 2（在 $x=0$ 處）之間，所以被積函數介乎 $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0.293$ 之間。因此 $0.5\le I\le 0.586$，而 0.515 與此相符。
- 在 $t=0$ 處，分母 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$ 應等於 $\sqrt{2}+0+2$；果然 $4\cos^2\frac{\pi}{8}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{2}$。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$ 中的負號，或忘記對調上下限，結果得出 $-I$。
- 寫下 $\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，卻沒有指出在 $[0,\pi]$ 上 $\cos\frac{t}{2}\ge 0$。
- 漏掉 $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$ 中的因子 4；它剛好與分母的 4 互相抵消。

STEP 之外

像 $x=\cos t$ 這類把平方根「有理化」的代換，其實是一個普遍事實的特例：若被積函數是 x 與 $\sqrt{1-x^2}$（或類似的二次根式）的有理函數（rational function），就總可以透過三角代換或 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 代換把它化為有理函數，然後以初等函數（elementary functions）表示其積分。到了大學，你會學到這套方法的系統版本，也會見到它的局限：遇上三次或四次根式時，便會得出橢圓積分（elliptic integrals），而這些積分並非初等。想做更多這種風格的題目，可參考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP II 1996，第 5 題

純數學 • 單位根

> **STEP II 1996，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

關鍵思路

這個四次方程是迴文（palindromic）的：它的係數由前往後讀和由後往前讀都一樣。除以 z^2 之後，各項可歸併為 z^2+z^{-2} 和 $z+z^{-1}$ 兩組，而兩者都可以用 $u=z+z^{-1}$ 表示，於是 z 的四次方程（quartic）便化為 u 的二次方程（quadratic）。題目的後半部分，是要認出這個四次式正是從 z^5-1 抽出因式 $z-1$ 後餘下的因式，所以它的根是五次單位根（fifth roots of unity）；把同樣四個數的兩種描述互相比較，便得到三角函數的精確值。

解答

u 的值

由於 $z=0$ 不滿足 $(*)$，我們可以除以 z^2：

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

現在 $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$，所以 $z^2+z^{-2}=u^2-2$。方程變成

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{即} \qquad u^2+u-1=0,$$

所以

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{或} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z 的值

由 $z+z^{-1}=u$ 得 $z^2-uz+1=0$，所以

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

利用 $u^2 = 1 - u$，判別式（discriminant）為 $u^2 - 4 = -3 - u$，它對 u 的兩個值都是負數（因為兩種情況下都有 $|u| < 2$），所以根都不是實數：

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{3+u}}{2}.$$

當 $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 時，$3 + u = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$；當 $u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 時，$3 + u = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$。寫成 $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$，則 $(*)$ 的四個解為

$$z = \frac{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad z = \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

u 的每個值給出 z 的兩個值（一對 z, z^{-1}，在這裏它們互為共軛複數（complex conjugates）），而四次方程恰好有四個根，所以這些就是全部的根。

與 $z^5 = 1$ 的關係

展開得

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1,$$

因為中間各項逐一對消。所以若 z 滿足 $(*)$，則第二個因式為零，從而 $z^5 - 1 = 0$。

$z^5 = 1$ 的解是 $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$，其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。$k = 0$ 給出 $z = 1$，它並不滿足 $(*)$（左邊等於 5）。其餘四個解互不相同，而且全部滿足 $(*)$，因為對它們而言 $z - 1 \neq 0$，所以因式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ 必須為零。因此 $(*)$ 的解是

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad r = 1, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}.$$

推導結果

現在我們有同樣四個數的兩種描述，必須把它們逐一配對。

> **想一想** 四個根式（surd）表達式之中，哪一個是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$？

看正負號。由於 $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ 這個數的實部和虛部都是正數。在各個根式表達式之中，實部分別是 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ 和 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$，所以恰好只有一個位於第一象限：

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

（在 $(0, \pi)$ 內的另一個角，即 $\frac{4\pi}{5}$，其餘弦為負數，所以它與另一個虛部為正的根配對。）比較實部和虛部，

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

這正是所要求的結果。順帶可得 $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 和 $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$。

驗算

- $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ \approx 0.30902$，而 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.30902$；$\sin 72^\circ \approx 0.95106$，而 $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 0.95106$。
- 四個根之和應為 -1（即 z^3 的係數的相反數）：各實部相加得 $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4} = -1$。換句話說，$u$ 的兩個值之和為 -1。
- 每個根的模（modulus）應為 1：例如 $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16} = \frac{16}{16} = 1$。

我們已用數值方法驗證：四個根式表達式全部滿足 $(*)$ 和 $z^5 = 1$，並且與 $e^{\pm 2\pi i/5}$, $e^{\pm 4\pi i/5}$ 相符。

常見錯誤

- 忘記排除 $z = 1$：它滿足 $z^5 = 1$ 但不滿足 $(*)$，所以 $(*)$ 有四個根，而不是五個。
- 毫無理據地把根式與角配對。正是實部的正負號，確定了哪一個根是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$。
- 寫成 $z^2 + z^{-2} = u^2$ 而漏掉了 -2。

STEP 之外

代換 $u = z + z^{-1}$ 可以把任何迴文多項式的次數減半。只需解二次方程便能求得 $\cos\frac{2\pi}{5}$，這絕非偶然：高斯（Gauss）證明了，$\cos\frac{2\pi}{n}$ 能夠單用平方根寫出，當且僅當正 n 邊形可以用尺規作圖（ruler and compass construction）作出，而本題正是正五邊形作圖背後的代數。完整的來龍去脈屬於伽羅瓦理論（Galois theory），會在大學二年級的代數課程中學到；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）從幾何角度展示了單位根優美的一面。

詳細解答

STEP II 1996，第 6 題

純數學 • 因數的計數

STEP II 1996，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q6

關鍵思路

N 的每一個因數（factor），都是這樣構成的：對每個質數（prime）p_i 獨立地選擇取多少個，可取 0 至 m_i 個。數清這些選擇的數目，就數清了所有因數，然後再剔除 1 和 N。此後，兩道搜尋題都變成關於指數（exponent）的問題：哪些指數組合能給出所需的個數，以及怎樣把這些指數分配到各質數上，使 N 盡可能小。

解答

開首的例子

12 的因數是 $1, 2, 3, 4, 6, 12$。剔除 1 和 12 後餘下 $2, 3, 4, 6$，即有 4 個真因數（proper factor）。16 的因數是 $1, 2, 4, 8, 16$。剔除 1 和 16 後餘下 $2, 4, 8$，即有 3 個真因數。

一般情況的計數

設 M 整除 N。那麼 M 的每個質因數都是 N 的質因數，而且它在 M 中出現的次數不能多於在 N 中出現的次數。所以

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

反過來，每個這樣的乘積都整除 N。根據質因數分解的唯一性（uniqueness of prime factorisation），不同的 $(a_1, \ldots, a_r)$ 給出不同的整數 M。因此 N 的因數與這些選擇一一對應。每個 a_i 有 $m_i + 1$ 種選擇，而且各自獨立，所以 N 一共有

$$d(N) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_r + 1)$$

個因數。由於 $r \geq 1$，我們有 $N > 1$，所以 1 和 N 是兩個不同的因數。剔除它們之後，真因數的個數是

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)-2.$$

驗證：$12 = 2^2 \cdot 3$ 給出 $3 \cdot 2 - 2 = 4$，而 $16 = 2^4$ 給出 $5 - 2 = 3$。

使 N 盡量小的原則

在兩部分中，我們都先固定指數，再問這些指數所容許的最小 N 是多少。以下兩點觀察便可解決這個問題。

- 使用最小的質數。假如用了某個質數 q，卻沒有用一個較小的質數 p，那麼把 q 換成 p 後，每個指數都保持不變，因數個數也就不變，而 N 卻變小了。所以所用的質數應該是 $2, 3, 5, \ldots$，中間不留空缺。
- 把最大的指數放在最小的質數上。設 $p < q$，其中 p 的指數是 a，q 的指數是 b，而 $a < b$。把兩個指數對調，相當於把 N 乘以 $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$，而因數個數不變。

因此，對於指數 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$，最小的 N 是 $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$。

第 (i) 部分

我們需要剛好 12 個真因數，所以 $d(N) = 14$。每個因子 $m_i + 1$ 至少是 2，而 $14 = 2 \cdot 7$，其中 7 是質數。所以把 14 寫成若干個至少為 2 的因子之積，只有兩種方法：

- 14 本身：$N = p^{13}$，最小為 $2^{13} = 8192$；
- 7×2：$N = p^6 q$，最小為 $2^6 \cdot 3 = 192$。

所以剛好有 12 個真因數的最小正整數是

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

它的因數是 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$，共有 14 個。

第 (ii) 部分

現在我們需要 $d(N) \geq 14$。由於 $d(N)$ 不再是固定的，我們按相異質數的個數 r 來分類。把指數由大至小排列，$e_1 \geq e_2 \geq \cdots$。

> **想一想** 為甚麼不能直接沿用第 (i) 部分，只考慮 $d(N) = 14$ 的情況？

因為因數較多，並不代表 N 一定較大。把指數分散到幾個小質數上，只需很小的代價就能得到很多因數。例如，$2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 有 $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ 個因數，卻比 192 小得多。所以我們必須考慮每一個 $d(N) \geq 14$ 的值。

- $r \geq 4$：這時 $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$。
- $r = 3$：這時 $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$。若 $e_2 = e_3 = 1$，則需要 $4(e_1+1) \geq 14$，所以 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$。否則 $e_2 \geq 2$，於是 $e_1 \geq 2$，而 $N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$。
- $r = 2$：這時 $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$，其中 $e_1 \geq e_2$。若 $e_2 = 1$，則 $e_1 \geq 6$，而 $N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$。若 $e_2 = 2$，則由 $3(e_1+1) \geq 14$ 得 $e_1 \geq 4$，所以 $N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$。若 $e_2 \geq 3$，則 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$。
- $r = 1$：$e_1 + 1 \geq 14$，所以 $N \geq 2^{13} = 8192$。

每種情況都給出 $N \geq 120$，而 $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 確實符合要求：它有 $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$ 個真因數。所以最少有 12 個真因數的最小正整數是

$$\boxed{120},$$

而它其實有 14 個真因數。

驗算

以窮舉法逐一數出由 2 至 9000 每個 N 的真因數個數，結果與公式 $d(N) - 2$ 吻合。窮舉亦證實 192 是第一個剛好有 12 個真因數的 N，而 120 是第一個最少有 12 個真因數的數（它有 14 個）。若想用手快速核對，可留意略小於 120 而因數眾多的數，即 $60, 72, 84, 90, 96$ 和 108，全都有 12 個因數，因此只有 10 個真因數。

常見錯誤

- 設 $d(N) = 12$ 而不是 14。要記得 1 和 N 並不計算在內。
- 第 (ii) 部分也答 192。最少有 12 個真因數的最小 N，不一定剛好有 12 個。
- 把大指數放在大質數上：$2 \cdot 3^6$ 的因數個數與 $2^6 \cdot 3$ 相同，但數值大得多。

STEP 之外

因數函數（divisor function）$d(N)$ 具有積性（multiplicative）：只要 a 與 b 互質（coprime），就有 $d(ab) = d(a)d(b)$。這正是上述乘積公式所表達的。因數個數比所有較小的數都多的數，稱為高度合成數（highly composite number），拉馬努金（Ramanujan）曾對它們作過深入研究。120 就是其中之一，而本題所用的指數排序論證，正是他的分析的起點。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介紹因數函數和唯一分解的精彩入門書。

詳細解答

STEP II 1996，第 7 題

純數學 • 坐標幾何中的軌跡

STEP II 1996，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q7

關鍵思路

為正方形設定坐標，使它對兩條坐標軸都對稱。這樣每個距離都是一個線性式的絕對值（modulus），而兩個乘積 pr 和 qs 就變成 $|y^2 - a^2|$ 和 $|x^2 - a^2|$。形如 $|U| = |V|$ 的方程可分拆為 $U = V$ 或 $U = -V$。其中一種情況給出兩條直線，另一種情況給出圓。

解答

設正方形的邊長為 $2a$（其中 $a > 0$），中心位於原點，各邊與坐標軸平行：

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

於是 AB 位於直線 $y = -a$ 上，BC 位於 $x = a$ 上，CD 位於 $y = a$ 上，DA 位於 $x = -a$ 上。由 $P = (x, y)$ 到水平線 $y = c$ 的垂直距離（perpendicular distance）是 $|y - c|$，到鉛垂線 $x = c$ 的垂直距離則是 $|x - c|$。所以

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

這些公式對平面上每一點 P 都成立，不論它在正方形之內還是之外。正是絕對值確保了距離非負，所以我們絕不能把它們略去。

兩兩相乘，並利用 $|u|\,|v| = |uv|$，得

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

想一想 怎樣才能去掉 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ 中的絕對值，而又不必分成許多區域來討論？

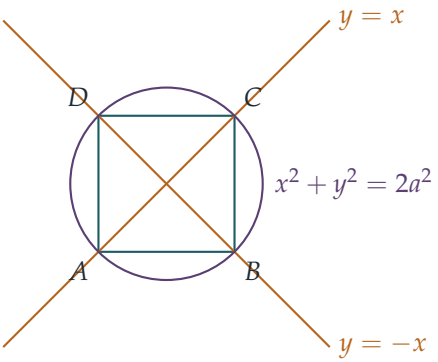
對實數而言，$|U| = |V|$ 成立當且僅當（if and only if）$U = V$ 或 $U = -V$，因為兩邊都非負，而且 $|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$。由於我們每一步用的都是「當且僅當」的推論，所以必要條件（necessary condition）和充分條件（sufficient condition）會同時得到。因此 $pr = qs$ 成立當且僅當

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad 或 \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

第一種情況。$y^2 = x^2$，即 $(y - x)(y + x) = 0$，所以 $y = x$ 或 $y = -x$。這就是通過正方形中心、分別包含對角線 AC 和 BD 的兩條（無限延伸的）直線。

第二種情況。$x^2 + y^2 = 2a^2$。這是以正方形的中心為圓心、半徑為 $\sqrt{2}\,a$ 的圓，而這個半徑正是對角線的一半。所以它是正方形的外接圓（circumcircle），通過 A、B、C 和 D。

因此，$pr = qs$ 迫使 P 必須位於兩條對角線所在的直線 AC、BD（無限延長）其中之一上，或位於 $ABCD$ 的外接圓上。反過來說，以上每一步都是可逆的。若 P 在其中一條直線上，則 $x^2 = y^2$，所以 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。若 P 在圓上，則 $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$，同樣得到 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。無論哪種情況都有 $pr = qs$，所以兩條直線和圓上的每一點都是 P 的可能位置。證明至此完成。



想一想 正方形以外的點真的可以嗎？那兩條直線會在頂點處終止嗎？

題目容許平面上的任何一點，而我們的距離公式在整個平面上都成立。所以軌跡（locus）是每條直線的全部，而不僅是作為線段的對角線。例如，$P = (3a, 3a)$ 有 $p = 4a$、$r = 2a$、$q = 2a$、$s = 4a$，所以 $pr = qs = 8a^2$。

驗算

- 中心 $(0,0)$ 同時在兩條直線上：$p = q = r = s = a$，所以 $pr = qs$。
- 取圓上位於 AB 中點正下方的一點，即 $(0, -\sqrt{2}\,a)$。這時 $p = (\sqrt{2} - 1)a$，$r = (\sqrt{2} + 1)a$，所以 $pr = a^2$；又 $q = s = a$，所以 $qs = a^2$。

- 不在軌跡上的點，例如 $(\frac{1}{2}a, 0)$，給出 $pr = a^2$ 但 $qs = \frac{3}{4}a^2$，所以它不符合條件。
- 數值上（取 $a = 1.7$），在三條曲線上隨機抽取的 30 000 個點處，$pr = qs$ 都成立，誤差在 10^{-9} 以內。在 $[-5, 5]^2$ 上以 600×600 的網格掃描 $pr - qs$ 的正負號變化，除了兩條直線和圓之外，沒有發現其他零點。

常見錯誤

- 略去絕對值，寫成 $pr = a^2 - y^2$、$qs = a^2 - x^2$。這只在正方形內部才成立，而且會遺漏了圓，只得出 $y = \pm x$。
- 只證明 P 必須位於這些曲線上。題目還要求證明逆命題（converse），所以要說明為何直線和圓上的每一點都符合條件。
- 把那兩條直線說成是對角線段 AC 和 BD。它們是完整的直線。

STEP 之外

這個軌跡是多項式 $(y^2 - a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2$ 的零點集（zero set），而這個多項式可因式分解為 $(y - x)(y + x)(x^2 + y^2 - 2a^2)$。由多項式方程給出、並且像這樣分拆成較簡單部分的曲線，正是可約（reducible）代數曲線（algebraic curve）的第一個例子。按照圖形的對稱性來選取坐標，正是讓這類因式分解顯現出來的好習慣。想看更多這種風格的幾何題，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於曲線的代數理論，可參閱 Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry*。

詳細解答

STEP II 1996，第 8 題

純數學 • 二階微分方程

STEP II 1996，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q8

關鍵思路

這條方程把 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{f}(-x)$ 混在一起，所以它根本不是 f 的常微分方程（ordinary differential equation）。竅門是把方程寫兩次，一次在 x，一次在 $-x$，然後相加和相減。和 g 與差 h 各自滿足一條貨真價實的常係數方程（constant-coefficient equation），可以用餘函數（complementary function）和特別積分（particular integral）求解，而 f 則可由 $\frac{1}{2}(\mathrm{g}+\mathrm{h})$ 還原出來。

解答

$\mathrm{g}(0)$ 和 $\mathrm{g}'(0)$ 的值

在 $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)$ 中代入 $x=0$，得 $\mathrm{g}(0)=2\mathrm{f}(0)=2$。

求導時，鏈式法則（chain rule）令第二項多出一個負號：

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}'(-x),$$

所以 $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{f}'(0)-\mathrm{f}'(0)=0$，正如所求。（留意我們並不需要 $\mathrm{f}'(0)$ 的值：g 是偶函數（even function），所以它的導數是奇函數（odd function），在 0 處必為零。）

g 所滿足的方程

再求導一次，鏈式法則帶來的兩個負號互相抵消：

$$\mathrm{g}''(x)=\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}''(-x).$$

想一想 $f''(-x)$ 是甚麼？題目給出的方程只告訴我們 $f''(x)$ 的情況。

題目給出的方程對所有 x 都成立，所以我們可以把式中的 x 全部換成 $-x$。由於 cos 是偶函數，這樣便得到

$$f''(-x) + f(x) = -x + 3\cos 2x.$$

把這條式與原方程相加，

$$f''(x) + f''(-x) + f(-x) + f(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{即} \qquad g''(x) + g(x) = 6\cos 2x,$$

正如所求。

求解 g

輔助方程(auxiliary equation)$m^2 + 1 = 0$ 的根是 $\pm i$，所以餘函數是 $A\cos x + B\sin x$。至於特別積分，我們試用 $g = k\cos 2x$：這時 $g'' + g = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$，所以 $k = -2$。因此

$$g(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

現在由 $g(0) = A - 2 = 2$ 得 $A = 4$，而 $g'(0) = B = 0$。所以

$$g(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

求解 h

對於 $h(x) = f(x) - f(-x)$，我們有

$$h(0) = 0, \qquad h'(x) = f'(x) + f'(-x), \quad \text{所以} \quad h'(0) = 2f'(0) = -2,$$

以及 $h''(x) = f''(x) - f''(-x)$。這次我們從在 x 的方程減去在 $-x$ 的方程：

$$f''(x) - f''(-x) + f(-x) - f(x) = 2x, \qquad \text{即} \qquad h''(x) - h(x) = 2x.$$

想一想 為甚麼 h 前面的符號由 + 變成了 −？

相減之後，f 的各項以 $f(-x) - f(x)$ 的形式出現，這是 $-h(x)$，而不是 $+h(x)$。所以這次的解是指數函數而不是三角函數：輔助方程 $m^2 - 1 = 0$ 給出餘函數 $Ce^x + De^{-x}$。試用 $h = px + q$ 作為特別積分，得 $-(px + q) = 2x$，所以 $p = -2$，$q = 0$。因此

$$h(x) = Ce^x + De^{-x} - 2x.$$

由初始條件得 $h(0) = C + D = 0$ 和 $h'(0) = C - D - 2 = -2$，所以 $C = D = 0$，而

$$h(x) = -2x.$$

還原 f

把 g 和 h 的定義相加，得 $\mathrm{g}+\mathrm{h}=2\mathrm{f}$，所以

$$\mathrm{f}(x)=\tfrac{1}{2}\big(\mathrm{g}(x)+\mathrm{h}(x)\big)=\tfrac{1}{2}\big(4\cos x-2\cos 2x-2x\big)=2\cos x-\cos 2x-x,$$

這就是所求的結果。

驗算

- $\mathrm{f}(0)=2-1-0=1$，而 $\mathrm{f}'(x)=-2\sin x+2\sin 2x-1$，所以 $\mathrm{f}'(0)=-1$。
- 代回原方程：$\mathrm{f}''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$ 和 $\mathrm{f}(-x)=2\cos x-\cos 2x+x$，兩者相加得 $x+3\cos 2x$。
- 奇偶性（parity）正確：g 是偶函數，h 是奇函數，理應如此。
- 把 $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{f}(-x)$ 這一對函數由 $x=0$ 逐步數值計算至 $x=3$，得 $\mathrm{f}(3)\approx -5.940155$，與 $2\cos 3-\cos 6-3$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記鏈式法則帶來的符號：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}'(-x)$，但 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x)=+\mathrm{f}''(-x)$。
- 只在方程的其中一邊把 x 換成 $-x$：右邊的 x 同樣要變成 $-x$。
- 得出 $\mathrm{h}''+\mathrm{h}=2x$，結果 h 中出現了三角函數項。

STEP 之外

這是一條泛函微分方程（functional differential equation），當中未知函數在多於一點取值。拆成偶部和奇部之所以行得通，是因為反射 $x\mapsto -x$ 是一個線性映射（linear map），而且它的平方是恆等映射（identity），所以它的特徵值（eigenvalue）是 ± 1，每個函數都可以唯一地分解為偶部（特徵值 1）和奇部（特徵值 -1）。在每一部分上，方程都變成一條常微分方程。這種按對稱性分解的想法貫穿整個線性代數（linear algebra）和傅立葉分析（Fourier analysis）。關於常係數方程本身，可參閱 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）；關於線性代數的觀點，可參閱 Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）。

詳細解答

STEP II 1996，第 9 題

力學 • 穩定性與質心

> **STEP II 1996，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

關鍵思路

一切取決於玩具的質心（centre of mass）G 在其對稱軸（axis of symmetry）上的位置。以半球體（hemisphere）着地時，桌面與玩具的接觸點總是在半球體平面圓心 O 的正下方，所以 G 在 O 之下還是之上，就決定了玩具是「自行回正」還是「翻倒」。以圓錐（cone）着地時，玩具沿着一整條母線（generator）靠在桌面上，只要通過 G 的鉛垂線與這條接觸線相交，玩具便會留在原處。

解答

把玩具看成密度為 ρ 的均勻剛體（rigid body），並關於其軸對稱。設 O 為公共圓面的圓心，沿軸由 O 起量度距離，以指向圓錐頂點（vertex）V 的方向為正。

質心

圓錐的體積為 $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$，其質心位於 $+\frac{1}{4}\lambda a$。半球體的體積為 $\frac{2}{3}\pi a^3$，其質心位於 $-\frac{3}{8}a$。所以 G 位於

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

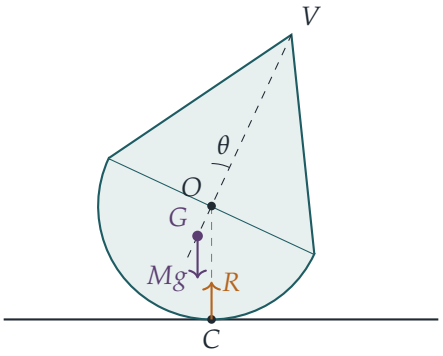
因此，G 在 O 之下，若 $\lambda < \sqrt{3}$；恰在 O，若 $\lambda = \sqrt{3}$；在 O 之上，若 $\lambda > \sqrt{3}$。

以半球體着地

設軸與向上的鉛垂線成角 θ，其中 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$，使半球體的曲面落在桌面上。

? 想一想 半球體究竟在哪一點接觸桌面？

桌面與半球體所屬的球面相切，而切平面（tangent plane）垂直於通過切點的半徑。所以接觸點 C 總是在 O 的正下方，而且 O 的高度總是 a，不論 θ 是多少。



（圖中所示為 G 在 O 之下的情況，即 $\lambda < \sqrt{3}$。）

對 C 取力矩（moment）。法向反作用力（normal reaction）和任何摩擦力（friction）都作用於 C，所以只有作用於 G 的重量 Mg 產生力矩。G 相對於 C（亦即相對於通過 O 的鉛垂線）的水平位移為 $h\sin\theta$，以頂點傾側的一方為正。

- 若 $\lambda < \sqrt{3}$，則 $h < 0$。對於 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 內的每一個 θ，G 都位於通過 C 的鉛垂線的另一側，與頂點相反。所以重量會把玩具轉回 $\theta = 0$ 的方向。換一個說法，G 的高度為 $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$，在 $\theta = 0$ 時最小，所以直立位置就是勢能（potential energy）最小的位置。無論用哪一種看法，不管以半球體的哪一處着地，玩具都會回到直立位置（它會在該位置附近來回搖擺，直至摩擦力和空氣阻力令它停定）。
- 若 $\lambda > \sqrt{3}$，則 $h > 0$。對於任何傾角 $\theta > 0$，G 都位於頂點的同一側，重量會把玩具轉得更加偏離直立位置。此時 G 的高度 $a + h\cos\theta$ 在 $\theta = 0$ 時最大，所以直立是不穩定平衡（unstable equilibrium）。最輕微的傾側也會不斷擴大，直至邊緣碰到桌面，玩具倒在它的圓錐面上：它翻倒了。

（當 $\lambda = \sqrt{3}$ 時，$G = O$，玩具在任何傾角下都處於隨遇平衡（neutral equilibrium）。）這就是所要求的結果。

以圓錐着地

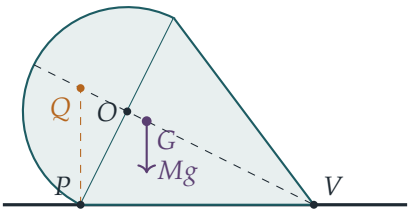
現在玩具以圓錐的一條母線 VP 貼着桌面躺下，其中 P 在邊緣上。我們在通過軸和 VP 的平面內考慮。在此平面內取坐標軸，以 O 為原點，$V = (0, \lambda a)$ 及 $P = (a, 0)$，於是半球體位於 $y < 0$ 的一側。圓錐沿 VP 的切平面垂直於這個平面，它在這個平面上的跡線

是直線

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}=1.$$

想一想 半球體會不會反而穿過桌面，以致圓錐無法以一條母線平貼桌面？

不會。玩具上每一點投影到這個平面上，都落在圓錐的三角形截面內，或落在半圓盤 $x^2+y^2\le a^2$，$y\le 0$ 內。在三角形上，$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le 1$。在半圓盤上，$x\le a$ 且 $y\le 0$，所以 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le \frac{x}{a}\le 1$，等號僅在 P 成立。所以整個玩具都在該平面的同一側，只沿線段 VP 與平面接觸，別無其他接觸點。



（圖中所示為 $\lambda=2$ 的情況。虛線是 VP 在 P 處的垂線。）

所有反作用力都作用在 VP 上，並且垂直於桌面。所以玩具在桌面上處於平衡（equilibrium），而且不會繞 P 或 V 翻轉，當且僅當通過 G 的鉛垂線與線段 VP 相交，即由 G 到 VP 的垂足（foot of the perpendicular）位於 V 與 P 之間。

VP 在 V 處的垂線只在 V 與軸相交。設 VP 在 P 處的垂線與軸相交於 Q。在三角形 VPQ 中，P 處的角是直角，而 PO 是斜邊（hypotenuse）VQ 上的高，所以 $OP^2=OV\cdot OQ$，由此得

$$OQ=\frac{a^2}{\lambda a}=\frac{a}{\lambda}.$$

所以 Q 在 O 之下，距離為 a/λ。軸上的一點投影到線段 VP 上，當且僅當該點位於 Q 與 V 之間。所以我們需要

$$-\frac{a}{\lambda}<h<\lambda a.$$

右邊的不等式成立，因為 G 在玩具內部，位於 V 之下。至於左邊的不等式，兩邊乘以 $4\lambda(\lambda+2)/a>0$，

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}>-\frac{a}{\lambda}\iff \lambda^3-3\lambda+4\lambda+8>0\iff \lambda^3+\lambda+8>0,$$

這對每一個 $\lambda>0$ 都成立。所以通過 G 的鉛垂線總與接觸線相交，玩具留在原處不動。由旋轉對稱性可知，哪一條母線與桌面接觸也沒有分別。所以不論 λ 取何值，玩具都會停留在它的圓錐面上，這正是所要證明的。

驗算

- 當 $\lambda = \sqrt{3}$ 時，公式給出 $h = 0$：圓錐的矩 $\frac{1}{12}\lambda^2 a$ 恰好與半球體的 $\frac{1}{4}a$ 平衡。把玩具切成薄圓片再以數值方法求和，對數個不同的 λ 所得的 h 都吻合，誤差在 $10^{-5}a$ 以內。
- 取 $\lambda = 1$：$h = -\frac{1}{6}a$ 且 $OQ = a$，而由 G 所作垂線的垂足位於由 V 到 P 全程的 0.583 處。取 $\lambda = 10$ 時，垂足位於全程的 0.790 處。在 $(0, 50)$ 內隨機抽取 20,000 個 λ 的值作測試，垂足每次都嚴格落在 VP 之內。
- 極限情況：當 $\lambda \to 0$ 時，玩具幾乎就是一個半球體（$h \to -\frac{3}{8}a$），而半球體會自行回正是眾所周知的。當 $\lambda \to \infty$ 時，玩具是一個長長的圓錐，G 隨着圓錐本身的質心沿軸上移。

常見錯誤

- 對直立玩具的最低點取力矩，而不是對實際的接觸點取力矩；接觸點會隨玩具滾動而移動，但總是在 O 的正下方。
- 在最後一部分，以為半球體也接觸桌面。其實並沒有，因為半圓盤位於 $y \leq 0$ 的一側。

STEP 之外

這個搖擺玩具讓我們初次接觸平衡的穩定性（stability）。一般而言，在平面上滾動的物體，當其質心低於其表面在接觸點處的曲率中心（centre of curvature）（在這裏即是 O）時，便是穩定的。同樣的想法也支配着浮船的穩心（metacentre）。在大學一年級的課程中，這會發展成對勢能極小值以及在其附近的小振動（small oscillations）的研究。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種精神講述質心和剛體平衡。

詳細解答

STEP II 1996，第 10 題

力學 • 由旋轉輪拋出的拋體

> **STEP II 1996，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q10

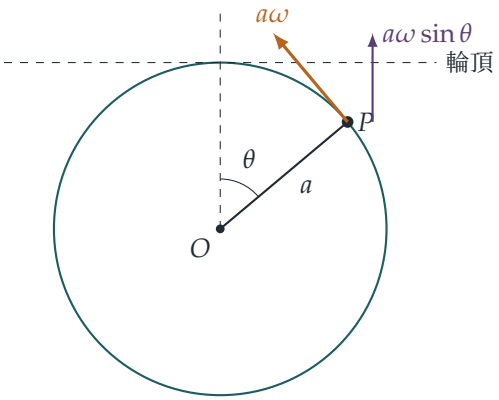
關鍵思路

在鬆手的一刻，女主角就成為一個拋體（projectile），其初始位置和初速度完全取決於她當時在輪上的位置。高度只與豎直方向的運動有關，所以她所能到達的最大高度，等於鬆手時的高度，加上速度的豎直分量為她額外換來的高度。這樣，高度便是單一個鬆手角度的函數，而問題就變成：這個函數在甚麼情況下可以超越輪頂？它的最大值又是多少？

解答

建立模型

把女主角視為隨輪緣運動的質點（particle），並忽略空氣阻力。設 O 為輪的中心，並假設她在點 P 鬆手，其中 OP 與豎直向上方向的夾角為 θ，$0 \leq \theta \leq \pi$。她在輪緣上的速率為 $a\omega$，方向沿 P 點的切線（tangent）。



P 點的切線垂直於 OP，所以它與水平方向的夾角為 θ。如果她鬆手時正朝着輪頂運動，她的速度的向上分量為 $a\omega\sin\theta$（圖中以紫紅色標示）。如果她正在遠離輪頂，她的豎直速度向下或為零，因此她永遠不會升到高於鬆手點的位置，而鬆手點不會高於輪頂；這些鬆手情況可以不予考慮。

鬆手時她在 O 之上的高度為 $a\cos\theta$。在只受重力作用的情況下，她的豎直速度由 $a\omega\sin\theta$ 減至零，根據 $v^2 = u^2 - 2gs$，她會再上升 $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$。所以她在輪頂之上所能到達的最大高度為

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

設 $c = \cos\theta \in [-1,1]$ 及 $k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$。那麼 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，而

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)\big[k(1+c) - 1\big].\end{aligned}$$

求 ω_0

當 $c = 1$（在輪頂鬆手）時，$H = 0$，正如所料。當 $c < 1$ 時，因子 $1 - c$ 為正，所以 $H > 0$ 當且僅當 $k(1+c) > 1$。

> **想一想** 在 c 的容許取值範圍內，$k(1+c)$ 最大可以有多大？

由於 $c < 1$，$k(1+c)$ 可取 $[0, 2k)$ 內的每一個值，但永遠達不到 $2k$。所以：

- 若 $2k > 1$，我們可以選取足夠接近 1 的 $c < 1$，使得 $k(1+c) > 1$，她便能升到輪頂之上；
- 若 $2k \le 1$，則對每一個 $c < 1$ 都有 $k(1+c) < 2k \le 1$，所以在每一個鬆手點都有 $H \le 0$，她永遠無法升到輪頂之上。

條件 $2k \le 1$ 即 $a\omega^2 \le g$。注意邊界情況 $\omega^2 = g/a$ 屬於「不可能」的一方，所以這樣的 ω 的最大值存在，並且是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

（這也是另一個情況下的臨界角速度（angular speed）：假如有一個質點靠在輪的外側並位於輪頂，它在這個角速度下便會剛好脫離接觸，因為向心加速度（centripetal acceleration）$a\omega^2$ 等於 g。）

$\omega > \omega_0$ 時的最大高度

現在 $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$。作為 c 的函數，

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

是一個開口向下的二次函數（quadratic），在其導數（derivative）$1 - 2kc$ 為零之處取得最大值，即

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

這個值嚴格介乎 0 與 1 之間，所以它是一個容許的鬆手點（在輪頂稍前的位置），並且給出整個 $[-1, 1]$ 上的最大值。代入後得

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

由於 $k = \frac{1}{2}\,\omega^2/\omega_0^2$，因而 $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\,\omega_0^2/\omega^2$，

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

這正是所求的結果。她只要在 $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$ 之處、正朝着輪頂運動時鬆手，便可達到這個高度。

驗算

- 當 $\omega = \omega_0$ 時，公式給出 0，與邊界情況吻合；而當 ω 很大時，它的增長有如 $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$，這正是一個質點從 O 的水平位置以速率 $a\omega$ 豎直上拋所能到達的高度。事實上，當 ω 很大時，最佳的鬆手位置接近 $\theta = \frac{\pi}{2}$，該處的速度是豎直的。
- 單位：ω/ω_0 是無量綱（dimensionless）的，所以 $H_{\max}$ 是一個長度。
- 數值上，取 $a = 2\,\text{m}$ 及 $\omega = 2\omega_0$，公式給出 $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\text{m}$。由鬆手點 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 開始逐步計算拋體的運動，會得到相同的數值；而搜尋所有鬆手角度後，亦確認沒有其他鬆手位置能做得更好。

常見錯誤

- 從輪的中心而非輪頂量度高度：H 中的 $-a$ 是不可或缺的。
- 以為最佳的鬆手位置是 $\theta = \frac{\pi}{2}$，即她的速度為豎直之處。這樣做只是令額外上升的高度最大，而不是令總高度最大。
- 忘記檢查最佳的 $c = \omega_0^2/\omega^2$ 是否確實位於 $[-1, 1]$ 之內。

STEP 之外

這裏所用的方法，即把一個量寫成單一控制變量的函數然後求最優值，是最優控制（optimal control）問題的最簡單形式。與之十分相近的是軌跡的包絡線（envelope of trajectories，即「安全拋物線」）：從輪上各個鬆手點出發所能到達的所有點的邊界，你可以用同一類判別式（discriminant）論證把它求出來。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以大學一年級的程度闡述拋體運動和轉動。

詳細解答

STEP II 1996，第 11 題

力學 • 簡諧運動

STEP II 1996，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q11

關鍵思路

以弦線的伸長量為研究對象，它其實就是質點*相對於升降機*的位置。在地面參考系（ground frame）中寫出質點的牛頓第二定律（Newton's second law），再減去升降機的已知加速度：剩下的就是繞着一個移位後的中心進行的簡諧運動（simple harmonic motion，簡稱 SHM）。只要伸長量保持為正，弦線就一直拉緊，而簡諧運動的解正好告訴你伸長量最低可以去到多少。當升降機停止加速時，只有振動的中心會移動；質點相對於升降機的位置和速度都原封不動地延續下去，由此便可求出新的振幅（amplitude）。

解答

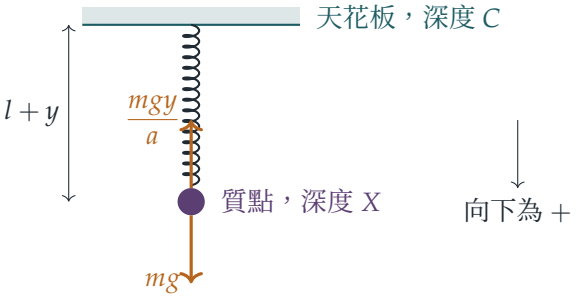
我們把質點的質量設為 m，並把弦線當作輕質彈性弦線，其彈性模量（modulus）為 λ，在拉緊時服從胡克定律（Hooke's law）。全題之中，y 表示弦線長度超出其自然長度 l 的量，所以開始時 $y = a$。只有這樣理解，才與題目給出的微分方程（differential equation）吻合。假如 y 是由原來的平衡長度 $l + a$ 量起，右邊便會是 $-f$。

運動方程

在最初的平衡狀態中，張力（tension）$\lambda a/l$ 與重量平衡，所以

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

而當伸長量為 $y > 0$ 時，張力為 mgy/a。



從固定於地面的一點起，向下量度深度：天花板位於深度 C，質點位於深度 X，所以 $X-C=l+y$。升降機以加速度 f 下降，所以 $\ddot{C}=f$。在弦線拉緊時，對質點沿鉛垂方向（以向下為正）分解力，得

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

由於 $y=X-C-l$，我們有 $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$，因此

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

這正是所要證明的。

弦線保持拉緊；振幅為 af/g

設 $\omega^2=g/a$。常數特解（particular solution）為 $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$，所以通解（general solution）為

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

在 $t=0$ 時，質點處於原來的平衡位置，並隨升降機一起運動，所以 $y(0)=a$ 及 $\dot{y}(0)=0$。由此得 $A=af/g$ 及 $B=0$：

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

這是以 $y=a-af/g$ 為中心、振幅為 af/g 的簡諧運動。質點相對於升降機的位置是 $l+y$，所以質點相對於升降機以振幅 af/g 振動。

想一想 我們用了胡克定律，而它假設弦線是拉緊的。這不是循環論證嗎？

不是。我們先假設弦線拉緊然後求解，再檢查所得的解從未離開該假設成立的範圍。y 的最小值是

$$y_{\min}=a-\frac{2af}{g}=a\left(1-\frac{2f}{g}\right)>0,$$

因為 $f<g/2$。所以 y 保持為正，弦線一直拉緊，這個解前後一致。條件 $f<g/2$ 正是在這裏派上用場。

升降機停止加速之後

當 $t > T$ 時，我們有 $\ddot{C} = 0$，同樣的論證給出

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

這是以 $y = a$（即自然的平衡伸長量）為中心的簡諧運動。設 $z = y - a$，則 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$。

> **想一想** 這段新運動的初始條件是甚麼？

升降機的加速度在 $t = T$ 時突變，但它的速度 $\dot{C}$ 不會突變，質點的位置和速度也不會。所以 $y = X - C - l$ 和 $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$ 在 $t = T$ 時是連續的。由第一階段可知，在 $t = T$ 時，

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

對於簡諧運動 $\ddot{z} = -\omega^2 z$，振幅 R 在任何時刻都滿足 $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$（這就是能量守恆（energy conservation），或者說是把恆等式 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 應用於 $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$）。因此

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\cdot 4\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

其中用了 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。所以新的振幅是

$$R = \frac{2af}{g}\left|\sin\tfrac{1}{2}\omega T\right|,$$

這正是所要證明的。

弦線始終不會鬆弛：現在的最小伸長量是

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

同樣是因為 $f < g/2$。所以 $y > 0$ 自始至終成立，運動方程一直有效。

驗算

- 若 T 是週期的整數倍，即 $\omega T = 2k\pi$，則在升降機停止加速的一刻，質點剛好回到 $y = a$，並相對於升降機靜止。公式給出的振幅為 0：質點靜止懸掛着，理應如此。
- 若 ωT 是 π 的奇數倍，質點位於最高點 $y = a - 2af/g$，並相對於升降機瞬時靜止。新的中心是 $y = a$，所以振幅為 $2af/g$，正是公式的最大值。

- 在數值上，我們對隨機選取的 a、$f < g/2$ 和 T，在地面參考系中逐步計算整個運動（包括升降機和質點，並在弦線鬆弛時把張力關掉）。例如，當 $a = 0.546$、$f/g = 0.337$ 及 $\omega T = 15.27$ 時，算出的振幅為 0.18380 和 0.35864，與 af/g 和 $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$ 吻合至六位有效數字，而伸長量從未低於 $a - 2af/g$。

常見錯誤

- 由原來的平衡長度 $l + a$ 量度 y。這樣右邊便會是 $-f$，而不是 $g - f$。
- 在第二階段重新開始時取 $\dot{y} = 0$。在 $t = T$ 時，質點一般正相對於升降機運動，而這個速度對振幅是有貢獻的。
- 弄錯 f 的正負號。升降機向下加速，會把有效重力減至 $g - f$，所以振動的中心會上升。

STEP 之外

減去升降機的加速度，等同於在加速參考系（accelerating frame）中考慮問題：在這個參考系裏，均勻加速度 f 的作用就像一個額外的重力場 $-f$。這個想法引出慣性力（fictitious forces），最終通往愛因斯坦（Einstein）的等效原理（equivalence principle）。第二階段是振子受階躍式變化的力驅動的一個簡單例子。它的響應取決於階躍發生在振動的哪個時刻，而處理這類問題的一般工具是格林函數（Green's functions），亦即杜哈梅原理（Duhamel's principle）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種觀點處理非慣性參考系（non-inertial frames）和振子。

詳細解答

STEP II 1996，第 12 題

概率與統計 • 最大值與最小值的分佈

> **STEP II 1996，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q12

關鍵思路

多個獨立（independent）變量的最大值很難直接處理，但「最大值很小」這個事件卻很簡單：它發生，當且僅當每一個變量都很小，而獨立性讓我們可以把概率相乘。所以我們先求累積分佈函數（cumulative distribution function），再求導得出密度。第 (ii) 部分正好是它的鏡像：最小值很大，當且僅當每一個變量都很大。

解答

第 (i) 部分

每個 X_j 都在 $[0,1]$ 上均勻分佈（uniform），所以當 $0 \le y \le 1$ 時，$\mathrm{P}(X_j < y) = y$。對於這個範圍內的 y，$Y < y$ 發生當且僅當對每個 j 都有 $X_j < y$，而由於各 X_j 互相獨立，

$$F(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j < y) = y^n, \qquad 0 \le y \le 1.$$

當然，當 $y < 0$ 時 $F(y) = 0$，當 $y > 1$ 時 $F(y) = 1$。求導後，Y 的概率密度函數（probability density function）為

$$f(y) = \begin{cases} n y^{n-1}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他情況。} \end{cases}$$

（作為簡單的檢查，$\int_0^1 n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = 1$。）

接着計算矩（moments）：

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+2}.$$

因此

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2},$$

因為 $(n+1)^2 - n(n+2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1$。這正是所要求的結果。

想一想 為甚麼要處理 $\mathrm{P}(Y < y)$，而不是一開始就嘗試寫出 $\mathrm{P}(Y = y)$ 或 Y 的密度？

對連續變量而言，密度並不是概率，而「最大的那個等於 y」這個事件，把「哪一個 X_j 最大」和「其餘各個的情況」混在一起。事件 $\{Y < y\}$ 是 n 個獨立事件的交集，所以它的概率只是一個簡單的乘積。先求分佈函數再求導，是處理最大值和最小值的標準方法。

第 (ii) 部分

設 T_j 為第 j 盞燈的失效時間，則 $\mathrm{P}(T_j \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}$，且

$$\mathrm{P}(T_j > t) = \mathrm{e}^{-t/\lambda}, \qquad t > 0.$$

各盞燈互相獨立，所以各 T_j 互相獨立。設 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ 為首次失效的時間。這一次方便處理的事件是 $T > t$，它發生當且僅當每盞燈在時間 t 仍然運作：

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(T_j > t) = \left(\mathrm{e}^{-t/\lambda}\right)^n = \mathrm{e}^{-nt/\lambda}.$$

所以 $\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-nt/\lambda}$，求導便得密度

$$g(t) = \frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}, \qquad t > 0.$$

換句話說，T 的分佈與單獨一盞燈的分佈屬同一類型，只是 λ 換成了 λ/n。取 $u = t$ 作分部積分（integration by parts），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty t\,\frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \Big[-\frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty = \frac{\lambda}{n},\end{aligned}$$

其中邊界項為零，因為當 $t \to \infty$ 時 $t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda} \to 0$。所以直至首次失效的期望時間是 λ/n，正如所求。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，Y 就是 $[0,1]$ 上的均勻分佈，公式給出 $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$，正是我們熟悉的均勻變量的方差（variance）。
- 當 n 增大時，方差的表現近似 $1/n^2$：許多個均勻變量的最大值會被擠向 1，一如所料。
- 在第 (ii) 部分取 $n = 1$，一盞燈的期望壽命是 λ，這正是參數為 $1/\lambda$ 的指數分佈（exponential distribution）的平均值。
- 模擬 200 000 次五個均勻變量的最大值，得出方差為 0.01993，而理論值是 $\frac{5}{7\cdot 36} \approx 0.01984$；以 $\lambda = 3$ 模擬四盞燈，得出首次失效時間的平均值為 0.749，而理論值是 $\frac{3}{4}$。

常見錯誤

- 對 $\mathrm{P}(T > t)$ 求導時忘記負號，結果得出一個負的「密度」。
- 寫成 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)$，而沒有減去 $(\mathrm{E}(Y))^2$。
- 以為 n 盞燈各自平均在時間 λ 失效，所以第一盞也在 λ 失效。其實 n 個變量的最小值遠小於其中任何一個。

STEP 之外

最大值和最小值是*順序統計量*（order statistics）的極端情況：把一個樣本由小至大排序，n 個均勻變量中第 k 小的那個服從貝塔分佈（beta distribution），而這裏的 Y 就是 $k = n$ 的情況。第 (ii) 部分顯示了一個關鍵事實：獨立指數變量的最小值仍然服從指數分佈，而且各個率參數相加。這個事實是泊松過程（Poisson processes）和連續時間馬可夫鏈（continuous-time Markov chains）理論的基礎。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論導論），都對這些概念有詳細闡述。

詳細解答

STEP II 1996，第 13 題

概率與統計 • 網格上的隨機漫步

STEP II 1996，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q13

關鍵思路

這條恆等式就是范德蒙恆等式（Vandermonde's identity）：比較等號兩邊 t^n 的係數（coefficient）即可。至於步行的問題，有用的是一個每走一步都恰好改變一的數量：你身處的位置在我的酒店以北多少個街段，加上以西多少個街段。我每走一步，它就增加 1；我的朋友每走一步，它就減少 1。因此我們只可能在某一個時刻、在某一條由路口組成的對角線上相遇，而相遇的概率（probability）正好就是恆等式中的那個和。

解答

恆等式

$(1+t)^n$ 中 t^r 的係數是 $\binom{n}{r}$。乘積 $(1+t)^n(1+t)^n$ 中含 t^n 的項，來自在第一個因式中選 t^r，並在第二個因式中選 t^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。所以左邊 t^n 的係數是

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r},$$

而右邊的是 $\binom{2n}{n}$。令兩者相等，便得到所求的恆等式。把同樣的論證用於 $(1+t)^a(1+t)^b = (1+t)^{a+b}$，可得更一般的版本

$$\sum_{r} \binom{a}{r}\binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

稍後我們會用到它。

我們可以在哪裏相遇

把我的酒店放在原點，以街段為單位，x 向東量度，y 向北量度，於是我朋友的酒店位於 $(-n, n)$。對任何位置定義

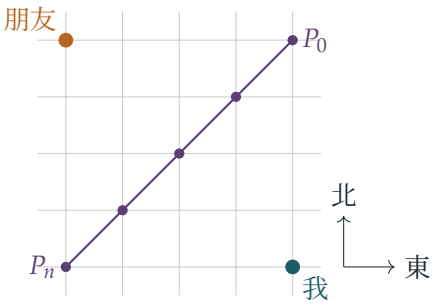
$$D = y - x,$$

即該位置在我的酒店以北的街段數加上以西的街段數。向北走或向西走會使 D 增加 1；向南走或向東走則使它減少 1。所以步行了 t 分鐘之後，我有 $D = t$，而我的朋友從 $D = 2n$ 出發，有 $D = 2n - t$。這在每一瞬間都成立，包括走到街段中途的時候，因為 D 隨着我們步行而均勻地變化。

要在同一時間身處同一地點，我們的 D 值必須相等，所以 $t = 2n - t$，得出 $t = n$。因此我們只可能在恰好 n 分鐘之後相遇，而且是在一個滿足 $y - x = n$ 的路口。我走的 n 步使我留在區域 $-n \le x \le 0$、$0 \le y \le n$ 之內，所以可能的相遇點是

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

也就是正方形對角線上的 $n + 1$ 個路口，這條對角線連接我的酒店以北 n 個街段的路口與以西 n 個街段的路口。（特別地，我們永遠不可能在街段中途擦身而過。）



上圖所示為 $n = 4$ 的情況：相遇點就是對角線上的圓點。

相遇的概率

n 分鐘後我位於 P_r，當且僅當我的 n 步之中有 r 步向西、$n - r$ 步向北。每一個由 n 步組成的序列，概率都是 2^{-n}，所以

$$\mathrm{P}(\text{我在}P_r) = \binom{n}{r}\frac{1}{2^n}.$$

我的朋友從 $(-n, n)$ 出發，走 n 步後到達 $P_r = (-r, n - r)$，當且僅當其中 $n - r$ 步向東、r 步向南，其概率為 $\binom{n}{n-r}2^{-n}$。我們兩人的步行互相獨立（independent），而對不同的 r，「我們兩人都在 P_r」這些事件是互斥（mutually exclusive）的，所以

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

這裏用了上述恆等式。

遲 $2k$ 分鐘出發

現在由我朋友出發的一刻起計算時間 T。當 $T \geq 2k$ 時，我已步行了 $T-2k$ 分鐘，所以我有 $D = T-2k$，而我的朋友有 $D = 2n-T$。兩者只在 $T = n+k$ 時相等。這時我走了 $n-k$ 步（這裏 $k \leq n$，所以這是一個非負整數），而我的朋友走了 $n+k$ 步。由於 $n+k \geq 2k$，我的朋友不可能趁我還在酒店裏熟睡時走到對角線靠我這一邊。同樣，我們只可能在路口相遇，絕不會在街段中途相遇。

走了 $n-k$ 步之後，若其中 r 步向西，我便位於 $(-r, n-k-r)$，其概率為 $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$。我的朋友位於同一點，當且僅當她的 $n+k$ 步之中有 $n-r$ 步向東、$k+r$ 步向南，其概率為 $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$。像之前一樣對 r 求和，

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}} \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

這裏用了 $(*)$，其中 $a = n-k$ 及 $b = n+k$。

想一想 為甚麼睡過頭竟然完全沒有影響？

從我朋友的角度看這次步行，量度我相對於她的位置。她的每一步（向南或向東）和我的每一步（向北或向西），都使我相對於她向北移動一個街段或向西移動一個街段，兩者的概率各為 $\frac{1}{2}$，而且互相獨立。起初我們在兩個方向上各相距 n 個街段，而我們相遇，當且僅當合共 $2n$ 步（我的加上她的）恰好由 n 次「向北」和 n 次「向西」的相對移動組成。哪一步由誰來走並不重要，所以無論這 $2n$ 步怎樣分配，是 n 和 n，還是 $n-k$ 和 $n+k$，答案都是 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$。關於 k 的條件只是確保我真的能走完自己那一份。當 n 很大時，這個概率約為 $1/\sqrt{\pi n}$，數值很小，而且無論我有沒有睡過頭偶數分鐘，它都一樣。

$n = 1$，遲一分鐘

現在我有 $D = T-1$，而我的朋友有 $D = 2-T$，兩者只在 $T = \frac{3}{2}$ 時相等，那時我們兩人都正走到街段的中點。所以我們永遠不可能在同一時間身處同一個路口；如果相遇是指在路口相遇，概率就是 0。奇偶性（parity）改變了：總步數現在是奇數。

如果把在街段中途擦身而過也算作相遇（兩個真實的人自然會這樣算），那麼當我們沿同一個街段相向而行時，便會在 $T = \frac{3}{2}$ 相遇。在 $T = 1$ 時，我仍在我的酒店 $(0,0)$，而我的朋友在 $(0,1)$ 或 $(-1,0)$。之後我們會相遇的情況是：她在 $(0,1)$ 並向南走而我向北走，或者她在 $(-1,0)$ 並向東走而我向西走。每種情況的概率都是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{P}(\text{在街段中途相遇}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

驗算

- 當 $n = 1$ 而沒有延誤時，若我向北走而她向東走，或我向西走而她向南走，我們便會相遇：概率為 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$。
- 我們用電腦對 $n \le 5$ 及所有容許的 k 列舉了每一對步行路線，每半分鐘追蹤兩人的位置一次。不論延誤多少個偶數分鐘，相遇的概率都是 $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$，而且相遇總是發生在所預測的那一個時刻。當 $n = 1$ 而延誤一分鐘時，僅有的相遇都是在 $T = \frac{3}{2}$ 於街段中途發生，總概率為 $\frac{1}{4}$。
- 當 $n = 100$ 時，$\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$，與 $1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$ 十分接近。

常見錯誤

- 以為我們可以在任何時間於正方形內任何地方相遇。數量 $y - x$ 把相遇限定在一個時刻和一條對角線上。
- 只把概率平方而沒有對各個相遇點求和，或者忘記了我朋友到達 P_r 所需的步數是對調的（她需要向東走 $n - r$ 步，而不是 r 步）。

STEP 之外

相對位置的論證是一種耦合（coupling）：兩個獨立的隨機漫步（random walk）被一個長度為兩者之和的漫步取代，這就是 $\binom{2n}{n}/4^n$ 不斷重現的原因。同一個數量也是直線上的簡單對稱隨機漫步在 $2n$ 步之後回到原點的概率，而它按 $1/\sqrt{\pi n}$ 衰減（由斯特靈公式（Stirling's formula）得出），正是波利亞（Pólya）定理的關鍵：該定理指出，一維和二維的這類漫步會以概率 1 返回起點。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）討論了隨機漫步和這些返回概率。

詳細解答

STEP II 1996，第 14 題

概率與統計 • 矩與中心極限定理

STEP II 1996，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s2-q14

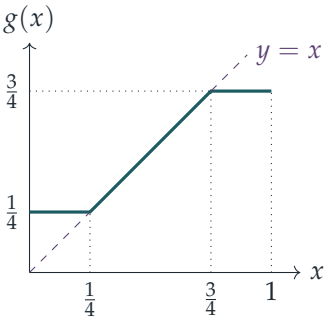
關鍵思路

Y 就是把 X 的兩端「截平」：所有低於 $\frac{1}{4}$ 的概率都堆在 $\frac{1}{4}$ 這一個值上，所有高於 $\frac{3}{4}$ 的概率都堆在 $\frac{3}{4}$ 上。所以 Y 是一個混合型隨機變量（mixed random variable），有兩個點質量（point mass）和中間一段連續部分，而任何期望值（expectation）$\mathrm{E}(g(Y))$ 也同樣分成三部分。最後一部分涉及大量獨立複本之和，這就要用上中心極限定理（central limit theorem）。為此我們只需要 Y 的平均值和方差（variance），而前面幾部分已經把這項工作做好了。

解答

Y 的矩

由於 $X \sim \mathrm{U}[0,1]$，我們有 $\mathrm{P}(X \le \frac{1}{4}) = \mathrm{P}(X \ge \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$，而在 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上 X 的概率密度（density）是 1。寫成 $Y = g(X)$，其中 g 是下圖所示的截平函數（clipping function），便得 $\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 g(x)^n \,\mathrm{d}x$。



把積分在 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 處分開，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^n) &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} + \int_{1/4}^{3/4} x^n \,\mathrm{d}x + \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}} + \frac{3^n}{4^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)(1+3^n)+3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}.\end{aligned}$$

分子是 $n+1+(n+1)3^n+3\cdot 3^n-1 = n+(n+4)3^n$，所以

$$\boxed{\mathrm{E}(Y^n) = \frac{n+(n+4)\,3^n}{(n+1)\,4^{n+1}}} \qquad (n \geq 1).$$

與 X 比較

對於均勻分佈（uniform distribution）的變量，$\mathrm{E}(X^n) = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$。

取 $n=1$，公式給出 $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1+5\cdot 3}{2\cdot 16} = \dfrac{1}{2} = \mathrm{E}(X)$，正如所求。（這並不令人意外：截平把兩端的質量向內移動了相同的幅度，而且關於 $\frac{1}{2}$ 對稱。）

取 $n=2$，$\mathrm{E}(Y^2) = \dfrac{2+6\cdot 9}{3\cdot 64} = \dfrac{56}{192} = \dfrac{7}{24}$，而 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}$。因此

$$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) = \frac{8}{24} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24},$$

正如所求。

對於一般的 $n \geq 2$，把兩個矩都寫成以 $(n+1)4^{n+1}$ 為公分母的形式：

$$\mathrm{E}(X^n) = \frac{4^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}.$$

所以我們要證明 $4^{n+1} > n+(n+4)3^n$。利用 $4^{n+1} = 4(3+1)^n$ 和二項式定理（binomial theorem），並把最高的兩項分開寫出，

$$4^{n+1} = 4\cdot 3^n + 4n\cdot 3^{n-1} + 4\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}3^k.$$

減去 $n+(n+4)3^n = 4\cdot 3^n + 3n\cdot 3^{n-1} + n$，得

$$4^{n+1} - \left(n+(n+4)3^n\right) = n\,3^{n-1} - n + 4\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}3^k.$$

? **想一想** 為甚麼這個差是正數？

當 $n \geq 2$ 時，$3^{n-1} \geq 3$，所以 $n\,3^{n-1} - n \geq 2n > 0$。那個和也是正數，因為它包含 $k = 0$ 的一項，其值為 1，而且每一項都是非負的。因此這個差嚴格為正，於是

$$\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n) \qquad \text{對所有} n \geq 2.$$

（當 $n = 1$ 時，這個差是 $3^0 - 1 + 0 = 0$，與 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ 吻合。）

240 000 個複本之和

由上一部分，

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

設 $S = Y_1 + \cdots + Y_N$，其中 $N = 240\,000$。由於各 Y_i 互相獨立（independent），期望值和方差都可以相加：

$$\mathrm{E}(S) = \frac{N}{2} = 120\,000, \qquad \mathrm{Var}(S) = \frac{N}{24} = 10\,000,$$

所以 S 的標準差（standard deviation）是 100。各 Y_i 獨立同分佈（independent and identically distributed），方差有限，而 N 非常大，所以根據中心極限定理，S 近似服從 $\mathrm{N}(120\,000,\, 100^2)$。因此

$$\mathrm{P}(S < K) \approx \Phi\!\left(\frac{K - 120\,000}{100}\right) = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{K - 120\,000}{100} = \Phi^{-1}(0.75) \approx 0.6745,$$

所以

$$K \approx 120\,000 + 67.45 \approx 120\,067.$$

這裏不需要連續性校正（continuity correction）：Y 並非只取整數值，而且標準差為 100，任何這類校正對這個準確度根本沒有影響。

驗算

- $\mathrm{E}(Y^n)$ 的公式所給的值介乎 $(\frac{1}{4})^n$ 與 $(\frac{3}{4})^n$ 之間，這是必然的，因為 $\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{4}$。當 $n = 3$ 時，公式給出 $\frac{3+7\cdot 27}{4\cdot 256} = \frac{192}{1024} = \frac{3}{16} = 0.1875$，而用中點法則（midpoint rule）計算 $g(x)^3$ 的積分，結果吻合至小數點後十位。
- $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{24} < \frac{1}{12} = \mathrm{Var}(X)$：截平把數值拉向平均值，所以離散程度理應下降。
- 模擬 20 000 個由 2400 個 Y 的複本相加而成的和，得出標準化後的上四分位數（upper quartile）約為 0.678，接近 0.6745，這支持了正態近似（normal approximation）。

常見錯誤

- 把 Y 當作在 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上均勻分佈，因而忘記了兩端各有大小為 $\frac{1}{4}$ 的點質量。在該區間上均勻分佈的變量，密度是 2，不是 1。

- 用了 $\operatorname{Var}(S) = N^2 \operatorname{Var}(Y)$ 而不是 $N \operatorname{Var}(Y)$。獨立性使方差可以相加，所以標準差按 $\sqrt{N}$ 的方式增長。
- 在最後一步弄錯正負號。$\mathrm{P}(S < K) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$，所以 K 必定高於平均值。

STEP 之外

Y 是 X 經截平（又稱「縮尾」，Winsorised）後的版本，它的分佈既不是離散的，也不是連續的。測度論概率（measure-theoretic probability）通過分佈函數（distribution function）統一處理這類分佈，每個期望值都變成單一個積分 $\int g \, \mathrm{d}F$。在平均值相等的情況下，不等式 $\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n)$ 是凸序（convex ordering）的一個例子：X 是 Y 的「保均值擴散」（mean-preserving spread），所以對每個凸函數 ϕ 都有 $\mathrm{E}(\phi(X)) \geq \mathrm{E}(\phi(Y))$。最後用到的中心極限定理，其證明見 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（一本概率論入門教科書）。

詳細解答

STEP III 1996，第 1 題

純數學 • 雙曲函數的冪

STEP III 1996，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q1

關鍵思路

把雙曲函數（hyperbolic functions）寫成指數函數，一切便隨之而來。冪 $\cosh^n x$ 變成 $2^{-n}(e^x+e^{-x})^n$，再用二項式定理（binomial theorem）展開成指數函數 $e^{(n-2r)x}$；這些項會成對出現，即 $e^{\pm jx}$，而每一對就是一個 $\cosh jx$。$\sinh^{2m} x$ 的同類展開式只差在正負號交替，所以相加或相減時，每隔一項便會消去。

解答

定義與兩條恆等式

我們定義

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

由此立即得到兩個結果。由於 $\cosh x + \sinh x = e^x$ 及 $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$，

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

把定義式平方，得 $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$ 及 $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$，所以

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

再與恆等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 相加或相減，得

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

最後這兩條式子對任何自變量都成立，所以我們可以把當中的 x 換成 $2x$。

現在把平方差（difference of squares）因式分解：

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

這正是所求。至於兩者之和，先配方（complete the square），再利用 $\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$：

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

這就是第二條恆等式。

係數 a_k

根據二項式定理，

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

把下標為 r 的項與下標為 $n-r$ 的項配成一對。由於 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$，兩者的係數（coefficient）相同，而指數則互為相反數 $\pm(n-2r)x$，所以兩項合起來就是 $2\binom{n}{r}\cosh\big((n-2r)x\big)$。

想一想 究竟哪些 $\cosh kx$ 會真正出現？中間項又會怎樣？

指數 $n-2r$ 依次為 $n, n-2, n-4, \ldots$，所以只有與 n 奇偶性（parity）相同的 k 才會出現。設 $k = n-2r$，則當 $1 \le k \le n$ 時，$\cosh kx$ 的係數為 $2\cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$，其中 $r = \frac{1}{2}(n-k)$。當 n 為偶數時，還有一個沒有配對的中間項 $r = \frac{n}{2}$，給出常數 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$。因此

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & \text{若} 1 \le k \le n \text{ 且} n-k \text{ 為偶數}, \\ 0 & \text{若} n-k \text{ 為奇數}, \end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n \text{ 為偶數}, \\ 0 & n \text{ 為奇數}. \end{cases}$$

例如，$\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$。

最後部分

取 $n = 2m$，以同樣方法展開 $\sinh^{2m} x$：

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}e^{(2m-2r)x}.$$

由於 $(-1)^{2m-r} = (-1)^r$，第 r 項與第 $2m-r$ 項仍然可以配對，所以

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh\big(2(m-r)x\big),$$

這就是 $\cosh^{2m} x$ 的展開式（以同樣形式寫出，並利用 cosh 是偶函數）加上交替的正負號。相減及相加，得

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} \big(1 \mp (-1)^r\big) \binom{2m}{r} \cosh\big(2(m-r)x\big).$$

所以兩者之差只保留 r 為奇數的項（每項都變成兩倍），兩者之和則只保留 r 為偶數的項。像之前一樣把 r 與 $2m-r$ 兩項合併，並設 $k = 2j = 2(m-r)$，便得到

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 為奇數}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 為偶數}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

其中常數項來自沒有配對的中間項 $r = m$：當 m 為奇數時，它保留在差之中；當 m 為偶數時，它保留在和之中：

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 為奇數}, \\ 0 & m \text{ 為偶數}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 為偶數}, \\ 0 & m \text{ 為奇數}. \end{cases}$$

用文字來說：當 k 為奇數時，$\cosh kx$ 的係數為 0。當 $k = 2j \ge 2$ 為偶數時，若 $m-j$ 為奇數，則它在差之中的係數為 $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$；若 $m-j$ 為偶數，則它在和之中的係數為此值；其餘情況係數均為 0。取 $m = 2$，差為 $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$，而和為 $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$，正好重現我們最初證明的兩條恆等式。

驗算

代入 $x = 0$：每個 $\cosh kx$ 都變成 1，所以各 a_k 之和必須等於 1（確實如此：二項式係數之和為 2^n），而最後兩條展開式的係數之和也必須等於 1。當 $m = 3$ 時，公式給出 $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$ 及 $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$。在 $x = 1$ 處，第一條式子的兩邊準確至四位有效數字均為 10.87，用計算機可以核實。我們已就 $n \le 12$ 及 $m \le 8$，在隨機選取的 x 值處以數值方法驗證了所有公式。

常見錯誤

- 把中間項加倍：當 n 為偶數時，$r = \frac{n}{2}$ 的一項沒有配對的伙伴，所以 a_0 是 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$，而不是它的兩倍。
- 忘記了只要 k 與 n 的奇偶性相反，就有 $a_k = 0$。
- 以為最後部分必定有常數項。其實常數項只在 m 為奇數時出現於差之中，只在 m 為偶數時出現於和之中。

STEP 之外

把 $\cosh x$（或 $\cos x$）的冪寫成 $\cosh kx$ 的組合，是初嘗傅立葉分析（Fourier analysis）的滋味：e^{ikx} 是天然的基本構件，而 $\cos^n x$ 則是一個有限傅立葉級數（Fourier series），其係數都是二項式係數。把這個過程倒過來，將 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的多項式，便得到切比雪夫多項式（Chebyshev polynomials），它們在逼近理論（approximation theory）中十分重要。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）說明了為甚麼指數形式會令這些恆等式都顯得順理成章。

詳細解答

STEP III 1996，第 2 題

純數學 • 聯立線性方程

STEP III 1996，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q2

關鍵思路

三個未知數的三條線性方程（linear equations），除非係數的行列式（determinant）等於零，否則恰好有一個解。所以第一步是找出令行列式為零的 a 值；對於其餘所有 a，我們只需直接求解。這道題真正的內容在於那些例外的值：我們必須按 b 的取值，判斷方程組究竟是不相容（inconsistent），還是有無窮多個解。

解答

把各方程編號為

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

何時有唯一解？

係數矩陣（coefficient matrix）的行列式為

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

所以當 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 時，不論 b 是甚麼，方程組都恰好有一個解。$a = 0$ 和 $a = 1$ 這兩種情況則須另行處理。

一般情況：$a \neq 0, 1$

由 (1) 減去 (2)，得

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

由於 $a \neq 1$，我們可以除以 $1-a$，得 $y = z$。把 $z = y$ 代入 (1) 和 (3)：

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \text{ 即 } x + y = b.$$

由第一式減去第二式，得 $ay = 2 - b$，而由於 $a \neq 0$，

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

代回 (1)、(2) 和 (3)，可確認這確實是一個解；而根據上面的論證，它是唯一的解。

$a = 0$ 的情況

方程組變成

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

把首兩條方程相加，得 $2x + y + z = 4$。所以第三條方程的左方必須同時等於 4 和 $2b$。

> ? **想一想** 行列式為零，是否就代表「無解」？

單憑這一點並不足以斷定：它只表示這些方程是相依的（dependent），所以要麼它們互相矛盾，要麼其中一條沒有提供新的資訊。究竟是哪一種，取決於方程的右方，在這裏即取決於 b。

- 若 $b \neq 2$，則 $4 = 2b$ 不成立，所以**無解**。
- 若 $b = 2$，第三條方程只是首兩條方程之和，所以只剩下 $x + y = 2$ 和 $x + z = 2$。設 $x = t$，則解為

$$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t \text{ 為任意實數.}$$

$a = 1$ 的情況

這時 (1) 和 (2) 是同一條方程 $x + y + z = 2$，方程組變成

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

由第二式減去第一式，得 $x = 2b - 2$，於是 $y + z = 2 - x = 4 - 2b$。這兩條方程永遠不會互相矛盾，所以對於每一個 b 值，都有無窮多個解：

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s \text{ 為任意實數.}$$

總結

- $a \neq 0, 1$：唯一解為 $x = \dfrac{(a+1)b-2}{a}$，$y = z = \dfrac{2-b}{a}$。
- $a = 0$，$b \neq 2$：無解。
- $a = 0$，$b = 2$：$(t,\ 2-t,\ 2-t)$，其中 t 為任意數。
- $a = 1$，b 為任意數：$(2b-2,\ s,\ 4-2b-s)$，其中 s 為任意數。

驗算

取 $a = 2$，$b = 4$：公式給出 $y = z = -1$ 和 $x = 5$，而確實有 $5-1-2 = 2$、$5-2-1 = 2$ 和 $10-1-1 = 8 = 2b$。再從結構上檢查：一般公式的分母含有 a，所以它在 $a = 0$ 時必定失效；事實正是如此，而我們另外所作的分析說明了原因。在 $a = 1$ 時，公式仍然有意義，給出 $(2b-2,\ 2-b,\ 2-b)$，這正是我們那族解中 $s = 2-b$ 的一員：它只是眾多解之一，因為 $y = z$ 不再是必然的。我們以精確的有理數運算，對大量隨機選取的 a、b 和參數值驗證了所有情況。

常見錯誤

- 除以 $1-a$ 或 a 時，沒有說明 $a \neq 1$ 或 $a \neq 0$。這些除法正是特殊情況藏身之處。
- 以為行列式為零就代表無解。當 $a = 1$ 時，總有無窮多個解；而當 $a = 0$ 時，若 $b = 2$ 也有解。
- 忘記明確寫出無窮多個解的通式：只說「有無窮多個解」，並不等於解出了方程。

STEP 之外

每條方程都描述三維空間中的一個平面，而這道題問的是三個平面可以怎樣相交：交於一點、交於一條公共直線，或者完全沒有公共點（當 $a = 0$，$b \neq 2$ 時，三個平面兩兩相交於三條平行直線，就像稜柱的各個面一樣）。有系統的工具是高斯消去法（Gaussian elimination）和矩陣的秩（rank）這個概念：一個方程組相容，當且僅當把右方的常數項添加到矩陣之後，秩沒有增加。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）把這幅圖景闡述得十分精彩。

詳細解答

STEP III 1996，第 3 題

純數學 • 半角代換

> **STEP III 1996，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q3

關鍵思路

被積函數（integrand）若由 $1/(\text{常數}+\text{常數}\cdot\cos x)$ 構成，正是使用半角代換（half-angle substitution）$t=\tan\frac{1}{2}x$ 的經典情形：這個代換能把任何關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數（rational function）化為 t 的有理函數。在本題中，它給出標準的 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$，結果是一個反正切（inverse tangent）。其後兩個「由此」的結果，只需把各個被積函數重新調整比例，化成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式，再選取 a 和 θ 即可。

解答

一般積分

設 $t=\tan\frac{1}{2}x$。當 x 由 0 變到 θ 時，t 由 0 變到 $T=\tan\frac{1}{2}\theta$，而由於 $0<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\pi$，這個值是有限的正數。由標準的半角公式可得

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

其中第二式是因為 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(1+t^2)$。於是

$$1-a\cos x=\frac{(1+t^2)-a(1-t^2)}{1+t^2}=\frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

所以 $1+t^2$ 這個因子互相約去，得

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}\frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad k^2=\frac{1-a}{1+a}.$$

由於 $-1<a<1$，$1-a$ 和 $1+a$ 都是正數，所以 $k=\sqrt{(1-a)/(1+a)}$ 確實是一個正實數。（這正是用到 a 的條件的地方：若 $|a|\geq 1$，分母可能等於零，積分便會成為瑕積

分（improper integral），又或者答案會是對數（logarithm）。）利用 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

最後，$(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$，所以

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

想一想 為甚麼需要 $\theta < \pi$？

代換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 在 $x = \pi$ 處失效，因為那裏 t 會變成無限大。保持 $\theta < \pi$，整個範圍 $[0,\theta]$ 便會映到有限區間 $[0,\tan\frac{1}{2}\theta]$，公式亦無需特別處理。（令 $\theta \to \pi$ 可得 $\pi/\sqrt{1-a^2}$，因為 $\tan^{-1}$ 趨向 $\frac{1}{2}\pi$。）

第一個「由此」

抽出因子 2：

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

要使積分有限，我們需要 $-2 < a < 2$，這時 $b = \frac{1}{2}a$ 滿足 $-1 < b < 1$，所以可以套用一般結果，把 a 換成 b，並取 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，此時 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

這是因為 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$，並把反正切內分數的分子和分母同時乘以二。這就是所要求的結果。

第二個「由此」

這次我們抽出 $\sqrt{2}$：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

所以我們取 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$（它在 $(-1,1)$ 之內）和 $\theta = \frac{3}{4}\pi$（它在 $(0,\pi)$ 之內）。於是 $\sqrt{1-a^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，而

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2,$$

這是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}-1$，並利用 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ 而得。所以該平方根等於 $\sqrt{2}-1$，而一般公式給出

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1/\sqrt{2}} \tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big) = 2\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big).$$

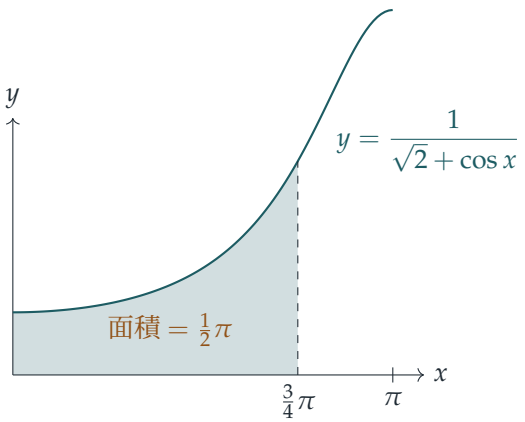
想一想 $\tan\frac{3}{8}\pi$ 等於甚麼？

設 $u = \tan\frac{1}{8}\pi > 0$，並使用二倍角公式（double-angle formula）：$1 = \tan\frac{1}{4}\pi = \dfrac{2u}{1-u^2}$，所以 $u^2 + 2u - 1 = 0$，而 $u = \sqrt{2}-1$（取正根）。由於 $\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{8}\pi$，我們得到 $\tan\frac{3}{8}\pi = \cot\frac{1}{8}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$。

因此 $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$，而

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x = 2\tan^{-1}1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

正如所求。



驗算

- 取 $a = 0$ 時，一般公式給出 $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta) = \theta$，這正是 $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$。同樣地，在第一個「由此」中取 $a = 0$，得到 $\frac{2}{2}\tan^{-1}1 = \frac{1}{4}\pi = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$。

- 把方框內的答案對 θ 求導，應該得回 $1/(1-a\cos\theta)$；這是練習鏈式法則（chain rule）的好題目。
- 對最後一個積分使用辛普森法則（Simpson's rule），得到 1.5707963…，與 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合；另外，隨機選取數百組 a 和 θ 的值，一般公式和第一個「由此」的結果與辛普森法則的相差亦都在 10^{-10} 以內。

常見錯誤

- 把被積函數調整成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式時，忘記了抽到外面的因子 $\frac{1}{2}$（或 $\frac{1}{\sqrt{2}}$）。
- 在最後一部分使用 $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$：$\sqrt{2}+\cos x$ 中的正負號表示 a 是負數。
- 弄錯了 k 的位置：答案是 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，而不是 $\tan^{-1}(t/k)$ 或 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$。

STEP 之外

代換 $t=\tan\frac{1}{2}x$（常稱為魏爾斯特拉斯代換（Weierstrass substitution））之所以有效，是因為它用有理函數把單位圓（unit circle）參數化，因而能把任何關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數化為 t 的有理函數，而後者總可以用部分分式（partial fractions）來積分。像 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ 這類積分，也是複分析（complex analysis）中圍道積分（contour integration）的標準入門例子，當中由代換 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 和留數定理（residue theorem）完成主要工作。想了解這個觀點，可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析的著作）。

詳細解答

STEP III 1996，第 4 題

純數學 • 最大乘積分拆

> **STEP III 1996，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

關鍵思路

與其逐一搜尋 N 的所有拆分（splitting）方式，不如問：一個最優（optimal）拆分不可能包含甚麼？任何太大的部分都可以拆成兩塊而不令乘積（product）減少，而開首的不等式（inequality）所量度的正是這一點。等於 1 的部分是浪費，而太多的 2 則可以換成 3。經過這些調整之後，只剩下寥寥幾種形狀，而和 N 就從中選定一種。

解答

不等式

我們有

$$k \leq 2(k-2) \iff k \leq 2k-4 \iff k \geq 4.$$

所以滿足該不等式的整數是 $k = 4, 5, 6, \ldots$。此外，只有當 $k = 4$ 時等號才成立，而對於 $k \geq 5$，不等式是嚴格的：$k < 2(k-2)$。

最優拆分的模樣

固定 $N \geq 2$。把 N 寫成正整數之和的方式只有有限多種，所以最大乘積 $P(N)$ 存在。各部分的次序不影響和與乘積，所以我們把一個拆分視為由若干部分組成的一個集合。若一個拆分的乘積等於 $P(N)$，就稱它為最優拆分。我們提出三項觀察，每一項都會改動拆分，但保持其和等於 N。

(a) **沒有任何部分是 5 或以上**。若把一個部分 $m \geq 5$ 換成 2 和 $m-2$ 這兩個部分（兩者皆為正數），乘積就會乘以 $2(m-2)/m$，而根據不等式的嚴格形式，這個數大

於 1。所以含有部分 $m \geq 5$ 的拆分並非最優。

等於 4 的部分可以換成 $2+2$ 而乘積不變，因為 $2 \times 2 = 4$（即等號成立的情況 $k = 4$）。所以在最優拆分之中，必有一個沒有任何部分大於 3。由現在起，我們只考慮這樣的一個最優拆分。

(b) **沒有任何部分是** 1。由於 $N \geq 2$，一個等於 1 的部分不會是唯一的部分，所以還有另一個部分 a。把 1 和 a 這兩個部分換成單一個部分 $a+1$，和保持不變，而因數 $1 \times a = a$ 則變成 $a+1 > a$。這樣乘積就增大了，對最優拆分而言這是不可能的。

(c) **最多只有兩個部分是** 2。假如有三個 2，把 $2+2+2$ 換成 $3+3$ 就會把因數 8 變成 9，乘積同樣會增大。

所以必有一個最優拆分由 a 個 3 和 b 個 2 組成，其中 $b \in \{0,1,2\}$，並且

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a 2^b.$$

想一想 會不會有兩組不同的 (a,b) 都配合同一個 N，以致我們仍然要比較兩者？

不會。取模（modulo）3 得 $2b \equiv N \pmod 3$，而 $b = 0,1,2$ 分別給出 $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$，是三個不同的餘數（residue）。所以 N 決定了 b，繼而 $a = (N-2b)/3$ 也隨之確定。因此

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{若} N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{若} N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{若} N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$ 時的值

把以上結果逐一應用於每個 N：

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

正如所求。（當 $N = 7$ 時，拆分 $4+3$ 同樣是最優的，這就是為甚麼觀察 (a) 只容許我們把一個 4 換掉，而不能把它排除。）

求 $P(1000)$

由於 $1000 = 3 \times 332 + 4$，我們有 $1000 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $b = 2$ 及 $a = (1000 - 4)/3 = 332$。最優拆分是 332 個 3 和兩個 2，並且

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}.$$

換言之，最優拆分是 332 個 3 加兩個 2，或者 332 個 3 加一個 4。最優拆分就只有這些，因為 (a)–(c) 中的調整顯示，任何其他拆分都可以嚴格地改進。

驗算

- 對 N 的每一個拆分作窮舉搜尋，在 $N \le 40$ 的範圍內結果與公式吻合，包括題目給出的五個值。
- 利用 $P(n) = \max_{1 \le p \le n} p\,P(n-p)$ 以電腦作精確計算，得出 $P(1000) = 4 \times 3^{332}$，這是一個 160 位數。
- 作為合理性檢查，可與非整數的「拆分」比較：若分成 N/x 個相等的部分，乘積是 $x^{N/x}$，它在 $x = \mathrm{e} \approx 2.72$ 時最大。這就是為甚麼 3（以及偶爾出現的 2）會勝出。

常見錯誤

- 寫成 $1000 = 3 \times 333 + 1$ 並答 3^{333}：這個拆分含有一個 1，而 $3 + 1$ 應換成 $2 + 2$，因為 $4 > 3$。
- 聲稱部分 4「不可能出現」。它可以在最優拆分中出現；只是它永遠不會比 $2 + 2$ 更好。
- 只列出 $N = 5, \ldots, 9$ 時的值，卻沒有證明沒有其他拆分能勝過它們。正是關於結構的論證，才證明了這些值是最大的。

STEP 之外

這裏的論證是典型的*極端*（extremal）論證或*交換*（exchange）論證：先假設最優的對象存在，然後證明它必定不含某些局部模式。同樣的想法也出現於組合數學（combinatorics）、證明貪婪演算法（greedy algorithm）為最優的論證，以及整數分拆（integer partitions）的理論之中。其連續版本（求 $x^{N/x}$ 的最大值）是一道有趣的微積分練習。想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至於同餘（congruence）與初等數論，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

詳細解答

STEP III 1996，第 5 題

純數學 • 倍角公式

STEP III 1996，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q5

關鍵思路

用二項式定理（binomial theorem）展開 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$，再與棣美弗定理（de Moivre's theorem）比較，便可把 $\cos 7\theta$ 和 $\sin 7\theta$ 寫成多項式（polynomial）；全式除以 $\cos^7\theta$ 後，一切都化為 $t = \tan\theta$ 的冪。一旦把 $\tan 7\theta$ 寫成兩個 t 的多項式之比，使 $\tan 7\theta$ 為零的角便令分子為零，而使 $\tan 7\theta$ 無定義的角則令分母為零。除了一個因子 t 之外，兩個多項式都是偶函數（even function），所以它們會變成 t^2 的三次多項式（cubic），餘下的工作就交給韋達定理（Vieta's formulae）。

解答

$\tan 7\theta$ 的公式

設 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，由棣美弗定理和二項式定理，

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

假設 $\cos\theta \neq 0$，使 $t = \tan\theta$ 有定義。抽出 c^7 得 $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$。利用 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ 以及二項式係數（binomial coefficients）$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$，

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

比較實部（real part）與虛部（imaginary part）（除 i 以外，所有量都是實數），

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

兩式相除，因子 $\cos^7\theta$ 互相約去，再把分子和分母同乘以 -1，

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

這正是所求的結果。

為了稍後使用，留意上面兩行式子說明了甚麼。記 $N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$ 及 $D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$。那麼 $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$ 及 $\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$，所以當 $\cos\theta \neq 0$ 時，

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

第 (i) 部分

取 $\theta = \frac{k\pi}{7}$，其中 $k = 1, 2, 3$。那麼 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ 而 $\cos\theta \neq 0$，所以 $N(\tan\theta) = 0$。此外，由於 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\tan\theta \neq 0$，因此可以約去因子 t：

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

所以 $x = t^2$ 滿足

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

其中 $x = \tan^2\frac{\pi}{7},\ \tan^2\frac{2\pi}{7},\ \tan^2\frac{3\pi}{7}$。

> **想一想** 我們怎樣知道這三個數就是全部的根（roots），而不是同一個根重複數了幾次？

角 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$ 全都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，而 tan 在這個區間上取正值且嚴格遞增（strictly increasing）。所以 $\tan^2$ 的三個值互不相同。三次多項式最多有三個根，因此這三個數恰好就是它的全部根，而這正是我們想要的三次多項式。

由韋達定理，各根之積為 7：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\ \tan^2\tfrac{2\pi}{7}\ \tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

每個角都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內，故每個正切值都是正數，所以我們取正平方根：

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\ \tan\tfrac{2\pi}{7}\ \tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

第 (ii) 部分

現在取 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$。那麼 $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$，所以 $\cos 7\theta = 0$，而 $\cos\theta \neq 0$。由上文的說明，$D(\tan\theta) = 0$，所以 $y = \tan^2\theta$ 滿足

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

與第 (i) 部分一樣，這三個角都位於 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內且互不相同，所以 $\tan^2\theta$ 的三個值互不相同，並且恰好就是這個三次多項式的全部根。由韋達定理，它們的和為 $\frac{35}{7}$：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{14} + \tan^2\tfrac{3\pi}{14} + \tan^2\tfrac{5\pi}{14} = 5.$$

利用第 (i) 部分，還有一個快捷的做法。由於 $\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$，同樣地 $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$ 及 $\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$，所求的和就是對第 (i) 部分那個三次多項式的各根 x_i 所取的 $\sum 1/x_i$。即

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

換句話說，在第 (i) 部分的三次方程中代入 $x = 1/y$ 並去分母，便得到第 (ii) 部分的三次方程。

驗算

- 代入 $t = 1$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$。公式給出 $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$，而事實上 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$。
- 當 θ 很小時，$\tan 7\theta \approx 7t$，而公式在一階近似下給出 $\frac{-7t}{-1} = 7t$。
- 數值上，$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$，而 $\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$。

常見錯誤

- 忘記說明三個值互不相同，因而未能確定它們真的是三次多項式的全部根。
- 在第 (i) 部分答 $\pm\sqrt{7}$：由於三個正切值都是正數，符號已經確定。
- 由 i 的冪引起的正負號錯誤：$\mathrm{i}^6 = -1$ 及 $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$。

STEP 之外

各數 $\tan^2\frac{k\pi}{7}$ 是共軛代數數（conjugate algebraic numbers）：它們是同一個整數係數不可約（irreducible）三次多項式的根，所以由它們組成的任何對稱式（symmetric expression）都是有理數。這就是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點，該理論研究多項式各根之間的對稱性。同樣的技巧還能給出諸如 $\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ 的恆等式，$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 的其中一個初等證明就用到它。想從幾何角度了解棣美弗定理和單位根（roots of unity），可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*；想找更多這類題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP III 1996，第 6 題

純數學 • 矩陣群

> **STEP III 1996，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 6.8 節由奇異矩陣組成的羣中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/singular-group.html

關鍵思路

S 中每個矩陣（matrix）都是某個固定矩陣 $\mathbf{J}$ 的倍數，而 $\mathbf{J}^2$ 又是 $\mathbf{J}$ 的倍數，所以 S 中元素的相乘，歸根究底只是實數的相乘。出人意表的是，這個羣（group）的單位元（identity）並不是單位矩陣（identity matrix）$\mathbf{I}$：這個羣根本用不着 $\mathbf{I}$。第 (ii) 部分解釋了為何必然如此：在一個羣之內，每個元素都可以寫成涉及任何另一個元素的乘積，而行列式（determinant）是可乘的。

解答

第 (i) 部分

設

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{於是} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S 的每個元素都是 $a\mathbf{J}$，其中 $a \neq 0$，我們記 $\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$。

封閉性（closure）。對於非零的 a 和 b，

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

由於 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$，我們有 $2ab \neq 0$，所以乘積屬於 S。因此 S 在矩陣乘法下封閉。

現在檢查其餘的羣公理（group axioms）。

結合律（associativity）。矩陣乘法對所有 2×2 矩陣都滿足結合律，對 S 中的矩陣自然也成立。

單位元。我們要找 $\mathbf{M}_e$，使得對每個 b 都有 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_b$，即 $2eb=b$。所以取 $e=\frac{1}{2}$：

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b}=\mathbf{M}_b,$$

同理 $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2}=\mathbf{M}_b$。所以 $\mathbf{E}=\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 是單位元，而且它屬於 S。

> **想一想** 單位矩陣 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中。由矩陣組成的羣不是需要它嗎？

不需要。一個羣需要的是某個元素，對集合中其他元素起單位元的作用，而 $\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 對 S 的每個元素都做到這一點。它並不是所有 2×2 矩陣的單位元（例如 $\frac{1}{2}\mathbf{JI}\neq\mathbf{I}$），但 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中，所以這並無影響。

逆元（inverses）。給定 $\mathbf{M}_a$，我們要找 $\mathbf{M}_c$ 使得 $2ac=\frac{1}{2}$，所以 $c=\dfrac{1}{4a}$；因為 $a\neq 0$，這個數存在而且非零。於是

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)}=\mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a=\mathbf{M}_{2a/(4a)}=\mathbf{M}_{1/2}=\mathbf{E}.$$

四條公理全部成立，所以 S 在矩陣乘法下是一個羣。（它甚至是阿貝爾羣（abelian group），因為 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_{2ab}=\mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$。）留意 S 每個元素的行列式都是 $a^2-a^2=0$。這些矩陣沒有通常意義下的逆矩陣，但每一個在羣內都有逆元。

第 (ii) 部分

假設 $\mathbf{A}\in G$ 滿足 $\det\mathbf{A}=0$，並設 $\mathbf{B}$ 為 G 的任意元素。因為 G 是羣，$\mathbf{A}$ 在 G 中有逆元 $\mathbf{A}'$，滿足 $\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{E}$。（我們寫 $\mathbf{A}'$ 而不寫 $\mathbf{A}^{-1}$：它是 G 之內的逆元，而不是逆矩陣，後者並不存在。）

設 $\mathbf{C}=\mathbf{A}'\mathbf{B}$。由封閉性，$\mathbf{C}\in G$，而且

$$\mathbf{AC}=\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B})=(\mathbf{AA}')\mathbf{B}=\mathbf{EB}=\mathbf{B},$$

這裏用到結合律，以及 $\mathbf{E}$ 是 G 的單位元這一事實。所以方程 $\mathbf{AC}=\mathbf{B}$ 在 G 中有解 $\mathbf{C}$。取行列式，並利用 $\det(\mathbf{XY})=\det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$，

$$\det\mathbf{B}=\det\mathbf{A}\,\det\mathbf{C}=0\cdot\det\mathbf{C}=0.$$

由於 $\mathbf{B}$ 是任意的，G 的每個元素都是奇異（singular）的。特別地，這樣的羣的單位元 $\mathbf{E}$ 也是奇異的，所以它不可能是 $\mathbf{I}$，正如我們在第 (i) 部分所見。

> **想一想** 我們在哪裏用到 G 是一個羣，而不僅僅是一個在乘法下封閉的集合？

我們用了逆元 $\mathbf{A}'$ 和單位元 $\mathbf{E}$，把 $\mathbf{B}$ 寫成 $\mathbf{A}$ 乘以 G 中的某個元素。沒有它們，結論便不成立。例如，$\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$ 在乘法下封閉，並且包含一個奇異矩陣，但 $\mathbf{I}$ 並不奇異。（它不是羣：$\mathbf{0}$ 沒有逆元。）

$n = 3$ 的一個例子。我們仿照第 (i) 部分的做法。設

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$ 的每個元都是 $1+1+1 = 3$，所以 $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$，並且

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- 封閉性：若 $a, b \neq 0$，則 $3ab \neq 0$，所以乘積屬於 G。
- 結合律：這是從矩陣乘法繼承而來的。
- 單位元：$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$，因為 $(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3}b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$。
- 逆元：$a\mathbf{K}$ 的逆元是 $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$，因為 $3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$。

所以 G 在矩陣乘法下是一個羣。每個 $a\mathbf{K}$ 的三行都相同，所以 $\det(a\mathbf{K}) = 0$：這是一個由奇異 3×3 矩陣組成的羣。

（另一個同樣可行的例子，是所有形如 $\operatorname{diag}(a, b, 0)$ 而 $a, b \neq 0$ 的矩陣所組成的集合，其單位元為 $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$。）

驗算

- 試一個例子：$\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$ 的每個元都是 $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$，所以它等於 $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$，與逆元公式 $\frac{1}{4a}$ 所預測的一致。
- 我們以精確分數，對數百組隨機的非零 a, b, c 作了檢查：2×2 和 3×3 兩族矩陣的封閉性、單位元和逆元公式都成立，這些矩陣的行列式全部為 0，而且 $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$。

常見錯誤

- 把 $\mathbf{I}$ 當作單位元，或把 $\mathbf{A}^{-1}$ 當作通常的逆矩陣。兩者在 S 中都不存在。應該從羣本身的乘法規則找出單位元和逆元。
- 忘記檢查 $2ab \neq 0$。封閉性要求乘積既有正確的形式，*而且*參數非零。

STEP 之外

決定一個羣的是它的運算，而不是它的元素恰好身處何方。這裏的羣位於 $n \times n$ 矩陣之中，卻不與它們共用同一個單位元。事實上 $\mathbf{E}$ 必定滿足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$，所以它是一個投影（projection），而這個羣以可逆映射的方式作用於 $\mathbf{E}$ 的像（image）上。映射 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$ 是由乘法下的非零實數到 S 的同構（isomorphism），你可以直接驗證。想進一步了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）；關於投影，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）。

詳細解答

STEP III 1996，第 7 題

純數學 • 根的對稱函數

> **STEP III 1996，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q7

關鍵思路

兩部分都建基於同一個事實：三個數的任何對稱式（symmetric expression），都可以用它們的和、兩兩乘積之和，以及它們的積來表示，而這三個量正好就是以這三個數為根（roots）的三次方程（cubic）的係數。在 (i) 中，這把一個非線性方程組化為一條三次方程。在 (ii) 中，我們根本不需要求出根：希羅公式（Heron's formula）對 a, b, c 是對稱的，所以只要有三次方程的係數就足夠了。

解答

第 (i) 部分

首先是平方和：

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{所以} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

接着我們利用因式分解（factorisation）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right),$$

你可以展開右方來驗證：$x\cdot xy$ 和 $y\cdot(-xy)$ 這類交叉項共九個，它們兩兩抵消，餘下三個形如 $-xyz$ 的項。代入後得

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha\left(\alpha^2 - 2\beta - \beta\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

所以 $A=1$, $B=-3$ 及 $C=3\gamma$。（這裏 C 是積的三倍，所以它取決於 γ；A 和 B 則是純數字。）

現在處理方程組。我們有 $\alpha = 1$，而平方和給出

$$3 = \alpha^2 - 2\beta = 1 - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = -1.$$

立方和則給出

$$4 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma = 1 + 3 + 3\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0.$$

想一想 我們已知 α, β 和 γ。怎樣由此求回 x, y, z？

x, y, z 三數的和為 α、兩兩乘積之和為 β、積為 γ，當且僅當它們是以下方程的三個根：

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0.$$

兩個方向都成立：若 x, y, z 是方程組的解，它們就是這條三次方程的根；反過來，這條三次方程的根不論以甚麼次序排列，都有正確的 α, β, γ，因而（根據上面的恆等式）滿足全部三條方程。這裏的三次方程是

$$t^3 - t^2 - t = t\,(t^2 - t - 1) = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = 0, \quad t = \tfrac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big), \quad t = \tfrac{1}{2}\big(1 - \sqrt{5}\big).$$

因此解為

$$\{x, y, z\} = \Big\{\, 0,\ \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \,\Big\},$$

次序不拘：由於三個值互不相同，合共有六個有序三元組 (x, y, z)。

第 (ii) 部分

由於 a, b, c 是該三次方程的根，

$$x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

對所有 x 都成立。比較 x^2 的係數，得 $a + b + c = 16$，所以 $s = 8$。竅門來了：把 $x = s = 8$ 代入這個恆等式。右方變成 $(s - a)(s - b)(s - c)$，正是希羅公式中的那個乘積：

$$(s - a)(s - b)(s - c) = 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 81 \cdot 8 - 128 = 512 - 1024 + 648 - 128 = 8.$$

因此

$$\text{面積} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

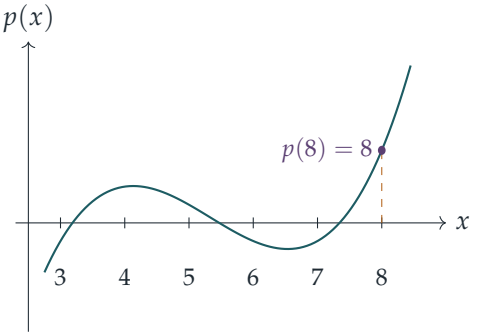
想一想 真的有一個三角形以這三個數為邊長嗎？

我們應該檢查一下，因為只有當 a, b, c 都是正數，而且每一個都小於其餘兩個之和時，希羅公式所描述的才是一個三角形。由於 $a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$，

我們需要三個根全部是實數、正數，並且小於 8。設 $p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$。那麼

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

所以根據正負號的變化，在 $(3,4)$, $(5,6)$ 和 $(7,8)$ 每個區間內各有一個根。三次方程最多有三個根，所以這些就是全部的根，而且每個根都嚴格介乎 0 與 8 之間。這個三角形確實存在，其面積為 8。



驗算

- 在 (i) 中，試取 $x = 1, y = 2, z = 3$：$\alpha = 6, \beta = 11, \gamma = 6$，而 $216 - 198 + 18 = 36 = 1 + 8 + 27$。
- 取 $x = 0$, $y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$, $z = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \approx -0.618$：和為 1，又因為 $y^2 = y + 1$ 及 $z^2 = z + 1$，平方和為 $(y + z) + 2 = 3$，立方和為 $y^2 + z^2 + (y + z) = 3 + 1 = 4$。
- 以數值計算，(ii) 中的根為 $a \approx 3.186$, $b \approx 5.471$, $c \approx 7.343$。把這些值代入希羅公式得 8.000；用餘弦定理（cosine rule）求出 C 後，$\frac{1}{2}ab\sin C$ 亦得出相同結果。

常見錯誤

- 只給出一個三元組，而沒有列出全部六種排列；或者忘記 $t = 0$ 是 $t^3 - t^2 - t = 0$ 的一個根。
- 弄錯韋達公式（Vieta's formulas）中的正負號：對於 $t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma$，正負號是交替出現的。
- 沒有檢查這些根是否真的構成三角形，就直接求面積。

STEP 之外

對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出：凡是 x, y, z 的多項式，只要在置換（permuting）這三個變數後保持不變，就必定是基本對稱函數（elementary symmetric functions）α, β, γ 的多項式。牛頓恆等式（Newton's identities）以遞歸方式給出冪和（power sums）$x^k + y^k + z^k$。這些想法通往伽羅瓦理論（Galois theory），它解釋了為甚麼三次和四次方程有求根公式，而一般的五次方程卻沒有。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是朝這個方向邁出第一步的好書。

詳細解答

STEP III 1996，第 8 題

純數學 • 莫比烏斯變換

> **STEP III 1996，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

關鍵思路

這些都是莫比烏斯變換（Möbius transformation，又稱分式線性變換，fractional linear transformation），而幾乎所有結論都來自兩點觀察。把 $y = T(x)$ 的分母消去後，所得方程對 x 是線性的，對 y 也是線性的，所以可以解出其中任何一個。另外，把 $T(x)$ 寫成一個常數加上 $1/(cx-d)$ 的倍數，便能立刻看出 T 永遠取不到哪個值。至於複合（composition），只須代入再通乘便可；把每個 T 與矩陣 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ 對應起來，結果最容易整理。

解答

不動點

當 $x \neq d/c$ 時，$T(x) = x$ 即 $ax - b = x(cx-d)$，亦即

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

首先我們驗證 $(*)$ 不會產生被禁止的值 $x = d/c$（當 $c \neq 0$ 時）。代入得 $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc-ad)/c \neq 0$，所以 $(*)$ 的每個根都是真正的不動點（fixed point）。

若 $c \neq 0$，$(*)$ 是二次方程，不動點為

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

若 $(a+d)^2 > 4bc$，有兩個不動點；若 $(a+d)^2 = 4bc$，有一個；若 $(a+d)^2 < 4bc$，則沒有。

若 $c = 0$，條件 $ad \neq bc$ 變成 $ad \neq 0$，所以 $d \neq 0$，而 $T(x) = (b - ax)/d$ 處處有定義。這時 $(*)$ 變成 $(a+d)x = b$。若 $a+d \neq 0$，恰有一個不動點 $x = b/(a+d)$。若 $a+d = 0$ 而 $b \neq 0$，則沒有不動點。若 $a+d = 0$ 且 $b = 0$，則 $T(x) = -ax/d = x$，所以 T 是恆等變換（identity），每個 x 都是不動點。

逆變換

由 $y(cx - d) = ax - b$ 得 $cxy - dy = ax - b$，所以 $x(cy - a) = dy - b$，因此

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

這與 T 的形式相同，其中

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

而且條件依然成立，因為 $a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$。（除以 $cy - a$ 是合理的，因為 $y = a/c$ 永遠不是 T 的值；見下一部分。）

集合 S_r

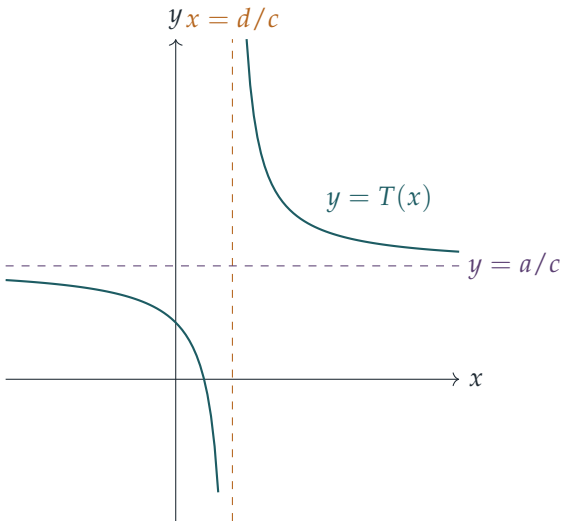
設 $c \neq 0$。$T(x)$ 恰好在 $cx \neq d$ 時有定義，所以我們取 $r = d/c$。於是 T 對每個 $x \in S_{d/c}$ 都有定義。要求出像（image），我們把常數部分分拆出來：

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx - d) + \frac{ad - bc}{c}, \qquad \text{所以} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad - bc}{c\,(cx - d)}.$$

由於 $ad - bc \neq 0$，第二項永不為零，所以 $T(x) \neq a/c$。反過來，每個 $y \neq a/c$ 都能取到。由逆變換的公式得 $x = (dy - b)/(cy - a)$，而這個 x 不等於 d/c，因為 d/c 不是 T^{-1} 的值（把同一個論證用於 T^{-1}，它的「a'/c'」就是 d/c）。因此

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

而 T 是由 $S_{d/c}$ 到 $S_{a/c}$ 的雙射（bijection）。其圖像是一條等軸雙曲線（rectangular hyperbola），漸近線（asymptote）為 $x = d/c$ 和 $y = a/c$：



（草圖採用 $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$。）

若 $c = 0$，則 $d \neq 0$ 且 $a \neq 0$（因為 $ad \neq 0$），而 $T(x) = (b - ax)/d$ 是一個非常數的線性函數。所以 T 對所有實數 x 都有定義，無須排除任何值，並且把 $\mathbb{R}$ 雙射地映滿 $\mathbb{R}$。假如我們仍然移去一點 r，則 $T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$。

複合

把 $T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$ 代入 T_2，然後把分子和分母同乘以 $c_1x - d_1$：

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

所以 T_3 具有相同的形式，其中

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

想一想 「相同的形式」真的已經證明了嗎？我們還需要 $a_3d_3 \neq b_3c_3$。

是的，這確實需要證明。這些係數正好是以下矩陣乘積的元素：

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

而每個矩陣的行列式（determinant）都是 $bc - ad$。由於乘積的行列式等於行列式的乘積，

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

（你也可以直接展開，只需幾行代數運算。）所以 T_3 是同一類型的變換。

T^2 何時是恆等變換？

在複合公式中取 $T_1 = T_2 = T$。於是 $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$，其中

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a-d), \qquad C = c(a-d), \qquad D = bc - d^2.$$

T^2 是恆等變換，即是對其定義域內所有 x 都有 $Ax - B = x(Cx - D)$，而定義域是除了至多幾個點以外的全部實數。一個多項式等式若在無限多個點上成立，便恆等地成立，所以我們比較係數：

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

亦即

$$c(a-d) = 0, \qquad (a-d)(a+d) = 0, \qquad b(a-d) = 0.$$

- 若 $a = d$，三式全部成立。事實上 $T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$，其中 $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$。
- 若 $a \neq d$，我們需要 $b = c = 0$ 和 $a = -d$。這時 $T(x) = ax/(-d) = x$，所以 T 本身就是恆等變換。

所以 T^2 是恆等變換，**當且僅當** $a = d$，**或** $b = c = 0$ **且** $a + d = 0$（即 T 是恆等變換）。第二種情況是平凡的，所以值得留意的對合（involution）正好是形如 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$ 而 $a^2 \neq bc$ 的映射。

一個例子

根據剛才求得的條件，我們需要兩個滿足 $a = d$ 的映射，而它們的複合卻有 $a \neq d$。取

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

兩者都有 $a = d$，所以 T_1^2 和 T_2^2 都是恆等變換。這也可以直接看出：$-(-x) = x$ 和 $1 - (1 - x) = x$。它們的複合是

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1 - (-x) = x + 1,$$

寫成標準形式時有 $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$，所以 $a_3 \neq d_3$。事實上 $T_3^2(x) = x + 2 \neq x$。

從幾何上看，直線上的兩個反射（reflection）（分別關於 0 和 $\frac{1}{2}$）複合起來是一個平移（translation），而平移並不是自身的逆變換。若想要一個 $c \neq 0$ 的例子，可試試 $T_1(x) = -1/x$ 配上同一個 T_2。這時 $T_3(x) = (x+1)/x$，而 $T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$。

驗算

- 採用草圖中的例子 $T(x) = (2x-1)/(x-1)$（$a=2$，$b=1$，$c=d=1$）。它的不動點是 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根，即 $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$，你可以驗證 $T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$。它的逆變換是 $(y-1)/(y-2)$，在 $y = 2 = a/c$ 處沒有定義，與預測相符。
- 在複合公式中取 $T_1 = T$、$T_2 = T^{-1}$，即 $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$，得 $a_3 = ad - bc$，$b_3 = 0$，$c_3 = 0$，$d_3 = bc - ad$。這是恆等變換，正如所料。
- 我們用電腦驗證了逆變換、像和複合的公式，方法是以精確分數對數千組隨機的 (a,b,c,d) 進行計算。電腦亦就所有滿足 $ad \neq bc$ 的整數 $a,b,c,d \in [-3,3]$，把 T^2 為恆等變換的條件與直接計算的結果互相對照。

常見錯誤

- 忘記平凡的情況：$a = d$ 並非必要條件，因為恆等變換（$b = c = 0$，$a = -d$）的平方也是恆等變換。
- 證明了複合是兩個線性函數之比，卻沒有驗證 $a_3 d_3 \neq b_3 c_3$。
- 在 $c = 0$ 的情況下尋找被排除的點。非常數的線性映射處處有定義，而且能取遍每一個實數。

STEP 之外

容許 $x = \infty$，並規定 $T(d/c) = \infty$ 和 $T(\infty) = a/c$，便令每個這樣的 T 都成為擴充直線（extended line）上的雙射。若係數取複數，就得到黎曼球面（Riemann sphere）上的莫比烏斯變換。上面用到的矩陣對應關係說明這些映射構成一個羣（group），它同構（isomorphic）於可逆 2×2 矩陣模去純量倍數所得的羣（射影線性羣，projective linear group）。複合變成矩陣乘法，而一個不是恆等變換的映射是對合，恰好當它的矩陣的跡（trace）為零；在這裏即是 $a - d = 0$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）中有一章講莫比烏斯變換，寫得十分精彩。

詳細解答

STEP III 1996，第 9 題

力學 • 圓周運動

STEP III 1996，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q9

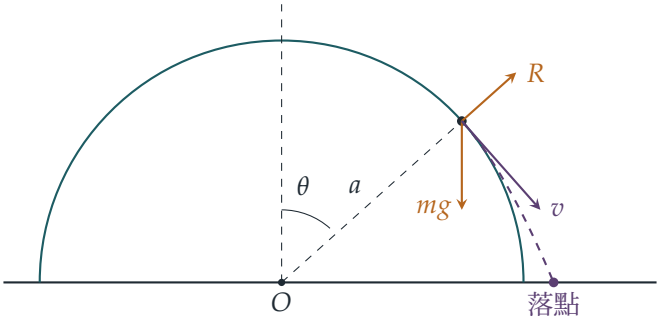
關鍵思路

整個運動分為兩個階段。質點仍在球面上時，它沿圓周運動，因此由能量守恆（conservation of energy）可求出其速率，再由徑向運動方程可求出法向反作用力（normal reaction）；當這個反作用力降至零的一刻，質點便離開球面。此後它只是一個普通的拋體（projectile），從已知的位置、以已知的速率沿切線方向拋出，我們只需求出它在何處越過球心所在的水平面。

解答

模型

把質點視為質量為 m 的質點（point mass），置於一個光滑的固定球面上，球心為 O，並忽略空氣阻力。它所受的力只有重量 mg 和法向反作用力 R，後者沿半徑方向並背向 O。設 P 為質點所在位置，θ 為 OP 與鉛垂向上方向之間的夾角，v 為質點的速率。由於初始位移很小，我們取初速率為零（取極限而言）。



第一階段：在球面上

反作用力與運動方向垂直，所以它不作功，能量因而守恆。質點由頂點下降了 $a - a\cos\theta$，所以

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

質點仍在球面上時，它沿半徑為 a 的圓周運動，所以沿指向 O 的方向分解力，可得

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad \Longrightarrow \quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

? **想一想** 為甚麼質點恰好在 $R = 0$ 時離開球面？

球面只能向外推，所以只要兩者仍有接觸，便有 $R \geq 0$。當 θ 由 0 開始增大，R 由 mg 持續減小，而按上面的公式，過了 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ 之後便會有 $R < 0$。這意味着球面要把質點向內拉，但它做不到。因此質點在以下時刻失去接觸：

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga\left(1-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3}ga.$$

第二階段：拋體運動

以 O 為原點建立坐標軸，x 軸沿水平方向（取運動的方向），y 軸鉛垂向上。離開球面的一刻，質點位於

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

而它的速度沿切線方向，與水平線成俯角 θ：

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{其中} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

現在 $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$，所以質點到達 $y = 0$ 時，有

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

取正根，

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

代入 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，根號內的式子是 $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$，而 $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$。因此

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right).$$

飛行期間所經過的水平距離為

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga}\cdot\sqrt{\frac{a}{27g}}\left(\sqrt{46}-\sqrt{10}\right) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}\left(\sqrt{46}-\sqrt{10}\right) \\ &= \frac{2a}{27}\left(\sqrt{92}-\sqrt{20}\right) = \frac{2a}{27}\left(2\sqrt{23}-2\sqrt{5}\right) = \frac{a}{27}\left(4\sqrt{23}-4\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

加上起始的水平距離 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$，質點與通過 O 的水平面相遇之處，與球心的距離為

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}\left(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}\right) = \frac{a\left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23}\right)}{27}$$

正是所要求的結果。

飛行途中不會碰到球面

為求嚴謹，我們應該驗證拋體確實不會碰到球面。沿飛行路徑設 $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$。按 t 的冪次展開：

- 常數項為 $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$；
- t 的係數為 $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$，因為速度與半徑垂直；
- t^2 的係數為 $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$，這正正是 $R = 0$ 的條件；
- 餘下的是 $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$，而 $u_y < 0$。

所以當 $t > 0$ 時，$f(t) = g|u_y|\, t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$。質點一直留在球面之外，而上面求得的落點距離就是它實際到達的距離。

驗算

- 答案約為 $1.125a$。它大於 a，這是必然的，因為質點必須越過球面，而球面在 O 的水平面上伸展至距離 a 處。
- 離開球面時的高度為球心以上 $\frac{2}{3}a$，這是一個廣為人知的結果，而且與 g 和 m 無關。落點距離同樣與它們無關，這也是量綱分析（dimensional analysis）所要求的：a 是題目中唯一的長度。
- 我們以數值方法逐步計算了這個運動：由一個極小的位移出發，對 $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ 作龍格－庫塔（Runge–Kutta）積分，到 $R = 0$ 時停止，然後改以拋體運動繼續，結果落在 $1.12458a$ 處。精確公式給出 $1.124580\ldots a$。

常見錯誤

- 用了 $v^2 = ga\cos\theta$（來自 $R = 0$），卻忘記把它與能量方程結合，或者用錯了速率：離開球面時 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，而不是 $\frac{1}{3}ga$。
- 把拋體當作水平拋出。速度是沿切線方向的，在水平線以下成角 θ，所以從一開始便有向下的分量。

► 由離開球面的位置而不是由球心量度落點距離，這樣便漏掉了 x_0。

STEP 之外

「反作用力消失時接觸便告終止」這個條件，是單側約束（unilateral constraint）的一個例子。這類約束在力學中隨處可見，由金屬線上的小珠，以至駛過拱橋的汽車，都是例子。解答最後一步出現的巧合，即拋體的路徑與球面在離開點處吻合至二階，說明在那一刻拋物線與圓具有相同的曲率（curvature）。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）正是以這種精神處理圓周運動、約束力和能量方法。

詳細解答

STEP III 1996，第 10 題

力學 • 涉及摩擦力的平衡

STEP III 1996，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q10

關鍵思路

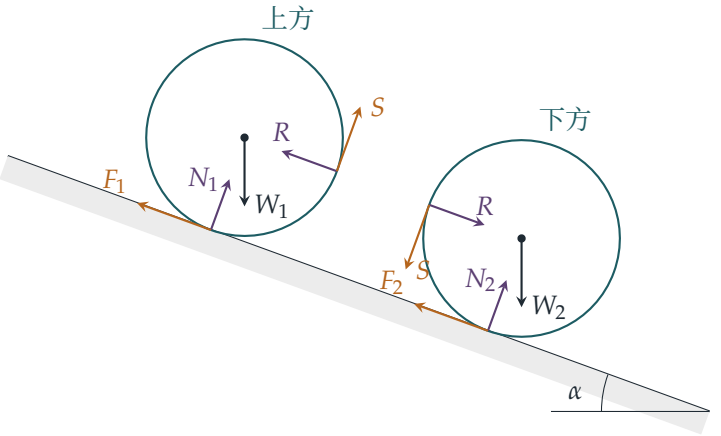
寫出六條平衡方程（每個圓柱體各有兩條分解力的方程和一條力矩方程），你會發現它們唯一地確定了每一個接觸力。力矩方程正是關鍵所在：每個圓柱體只有兩個摩擦力對其中心有力矩，所以這兩個摩擦力的大小必定相等。之後，四個不等式中的每一個，都不過是三條接觸線之一上的「摩擦力 $\leq$ 摩擦系數 $\times$ 法向反作用力」，再加上兩個圓柱體之間的推力不能為負這個條件。

解答

模型。每個圓柱體都是半徑為 a 的均勻剛體（uniform rigid body），所以其重量作用於中心（即軸上）。我們在通過兩個中心的鉛垂截面上考慮問題。由於兩個半徑相等，而且兩個圓柱體都放在斜面上，所以連心線與斜面平行，而兩個圓柱體之間的接觸點就是該線段的中點。取 x 方向為沿斜面向下，y 方向垂直於斜面並指向斜面之外。

定義以下各力（所有分量最終都可能是正或負）：

- N_1、N_2：斜面對上方和下方圓柱體的法向反作用力（normal reaction）；
- F_1、F_2：斜面對它們的摩擦力（frictional force），以沿斜面向上為正；
- R：兩個圓柱體之間的法向力，沿連心線方向，把下方圓柱體推向斜面下方，把上方圓柱體推向斜面上方；
- S：兩個圓柱體之間的摩擦力，垂直於斜面，對上方圓柱體的作用方向是遠離斜面，因而對下方圓柱體的作用方向是指向斜面（根據牛頓第三定律（Newton's third law））。



（為清楚起見，圖中把兩個圓柱體分開來畫；R 和 S 其實作用於同一條接觸線上。每個重量都通過中心鉛垂向下作用。）

力矩。對每個圓柱體的中心取力矩（moment）。法向力 N_1、N_2、R 和重量全都通過中心，所以只有摩擦力才有力矩。每個摩擦力都在距離中心 a 之處沿切線方向作用。對上方圓柱體而言，F_1（沿斜面向上，作用於圓柱體底部）和 S（遠離斜面，作用於其下坡一側）的力矩方向相反，由此得

$$aF_1 = aS, \qquad \text{所以} \qquad F_1 = S.$$

同樣地，對下方圓柱體而言，F_2（沿斜面向上，作用於其底部）和 S（指向斜面，作用於其上坡一側）的力矩方向相反，所以 $F_2 = S$。因此

$$F_1 = F_2 = S.$$

想一想 為甚麼斜面對每個圓柱體的摩擦力，必定等於兩個圓柱體之間的摩擦力？

因為一個可以自由滾動的圓柱體，只有在繞其軸的力偶（couple）互相抵消時才能保持平衡，而摩擦力是唯一對軸有力矩的力。你可以檢查一下轉向：對上方圓柱體而言，斜面在底部施加的沿斜面向上的摩擦力會令它向下坡方向滾動，即在圖中順時針轉動，而作用於其下坡一側的向上摩擦力則令它逆時針轉動。

分解力。平行於斜面（以沿斜面向下為正）：

$$\begin{aligned} \text{上方：} \quad & W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0, \\ \text{下方：} \quad & W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0. \end{aligned}$$

兩式相加，並利用 $F_1 = F_2 = S$，得

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

這正是重量沿斜面向下的總分量的一半，與預期相符。兩式相減則得

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

垂直於斜面（以向外為正）：

$$\begin{aligned} &\text{上方：} \quad N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad &&\Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ &\text{下方：} \quad N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad &&\Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

於是六條方程確定了全部六個力。平衡（equilibrium）可以成立，當且僅當這些力在物理上是容許的：每個法向反作用力都非負，而每個摩擦力都不超過摩擦系數（coefficient of friction）乘以相應的法向反作用力。

第 (i) 部分

兩個圓柱體只能互相推壓，所以 $R \geq 0$。由於 $\sin\alpha > 0$，由此得 $W_1 \geq W_2$。

第 (ii) 部分

在兩個圓柱體的接觸處，我們需要 $S \leq \mu R$：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

左邊嚴格為正，所以必須有 $R > 0$，即 $W_1 > W_2$（兩個重量相等其實是不可能的）。兩邊除以正數 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

在上方圓柱體與斜面的接觸處，我們需要 $N_1 \geq 0$ 和 $F_1 \leq \mu_1 N_1$。由於 $F_1 > 0$，第二個條件已經迫使 $N_1 > 0$。把 $F_1 \leq \mu_1 N_1$ 兩邊除以 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$：

$$1 \leq \mu_1\left(\frac{2W_1\cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1\right) = \mu_1\left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right).$$

括號內的式子是 $N_1 / \left(\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha\right)$，它是正數，所以我們可以用它來除：

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right)^{-1}.$$

（平衡還需要括號內的式子為正，即 $\tan\alpha < 2W_1/(W_1 + W_2)$；否則上方圓柱體會被抬離斜面。）

關於 μ_2 的不等式

這裏 $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 自動為正，而 $F_2 \le \mu_2 N_2$ 在除以 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 之後變成

$$1 \le \mu_2\left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right), \qquad \text{即} \qquad \mu_2 \ge \left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right)^{-1}.$$

? **想一想** 為甚麼下方圓柱體的符號是 $+1$，而上方圓柱體的卻是 -1？

兩個圓柱體之間的摩擦力 S 把上方圓柱體拉離斜面，並把下方圓柱體壓向斜面。所以斜面對上方圓柱體的壓力較小，對下方圓柱體的壓力較大，而上方圓柱體就需要較大的摩擦力與法向反作用力之比。

驗算

- 把兩個圓柱體的方程相加，便得到整個系統的方程：斜面的總摩擦力為沿斜面向上的 $(W_1+W_2)\sin\alpha$，總法向反作用力為 $(W_1+W_2)\cos\alpha$，與單一剛性方塊的情況完全一樣。
- 當 $\alpha \to 0$ 時，所有摩擦力和 R 都趨向 0，而 μ_1, μ_2 的兩個下界也趨向 0，這正是水平地面上應有的情況。
- 數值上，取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$、$\alpha = 20°$：直接解六條方程得 $R \approx 0.342$、$S = F_1 = F_2 \approx 0.684$、$N_1 \approx 2.135$、$N_2 \approx 1.624$，所以 $\mu \ge 2$、$\mu_1 \ge 0.320$ 和 $\mu_2 \ge 0.421$，與公式吻合。我們也對 W_1、W_2 和 α 的許多隨機取值作了同樣的檢查，結果同樣吻合。

常見錯誤

- 忘記力矩方程。沒有它們，就有六個未知數而只有四條方程，問題看起來便無法確定。
- 弄錯兩個圓柱體之間摩擦力的方向，這會把最後兩個答案中的 ±1 對調。
- 忽略了較輕的圓柱體必須在下方：假如上方圓柱體較輕，R 就必須為負。

STEP 之外

這是一個靜定（statically determinate）系統：平衡方程確定了每一個力，所以摩擦定律就變成可以檢驗的條件。當接觸點的數目多於方程的數目時（例如一把梯子靠在粗糙的牆上並立於粗糙的地面），系統便是靜不定（statically indeterminate）的，單靠剛體靜

力學無法說明各力如何分擔。這時工程師便會引入物體的彈性（elasticity）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）仔細講解了剛體平衡和力矩（torque）。

詳細解答

STEP III 1996，第 11 題

力學 • 微小振動

> **STEP III 1996，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

關鍵思路

整道題靠兩個圓幾何的事實。AC 是直徑，所以角 ABC 是直角。由此可得兩條弦線的長度，從而以 θ 表示兩個張力（tension）。另外，圓心角是圓周角的兩倍，所以 B 繞圓心轉過了 2θ。因此它由 C 起計的弧長是 $2a\theta$，再沿切線方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），便得到運動方程（equation of motion）。至於振動，則在平衡位置（equilibrium）附近作線性化（linearise）。

動筆之前先提醒一點：題目印出的方程中有 $mg\sin\theta$，其實應該是 $mg\sin 2\theta$。下面的推導會說明原因，而且只有修正後的方程才能得出題目所述的 $5\lambda = 24mg$ 和所述的周期。

解答

運動方程

模型。小環 B 是光滑金屬線上一個質量為 m 的質點（particle），所以金屬線只施加沿半徑方向的法向反作用力（normal reaction）R。兩條弦線都是輕而有彈性的，並且遵從胡克定律（Hooke's law）：自然長度為 a 的弦線被拉長至長度 ℓ 時，張力為 $\lambda(\ell - a)/a$。

幾何。由於 AC 是直徑（長度為 $2a$），由半圓上的圓周角可知 $\angle ABC = 90°$。在直角三角形 ABC 中，

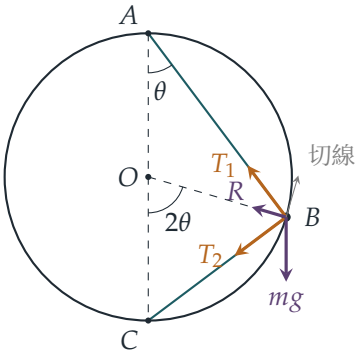
$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

圓周角 $\angle CAB = \theta$ 所對的弧是 CB，所以圓心角是 $\angle COB = 2\theta$。由 C 到 B 的弧長是 $s = 2a\theta$，所以 B 沿金屬線、朝 θ 增加的方向（即朝向 A）的加速度是 $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$。

張力。BA 和 BC 的張力分別是

$$T_1 = \lambda\,\frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

兩條弦線同時拉緊，當且僅當 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$。



沿 B 點的切線方向分解。切線與 OB 垂直，而 R 在切線方向沒有分量。

- 三角形 OAB 是等腰三角形（$OA = OB = a$），所以 $\angle OBA = \angle OAB = \theta$。因此 BA 與切線的夾角是 $90° - \theta$，而 T_1 的貢獻是朝向 A 的 $T_1\sin\theta$。
- 三角形 OCB 是等腰三角形，而 $\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$，所以 $\angle OBC = 90° - \theta$。因此 BC 與切線的夾角是 θ，而 T_2 的貢獻是背向 A 的 $T_2\cos\theta$。
- OB 與向下的鉛垂線的夾角是 2θ，所以切線與水平線的夾角是 2θ。重力的貢獻是背向 A 的 $mg\sin 2\theta$。

沿切線方向應用牛頓第二定律，得

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

因為兩個 $2\lambda\sin\theta\cos\theta$ 項互相抵消。這就是所求的方程，只是重力項是 $mg\sin 2\theta$，而不是題目印出的 $mg\sin\theta$。

想一想 題目印出的 $mg\sin\theta$ 會不會其實才是對的？

不會。當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，小環與 O 同高，切線是鉛垂的，整個重量 mg 都沿金屬線方向作用。這樣 $mg\sin 2\theta = mg$，但 $mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$。下一部分同樣可以作出判斷：按題目印出的方程，平衡時會得到 $\lambda = 3mg$，而不是 $\frac{24}{5}mg$。

平衡位置

當 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 時，$\cos\theta = \frac{4}{5}$（取 θ 為銳角），而且 θ 在弦線拉緊的範圍之內，因為 $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ 及 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$。設 $\ddot{\theta} = 0$：

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{4}{5} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad\Longrightarrow\quad 5\lambda = 24mg,$$

正如所求。

小幅振動

設 $f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$，於是 $2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$，而在平衡位置 θ_0 有 $f(\theta_0) = 0$。令 $\theta = \theta_0 + \varepsilon$，其中 ε 很小。準確至一階，$f(\theta_0 + \varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$，其中

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg \cdot \tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

所以

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$。由於 $f'(\theta_0) < 0$，這個平衡是穩定的（stable）。位移很小，所以弦線一直保持拉緊（θ 始終在 θ_0 附近，遠在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 的邊界之內）。周期約為

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

驗算

- 當 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 時，兩條弦線的伸長量相同，所以它們在切線方向的作用互相抵消（$\cos\theta - \sin\theta = 0$），而整個重量沿鉛垂的切線作用。我們的方程給出 $2ma\ddot{\theta} = -mg$，這是正確的。
- 取 $a = g = m = 1$ 及 $\lambda = 4.8$，我們用位置向量計算了切向力。它在 $\sin\theta = 0.6$ 時為零。由一個小位移開始以數值方法逐步計算運動，得到周期為 3.29328，與 $10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$ 吻合。

常見錯誤

- 把弧長當作 $a\theta$。小環繞圓心轉過的是 2θ，而不是 θ，所以它的切向加速度是 $2a\ddot{\theta}$。左邊的 2 就是這樣來的。

- 沿弦的方向分解，而不是沿切線方向分解。反作用力是未知的，所以應沿切線方向分解，把它消去。

STEP 之外

在平衡位置附近作線性化，$\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$，是非線性系統穩定性分析的第一步。當 $f'(x_0) < 0$ 時，它給出穩定性，以及 $\omega^2 = -f'(x_0)$ 的簡諧運動。在大學裏，這個方法會透過簡正模式（normal modes）和矩陣的特徵值（eigenvalues）推廣到多個自由度（degrees of freedom）的情況。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）是進一步閱讀的好選擇。

詳細解答

STEP III 1996，第 12 題

概率與統計 • 馬可夫鏈

STEP III 1996，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q12

本題在 *Beyond STEP* 第 12.16 節順向與逆向的馬可夫鏈中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/markov.html

關鍵思路

這是一條馬可夫鏈（Markov chain）：下一條定理的類型只取決於當前定理的類型。第 (i) 部分是全概率公式（law of total probability），以當前定理的類型作為條件。第 (ii) 部分要求找出一個在這條鏈作用下保持不變的分佈（即平穩分佈，stationary distribution），這歸結為一個小型線性方程組。第 (iii) 部分把這條鏈倒過來走，而把條件概率（conditional probability）反轉，正是貝葉斯定理（Bayes' theorem）的作用。

解答

把定理依次編號。設 X 為某一條定理的類型，Y 為緊接其後那條定理的類型，於是

$$\mathrm{P}(X = i) = a_i, \qquad \mathrm{P}(Y = j \mid X = i) = p_{ij}, \qquad \mathrm{P}(Y = j) = b_j.$$

第 (i) 部分

事件 $\{X = 1\}$、$\{X = 2\}$、$\{X = 3\}$ 互斥（mutually exclusive），而且其中必有一個發生，因為每條定理恰好屬於三種類型之一。因此它們構成樣本空間（sample space）的一個劃分，而事件 $\{Y = j\}$ 可分拆成三個互不相交的部分：

$$\{Y = j\} = \{X = 1,\, Y = j\} \cup \{X = 2,\, Y = j\} \cup \{X = 3,\, Y = j\}.$$

把各部分的概率相加，並把每一項寫成 $\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j \mid X=i)$，得

$$b_j = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j \mid X=i) = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j},$$

這就是全概率公式。題目給出的觀察在這裏用上了：不論當前定理之前發生過甚麼，$\mathrm{P}(Y=j \mid X=i)$ 都等於 p_{ij}。

第 (ii) 部分

我們需要對每個 j 都有 $b_j = a_j$，同時 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$，因為各 a_i 構成一個概率分佈。沿着數表的各列由上而下讀，得到三條方程

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3a_1 + 0.2a_2 + 0.1a_3, \\ a_2 &= 0.3a_1 + 0.4a_2 + 0.3a_3, \\ a_3 &= 0.4a_1 + 0.4a_2 + 0.6a_3. \end{aligned}$$

> **想一想** 三個未知數卻有三條方程，再加上 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$：這不是多了一條方程嗎？

並沒有多，因為這三條方程並非互相獨立。由於數表每一行之和都是 1，把三條方程相加便得 $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$。所以其中任意兩條都蘊含第三條，而真正把解確定下來的，是歸一化條件（normalising condition）。

中間那條方程最容易處理，因為 a_1 和 a_3 在其中的係數相同。利用 $a_1 + a_3 = 1 - a_2$，

$$a_2 = 0.3(1-a_2) + 0.4a_2 \quad\Longrightarrow\quad 0.9a_2 = 0.3 \quad\Longrightarrow\quad a_2 = \tfrac{1}{3}.$$

於是 $a_1 + a_3 = \frac{2}{3}$。把第一條方程乘以 10，得 $7a_1 = 2a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + a_3$，再代入 $a_3 = \frac{2}{3} - a_1$，

$$7a_1 = \tfrac{4}{3} - a_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad a_3 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

驗算第三條方程：$0.4 \cdot \frac{1}{6} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} + 0.6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} = a_3$。因此

$$a_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad a_2 = \tfrac{1}{3}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}.$$

由此可見，長遠而言，Ecks 教授的定理有一半是錯的。

第 (iii) 部分

現在改設 X 為前一條定理的類型，Y 為指定那條定理的類型，而 X 的分佈如第 (ii) 部分所得。我們要求的是 $q_{ij} = \mathrm{P}(X=i \mid Y=j)$。根據貝葉斯定理，

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j \mid X=i)}{\mathrm{P}(Y=j)} = \frac{a_i p_{ij}}{b_j} = \frac{a_i p_{ij}}{a_j},$$

其中最後一步用了第 (ii) 部分的 $b_j = a_j$。這正是題目指定 a_i 取這些值的原因：這樣一來，指定那條定理的分佈便與它前一條定理的分佈相同。

逐列計算：

- $j=1$（$a_1=\frac{1}{6}$）：$q_{11}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{10}$，　$q_{21}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.2}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$，　$q_{31}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.1}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{10}$。
- $j=2$（$a_2=\frac{1}{3}$）：$q_{12}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{20}$，　$q_{22}=0.4=\frac{2}{5}$，　$q_{32}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{20}$。
- $j=3$（$a_3=\frac{1}{2}$）：$q_{13}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{15}$，　$q_{23}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{15}$，　$q_{33}=0.6=\frac{3}{5}$。

按原來數表的方式排列（第 i 行、第 j 列）：

$$(q_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & \frac{3}{20} & \frac{2}{15}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{20} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.15 & 0.1\dot{3}\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\dot{6}\\ 0.3 & 0.45 & 0.6\end{pmatrix}.$$

這裏和為 1 的是各列：指定那條定理的類型 j 固定之後，前一條定理必定屬於某一種類型。

驗算

- (q_{ij}) 每一列之和都是 1；例如 $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{3}{5}=1$。
- 對角線上的元素滿足 $q_{ii}=p_{ii}$，與公式 $q_{ii}=a_ip_{ii}/a_i$ 所預示的一致。
- 把這條鏈模擬 10^6 步，得到的長期頻率為 0.167、0.333、0.501，而倒推所得的比例與上面每個 q_{ij} 的差距都在 0.001 之內。

常見錯誤

- 把數表乘以由各 a_i 組成的列向量（即用了行而不是列）。方程是 $b_j=\sum_i a_ip_{ij}$，所以求和是沿着第 j 列由上而下進行的。
- 忘記了 $a_1+a_2+a_3=1$，然後對三條平衡方程（balance equations）無法確定各 a_i 感到困惑。
- 以 p_{ji} 作為第 (iii) 部分的答案。時間上往回走，並不等於把數表反過來讀；這條鏈並不可逆（reversible），因為 $q_{12}=0.15$，而 $p_{12}=0.3$。

STEP 之外

向量 (a_1, a_2, a_3) 是這條鏈的平穩分佈：它是轉移矩陣（transition matrix）對應特徵值（eigenvalue）1 的左特徵向量（left eigenvector）。由於矩陣的每個元素都是正數，不論第一條定理屬於哪種類型，第 n 條定理的類型的分佈都會收斂至這個平穩分佈。數表 (q_{ij}) 描述的是時間反轉（time-reversed）後的鏈；若一條鏈反轉後與原來的看起來一樣（即滿足 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$，稱為細緻平衡條件，detailed balance condition），這類鏈在隨機漫步（random walk）和蒙地卡羅方法（Monte Carlo methods）中佔有核心地位。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction* 中有一章講馬可夫鏈，深入淺出。

詳細解答

STEP III 1996，第 13 題

概率與統計 • 切比雪夫不等式

> **STEP III 1996，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q13

關鍵思路

方差（variance）是若干個非負項 $p_i(x_i-\mu)^2$ 之和，每個取值對應一項。把這個和分成兩部分：遠離平均值（mean）的取值（相距至少 λ）和靠近平均值的取值。要得到「遠」的概率的上界（upper bound），就把「近」的各項丟掉，並把每個「遠」的項從下方估計。要得到下界（lower bound），則反其道而行：把每一項都從上方估計，「近」的項不超過 λ^2，「遠」的項不超過 k^2。

解答

定義與 $aX+b$

記 $p_i = \mathrm{P}(X=x_i)$，於是 $p_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$。那麼

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad \mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 p_i,$$

其中 $\mu = \mathrm{E}(X)$。（等價地，$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$，但我們將會使用的是第一種形式。）

隨機變量（random variable）$aX+b$ 以概率 p_i 取值 ax_i+b。（若 $a=0$，這些值會重合，但把相等取值的概率相加並不會改變下面的各個和。）所以

$$\mathrm{E}(aX+b) = \sum_i (ax_i+b)p_i = a\sum_i x_i p_i + b\sum_i p_i = a\mathrm{E}(X) + b,$$

這裏用到 $\sum_i p_i = 1$。因此 $aX+b-\mathrm{E}(aX+b) = a(X-\mu)$，而

$$\mathrm{var}(aX+b) = \sum_i \big(a(x_i-\mu)\big)^2 p_i = a^2 \sum_i (x_i-\mu)^2 p_i = a^2\,\mathrm{var}(X).$$

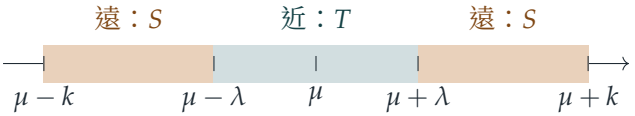
加上 b 會把每個取值和平均值一同平移，所以對離散程度毫無影響。

上界

設 $\mu = \mathrm{E}(X)$，設 S 為滿足 $|x_i - \mu| \geq \lambda$ 的下標 i 所組成的集合（即「遠」的取值），並設 T 為其餘下標的集合，即 $|x_i - \mu| < \lambda$ 者。那麼

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) = \sum_{i \in S} p_i.$$

把這個概率記作 P。



方差的每一項都是非負的，所以丟掉 T 中的各項只會令和變小；而對於 $i \in S$，我們有 $(x_i - \mu)^2 \geq \lambda^2$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 p_i + \sum_{i \in T} (x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \lambda^2 \sum_{i \in S} p_i = \lambda^2 P.\end{aligned}$$

由於 $\lambda > 0$，我們可以除以 λ^2，得到

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\lambda^2},$$

正是所求。（若 S 是空集，則兩個對 S 求的和都是零，不等式顯然成立。）

下界

現在再假設對每個 i 都有 $|x_i - \mu| \leq k$。這一次我們把方差的每一項都從上方估計：

- 對於 $i \in S$，由新的假設可知 $(x_i - \mu)^2 \leq k^2$；
- 對於 $i \in T$，由 T 的定義可知 $(x_i - \mu)^2 < \lambda^2$。

由於 $\sum_{i \in T} p_i = 1 - P$，由此得

$$\mathrm{var}(X) \leq k^2 \sum_{i \in S} p_i + \lambda^2 \sum_{i \in T} p_i = k^2 P + \lambda^2 (1 - P) = \lambda^2 + (k^2 - \lambda^2) P.$$

移項整理，

$$(k^2 - \lambda^2)\, P \geq \mathrm{var}(X) - \lambda^2.$$

想一想 我們可以除以 $k^2 - \lambda^2$ 嗎？

題目告訴我們 $k \geq \lambda > 0$，所以 $k^2 - \lambda^2 \geq 0$。若 $k > \lambda$，它嚴格為正，相除後不等號方向不變：

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) \geq \frac{\mathrm{var}(X) - \lambda^2}{k^2 - \lambda^2},$$

這就是所要求的結果。在邊界情況 $k = \lambda$ 時，右邊的分母為零，這個命題沒有意義；但它前面的那個不等式仍然成立，並給出 $\mathrm{var}(X) \leq \lambda^2$，這是顯然的，因為每個 $(x_i - \mu)^2 \leq k^2 = \lambda^2$。

當 $\mathrm{var}(X) \leq \lambda^2$ 時，下界為零或負數，因而沒有帶來任何新資訊；只有當方差相對於 λ^2 較大，迫使部分概率落到兩端的尾部時，它才有實質內容。

驗算

- 取 $X = \pm 1$，概率各為 0.4，以及 ± 4，概率各為 0.1，於是 $\mu = 0$ 且 $\mathrm{var}(X) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 16 = 4$。取 $\lambda = 1, k = 4$：$P = 1$，上界是 4，下界是 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$，而確實有 $\frac{1}{5} \leq 1 \leq 4$。
- 取 $X = 0$ 或 $\pm c$，其中 $\mathrm{P}(X = \pm c) = q/2$（兩者各自如此）。那麼 $\mathrm{var}(X) = qc^2$，而取 $\lambda = c$ 時，上界恰好是 $q = P$：一般而言，切比雪夫不等式（Chebyshev's inequality）無法再改進。
- 我們以精確的有理數運算，在 20 000 個取值最多七個的隨機分佈上，檢驗了兩個界以及 $\mathrm{E}(aX + b)$ 和 $\mathrm{var}(aX + b)$ 的公式；沒有一例出錯。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{var}(aX + b) = a\,\mathrm{var}(X)$ 或 $a^2\mathrm{var}(X) + b$：方差是偏差的二次式，而平移不會改變任何偏差。
- 在下界中，把「近」的各項以 0 而非 λ^2 作上界。這樣會得到 $\mathrm{var}(X) \leq k^2 P$，雖然正確，卻不是題目所要求的。
- 除以 $k^2 - \lambda^2$ 而沒有指出它是正數（以及必須排除 $k = \lambda$ 的情況）。

STEP 之外

第一個不等式就是切比雪夫不等式，而丟棄若干項的技巧，正是馬爾可夫不等式（Markov's inequality）$\mathrm{P}(Y \geq c) \leq \mathrm{E}(Y)/c$（適用於 $Y \geq 0$）背後的同一手法（把它應

用於 $Y = (X - \mu)^2$ 即可）。在大學一年級的概率課程中，切比雪夫不等式能用兩行證明弱大數定律（weak law of large numbers）：X 的 n 個獨立複本的平均值，其方差為 $\operatorname{var}(X)/n$，所以它不大可能遠離 μ。第二個不等式是一個需要有界性（boundedness）的「反向」版本，與 Paley–Zygmund 不等式（Paley–Zygmund inequality）一脈相承。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了以上全部內容。

詳細解答

STEP III 1996，第 14 題

概率與統計 • 兩狀態馬可夫過程

> **STEP III 1996，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q14

關鍵思路

把時間切成長度為 δt 的極短區間，然後問：在其中一個區間內可能發生甚麼事？各區間的期望次數可憑期望值的線性性質（linearity of expectation）相加，而正在補胎的概率則符合一個簡單的「流入減流出」平衡關係；當 $\delta t \to 0$ 時，這個關係就變成一條一階線性微分方程（first-order linear differential equation）。一旦求得 $p(t)$，期望補胎時間就是它的積分。

解答

爆胎次數的期望值

只有實際踏單車的時間才會發生爆胎，而我在踏單車時一切正常。把踏單車的總時間 T 分成 n 小段，每段長度為 $\delta t = T/n$。設 X_k 為第 k 段內的爆胎次數；準確至 δt 的一階，X_k 以概率 $\alpha\,\delta t$ 取值 1，否則取值 0，所以 $\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$。根據期望值的線性性質（毋須假設獨立），

$$\mathrm{E}(\text{爆胎次數}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

補胎所花的時間並不計算在內，因為這裏的時鐘只計踏單車的時間。

$p(t)$ 所滿足的方程

現在設 t 為真實（時鐘）時間，包括補胎的時間。在時刻 t，我若非正在補胎（概率為 $p(t)$），就是正在踏單車（概率為 $1 - p(t)$）。我在時刻 $t + \delta t$ 正在補胎，當且僅當以下其中一種情況出現：

- 我在時刻 t 正在補胎，而補胎在 $(t, t+\delta t)$ 內沒有完成：概率為 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$；或
- 我在時刻 t 正在踏單車，並在 $(t, t+\delta t)$ 內爆胎：概率為 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$。

這兩種情況互斥，所以，略去 $(\delta t)^2$ 階的項（即在同一個極短區間內發生兩件事），

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

整理後得

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

令 $\delta t \to 0$，即得

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

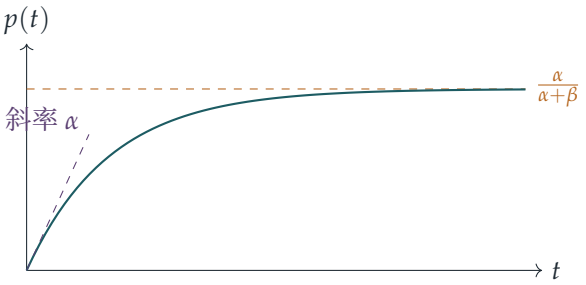
出發時單車狀態良好，所以初始條件（initial condition）是 $p(0)=0$。

驗證題目給出的解

對於 $p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$，我們有 $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$，並且

$$\begin{aligned} p'(t) &= \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}, \\ \alpha - (\alpha+\beta)p(t) &= \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}. \end{aligned}$$

兩者相等，所以 p 同時滿足微分方程和初始條件，正如所求。



圖中可見 p 由 0 開始，以初始斜率 α 上升，並趨向長期水平 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

期望補胎時間

設 R 為在 $[0,T]$ 期間用於補胎的時間，並設 $I(t)$ 在我於時刻 t 正在補胎時取值 1，否則取值 0，於是 $R = \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$。由於 $\mathrm{E}(I(t)) = p(t)$，取期望值（同樣只是線性性質，把

積分看成各小區間上求和的極限）便得

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t + \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T - \frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).$$

想一想 為甚麼補胎時間的期望值會等於一個概率的積分？

在每個小區間 $(t, t+\delta t)$ 內，用於補胎的時間以概率 $p(t)$ 約為 δt，否則為 0，所以它的期望值是 $p(t)\,\delta t$。把所有區間加起來，便得 $\sum p(t)\,\delta t \to \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$。

兩個近似

記 $x = (\alpha+\beta)T$。旅程中用於補胎的時間所佔比例的期望值是

$$F = \frac{\mathrm{E}(R)}{T} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

x 很小。利用 $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots$，可得 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2} = \frac{\alpha T}{2}.$$

這是合理的：在短途旅程中 $p(t) \approx \alpha t$，它在 $[0, T]$ 上的平均值正是 $\alpha T/2$。

x 很大。這時 $0 < \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} < \dfrac{1}{x}$，而後者很小，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

在長途旅程中，$p(t)$ 幾乎在所有時間都已穩定在平衡值 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

驗算

- 平衡狀態：令 $p' = 0$，得 $\alpha(1-p) = \beta p$，即「流入率等於流出率」，所以 $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，與 T 很大時的極限吻合。
- 若 $\beta \to \infty$（補胎瞬間完成），一切與補胎有關的量都趨向 0，理應如此。
- 取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 2.3$、$T = 2.5$，公式給出 $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$。模擬 2×10^5 次旅程（踏單車與補胎的時段交替出現，長度均服從指數分佈）所得結果為 0.5058；而模擬在踏單車時間 2.5 內的爆胎次數，平均值為 $1.750 = \alpha T$。

常見錯誤

- 在爆胎一項漏掉因子 $(1-p(t))$：只有正在踏單車時才會爆胎。
- 取 $p(0)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，或沒有寫明初始條件；單車出發時狀態良好，所以 $p(0)=0$。
- 在 x 很小時的展開式中漏掉二階項，結果得出 $F\approx 0$ 而非 $\alpha T/2$。

STEP 之外

這是一條兩狀態的連續時間馬可夫鏈（continuous-time Markov chain）：單車以速率 α 和 β 在「運作正常」與「正在修補」兩個狀態之間來回轉換，而 p 所滿足的方程正是柯爾莫哥洛夫（Kolmogorov）前向方程最簡單的情形。同一個模型也可用來描述會發生故障並獲維修的機器、離子通道的開合，以及排隊論（queueing theory）中的許多內容。以踏單車時間計算的爆胎次數，是一個速率為 α 的泊松過程（Poisson process）。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）以恰到好處的程度講解泊松過程和馬可夫鏈。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

1996 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。