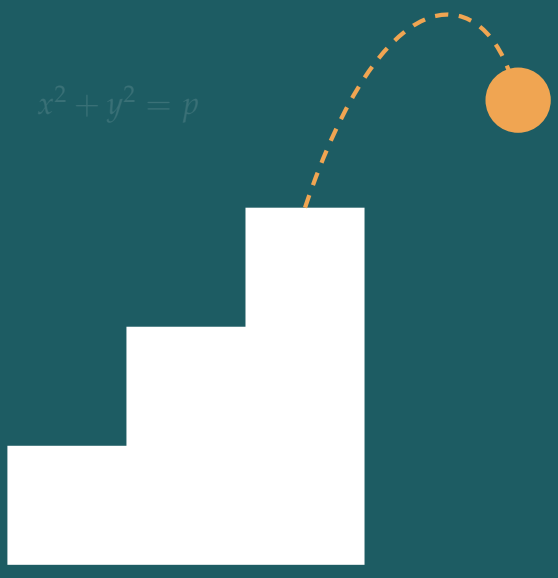
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

1992 年詳細解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

STEP I, II 及 III

1992 年詳細解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

1992 年詳細解答

1992 年 STEP 試卷（STEP I, II 及 III）全部 48 題的詳細解答。自樣本試卷以來每一道 STEP 題目的詳細解答、*Beyond STEP* 全書以及各章的單行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

閱讀解答之前，請先認真嘗試解題。每個答案均已用數值方法核對，但解答數量如此之多，難免會有疏漏：如果發現有可疑之處，請相信自己的演算，並仔細檢查。

由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目錄

STEP I

第 1 題 模 7 的日曆算術 純數學 3

第 2 題 幻方與計數 純數學 6

第 3 題 奇函數與偶函數 純數學 10

第 4 題 阿根圖上的軌跡 純數學 13

第 5 題 多項式的重因式 純數學 17

第 6 題 小角近似 純數學 21

第 7 題 整值多項式 純數學 25

第 8 題 數積分基本定理 純數學 28

第 9 題 數分方程 純數學 31

第 10 題 質衝與動量 力學 35

第 11 題 性繩的平衡 力學 38

第 12 題 及摩擦力的靜力學 力學 42

第 13 題 逸速率與徑向下落 力學 46

第 14 題 計論斷的詮釋 概率與統計 50

第 15 題 望等候時間 概率與統計 54

第 16 題 絡可靠度 概率與統計 58

STEP II

第 1 題 數列的極限 純數學 62

第 2 題 克萊羅微分方程 純數學 65

第 3 題 擺線與面積 純數學 69

第 4 題 數分法的公理 純數學 73

第 5 題 陣群 純數學 76

第 6 題 線與根的計數 純數學 80

第 7 題 三次方程的重根 純數學 84
第 8 題 積分技巧 純數學 87
第 9 題 純量三重積 純數學 90
第 10 題 根圖上的軌跡 純數學 94
第 11 題 拋體運動 力學 98
第 12 題 矩與彈性繩 力學 102
第 13 題 擦力與連接質點 力學 106
第 14 題 連接質點與滑輪 力學 110
第 15 題 機漫步 概率與統計 114
第 16 題 條件概率 概率與統計 118

STEP III

第 1 題 麥克勞林級數 純數學 122
第 2 題 矩陣的冪與數學歸納法 純數學 126
第 3 題 曲線與多項式的根 純數學 130
第 4 題 正交軌線 純數學 134
第 5 題 三維向量幾何 純數學 138
第 6 題 三角函數歸約公式 純數學 142
第 7 題 向量幾何 純數學 145
第 8 題 以方程的根求三角函數之和 純數學 149
第 9 題 橢圓的極坐標方程 純數學 153
第 10 題 弧長與面積 純數學 157
第 11 題 碰撞與恢復係數 力學 161
第 12 題 動量守恆 力學 165
第 13 題 繞固定軸的轉動 力學 169
第 14 題 解繞繩的動力學 力學 173
第 15 題 幾何概率 概率與統計 177
第 16 題 泊松稀疏化 概率與統計 181

詳細解答

STEP I 1992，第 1 題

純數學 • 模 7 的日曆算術

> **STEP I 1992，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

關鍵思路

星期每 7 日循環一次，所以我們只需要知道兩個日期之間相隔多少日，再取模（modulo）7 的餘數。令計算變得輕鬆的竅門是 $365 = 52 \times 7 + 1$：平年會令星期向後移一日，閏年（leap year）則移兩日。因此我們先數整年和閏日，最後才處理餘下的零碎月份。所謂「仔細」，是指要準確判斷哪些 2 月 29 日真正落在這段期間之內，並留意那個可能令我們出錯的世紀年。

解答

我們把 1905 年 4 月 3 日至 1992 年 6 月 26 日這段期間分成兩段：

$$1905 \text{ 年 } 4 \text{ 月 } 3 \text{ 日} \longrightarrow 1992 \text{ 年 } 4 \text{ 月 } 3 \text{ 日} \longrightarrow 1992 \text{ 年 } 6 \text{ 月 } 26 \text{ 日}.$$

整年：1905 年 4 月 3 日至 1992 年 4 月 3 日

這段時間共有 $1992 - 1905 = 87$ 個整年。每個這樣的年份（由 4 月 3 日至下一個 4 月 3 日）有 365 日，若當中包含一個 2 月 29 日，則多加一日。

哪些 2 月 29 日落在 1905 年 4 月 3 日與 1992 年 4 月 3 日之間？這個範圍內的閏年就是可被 4 整除的年份，即

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

1904 年的 2 月 29 日在 1905 年 4 月 3 日之前，所以不計算在內；1992 年的 2 月 29 日在 1992 年 4 月 3 日之前，所以要計算在內。於是共有

$$\frac{1992 - 1908}{4} + 1 = 21 + 1 = 22$$

個閏日。

> **想一想** 這個範圍內每個可被 4 整除的年份，真的都是閏年嗎？

在格里曆（Gregorian calendar）中，世紀年只有在可被 400 整除時才是閏年，所以 1900 年不是閏年（而 2000 年是）。不過這兩個年份都不在我們的期間之內，所以簡單的「可被 4 整除」法則（即口訣中的那一條）在這裏完全正確。假如題目追溯到 1900 年之前，我們便要剔除 1900 年 2 月 29 日。

因此，由 1905 年 4 月 3 日至 1992 年 4 月 3 日的日數是

$$87 \times 365 + 22 = 31\,755 + 22 = 31\,777.$$

以模 7 計算會更快：由於 $365 \equiv 1 \pmod 7$，這個數等於

$$87 + 22 = 109 = 15 \times 7 + 4 \equiv 4 \pmod 7.$$

零碎月份：1992 年 4 月 3 日至 1992 年 6 月 26 日

根據口訣，四月有 30 日，五月有 31 日，所以

$$\begin{aligned} &4\text{ 月 }3\text{ 日} \to 5\text{ 月 }3\text{ 日} : 30\text{ 日},\\ &5\text{ 月 }3\text{ 日} \to 6\text{ 月 }3\text{ 日} : 31\text{ 日},\\ &6\text{ 月 }3\text{ 日} \to 6\text{ 月 }26\text{ 日} : 23\text{ 日}, \end{aligned}$$

合共 $30 + 31 + 23 = 84 = 12 \times 7$ 日，即 $\equiv 0 \pmod 7$。可喜的是，1992 年 4 月 3 日與 1992 年 6 月 26 日恰好是同一個星期幾。

綜合結果

總相隔日數為

$$31\,777 + 84 = 31\,861 = 4551 \times 7 + 4\text{ 日},$$

所以 1905 年 4 月 3 日在星期的次序上比 1992 年 6 月 26 日早 4 日。由星期五倒數四日：星期四、星期三、星期二、星期一。因此

$$1905\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日是星期一。}$$

驗算

- 用電腦逐月直接計算兩個日期之間的日數，得出 31 861 日，即 $4 \pmod 7$；電腦日曆亦顯示 1905 年 4 月 3 日是星期一（而 1992 年 6 月 26 日是星期五）。

- 檢查方向是否合理：由星期一向前數 4 日得到星期五，正如所料。
- 用另一個方法核對閏日數目：87 年大約包含 $87/4 \approx 21.75$ 個閏日，所以 22 大致正確。

常見錯誤

- 把 1904 年 2 月 29 日（在起始日期之前）計算在內，或漏掉 1992 年 2 月 29 日（在結束日期之前）：兩者都會令答案相差一日。
- 應該向前數時倒數，或應該倒數時向前數：餘數 4 表示在星期的循環中，1905 年那一天是在星期五之前四日，而不是之後。
- 把這個方法推廣到更早的日期時，將 1900 年當作閏年。

STEP 之外

這就是模 7 的算術：關鍵事實 $365 \equiv 1 \pmod 7$ 把一個龐大的數目化為一個細小的數目。同餘（congruence），以及它在曆法謎題中的應用，例如用來求任何日期是星期幾的蔡勒公式（Zeller's congruence），都是數論（number theory）入門課程的標準內容。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（數論入門名著）是一本介紹同餘及其他眾多課題的佳作。

詳細解答

STEP I 1992，第 2 題

純數學 • 幻方與計數

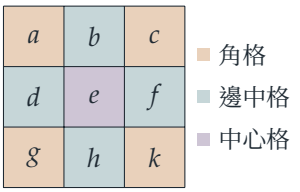
> **STEP I 1992，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q2

關鍵思路

一切都來自巧妙地把各條線加起來。把三個橫行全部相加，每個數恰好用了一次，由此得出 n。把通過中心的四條線相加，每個數用了一次，而中心則用了四次，這就確定了 e。此後，題目就變成一個規模不大、但須小心處理的分情況討論（case analysis）：一旦知道 e，每條通過中心的線都把兩個數配成一對，其和固定，於是留給大數的空間就非常有限。最後，正方形的對稱性（symmetry）（即把它旋轉）便替我們完成計數。

解答

先為三類方格命名會比較方便：四個角格 a, c, g, k，四個邊中格 b, d, f, h，以及中心格 e。



第 (i) 部分

三個橫行合起來，九個數每個恰好出現一次。因此，把三個橫行的和相加，

$$3n = (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+k) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

故 $n = 15$。

第 (ii) 部分

通過中心的線共有四條：中間橫行、中間直行和兩條對角線。把它們相加，

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g)=4n=60.$$

在左邊，除 e 以外的每個數恰好出現一次，而 e 出現四次，所以左邊等於 $45+3e$。因此 $45+3e=60$，得 $e=5$。

由此得到一個有用的推論：由於每條通過中心的線之和都是 15，而 $e=5$，所以隔着中心相對的兩個方格，其和必為 10：

$$a+k=c+g=b+h=d+f=10.$$

第 (iii) 部分

因為 $e=5$，所以 9 不在中心格。於是我們只須證明 9 不可能在角格。

用反證法（proof by contradiction）：假設 9 在某個角格。對每個角格，論證都是一樣的，所以取 $a=9$。那麼對角的角格是 $k=10-9=1$。最上橫行和最左直行都通過 a，所以

$$b+c=15-9=6 \qquad 及 \qquad d+g=15-9=6.$$

b,c,d,g 這四個數互不相同，並且取自用去 $1,5,9$ 之後餘下的數，即 $\{2,3,4,6,7,8\}$。要把 6 寫成這個集合中兩個不同的數之和，唯一的方法是 $2+4$（因為 $1+5$ 用了已經填入的數，而 $3+3$ 則重複）。所以 $\{b,c\}=\{2,4\}$ 且 $\{d,g\}=\{2,4\}$，這就需要 2 和 4 各用兩次，與各數互不相同矛盾。

> **想一想** 為甚麼只處理角格 a 就已足夠？

對任何一個角格，同樣的三項事實都成立：對角的角格必定是 1，而沿正方形的邊通過該角格的兩條線，各自餘下的兩個數之和都須為 6。所以會出現同樣的矛盾。（換個說法：把一個幻方（magic square）旋轉四分之一圈，會得到另一個幻方，而旋轉可把 a 帶到其餘每一個角格。）

所以 9 既不在中心格，也不在角格，它必定是 b,d,f,h 其中之一。

第 (iv) 部分

設 $b=9$。那麼 $h=10-9=1$，而最上橫行給出 $a+c=6$。一如 (iii)，未用的數是 $\{2,3,4,6,7,8\}$，其中和為 6 的一對相異數只有 $\{2,4\}$。所以或者 $a=2,\ c=4$，或者 $a=4,\ c=2$。

一旦 a 和 c 確定，其餘各數都由相對的數對和左右兩個直行完全決定：

- $a = 2$，$c = 4$：則 $k = 10 - a = 8$，$g = 10 - c = 6$，$d = 15 - a - g = 7$ 及 $f = 15 - c - k = 3$。
- $a = 4$，$c = 2$：則 $k = 6$，$g = 8$，$d = 15 - 4 - 8 = 3$ 及 $f = 15 - 2 - 6 = 7$。

推出這些必然的值，只說明它們是僅有的候選；我們仍須驗證它們確實可行。在兩種情況中，所填的數都是 $1, \ldots, 9$ 各一次，而且每個橫行、直行和對角線之和都是 15：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

（例如在第一個之中：橫行 $15, 15, 15$；直行 $2+7+6$、$9+5+1$、$4+3+8$；對角線 $2+5+8$、$4+5+6$。）所以 $b = 9$ 的幻方恰好有兩個，而第二個是第一個以中間直行為軸的鏡像。

第 (v) 部分

把一個幻方順時針旋轉四分之一圈，會得到另一個幻方：它的橫行是原來的直行，它的直行是原來的橫行（次序倒轉），而兩條對角線互換。四分之一圈的旋轉是可逆的（逆時針轉回去），所以它給出幻方之間的一一對應（one-to-one correspondence）。

順時針旋轉四分之一圈，會把方格 b 移到方格 f。所以 $f = 9$ 的幻方，正好就是 $b = 9$ 的幻方旋轉四分之一圈所得的，而且恰好有 2 個。再轉一次，$h = 9$ 的恰好有 2 個，$d = 9$ 的也恰好有 2 個。

由 (iii)，每個幻方的 9 都恰好位於 b, f, h, d 其中一個位置，所以這四組互不相交，並且涵蓋了所有幻方。因此共有

$$4 \times 2 = 8$$

個不同的 3×3 幻方。它們就是 (iv) 中的兩個幻方，連同它們旋轉四分之一圈、半圈和四分之三圈所得的幻方；換個說法，它們是同一個幻方的八個旋轉和反射（reflection）。

驗算

用電腦對 $1, \ldots, 9$ 的全部 $9! = 362\,880$ 種排列作一次簡短的搜尋，恰好找到 8 個幻方。它們的各線之和全是 15，中心全是 5，9 全都在邊中格，而 $b = 9$ 的兩個正是 (iv) 中找到的幻方。你也可以親手驗證：在每個幻方中，1 都在 9 的對面，而偶數 $2, 4, 6, 8$ 佔滿四個角格。

常見錯誤

- 在 (iv) 中，忘記驗證推出來的方陣確實是幻方。那段推論只說明其他填法都不可行。
- 在 (v) 中，只答「2」或「4」，卻沒有解釋為甚麼旋轉會產生新的、真正不同的幻方，或者沒有利用 (iii) 說明四種情況涵蓋一切而又互不重疊。

STEP 之外

第 (v) 部分讓你初嘗*羣作用*（group action）的滋味：正方形的八個對稱（四個旋轉和四個反射）構成一個羣（group），而全部幻方在這個羣的作用下組成單一個軌道（orbit）。像這樣在對稱意義下計算物件的數目，會在伯恩賽德引理（Burnside's lemma）中得到進一步發展，你會在羣論（group theory）的入門課程中遇到它。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）是一本平易近人的入門書。

詳細解答

STEP I 1992，第 3 題

純數學 • 奇函數與偶函數

> **STEP I 1992，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q3

關鍵思路

這裏每個積分都是在對稱區間 $[-\pi, \pi]$ 上計算的，所以對每個被積函數（integrand），首先要問的是：它是偶函數（even function）還是奇函數（odd function）？奇函數在對稱區間上的積分為零，而偶函數的積分則等於在 $[0, \pi]$ 上積分的兩倍，而在這個區間上絕對值（modulus）符號可以去掉。看出對稱性之後，四個部分各自最多只需一步簡短的計算。

解答

我們會用到兩個標準結果。若 $f(-x) = f(x)$（偶函數），則

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

而若 $f(-x) = -f(x)$（奇函數），則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。兩者都可以用代換（substitution）$x = -u$ 處理 $[-a, 0]$ 上的積分而得出，該積分會變成 $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$。

我們還需要 $\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$。

第 (i) 部分

由於 $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$，被積函數是偶函數。在 $[0, \pi]$ 上有 $\sin x \geq 0$，所以在該處 $|\sin x| = \sin x$。因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

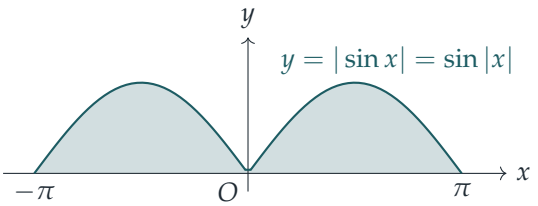
第 (ii) 部分

由於 $|-x| = |x|$，函數 $\sin|x|$ 是偶函數。在 $[0, \pi]$ 上，$|x| = x$，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4.$$

想一想 (i) 和 (ii) 的答案相同，是巧合嗎？

不是：在這個區間上，兩個被積函數其實是同一個函數。當 $0 \le x \le \pi$ 時，兩者都等於 $\sin x$。當 $-\pi \le x \le 0$ 時，我們有 $\sin x \le 0$，所以 $|\sin x| = -\sin x$，而 $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ 亦然。兩條曲線要到 $[-\pi, \pi]$ 之外才分道揚鑣：例如在 $x = 3\pi/2$ 處，$|\sin x| = 1$，但 $\sin|x| = -1$。



陰影區域由正弦曲線的兩個拱形組成，每個拱形的面積為 2。

第 (iii) 部分

這裏 $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$，所以被積函數是偶函數（兩個奇函數之積）。因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

運用分部積分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$（故 $v = -\cos x$）：

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= \left[-x\cos x\right]_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\pi\cos\pi - 0\right) + \left[\sin x\right]_{0}^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

第 (iv) 部分

現在 $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$，所以被積函數是奇函數（偶函數乘以奇函數）。於是它在對稱區間上的積分為

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

根本不必做十次分部積分！來自 $[-\pi, 0]$ 和 $[0, \pi]$ 的貢獻大小相等、符號相反，剛好完全抵消。

驗算

- 從面積判斷：在 (i) 中，被積函數非負且最大為 1，所以答案必定介乎 0 與 $2\pi \approx 6.28$ 之間；4 符合這個要求。
- 在 (iii) 中，$x\sin x \geq 0$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成立，所以答案必定為正數；2π 確是正數。對 $\sin x - x\cos x$ 求導得 $x\sin x$，由此確認原函數（antiderivative）無誤。
- 以森遜法則（Simpson's rule）取 20 000 個子區間計算，四個積分分別得 4.0000000、4.0000000、6.2831853 和 0.0000000。在 (iv) 中，這個零並非只是一個很小的數：$|x^{10}\sin x|$ 在同一區間上的積分約為 13 275，可見抵消是精確而徹底的。

常見錯誤

- 寫成 $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = 0$，忽略了絕對值。一個永不取負值的被積函數，除非幾乎處處（almost everywhere）為零，否則積分不可能是 0。
- 因為 $\sin x$ 是奇函數，便以為 $\sin|x|$ 也是奇函數。任何函數與 $|x|$ 複合，得出的必定是偶函數。
- 在 (iii) 的分部積分中弄錯正負號：記住 $\cos\pi = -1$，所以 $-\pi\cos\pi = +\pi$。

STEP 之外

把函數分拆成偶部和奇部，$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$，正是傅立葉級數（Fourier series）的出發點。在 $[-\pi, \pi]$ 上，偶部展開成餘弦項，奇部展開成正弦項，而像 (iii) 和 (iv) 這類積分，正是用來計算各項係數（coefficients）的積分。例如，x 的傅立葉級數中 $\sin x$ 的係數，就是來自 (iii) 的積分。Boyce 與 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教材）對傅立葉級數及其在求解微分方程（differential equations）中的應用，有一段淺白易讀的介紹。

詳細解答

STEP I 1992，第 4 題

純數學 • 阿根圖上的軌跡

> **STEP I 1992，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q4

關鍵思路

把每個條件改寫成關於 x 和 y 的敘述（其中 $z = x + \mathrm{i}y$），或者關於 z 的模（modulus）和輻角（argument）的敘述，所求的區域通常便一目了然。第 (i) 及 (ii) 部分只需要做到這一步。第 (iii) 部分則不同：它描述的是一個由和組成的集合，所以我們要證明兩件事。每一個和都落在我們所聲稱的區域之內，而該區域的每一點也確實是這樣的一個和。

解答

以下一律設 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 為實數。

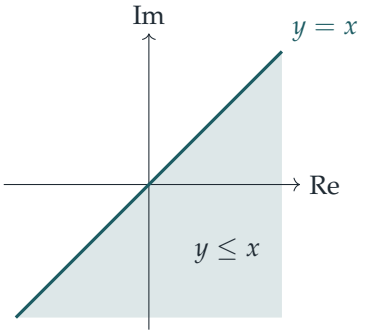
第 (i) 部分

展開得

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

所以 $\mathrm{Re}\big((1+\mathrm{i})z\big) = x - y$。條件就是 $x - y \geq 0$，即 $y \leq x$。這個集合是直線 $y = x$ 上及其下方的閉半平面（closed half-plane），包括直線本身。

從幾何角度看，乘以 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 相當於旋轉 $\frac{\pi}{4}$ 並放大 $\sqrt{2}$ 倍。因此條件是說，把 z 逆時針旋轉 $\frac{\pi}{4}$ 之後，它會落在右半平面 $\mathrm{Re} \geq 0$ 之內。這表示 $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$（或 $z = 0$），正是同一個半平面。



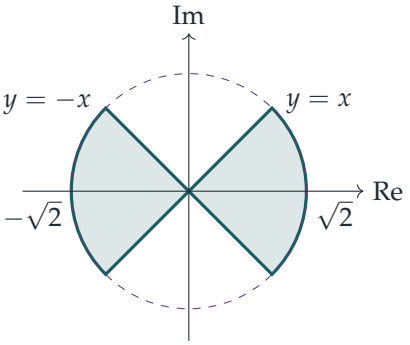
第 (ii) 部分

由於 $|z^2| = |z|^2$，第一個條件就是 $|z|^2 \leq 2$，即 $|z| \leq \sqrt{2}$：這是以原點為圓心、半徑為 $\sqrt{2}$ 的閉圓盤（closed disc）。

至於第二個條件，$z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy$，所以 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$，條件就是 $x^2 \geq y^2$，即 $|y| \leq |x|$。這是直線 $y = x$ 與 $y = -x$ 之間、包含實軸的一對相對的閉扇形（sector）區域。

用極式（polar form）來做會更快：若 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，則 $z^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$，所以我們需要 $r \leq \sqrt{2}$ 及 $\cos 2\theta \geq 0$，由此得 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$（或 $z = 0$）。

所求集合是兩者的交集（intersection）：兩個閉的四分之一圓盤（各為圓心角 $\frac{\pi}{2}$、半徑 $\sqrt{2}$ 的扇形），一個向右張開，一個向左張開，在原點相接。整條邊界都包括在內。



第 (iii) 部分

設 S 為所有這些和組成的集合。我們聲稱 S 就是閉圓環（annulus）$\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$。

每一個和都落在圓環之內。若 $|z_1| = 2$ 及 $|z_2| = 1$，由三角不等式（triangle inequality）得

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 3, \qquad |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| = 1.$$

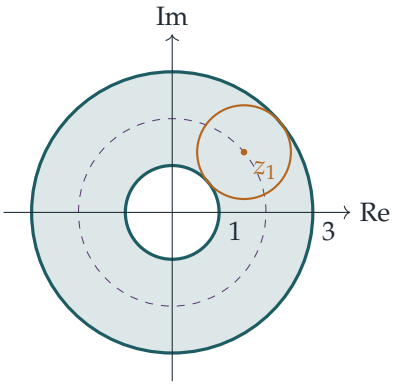
想一想 這樣就足夠了嗎？我們怎樣知道整個圓環都被填滿，而不只是圓環內的某條曲線？

這兩個不等式只說明 S 位於圓環之內，所以我們還要證明反方向的包含關係。任取一個滿足 $1 \leq |z| \leq 3$ 的 z。我們想找一個模為一的複數 z_2，使得 $|z - z_2| = 2$，因為這樣 $z_1 = z - z_2$ 的模便是 2，而且 $z = z_1 + z_2$。

從幾何角度看，z_2 必須同時位於以 0 為圓心的單位圓上，以及以 z 為圓心、半徑為 2 的圓上。兩個半徑分別為 1 和 2 的圓，若圓心相距 $d = |z|$，則它們相交當且僅當 $2 - 1 \leq d \leq 2 + 1$，而這正是我們的條件 $1 \leq |z| \leq 3$。

如果不想直接引用這個關於圓的事實，可以這樣看：設 $z = re^{i\alpha}$，並考慮 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$，它是 φ 的連續(continuous)函數。當 $\varphi = \alpha$ 時，點 $e^{i\varphi}$ 與 z 方向相同，所以 $f(\alpha) = |r - 1| = r - 1 \leq 2$。當 $\varphi = \alpha + \pi$ 時，它指向相反方向，所以 $f(\alpha + \pi) = r + 1 \geq 2$。根據中間值定理（intermediate value theorem），存在某個 φ 使得 $f(\varphi) = 2$，於是取 $z_2 = e^{i\varphi}$ 即可。

因此 S 恰好是圓 $|z| = 1$ 與圓 $|z| = 3$ 之間的閉圓環，兩個邊界圓都包括在內。有一個很好的想像方法：把 z_1 固定在半徑為 2 的圓上，$z_1 + z_2$ 便描出一個以 z_1 為圓心的單位圓。當 z_1 繞圓一周時，這些小圓便掃出整個圓環。



琥珀色的圓顯示了當 z_1 固定在虛線圓 $|z_1| = 2$ 上某一點時所得的各個和。

驗算

- 在 (i) 中，$z = 1$ 給出 $\mathrm{Re}(1 + \mathrm{i}) = 1 \geq 0$，而 $z = \mathrm{i}$ 給出 $\mathrm{Re}(-1 + \mathrm{i}) = -1 < 0$。這與 $y \leq x$ 吻合。
- 在 (ii) 中，$z = 1$ 屬於該集合而 $z = \mathrm{i}$ 不屬於（$\mathrm{i}^2 = -1$），所以兩個扇形應該包含實軸，與圖中所畫一致。

- 在 (iii) 中，$z_1 = 2$、$z_2 = -1$ 給出 1，而 $z_1 = 2$、$z_2 = 1$ 給出 3，所以兩個邊界圓都可以達到。我們用 200 000 個隨機點測試了全部三個描述。隨機所得的和，其模介乎 1.0000 與 3.0000 之間；而對於圓環內的 1000 個隨機點，都能找到合適的 z_2，誤差在 2×10^{-4} 以內。

常見錯誤

- 在 (ii) 中，只保留扇形 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$ 而忘記了左邊的那一個。z 與 $-z$ 的平方是相同的。
- 在 (iii) 中，用完三角不等式便停下來。這只說明 S 位於圓環之內，並未說明 S 就是整個圓環。
- 沒有交代邊界是否包括在內。這裏每一個不等式都是非嚴格的，所以每一條邊界都包括在內。

STEP 之外

第 (iii) 部分是兩個集合的閔可夫斯基和（*Minkowski sum*） $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ 的一個小例子，這個概念貫穿幾何學和凸分析（convex analysis）。雙向包含的論證（先證 $S \subseteq T$，再證 $T \subseteq S$）是證明兩個集合相等的標準方法，你在大學裏會經常用到。若想從幾何角度理解複數乘法就是旋轉加縮放（這會令 (i) 和 (ii) 幾乎一望而知），可參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析的著作）。

詳細解答

STEP I 1992，第 5 題

純數學 • 多項式的重因式

> **STEP I 1992，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q5

本題在 *Beyond STEP* 第 9.7 節相等的冪和中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/equal-power-sums.html

關鍵思路

若一個多項式（polynomial）有重因式（repeated factor）$(1-x)^m$，則對它求導（再乘以 x）之後，仍會留下因式 $(1-x)^{m-1}$。因此 1 是這個多項式的根（root），也是這條鏈中隨後幾個多項式的根。利用各多項式的係數（coefficient）計算它們在 $x=1$ 的值，會得到形如 $\sum k^r c_k$ 的和。當每個係數都是 ± 1 時，每一個這樣的和都表示：兩組整數的 r 次冪之和相等。

解答

因式 $(1-x)^3$

兩次運用平方差（difference of two squares），

$$1-x^2=(1-x)(1+x), \qquad 1-x^4=(1-x^2)(1+x^2)=(1-x)(1+x)(1+x^2),$$

所以

$$p_0(x)=(1-x)^3(1+x)^2(1+x^2),$$

故 $(1-x)^3$ 是 $p_0(x)$ 的因式，正如題目所求。

$p_0'(1)=0$ 與 $p_1'(1)=0$

我們先證明一個小結果，然後重複使用。

引理（*Lemma*）。若 $\mathrm{p}(x) = (1-x)^m \mathrm{q}(x)$，其中 $m \geq 1$，而 q 是多項式，則 $\mathrm{p}'(x)$ 有因式 $(1-x)^{m-1}$，因而 $x\mathrm{p}'(x)$ 亦然。

證明。根據積法則（product rule），

$$\mathrm{p}'(x) = -m(1-x)^{m-1}\mathrm{q}(x) + (1-x)^m \mathrm{q}'(x) = (1-x)^{m-1}\big[(1-x)\mathrm{q}'(x) - m\,\mathrm{q}(x)\big],$$

而方括號內是一個多項式。乘以 x 並不會除去這個因式。□

取 $m = 3$ 應用此引理：$\mathrm{p}_0'(x)$ 有因式 $(1-x)^2$，所以 $\mathrm{p}_0'(1) = 0$。同時 $\mathrm{p}_1(x) = x\mathrm{p}_0'(x)$ 也有因式 $(1-x)^2$。再取 $m = 2$ 應用引理，$\mathrm{p}_1'(x)$ 有因式 $1-x$，所以 $\mathrm{p}_1'(1) = 0$。

想一想 為甚麼不直接對三個括號的乘積求導，然後代入 $x = 1$？

這樣做也可以，但題目要求我們從因式出發論證，而且因式的論證才是可以推廣的那一種。重數（multiplicity）為 m 的根，經過 $m-1$ 次求導後仍然是根，而這正是最後一部分所需要的。

兩個恆等式

展開得

$$(1-x)(1-x^2) = 1 - x - x^2 + x^3,$$

然後

$$\mathrm{p}_0(x) = 1 - x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + x^6 - x^7.$$

所以 $c_0 = c_3 = c_5 = c_6 = 1$，而 $c_1 = c_2 = c_4 = c_7 = -1$。

現在

$$\mathrm{p}_0'(x) = \sum_{k=1}^{7} k\,c_k x^{k-1}, \qquad \mathrm{p}_1(x) = \sum_{k=0}^{7} k\,c_k x^k, \qquad \mathrm{p}_1'(x) = \sum_{k=1}^{7} k^2 c_k x^{k-1}.$$

代入 $x = 1$，並利用 $\mathrm{p}_0'(1) = 0$：

$$-1 - 2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7 = 0, \quad \text{即} \quad 1 + 2 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6.$$

利用 $\mathrm{p}_1'(1) = 0$：

$$-1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 - 7^2 = 0, \quad \text{即} \quad 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2.$$

（兩邊都等於 14；平方的情況則都等於 70。）c_0 一項沒有任何貢獻，因為它乘上了 0 或 0^2。

最後一部分

再多走一步。設

$$\mathrm{P}_0(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8) = \mathrm{p}_0(x)(1-x^8).$$

由於 $1-x^8 = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$，$\mathrm{P}_0(x)$ 有因式 $(1-x)^4$。對 $j = 0,1,2$，定義 $\mathrm{P}_{j+1}(x) = x\mathrm{P}_j'(x)$。根據引理，$\mathrm{P}_1$、$\mathrm{P}_2$ 和 P_3 分別有因式 $(1-x)^3$、$(1-x)^2$ 和 $(1-x)$，所以

$$\mathrm{P}_1(1) = \mathrm{P}_2(1) = \mathrm{P}_3(1) = 0.$$

記 $\mathrm{P}_0(x) = \sum_{k=0}^{15} d_k x^k$。每施行一次 $x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，$x^k$ 的係數便乘以 k，所以 $\mathrm{P}_r(x) = \sum_{k=0}^{15} k^r d_k x^k$，於是

$$\sum_{k=1}^{15} k^r d_k = 0 \qquad \text{其中} r = 1,2,3.$$

要求出各個 d_k，把 $\mathrm{p}_0(x)$ 乘以 $1-x^8$，得

$$\mathrm{P}_0(x) = \mathrm{p}_0(x) - x^8\mathrm{p}_0(x).$$

第二項給出 $x^8,\ldots,x^{15}$ 各項，其正負號與 p_0 的相反。兩部分沒有重疊，所以每個 d_k 都是 ±1：

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	−	+	−	−	+

（事實上 $d_k = (-1)^{s(k)}$，其中 $s(k)$ 是 k 的二進制展開式（binary expansion）中 1 的個數，因為 x^k 是按 k 的二進制數字，從對應的括號中選取 $-x^{2^i}$ 而得出的。）

撇除 $k = 0$，當 $k \in \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$（八個數）時係數 $d_k = -1$，當 $k \in \{3,5,6,9,10,12,15\}$（七個數）時 $d_k = +1$。這些數合起來恰好是 $1,2,\ldots,15$。於是取

$$(a_1,\ldots,a_8) = (1,2,4,7,8,11,13,14), \qquad (a_9,\ldots,a_{15}) = (3,5,6,9,10,12,15).$$

那麼 $\sum k^r d_k = 0$ 所說的正是

$$a_1^r + \cdots + a_8^r = a_9^r + \cdots + a_{15}^r \qquad (r = 1,2,3),$$

這就是我們要證明的結果。

想一想 為甚麼這個分法一邊有八個數，另一邊只有七個？

$+1$ 的一邊其實還包含 $k = 0$，而當 $r \geq 1$ 時它的貢獻是 $0^r = 0$，所以可以略去。這就是兩邊的項數不必相同的原因。（若 $r = 0$，恆等式便需要這個 0：這時是 $8 = 8$。）

驗算

直接計算：$r = 1$ 時兩邊之和為 $60 = 60$，$r = 2$ 時為 $620 = 620$，$r = 3$ 時為 $7200 = 7200$。我們用電腦展開了 P_0，確認了它各項的正負號，以及根 $x = 1$ 的重數為 4，並驗證了全部三個等式。當 $r = 4$ 時等式不成立（該根的重數只有 4），這正好顯示上述論證已是最佳的。

常見錯誤

- 忘記了 $k = 0$ 一項，因而以為兩邊的項數必須相同。
- 單憑 $\mathrm{p}_0''(1) = 0$ 便斷定 $\mathrm{p}_1'(1) = 0$。由於 $\mathrm{p}_1' = \mathrm{p}_0' + x\mathrm{p}_0''$，你需要 $\mathrm{p}_0'(1) = 0$ 和 $\mathrm{p}_0''(1) = 0$ 兩者同時成立。

STEP 之外

這就是 Prouhet–Tarry–Escott 問題：按二進制數字和的奇偶性（parity）把 $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ 分成兩組（即 Thue–Morse 數列），所得的兩個集合對所有 $r < n$ 都有相等的 r 次冪之和。它背後的工具——重數為 m 的根同時是首 $m - 1$ 階導數（derivative）的根——在任何域（field）上的多項式代數中都佔有核心地位。關於多項式及其根的代數，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）。至於更廣泛的數論（number theory），可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算術）。

詳細解答

STEP I 1992，第 6 題

純數學 • 小角近似

STEP I 1992，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q6

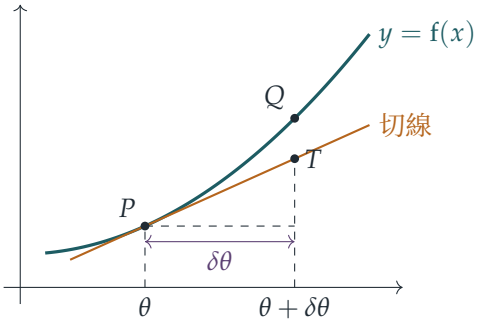
關鍵思路

遠處那一點 C 的角恰好是 ϕ，因為 $\theta + \phi$ 是三角形 ABC 的外角（exterior angle）。於是由正弦定理（sine rule）可求得 AC 的準確值。由於 C 非常遙遠，ϕ 必定極小，而小角近似（small-angle approximation，其實就是第一部分的線性近似換了個面貌）可把準確公式化成簡單的式子。至於誤差的問題，不過是把同一個線性近似再用一次，這次以 ϕ 為變數。

解答

線性近似

在點 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ 附近，f 的圖像非常貼近它的切線（tangent），而切線的斜率（gradient）是 $\mathrm{f}'(\theta)$。



向右移動一段距離 $\delta\theta$。沿着切線走，高度上升了（斜率）×（水平距離）$= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$，到

達 T。沿着曲線走，則上升至 Q，高度為 $\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)$。當 $\delta\theta\to 0$ 時，間距 QT 縮小得比 $\delta\theta$ 本身還要快，因為

$$\frac{\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)-\mathrm{f}(\theta)}{\delta\theta}\to \mathrm{f}'(\theta)$$

正正就是導數（derivative）的定義。所以當 $\delta\theta$ 很小時，

$$\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)\approx \mathrm{f}(\theta)+\mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta.$$

C 的距離

在三角形 ABC 中，A 處的角是 θ，而 B 處的外角是 $\theta+\phi$。外角等於兩個內對角之和，所以

$$\angle ACB=\phi.$$

B 處的內角是 $\pi-(\theta+\phi)$，而 $\sin(\pi-x)=\sin x$，所以由正弦定理得出以下準確結果：

$$AC=\frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi},\qquad h=AC\sin\theta=\frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

想一想 「h 遠大於 a」這個條件究竟在哪裏用上？

它告訴我們 ϕ 很小。把準確公式重新整理，得 $\sin\phi=a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h\le a/h$，所以 $h\gg a$ 迫使 $\sin\phi$ 極小，因而 ϕ 也極小。（從非常遙遠的 C 望過來，基線（baseline）AB 所張的角幾乎是零。）現在取 $\mathrm{f}=\sin$，應用第一部分的結果：

$$\sin(\theta+\phi)\approx\sin\theta+\phi\cos\theta\approx\sin\theta,\qquad \sin\phi\approx\sin 0+\phi\cos 0=\phi.$$

因此

$$h\approx\frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

這正是所求的結果，並且

$$AC=\frac{h}{\sin\theta}\approx\frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

（若保留 $\phi\cos\theta$ 一項，會得到 $AC\approx a\sin\theta/\phi+a\cos\theta$。多出來的部分只有 a 的大小，與量級為 h 的距離相比可以忽略不計。）

ϕ 的誤差所造成的影響

把 AC 看成函數 $g(\phi)=a\sin\theta\,\phi^{-1}$，其中 θ 固定不變，因為它的量度是準確的。根據第一部分，誤差 $\delta\phi$ 會令估計值改變

$$\delta(AC)\approx g'(\phi)\,\delta\phi=-\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

所以 AC 的誤差大小約為 $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$；高估 ϕ 就會低估距離。

想一想 如果把 a 加倍，公式的分子有 a，誤差豈不是也加倍？

不會，因為 ϕ 並非固定：它取決於基線的長度。點 C（因而 h）保持不變，而由 $h \approx a\sin^2\theta/\phi$ 可得 $\phi \approx a\sin^2\theta/h$，所以把 a 加倍，ϕ 也大約加倍。（由於 C 非常遙遠，θ 只有極輕微的改變。）以固定的量 h 來表示誤差：

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

對於相同的儀器誤差 $\delta\phi$，AC 的誤差與 a 成反比。**把兩台望遠鏡之間的距離加倍，誤差大約減半**。

驗算

- 取 $a = 1$、$\theta = \pi/6$、$\phi = 10^{-4}$。準確公式給出 $h \approx 2500.43$ 和 $AC \approx 5000.87$；近似公式則給出 2500 和 5000。AC 的差別約為 $0.87 \approx a\cos\theta$，與額外一項所預測的完全吻合。
- 直接把 C 當作兩條視線的交點來計算，對數以千計隨機選取的 a、θ 和細小的 ϕ，結果與兩個近似式的差距都在 0.1% 以內，而細小的 $\delta\phi$ 所引致的 AC 變化亦與 $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$ 相符。
- 對於固定的遠處一點 C，分別以基線 a 和 $2a$ 重新計算 ϕ，再對兩者加上相同的擾動 $\delta\phi$，所得的誤差比為 2。
- 量綱（dimensions）：$a\sin^2\theta/\phi$ 是長度，因為以弧度（radian）表示的角是無量綱的。

常見錯誤

- ϕ 以度為單位時使用 $\sin\phi \approx \phi$。這個近似式與 sin 的 f′ 一樣，必須使用弧度。
- 把 ϕ 當作固定，從而斷定誤差隨 a 加倍。目標固定的是 h，而不是 ϕ。
- 沒有察覺 $\angle ACB = \phi$，轉而建立坐標來計算。這樣做也行得通，但較為費時。

STEP 之外

這就是利用視差（parallax）進行的三角測量（triangulation），天文學家正是用這個方法，以地球軌道為基線，量度鄰近恆星的距離。這裏的誤差分析讓我們初嘗誤差傳遞（error propagation）的滋味：在一階近似下，量度值的誤差 δx 會在任何由它計算出來的量中變成誤差 $g'(x)\,\delta x$。這個想法經帶餘項的泰勒定理（Taylor's theorem）嚴格化之後，是

大學一年級分析學（analysis）的核心內容；參閱 Abbott, *Understanding Analysis*（分析學入門教材）。

詳細解答

STEP I 1992，第 7 題

純數學 • 整值多項式

> **STEP I 1992，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

關鍵思路

不要試圖證明各係數（coefficient）都是整數（integer），因為對二次函數（quadratic function）而言，它們不一定是整數：$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ 在每個整數處都取整數值。正確的做法是用已知的整數值表示各係數，再代回原式，使 $\mathrm{f}(n)$ 寫成 $\mathrm{f}(-1)$、$\mathrm{f}(0)$ 和 $\mathrm{f}(1)$ 的組合，而各項的乘數都是整數。至於最後一部分，只要把原點平移，便是把中間部分再做一次。

解答

線性函數

由於 $\mathrm{g}(0)=b$ 及 $\mathrm{g}(1)=a+b$，我們有 $b=\mathrm{g}(0)$ 及 $a=\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0)$，兩者都是整數。因此對任意整數 n，

$$\mathrm{g}(n)=an+b=\mathrm{g}(0)+n\big(\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0)\big),$$

這是若干個整數乘積之和，所以是整數。

二次函數

設 $p=\mathrm{f}(-1)$，$q=\mathrm{f}(0)$，$r=\mathrm{f}(1)$，三者都是整數。於是

$$p=A-B+C,\qquad q=C,\qquad r=A+B+C,$$

解之，得

$$C=q,\qquad B=\frac{r-p}{2},\qquad A=\frac{p+r-2q}{2}.$$

所以 A 和 B 不一定是整數；它們可以是奇數的一半。把這些結果代入 $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$，並按 p、q 和 r 整理各項：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

? **想一想** p 和 r 的乘數，分母都有一個 2。為甚麼它們是整數？

對於整數 n，$n-1$ 和 n 是兩個連續整數，其中必有一個是偶數，所以 $n(n-1)$ 是偶數。同理，$n(n+1)$ 也是偶數。因此 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 都是整數，而 $1-n^2$ 也是整數。故此 $\mathrm{f}(n)$ 是若干個整數乘積之和，所以對每個整數 n 它都是整數，這正是所要證明的。

（這三個乘數都是二次式，各自在 $-1, 0, 1$ 的其中一點取值 1，而在另外兩點取值 0。這就是拉格朗日（Lagrange）插值法（Lagrange interpolation）。）

最後一部分

設 α 為實數，並定義 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$。展開後得

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

所以 h 同樣是形如 $A'x^2 + B'x + C'$ 的函數，而且係數都是實數。中間部分的論證除了用到 A、B、C 是實數之外，並沒有用到它們的其他性質。現在

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

按假設都是整數。因此，把中間部分的結果應用於 h，可知對每個整數 n，$\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$ 都是整數。具體寫出來就是

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

驗算

- 把 $n = -1, 0, 1$ 代入 $\mathrm{f}(n)$ 的公式：各乘數分別變成 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$，正好還原出 p、q、r。
- 以 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ 為例，有 $p = 0$，$q = 0$，$r = 1$，而公式給出 $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$，即三角形數（triangular numbers）。
- 數值驗算：取 $\alpha = \sqrt{2}$ 及 $\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$，$\mathrm{f}(\alpha) = -7$，$\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$，則通過這三點的二次函數給出 $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$，與 $10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$ 吻合。

常見錯誤

- 聲稱 A、B、C 必定是整數。它們不一定是整數，任何依賴這一點的論證都是錯的。
- 在最後一部分，試圖證明 α 必定是整數或有理數。它可以是任何實數；重要的只是平移。

STEP 之外

在每個整數處都取整數值的多項式（polynomial），恰好就是二項式係數（binomial coefficients）$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ 的整數組合。對二次多項式而言，這些就是 1、x 和 $\frac{1}{2}x(x-1)$，而這個結果可用有限差分（finite differences）證明：一個 d 次多項式，只要在 $d+1$ 個連續整數處取整數值，它就是整值（integer-valued）多項式。同樣的想法也是數值分析（numerical analysis）中牛頓（Newton）前向差分公式（forward-difference formula）的基礎。關於整值函數與整除性（divisibility）的更多內容，可參閱 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門經典）。

詳細解答

STEP I 1992，第 8 題

純數學 • 微積分基本定理

> **STEP I 1992，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q8

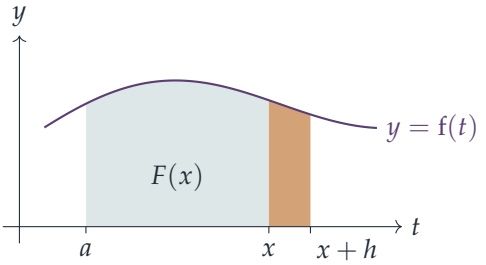
關鍵思路

上限為變量的積分，是一塊隨上限移動而增長的面積，而它的增長率正好等於曲線在該上限處的高度。單憑這一個事實（微積分基本定理，Fundamental Theorem of Calculus），就可以把題目中每一條積分方程化為微分方程（differential equation）。求導會失去有關常數的資料，所以我們每次都要把一個方便的 x 值（通常是 $x = 0$）代入原來的方程，把它找回來。

解答

積分的導數

設 $F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，即 $y = \mathrm{f}(t)$ 之下由 $t = a$ 至 $t = x$ 的面積。把 x 增加一個微小的量 h，就會多出一條闊度為 h 的窄條：



這條窄條的面積是 $F(x+h) - F(x)$。若 f 是連續（continuous）的，則在 $[x, x+h]$ 上，曲線與 $\mathrm{f}(x)$ 的差距不會超過一個微小的量 $\varepsilon(h)$，而當 $h \to 0$ 時 $\varepsilon(h) \to 0$。因此窄條夾

在高度為 $\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$ 的兩個長方形之間：

$$\big(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h)\big)h \le F(x+h) - F(x) \le \big(\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h)\big)h.$$

除以 $h > 0$（$h < 0$ 的情況相同，只是窄條在左邊），再令 $h \to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

留意結果中並沒有 a：改變下限只會令 F 加上一個常數。

方程 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

根據上面的結果，右邊是可導（differentiable）的，所以 f 也可導，而兩邊求導可得

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

把 $x = 0$ 代入原來的方程，積分的區間長度為零，所以 $\mathrm{f}(0) = 1$。

想一想 我們怎樣知道 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ 除了 e^x 的倍數之外，再沒有其他解？

考慮 $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$。由積法則（product rule），

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)\big) = 0,$$

所以 g 是常數，而 $g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$。因此 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$，即 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$，正如題目所求。（反過來，$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$，所以它確實是一個解。）

方程 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

與之前完全一樣，$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$，所以 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ 是常數。但這次代入 $x = 0$ 得 $\mathrm{f}(0) = 0$，所以該常數是 0，而唯一的解是

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{對所有} x.$$

上一條方程中的「+1」正是決定指數函數大小的關鍵；沒有了它，就只剩下零函數。

最後部分

把兩邊對 x 求導。在右邊，x 現在是下限，而

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

因此

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

由於 $1+x^2>0$，我們可以把兩邊除以它，得

$$\mathrm{f}(x)=1-x^2.$$

要求 C，把 $x=0$ 代入題目給出的方程。左邊以及 $x-\frac{x^5}{5}$ 各項都變為零，餘下

$$0=\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t+C=\left[\tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^5}{5}\right]_0^1+C=\tfrac{2}{15}+C,$$

所以 $C=-\frac{2}{15}$，正如題目所求。

想一想 求導只告訴我們兩邊的導數相同。$\mathrm{f}(x)=1-x^2$ 和 $C=-\frac{2}{15}$ 是否真的對每一個 x 都滿足方程？

是的。取這個 f 時，兩邊的導數對所有 x 都相等，所以兩邊只相差一個常數；而我們選取 C，正是要令兩邊在 $x=0$ 時相等。因此兩邊處處相等。反過來，任何解都必須滿足求導後的方程，所以 $1-x^2$ 是唯一可能的 f。

驗算

- 當 $x=1$：左邊是 $\int_0^1(1-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$，右邊是 $0+1-\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$。兩者吻合。
- 數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）可得 $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t\approx 0.133333=\frac{2}{15}$，而最後一條方程的兩邊在 $x=-1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$ 處的相差都在 10^{-10} 之內。

常見錯誤

- 當變量是下限時忘記負號：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t=-g(x)$。
- 解出 $\mathrm{f}'=\mathrm{f}$ 後停在 $A\mathrm{e}^x$：要靠原來的積分方程在 $x=0$ 時的情況，才能確定 A。
- 寫出 $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 這類式子，把啞變量（dummy variable）t 與上限 x 混為一談。

STEP 之外

未知函數出現在積分之內的方程，稱為*積分方程*（integral equations）；本題這類帶有可變積分限的方程是沃爾泰拉方程（Volterra equations），它們等價於微分方程的初值問題（initial-value problem）。在大學的第一個分析課程中，你會從黎曼積分（Riemann integral）的定義出發，嚴謹地證明微積分基本定理，而上面的窄條論證就會變成一個 ε–δ 證明。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把這部分寫得十分易讀。

詳細解答

STEP I 1992，第 9 題

純數學 • 微分方程

STEP I 1992，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q9

關鍵思路

一切都源自一條方程：水的體積的變化率等於（流入率）減（流出率）。利用相似三角形（similar triangles），體積是水深 x 的一個簡單函數，於是鏈式法則（chain rule）便把這條方程化為關於 x 的微分方程（differential equation）。在第一部分，這條方程可以乾淨利落地分離變數（separate variables）；在第二部分，我們不去求解，而是從 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的正負號，以及它等於零時的水深，直接讀出水位的變化情況。

解答

圓錐排空

當水深為 x cm 時，水佔據一個較小的圓錐，它與整個濾器相似，高為 x，半徑為 r。由相似三角形得 $r/x = a/H$，所以 $r = ax/H$，而水的體積為

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

由鏈式法則，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

水只出不入，流出率為 Ax，所以 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$。因此

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

這裏我們除以了 x，只要圓錐內仍然有水（$x > 0$），這樣做是容許的。左邊就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$，所以 $\frac{1}{2}x^2$ 以恆定的速率 $AH^2/(\pi a^2)$ 減少。它由 $\frac{1}{2}h^2$ 開始，到達 0 時圓錐便排空，所以

所需時間為

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 秒},$$

正如題目所求。（等價的做法是分離變數：$\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$。）

同時注水

現在 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$，所以

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

由於 $x > 0$，因子 $H^2/(\pi a^2 x^2)$ 是正數，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的正負號與 $B - Ax$ 相同。記 $c = B/A$。那麼

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0 \text{ 當} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ 當} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0 \text{ 當} x > c.$$

所以 $x = c$ 是一個平衡（equilibrium）水深，此時流入量與流出量剛好相抵，而水位總是朝着 c 移動。這個水深只有在 $c \le H$ 時才可能實際出現在濾器之內，所以各種情況取決於 c 與 h 及 H 的大小比較。

想一想 如果水位正朝着 c 移動，它最終會否真的到達該處，甚至越過它？

它不可能越過：要越過 c，就必須先等於 c，而在該處 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$。事實上，它在有限時間內永遠到不了 c。把 t 看成 x 的函數，水位由 h 變到介乎 h 與 c 之間的某個水深 X 所需的時間為

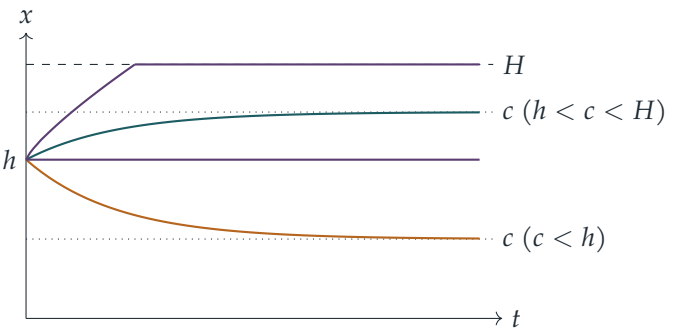
$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

在 $x = c$ 附近，被積函數（integrand）的表現有如 $\frac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\frac{1}{c-x}$，其積分是 $-\ln(c-x)$ 的倍數；當 $X \to c$ 時，它趨向無窮大。所以水位愈來愈慢地逼近 c，要「經過無限長的時間」才到達。無論從哪一邊逼近，同樣的論證都適用。

因此各種情況如下：

- $B < Ah$（即 $c < h$）。起初 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$：水位下降，愈降愈慢，並從上方趨向 $c = B/A$ 而不會到達。特別要注意，與第一部分不同，圓錐永遠不會排空（因為 $c > 0$）。
- $B = Ah$（即 $c = h$）。這時 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ 從一開始就成立：水流入的速率與排出的速率相同，水位保持在 h。
- $Ah < B < AH$（即 $h < c < H$）。水位上升，愈升愈慢，並從下方趨向 B/A。水位始終低於 H，所以濾器永遠不會滿溢。
- $B = AH$（即 $c = H$）。水位朝着邊緣上升並趨向 H，但根據上面的論證，它永遠不會真正到達，所以（在這個模型中）濾器永遠不會滿溢。

- $B > AH$（即 $c > H$）。現在對所有 $x \le H$ 都有 $B - Ax \ge B - AH > 0$，而且 $x^2 \le H^2$，所以
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$
上升速率有一個正的常數作為下界，所以水位在有限時間內到達邊緣，最多需時 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$ 秒。此後濾器滿溢：水位保持在 H，而多出的 $B - AH$ $\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}$ 從頂部溢出。



草圖顯示了幾種典型情況：下降至 c（琥珀色）、停留在 h 或在有限時間後滿溢（紫紅色），以及上升至 c（藍綠色）。

驗算

- 代入 $B = 0$ 得 $c = 0$：水位朝着 0 下降，與第一部分吻合（在那裏水位確實到達 0，因為流出率 Ax 與 x 成正比，而體積則隨 x^3 變化，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$ 並不趨向 0）。
- 以數值驗證：取 $a = 3$、$H = 8$、$A = 0.7$、$h = 5$，公式給出 $T \approx 7.889\,\mathrm{s}$，而按時間逐步推算 x^2 亦得到相同結果。對第二條方程作數值積分，可以確認每一種情況；例如當 $B/A = 9 > H$ 時，水位約在 41.5 s 後到達 H，而當 $B/A = 7$ 時，水位與 7 相差不超過 ε 所需的時間，在 ε 每除以 10 時便增加約 71 s，正是上文所預測的對數式增長。

常見錯誤

- 使用圓柱體積 $\pi a^2 x$，而不是高為 x 的相似圓錐的體積。
- 聲稱水位在有限時間內到達 B/A，或聲稱水位會越過它然後來回振盪。
- 忘記了邊緣：平衡水深 B/A 只有在 $B/A \le H$ 時才會達到；否則濾器會滿溢。

STEP 之外

第二部分讓你初嘗微分方程的定性（qualitative）理論：對於 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$，你可以找出平衡點（$f$ 的零點），根據 f 在兩側的正負號判斷它們的穩定性（stability），再利用解的唯一性（uniqueness）證明解只會逼近平衡點而永遠不會越過，整個過程完全不用求解任何方程。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）正是以這種精神處理自治方程（autonomous equations）與穩定性。

詳細解答

STEP I 1992，第 10 題

力學 ・ 反衝與動量

STEP I 1992，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q10

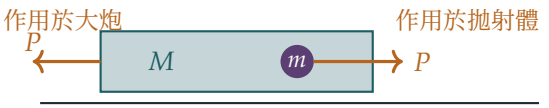
關鍵思路

力 P 把拋射體(projectile)向前推，但根據牛頓第三定律(Newton's third law)，拋射體同時以同樣大小的力 P 把大炮向後推，而水平方向上沒有任何東西阻止大炮後座（recoil）。因此，拋射體在炮管內時，相對於地面走過的距離並不是 l：它是相對於大炮走過了 l。兩個物體的加速度都是常數，所以最簡潔的做法是考慮相對運動（relative motion）。

解答

模型

我們把拋射體和大炮都看成沿同一條水平直線運動的質點（particle），把地面看成光滑（大炮可「自由滑動」），並把拋射體與炮管之間沿炮管方向的力看成常數 P。在鉛垂方向上，重量與法向反作用力（normal reaction）互相平衡（地面作用於大炮，炮管作用於拋射體），所以它們對水平運動沒有影響。取發射方向為正方向。



兩個加速度

拋射體在炮管內時，它所受的唯一水平力是向前的 P，而大炮所受的唯一水平力是向後的反作用力 P（牛頓第三定律；地面光滑）。根據牛頓第二定律（Newton's second law），兩者的加速度為

$$a_{\text{proj}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{cannon}} = -\frac{P}{M}.$$

兩者都是常數，而且兩個物體都由靜止開始運動。

想一想 拋射體在多長的距離內加速：是 l，還是別的距離？

炮管的長度是 l，但炮管本身在向後移動。當拋射體相對於大炮的位移（displacement）達到 l 時，它便離開炮管。相對於大炮，拋射體由靜止開始運動，其加速度為常數

$$a_{\text{rel}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}.$$

在炮管內的時間

對相對運動使用 $s = \frac{1}{2}at^2$，拋射體在時刻 T 離開炮管，其中

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{所以} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

出口速率

相對於地面，拋射體由靜止開始以恆加速度 P/m 運動，所以在時刻 T 它的速率 v 滿足

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

由於 $v > 0$，

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

這正是所求的結果。

另一途徑：能量與動量

利用守恆定律（conservation laws）也可得到同一答案。水平方向上沒有外力，所以水平動量(momentum)守恆：若拋射體離開炮管的一刻大炮向後的速率為 V，則 $mv = MV$。若拋射體在炮管內的期間，拋射體向前移動了 x，大炮向後移動了 X，則 $x + X = l$。作用於拋射體的力所作的功（work）為 Px，而作用於大炮的反作用力與大炮的運動方向相同，所作的功為 PX；兩者合共作功 $P(x+X) = Pl$。因此

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

由此同樣得到 $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$。

驗算

- 重型大炮：當 $M \to \infty$ 時，因子 $M/(M+m) \to 1$，而 $v \to \sqrt{2Pl/m}$，即大炮固定不動時的速率（所作的功 Pl 全部歸於拋射體）。大炮後座時，所得的速率總會略小一些，這是理所當然的，因為部分能量用於後座。
- 單位：Pl 是能量，而 Pl/m 的單位是 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，所以 v 是速率。
- 數值：取 $m = 0.1$、$M = 0.9$、$P = 9$ 及 $l = 0.5$（國際單位制，SI units），公式給出 $v = 9\ \mathrm{m\,s^{-1}}$，而大炮以 $1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 後座。於是動量為 $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$，動能（kinetic energy）為 $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$。對兩個物體作逐步數值模擬，在兩者的相對位移達到 l 時停止，所得結果在 m、M、P 和 l 取多組隨機數值時均與公式吻合。

常見錯誤

- 使用 $v^2 = 2(P/m)l$，即把 l 當作拋射體相對於地面走過的距離，忽略了後座。
- 忘記牛頓第三定律，讓大炮保持靜止；大炮可自由滑動，所以必定後座。
- 使用能量方法時，只把所作的功取為 P 乘以拋射體相對於地面的位移；其實作用於大炮的反作用力也有作功。

STEP 之外

這是一個二體問題（two-body problem），而相對加速度 $P(M+m)/(mM)$ 正是 P 除以約化質量（reduced mass）$\mu = mM/(m+M)$。任何兩個只與對方相互作用的物體，彼此之間的相對運動都如同一個質量為 μ 的單一物體；同一想法可用來處理行星軌道、雙星和粒子碰撞，也是火箭問題和後座問題的基礎。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對這裏的約化質量和動量兩方面的想法都有詳細闡述。

詳細解答

STEP I 1992，第 11 題

力學 • 彈性繩的平衡

STEP I 1992，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q11

關鍵思路

每個質點都處於平衡（equilibrium）狀態，所以緊接其上方的張力比緊接其下方的張力大 mg。這就把三個張力聯繫起來，而虎克定律（Hooke's law）則把張力化為伸長量。我們還需要的另一項事實是幾何上的：三條拉長後的弦線，長度之和必須等於房間的高度。一旦求得各高度，「$CD = a$」只不過是說最低的那條弦線沒有張力。

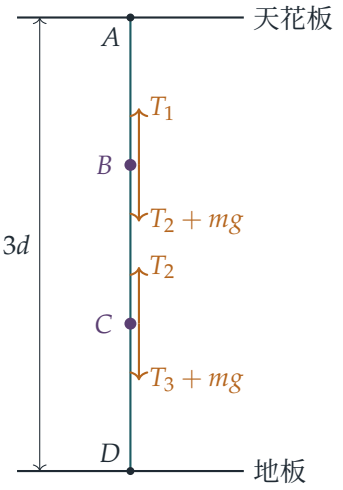
解答

模型

各弦線為輕質彈性弦線（light elastic string），拉長時遵從虎克定律（張力 $= \lambda \times$ 伸長量 $/a$）；各質點靜止不動。設 T_1、T_2、T_3 為 AB、BC、CD 的張力（tension），x_1、x_2、x_3 為它們的伸長量（extension），於是 $T_i = \lambda x_i / a$。為方便起見，我們給單靠重量 mg 所產生的伸長量起一個名字：

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

我們先假設三條弦線全部拉緊（taut），稍後再檢查這在甚麼情況下成立。設 y_B、y_C 為由地板量起的高度。



B 和 C 的高度

對每個質點沿鉛垂方向分解力（上方的弦線向上拉，下方的弦線和重量向下拉）：

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

兩式除以 λ/a，便成為關於伸長量的關係式：

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{所以} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

三條弦線的總長度就是房間的高度：

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

於是 $x_2 = d - a$，$x_1 = d - a + e$。由下方各弦線的長度即可求得高度：

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

用 AB 驗算一下：$3d - y_B = d + e = a + x_1$，正如所料。

想一想 這些答案究竟在甚麼情況下才成立？

我們假設了每條弦線都拉緊，所以每個伸長量都必須至少為零。最嚴格的條件落在最低的弦線上：$x_3 \geq 0$，即

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

（這時 $x_2 = d - a \geq 0$ 和 $x_1 > 0$ 自動成立。）CD 最先鬆弛（slack）是合理的：它不用支撐任何東西，只是靠房間把弦線拉開才保持拉緊。若 $mga/\lambda > d - a$，弦線 CD 便

會鬆弛，整個系統只不過是兩個質點懸掛在 A 之下：這時 $T_2 = mg$，$T_1 = 2mg$，所以 $AB = a + 2e$，$BC = a + e$，從而 $y_B = 3d - a - 2e$，$y_C = 3d - 2a - 3e$，前提是這個位置仍在地板之上。題目所指的是所有弦線都拉緊的主要情況。

何時可以有 $CD = a$？

弦線 CD 的長度等於其自然長度 (natural length)，當且僅當它剛好拉緊而沒有張力，即 $T_3 = 0$，亦即 $x_3 = 0$。這正是上述兩種情況的分界，而用任何一組公式都可得

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

從物理上看，這時位於 C 的質點完全由 BC 支撐，$T_2 = mg$，而 $T_1 = 2mg$。

合適的質量存在，當且僅當這個 m 的值為正數，這需要 $d > a$。反過來說，若 $d \le a$，則沒有任何正數 m 可行：假如所有弦線都拉緊，我們便需要 $x_2 = d - a \ge 0$ 和 $x_3 = d - a - e < 0$，這是不可能的，所以 CD 鬆弛，C 懸於高度 $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$（或停在地板上），因此 $CD < a$。故所求的值的集合為

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

對這樣的 d，我們得到 $y_C = a$，$y_B = d + a$ 和 $AB = 2d - a$。

驗算

- 單位：mga/λ 是力乘以長度再除以力，所以是長度；它要從 d 中減去，理應如此。
- 當 $m = 0$ 時，三條弦線平均分擔伸長：每條的長度都是 d，C 位於 d，B 位於 $2d$。加上質量後，兩個質點都下降相同的距離 e，因為 BC 的伸長量保持為 $d - a$。
- 數值上，對 250 組隨機選取的 a、λ、d、m，在 $0 \le y_C \le y_B \le 3d$ 的範圍內求位能 (potential energy) 的最小值（重力位能加彈性位能，並容許弦線鬆弛），所得高度在拉緊和 CD 鬆弛兩種情況下都與上述結果吻合，誤差在 10^{-14} 以內。取 $a = 1$、$\lambda = 10$、$d = 2$ 和 $m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$，得出 $CD = 1.000000$ 和 $y_B = 3.000000$；當 $d \le a$ 時，沒有任何正數 m 能使 $CD = a$。

常見錯誤

- 把張力寫成 $\lambda\times$（拉長後的長度）$/a$，而不是 $\lambda\times$ 伸長量 $/a$。
- 忘記總長度由房間決定：沒有 $\sum(a + x_i) = 3d$，單靠平衡方程並不能確定各伸長量。
- 假設每條弦線都必定有張力。弦線是可以鬆弛的，而 $CD = a$ 恰好發生在鬆弛的分界上。

STEP 之外

這是一個小型的靜不定結構(statically indeterminate structure)：單靠質點的平衡並不能確定各張力，我們還需要一個相容條件（compatibility condition，即各長度之和固定）。同一個想法寫成矩陣形式，就是工程師分析由彈簧和桿件組成的構架的方法。另一個切入點是求總位能的最小值，上面的數值驗算正是這樣做的；這種變分（variational）觀點在往後的力學中佔有核心地位。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對彈簧、平衡和位能有仔細的講解。

詳細解答

STEP I 1992，第 12 題

力學 • 涉及摩擦力的靜力學

STEP I 1992，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q12

關鍵思路

兩把梯子都是輕質的，所以要為其中一把梯子列出有用的方程，唯一的辦法就是對鉸鏈（hinge）A 取力矩（moments）：這樣可以消去另一把梯子所施的未知力，以及 A 處負重所施的力。梯腳有向外滑開的趨勢，而這股向外的推力，一部分由摩擦力（friction）抵消，一部分由木桿抵消。在梯子倒塌的一刻，摩擦力已經用盡，餘下的就要由木桿承擔。

解答

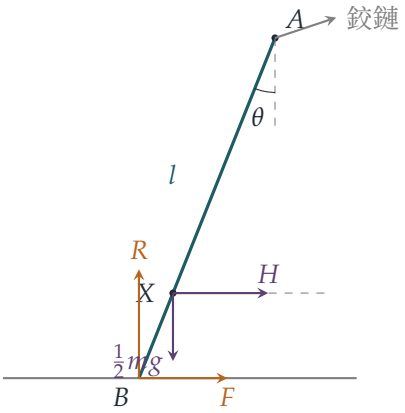
模型

兩把梯子是輕桿，在 A 處以光滑鉸鏈連接。木桿 XY 是均勻的，質量為 m，並在 X 和 Y 處以銷釘接合（pin-jointed）。質量 M 視為位於 A 的質點（particle）。設 $t = \tan\theta$。由於整個裝置左右對稱，兩隻梯腳所受的法向反作用力（normal reaction）相等，設為 R；對整座摺梯沿鉛垂方向分解力，可得

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

由於梯子向外傾斜，梯腳有向外滑開的趨勢，所以每隻梯腳所受的摩擦力 F 都指向內。

木桿所施的力。 木桿是水平的，而且本身有重量，所以它兩端所受的力並不沿着木桿的方向。根據對稱性，兩端各承受木桿重量的一半，所以梯子在 X 處對木桿施加向上的力 $\frac{1}{2}mg$，同時施加一個向外的水平力 H（即張力（tension））。根據牛頓第三定律（Newton's third law），木桿在 X 處對梯子 AB 施加向內的水平力 H 和向下的鉛垂力 $\frac{1}{2}mg$。



對梯子 AB 以 A 為支點取力矩

從 A 量起，梯腳 B 的水平距離為 $l\sin\theta$，鉛垂距離為向下 $l\cos\theta$；而 X 的水平距離為 $\frac{3}{4}l\sin\theta$，鉛垂距離為向下 $\frac{3}{4}l\cos\theta$。對 A 取力矩（作用於 A 的力全部沒有力矩）：

- R 使梯子向一個方向轉動，力矩為 $Rl\sin\theta$；
- F 和 H（兩者都指向內，作用點在 A 的下方）使梯子向另一個方向轉動，力矩分別為 $Fl\cos\theta$ 和 $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$；
- 作用於 X 的向下力 $\frac{1}{2}mg$ 與 R 在同一側，但方向相反，其力矩 $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$ 與 R 的力矩相抗。

因此

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

兩邊除以 $l\cos\theta$，再代入 R 的值，得

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

想一想 摩擦力和木桿都在把梯腳向內拉住。那麼 F 應該取哪個值？

方程 $(*)$ 表明，摩擦力和張力要合力分擔一個固定的總量：摩擦力承擔得愈多，木桿需要承擔的就愈少。所以，只要有某個容許的摩擦力（$F\le\mu R$）能令 $H\le T$，摺梯就不會倒塌；而最小的張力出現在摩擦力最大的時候，即 $F=\mu R$。這正是題目容許我們假設的、倒塌一刻的極限狀態（limiting state）。把 $F=\mu R=\frac{1}{2}\mu(M+m)g$ 代入 $(*)$：

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H&=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g-\tfrac{1}{2}\mu(M+m)g\\&=\tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg+\tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

所以

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

由於 $t > \mu$，H 隨 M 增加而增加：假如沒有木桿，單靠摩擦力連負重本身也支撐不住（當 $m = 0$ 時，我們需要 $t \le \mu$）。

最大的安全質量

只要 $H \le T$，木桿就不會折斷，即

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \le T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

兩邊除以正數 $\tfrac{2}{3}(t-\mu)g$，得

$$\boxed{M \le \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

所以，可以安全地放在 A 處的最大質量是 $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$。

因自身重量而損毀

當 A 處沒有放任何東西（$M = 0$）時，所需的張力為 $H = \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg$，所以木桿會在以下情況折斷：

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

這正是題目要求證明的結果。在這個情況下，上面 M 的上界是負數：任何負重都不安全，因為摺梯連自身也支撐不住。

驗算

- 如果 T 極大，安全質量也極大；如果 $\tan\theta$ 只是略大於 μ，分母就極小，同樣幾乎任何負重都安全，因為單靠摩擦力已差不多足夠。
- 我們對完整的靜力學（statics）問題（兩把梯子、木桿和 A 處的銷釘，共十二個未知的分力，兩隻梯腳的摩擦力均達極限值）作數值求解，隨機選取 2000 組配置，所得結果與張力公式吻合，誤差約為 10^{-12}。例如，當 $\theta = 45°$、$\mu = 0.2$、$m = 2\,\text{kg}$ 及 $g = 9.8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ 時，$M = 0$ 的木桿張力為 $\tfrac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\text{N}$。

常見錯誤

- 把木桿當作輕質拉桿，以為 X 處的力完全沿着 XY 的方向。木桿是有重量的，所以每一端還要在鉛垂方向承受 $\tfrac{1}{2}mg$，而 $\tfrac{1}{8}m$ 和 4μ 正是由此而來。

- 把梯腳的摩擦力畫成向外。由於 $\tan\theta > \mu$，梯腳有向外張開的趨勢，所以摩擦力指向內，與木桿一同把梯腳拉住。

STEP 之外

像這樣的框架，單憑平衡（equilibrium）方程並不足以確定每一個力（在這裏，摩擦力和張力可以此消彼長），稱為靜不定（statically indeterminate）。工程師會借助額外的資料來處理這類情況：例如本題所用的極限條件，或者構件的彈性（elasticity）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是加深理解力、力矩（torque）和平衡的好去處。

詳細解答

STEP I 1992，第 13 題

力學 • 逃逸速率與徑向下落

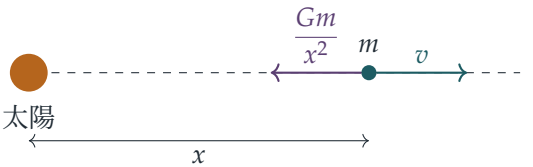
> **STEP I 1992，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q13

關鍵思路

力只取決於距離 x，所以最自然的工具是把運動方程（equation of motion）寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的形式，一經積分便立即得到聯繫速率與距離的能量方程（energy equation）。在第一部分，v^2 永遠不可能是負數這一事實，把該方程變成 x 的一個上限。在第二部分，能量方程把 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 表示為 x 的函數，再用分離變數法（separating the variables）便可求出時間。

解答

我們把太陽當作固定不動，把彗星當作質點（particle），除了題目給出的引力外不受其他力。由於引力沿着連接彗星與太陽的直線作用，一顆正在直接遠離太陽（或處於靜止）的彗星會一直沿着該直線運動。因此 x 是一條直線上的坐標，我們設 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，並以 v 為正表示遠離太陽。



能量方程

沿該直線應用牛頓第二定律（Newton's second law），力指向太陽（即 x 減少的方向），得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{Gm}{x^2}.$$

把加速度寫成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 並約去 m，

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

其中 C 為某個常數。無論彗星朝哪個方向運動，這條式在整個運動過程中都成立。（這就是每單位質量的能量守恆（conservation of energy）：動能（kinetic energy）$\frac{1}{2}v^2$ 加上勢能（potential energy）$-G/x$。）

x 可變得任意大的條件

在給定的一刻 $x = h$ 而 $v = V$，所以 $C = \frac{1}{2}V^2 - \dfrac{G}{h}$，而在其後任何時刻，

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

我們證明其逆否命題（contrapositive）：若 $V^2 < 2G/h$，則 x 有界（bounded）。

> **想一想** 原則上，彗星往後可以有各式各樣的運動方式。單憑一條方程，怎能在所有時刻都限制住 x？

因為無論彗星在做甚麼，每一瞬間都有 $v^2 \geq 0$。假設 $V^2 < 2G/h$，並設 $k = \dfrac{2G}{h} - V^2 > 0$。那麼能量方程說明

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \;\geq\; k, \qquad \text{所以} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

在其後任何時刻都成立（由於 $x > 0$ 且 $k > 0$，我們可以把兩邊乘開）。所以 x 永遠不能超過固定值 $2Gh/(2G - hV^2)$：彗星上升到該距離，在那裏 $v = 0$，然後往回落。因此，除非 $V^2 \geq 2G/h$，否則 x 不可能變得任意大，這正是所要證明的。

（逆命題（converse）也成立。若 $V^2 \geq 2G/h$，則彗星向外運動時 $v^2 \geq 2G/x > 0$，所以它永不停下；又因為只要 $x \leq X$ 便有 $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$，它不可能永遠停留在任何距離 X 以內。這就是逃逸速率（escape speed）。）

墜入太陽所需的時間

現在彗星在極遠的距離 D 處由靜止開始運動。由靜止釋放後，它筆直地墜向太陽。由能量方程，以及在 $x = D$ 處 $v = 0$，

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

> **想一想** 「極遠的距離」對那個常數來說意味着甚麼？

這表示我們令 $D \to \infty$，於是 $G/D \to 0$，常數為零：彗星的總能量為零。（若 D 很大但有限，彗星只會稍為慢一點，所需時間稍為長一點，而相差的量當 $D \to \infty$ 時趨向零。）所以在距離 x 處它的速率是 $\sqrt{2G/x}$，而且由於 x 正在減少，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

設 T 為由 $x = h$ 到 $x = 0$ 所需的時間。積分得

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

所以

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

（被積函數（integrand）$\sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 處完全沒有問題，所以儘管彗星的速率無止境地增大，它確實在有限時間內到達太陽。）

驗算

- 單位：力 Gm/x^2 是質量乘以加速度，所以 G 的單位是 $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$。於是 V^2 和 $2G/h$ 的單位都是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，而 $h^{3/2}/\sqrt{G}$ 的單位是秒。
- 在 $x = h$ 處彗星的速率是 $\sqrt{2G/h}$。假如它保持這個速率，所需時間便是 $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$，這比 T 長；彗星一直在加速，所以理應如此。事實上 T 是這個時間的三分之二。
- 數值驗證，取 $G = h = 1$：由 $x = 1$、$v = \sqrt{1.5}$ 出發逐步推算運動，彗星在 $x = 4.000$ 處掉頭，與 $2Gh/(2G - hV^2) = 4$ 的預測相符。由 $x = 1$、$v = -\sqrt{2}$ 出發，它經過 0.4714 後到達太陽，與 $T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$ 吻合。若改為由 $D = 10^6$ 而非無窮遠處從靜止出發，T 只在小數點後第七位才有變化。

常見錯誤

- 漏掉 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$ 中的負號，結果得到負的時間，或者由 0 積分到 h 卻沒有說明原因。
- 只證明彗星會減速：每一顆向外運動的彗星都會減速，即使是能夠逃逸的那些也一樣。重點在於，當 $V^2 < 2G/h$ 時，v^2 在超過某個距離後便會變成負數。

STEP 之外

$\frac{1}{2}v^2 - G/x$ 這個量是牛頓引力場（Newtonian gravitational field）中每單位質量的能量，它的正負決定了軌道是束縛軌道（橢圓）還是逃逸軌道（拋物線和雙曲線）。最後一部分的零能量墜落，是拋物線軌道退化成直線的特殊情況，而 $T \propto h^{3/2}$ 則與開普勒第三定律（Kepler's third law）一脈相承。大學一年級有關軌道的課程，正是由同樣的能量方程和角動量（angular momentum）方程出發，推導出這一切；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對有心力（central forces）和軌道有透徹的論述。

詳細解答

STEP I 1992，第 14 題

概率與統計 • 統計論斷的詮釋

STEP I 1992，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q14

本題在 *Beyond STEP* 第 13.1 節解讀新聞標題中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch13/headlines.html

關鍵思路

每則標題都是拿着一個數字，就一躍跳到結論。對每一則標題，都要問兩個問題。第一，它是否在拿同類的東西作比較：同一樣事物，用同一種方法量度，並按承受風險的程度（exposure）作出調整？第二，這個差異會不會純屬偶然？對於第二個問題，一把很自然的尺是泊松模型（Poisson model），它描述罕有而互相獨立的事件的發生次數，其標準差（standard deviation）等於平均值的平方根。懂得這個模型何時適用、何時不適用，正是 (ii) 至 (iv) 的核心。

解答

以下所說的「平均」，一律指 1974–1989 年的年平均數：每年 1080 名行人死亡，180 人死於空難。

第 (i) 部分

「六倍」之說來自比率 $1080/180 = 6$，但這個比率比較的是原始總數，而不是風險。風險是指每單位風險承擔量的死亡人數：按每程、每小時或每公里計算。在 Poldavia，幾乎人人每天都在馬路附近步行，而乘飛機的人相對很少，而且只是偶一為之。要比較兩者

的安全程度，我們需要的是類似

$$\frac{\text{行人死亡人數}}{\text{步行的總時數（或總公里數）}} \quad \text{對比} \quad \frac{\text{空難死亡人數}}{\text{飛行的總時數（或總公里數）}},$$

這樣的比較，而標題卻沒有給出任何一個分母。視乎所用的量度方法，答案甚至可能倒轉過來：按每公里計，飛行看來非常安全；但按每小時或每程計，就未必那麼安全了。

此外還有其他問題。這裏所謂的「步行」，其實是指徒步時被車輛撞倒，這個數字完全沒有反映行人在僻靜地方的情況。空難死亡人數除了乘客，還包括機組人員。而且一段時期的平均數根本無法「證明」1991 年的安全情況；它們充其量只是關於 1974–1989 年的證據。

第 (ii) 部分

乍看之下，125 遠低於平均數 180。這個跌幅是否超出了偶然的範圍？

假如死亡事件是互相獨立、逐宗發生的，那麼採用平均值為 180 的泊松模型便算合理。它的標準差是 $\sqrt{180} \approx 13.4$，因此 125 大約比平均值低 4.1 個標準差，純粹出於偶然的可能性極低（$P(X \leq 125) \approx 10^{-5}$）。

但空難死亡並不是逐宗發生的，而是成羣出現：一次墜機就可以奪去數十以至數百人的性命。較自然的模型是：致命墜機的次數服從泊松分佈，而每次墜機的死亡人數是隨機的。這樣一來，變異程度便大大增加。舉例說，假設平均每年有 6 宗致命墜機，每宗有 30 人死亡。那麼全年死亡人數是 $30N$，其中 $N \sim \text{Po}(6)$，其標準差為 $30\sqrt{6} \approx 73$，而

$$P(\text{死亡人數} \leq 125) = P(N \leq 4) \approx 0.29.$$

按這些（僅作說明用的）數字，一年有 125 人死亡實在平常不過：只需要比平常少一兩宗墜機便會出現。如果連每宗墜機的死亡人數也容許變動，離散程度還會更大。

所以單憑一年的數字，我們所知甚少。我們還想知道 1990 年的飛行量有多少（如果航空交通減少了，死亡人數本來就應該較少），以及好幾年的數字，才能看出是否真的有趨勢。標題的說法並無根據。

第 (iii) 部分

這裏有兩個不同的毛病。

單憑一天不能顯示上升。「上升」是關於一段時間內趨勢的說法，而單獨一天的數字根本無從比較。我們需要一段長時間內每天（或每年）的數字。

七人根本不算異常。我們手上唯一的道路數字是行人的：每年 1080 人，即

$$\lambda = \frac{1080}{365} \approx 2.96 \text{（每天）}.$$

用泊松分佈來模擬行人死亡相當合適：這類事件罕有，大多是每宗意外一人死亡，而且大致互相獨立。設 $X \sim \mathrm{Po}(2.96)$ 為某一天死亡的行人數目。那麼

$$P(X \geq 7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \approx 0.031,$$

所以我們預期一年之中大約有 $365 \times 0.031 \approx 11$ 天，會有最少 7 名行人死亡。況且標題說的是「死亡人數」，那還包括司機、乘客和騎單車的人。每天道路死亡總人數的平均率必定高於 2.96，於是 7 就更加不足為奇了。

想一想 某一天的死亡人數是平均數的兩倍有多，難道不令人震驚嗎？

數目小的時候並不然。當平均值約為 3 時，泊松標準差是 $\sqrt{3} \approx 1.7$，與平均值相比已經很大，所以每天之間按比例計出現大幅波動是正常的。專挑最差的一天，也是一種選擇效應（selection effect）：一年有 365 天，報章總能找到差的一天。那天是星期幾也有關係，因為交通流量和外出步行的人數會隨星期幾和季節而變化。速率恆定的泊松模型只是一個粗略的初步近似。

第 (iv) 部分

這一則標題確實有值得認真回應之處。先看統計，再談詮釋。

*1350 是否超出了偶然的範圍？*基於 (iii) 所述的理由，泊松模型在這裏是個不錯的起點。平均值為 1080 時，標準差是 $\sqrt{1080} \approx 32.9$，而

$$\frac{1350 - 1080}{32.9} \approx 8.2.$$

在這個模型下，一個比平均值高出 8 個標準差的數值，其概率的數量級為 10^{-15}。即使實際上每年之間的離散程度是泊松值的兩三倍（比方說因為嚴冬），相對於 1080 這個穩定的速率，1350 仍然非常異常。所以極有可能有些東西改變了。問題是：改變的是甚麼？

*與甚麼比較？*標題是拿 1990 年與一個 16 年的平均數比較，而不是與 1989 年比較。假如行人死亡人數在這段時期內一直穩步上升，那麼平均數 1080 描述的就是這段時期的中段（約 1981–82 年），而 1990 年理應遠高於這個數。例如，由 1974 年約 855 人起，每年穩定增加 30 人，平均數便是 1080，而 1990 年則約為 1335 人。在這種情況下，1990 年根本算不上甚麼「急升」，只是長期趨勢的延續。這個趨勢或許值得上頭條，但應該是另一則標題。我們需要逐年的數字，才能分辨這兩種說法。

*風險承擔量有沒有改變？*人口增加、車輛增加或步行增加，都會令死亡人數上升，卻不代表按每程計步行變得更危險。公平的比較應該用比率，例如每 100 000 人口的死亡人數，或每步行一公里的死亡人數。

*量度方法有沒有改變？*死亡個案的記錄或分類方法一旦改變，數字便會出現表面上的跳

升。例子包括：意外發生後多久之內死亡仍算作道路死亡的準則有變、誰算是行人的定義有變，或者呈報情況有所改善。任何這類改變都必須先予排除。

用詞是否恰當？「傷亡」通常是指死亡或受傷的人。所引述的數字只計死亡，因此標題誇大了這個數字所能說明的事。受傷的人數多得多，而且可能呈現截然不同的規律。

總括而言：升至 1350 的幅度實在太大，不能用圍繞恆定速率 1080 的泊松波動來解釋。但在稱之為「令人震驚」之前，我們需要近年的年度數字（以區分突然上升與長期趨勢），以及人口和交通數字（以把數目化為比率）。我們還須查證各項定義沒有改變。

驗算

各個概率已透過精確地求泊松級數之和，以及進行 2×10^5 次試驗的模擬來核對。在 (iii) 中，當 $\lambda = 1080/365$ 時，$P(X \geq 7) = 0.0315$（模擬結果：0.0317）。在 (ii) 中，若每年有 6 宗墜機、每宗 30 人死亡，則 $P(N \leq 4) = 0.285$。若讓每宗墜機的死亡人數在 1 至 59 之間均勻變動，模擬所得的標準差為 84，而 $P(\text{死亡人數} \leq 125) \approx 0.28$。對泊松計數有一條簡便的經驗法則：與平均值相差約兩個平均值平方根以內的數值，都不足為奇。就一天而言，$3 + 2 \times 1.7 \approx 6.4$，所以 7 只是剛剛超出這個範圍，而且有 365 天可供挑選，這樣的日子必然會出現。就一年而言，$1080 + 2 \times 33 = 1146$，與 1350 相距甚遠。

常見錯誤

- 在 (i) 中比較總數而不是比率：風險永遠需要一個分母。
- 在 (ii) 中使用泊松標準差 $\sqrt{180}$。空難中的死亡是成羣出現的，所以離散程度大得多。
- 在 (iv) 中說到「8 個標準差，所以是真正的上升」便停下來，而沒有追問：與 16 年平均數比較這一點、人口或定義的變化，能否解釋這個升幅。

STEP 之外

第 (ii) 部分談的是*過度離散*（overdispersion）。一個由泊松數目的羣組合成、而每個羣組大小隨機的總數，是一個*複合泊松*（compound Poisson）變量，它的方差（variance）是 $\lambda \, \mathrm{E}[S^2]$，而不是 λ。第 (iv) 部分則通往假設檢定（hypothesis testing），以及一個困難得多的問題：在統計上顯著的變化，究竟意味着甚麼。兩者都會在大學概率與統計課程的初段出現。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率論入門教材），是閱讀泊松模型及其局限的好去處。

詳細解答

STEP I 1992，第 15 題

概率與統計 • 期望等候時間

> **STEP I 1992，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q15

關鍵思路

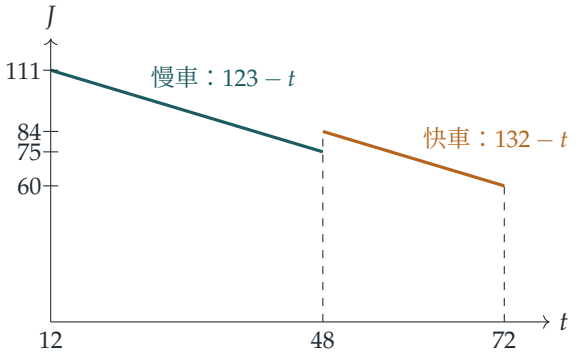
一切每小時重複一次，所以只需考慮一名乘客，其到達時間在一小時內均勻分佈（uniformly distributed）。這一小時分成兩段間隔：在某班列車之前那段間隔內到達的乘客，全部都會乘搭該班列車，而每人的行程時間就是「等候時間加行車時間」。在同一段間隔內，等候時間是均勻分佈的，所以其平均值是間隔長度的一半。這樣，整條題目就化為一個以其中一段間隔的長度為變數的二次式（quadratic）。

解答

現行時間表

以正午之後的分鐘數量度時間 t（任何一個小時都可以），並設乘客的到達時間 T 在長一小時的區間 $(12, 72]$ 上均勻分佈。這段時間內的列車有：在 48 開出的慢車，於 $48 + 75 = 123$ 抵達倫敦；以及在 72（即下一個小時的 12 分）開出的快車，於 $72 + 60 = 132$ 抵達。

- 若 $12 < T \leq 48$，最先可乘搭的是慢車，所以行程時間為 $J = 123 - T$。
- 若 $48 < T \leq 72$，最先可乘搭的是快車，所以 $J = 132 - T$。



由於 T 在 $(12,72]$ 上的概率密度（density）為 $\frac{1}{60}$，

$$\mathrm{E}(J)=\frac{1}{60}\left[\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t+\int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t\right].$$

兩個被積函數（integrand）都是線性的，所以每個積分都等於區間長度乘以函數在區間中點的值：

$$\int_{12}^{48}(123-t)\,\mathrm{d}t=36\times(123-30)=3348,\qquad \int_{48}^{72}(132-t)\,\mathrm{d}t=24\times(132-60)=1728.$$

因此

$$\mathrm{E}(J)=\frac{3348+1728}{60}=\frac{5076}{60}=84.6\text{ 分鐘},$$

正如所求。

重新編排快車的開出時間

現在設快車在每小時的 x 分開出，慢車則仍在 48 分開出。設 d 為由一班快車開出至下一班慢車開出所相隔的分鐘數，所以 $0\le d<60$ 且 $d\equiv 48-x\pmod{60}$。（在原來的時間表中，$d=36$。）於是這一小時分成

- 每班慢車之前一段長度為 d 的間隔：這些乘客的等候時間 W 在 $[0,d)$ 上均勻分佈，然後行車 75 分鐘；
- 每班快車之前一段長度為 $60-d$ 的間隔：這些乘客的等候時間在 $[0,60-d)$ 上均勻分佈，然後行車 60 分鐘。

乘客落在第一段間隔的概率是 $\frac{d}{60}$，落在第二段的概率是 $\frac{60-d}{60}$，而在長度為 g 的間隔上均勻分佈的等候時間，其平均值為 $\frac{g}{2}$。所以，按乘客在哪一段間隔到達來取條件（condi-

tioning），可得

$$\begin{aligned}60\,\mathrm{E}(J) &= d\left(\frac{d}{2}+75\right)+(60-d)\left(\frac{60-d}{2}+60\right)\\ &= \frac{d^2}{2}+75d+\frac{3600-120d+d^2}{2}+3600-60d\\ &= d^2-45d+5400.\end{aligned}$$

作為驗算，$d=36$ 給出 $1296-1620+5400=5076$，與第一部分吻合。

想一想 為甚麼最佳的間隔不是 $d=30$，即把一小時平均分成兩半？

在慢車那段間隔內到達的每名乘客，都要因為行車較慢而多付 15 分鐘的代價。所以我們希望那段間隔內的乘客少一些，也就是要把它縮短至少於半小時，但又不能短得令快車那段間隔（以及那些乘客的等候時間）變得太長。這個二次式正好平衡了這兩種效應。

配方（completing the square）後，

$$d^2-45d+5400=\left(d-\tfrac{45}{2}\right)^2+5400-\tfrac{2025}{4},$$

它在 $d=22.5$ 時取得最小值，而這個值在 $[0,60)$ 之內。此時 $60\,\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{4}$，所以平均行程時間的最小值為

$$\mathrm{E}(J)=\frac{19575}{240}=\frac{1305}{16}=81\tfrac{9}{16}\approx 81.56\text{ 分鐘}.$$

快車必須比慢車早 22.5 分鐘開出，所以

$$x=48-22.5=25.5,$$

即快車應在每小時的 $25\frac{1}{2}$ 分開出。若開出時間必須是整數分鐘，則 $x=25$ 與 $x=26$（$d=23$ 與 $d=22$）不分高下，兩者都給出 $\frac{2447}{30}\approx 81.57$ 分鐘。

驗算

- 當 $d=0$ 時，兩班列車同時開出；人人都乘搭快車，平均等候 30 分鐘，所以 $\mathrm{E}(J)=90$。公式給出 $\frac{5400}{60}=90$。
- 當 $d\to 60$ 時，慢車剛好在快車之前開出，幾乎接載了所有乘客：平均等候 30 分鐘，行車 75 分鐘，合共 105 分鐘。公式給出 $\frac{3600-2700+5400}{60}=105$。
- 以步長 0.1 的網格取遍每個 x，對一小時內的行程時間作數值積分（numerical integration），所得結果是：$x=12$ 時為 84.6，而最小值 81.5625 出現在 $x=25.5$。

常見錯誤

- 把在每小時 48 分至 60 分之間到達的乘客算作乘搭「12 分」開出的快車，卻沒有加上一小時：他們的列車是在下一個小時的 12 分開出的。
- 以列車的班數而非間隔的長度作為權重，去平均兩個行車時間；決定一班列車接載多少乘客的，是該班列車之前那段間隔的長度。

STEP 之外

這裏計算的量，是週期性時間表下的平均等候時間；而「較長的間隔會接載較多乘客」這個觀察，正是檢查悖論（inspection paradox）的一種形式：隨機到達的乘客，落在長間隔的機會比落在短間隔的大。這是更新理論（renewal theory）和排隊論（queueing theory）的核心概念，這兩門理論研究的是隨機的到達與服務。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）是認識取條件與期望值（expectation）這些基礎工具的好起點。

詳細解答

STEP I 1992，第 16 題

概率與統計 • 網絡可靠度

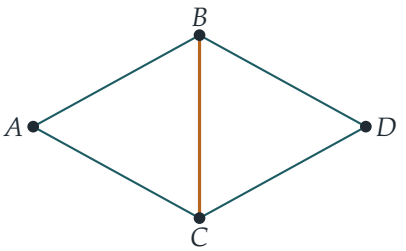
STEP I 1992，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q16

關鍵思路

這個道路網絡是一座「橋」：由 A 到 D 有兩條路線，一條經過 B，一條經過 C，而道路 CB 在中間把兩者連接起來。處理這座橋最乾淨利落的方法，是按 CB 是否暢通來取條件（condition），因為一旦知道這一點，一切都化為串聯（series）和並聯（parallel）的道路。為一條道路加設防雪設施，效果等同把它的兩個端點合併成一個市鎮，所以我們可以考察兩個方案各自產生的較小網絡，從而比較兩者。



解答

以下一律以 $q = 1 - p$ 表示某條道路暢通的概率。各條道路是否被封是互相獨立（independent）的，所以任何一種特定的「暢通與被封」組合，其概率都是若干個 p 和 q 的乘積。由 A 到 D 而不重複經過任何市鎮的路線共有四條：

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

唯一暢通的路線是 $ABCD$

要 $ABCD$ 暢通，AB、BC 和 CD 必須全部暢通。要它成為唯一暢通的路線，ABD 必須被封，而由於 AB 暢通，這就迫使 BD 被封。同理，ACD 必須被封，而由於 CD 暢通，這就迫使 AC 被封。這樣 $ACBD$ 也自動被封（它同時用到 AC 和 BD）。

所以這個事件（event）恰好就是「AB、BC、CD 暢通，而 AC、BD 被封」。由獨立性，其概率為

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

正如所求。

現時能夠通行的概率

設 E 為 A 與 D 有未被封的道路相連這個事件，並按道路 CB 的狀況取條件。

若 CB 暢通，則 B 和 C 就如同一個市鎮。除非 AB 和 AC 同時被封，否則我們可以由 A 到達這個市鎮；除非 BD 和 CD 同時被封，否則可以由這個市鎮到達 D。這兩件事涉及不同的道路，所以

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 暢通}) = (1-p^2)^2.$$

若 CB 被封，可行的路線只有 ABD 和 ACD，各自暢通的概率為 q^2，而且兩者沒有共用的道路，所以互相獨立。因此

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 被封}) = 1-(1-q^2)^2.$$

改為計算 A 與 D 被隔絕的概率會較為方便。由於 $1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$ 及 $1-q^2 = p(2-p)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{被隔絕}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2\\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)]\\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

應為哪條道路加設防雪設施

爲 CB 加設防雪設施。這時 CB 永遠暢通，所以我們永遠處於上面的第一種情況：

$$\mathrm{P}(\text{被隔絕}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

爲 AB 加設防雪設施。這時 A 和 B 就如同一個市鎮，而我們與 D 被隔絕，當且僅當 BD 被封，並且經 C 也無路可通。經 C 通行需要 CD 暢通，並且 AC、CB 之中至少有一條暢通，所以此路不通的概率為 $p+q\,p^2$。因此

$$\mathrm{P}(\text{被隔絕}) = p\,(p+qp^2) = p^2+p^3-p^4.$$

想一想 兩個答案都以 p^2 項開頭。怎樣才能判斷對每一個 p 而言哪一個較小？

把兩者相減：

$$(2p^2 - p^4) - (p^2 + p^3 - p^4) = p^2 - p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{其中} 0 < p < 1.$$

所以為 AB 加設防雪設施，被隔絕的機會總是較小，不論 p 的值是多少。政府應該選擇 AB；兩個選擇永遠不會同樣好。

這與直覺吻合。修好 CB 只在需要它作為繞道的一部分時才有幫助，但修好 AB 卻令 A 和 B 成為一個市鎮，這個市鎮既有直路 BD 通往 D，也有經過 C 的路徑可走。

最後一部分

當 $p = \frac{1}{10}$ 時，現時被隔絕的概率為

$$\frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{10} - \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100} \times 2.152 = 0.02152.$$

這大於 $\frac{1}{100}$，所以政府會落實計劃（而且根據上一部分，它會為 AB 加設防雪設施）。

單看主項 $2p^2 = 0.02$ 已足以定論：只需兩條道路被封便被隔絕的情況有兩種，即 $\{AB, AC\}$ 和 $\{BD, CD\}$。

驗算

- 當 $p \to 0$ 時，被隔絕的概率約為 $2p^2$，這正好數算了那兩對道路：其中一對被封，便會把 A 或 D 孤立起來。為 AB 加設防雪設施後，只剩下 $\{BD, CD\}$ 這一對，概率約為 p^2，與我們的公式相符。為 CB 加設防雪設施後，兩對仍然存在，概率約為 $2p^2$。
- 當 $p = 1$ 時，現時的公式給出 $1 \cdot (2 + 2 - 5 + 2) = 1$：若每條道路都被封，我們必定被隔絕。
- 把道路暢通與被封的全部 2^5 種組合逐一窮舉，對多個 p 值都證實了以上每一條公式。當 $p = \frac{1}{10}$ 時，窮舉給出現時的概率為 0.02152，為 AB 加設防雪設施後為 0.0109，為 CB 加設防雪設施後為 0.0199。模擬（simulation）2×10^5 個冬天所得的結果是 0.0215。

常見錯誤

- 把四條路線暢通的概率相加。這些路線有共用的道路，所以這些事件互有重疊，相加會重複計算。
- 在第一部分，忘記了「唯一暢通的路線」會迫使 AC 和 BD 被封，結果只寫出 $(1-p)^3$。

- 只在 $p = \frac{1}{10}$ 時比較兩個方案。兩者之差 $p^2(1-p)$ 說明對每一個 p 而言都是 AB 較佳。

STEP 之外

這是網絡可靠性（network reliability）的一個小例子，而按一條邊取條件（或把它的兩端合併）這個技巧，正是貫穿圖論（graph theory）的刪除—收縮（deletion–contraction）思想。對於大型的隨機網絡，同樣的問題會引向滲流理論（percolation theory），當中 p 有一個分明的臨界值，一旦越過，長距離的連通便會突然消失。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）是打好這裏所用的條件概率工具的好地方。

詳細解答

STEP II 1992，第 1 題

純數學 • 數列的極限

> **STEP II 1992，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

關鍵思路

每個極限（limit）都只需要一個標準手法，功夫在於選對手法。遇到有理函數（rational function），把分子和分母同除以 n 的最高次冪。遇到有界（bounded）的量除以不斷增大的量，就用夾逼（squeeze）。遇到喬裝了的已知極限，就作代換（substitution），讓偽裝自行脫落。至於兩個平方根之差，則乘以共軛式（conjugate）：這樣可以把兩個幾乎相等的量之差，化成一個一目了然的商。

解答

第 (i) 部分

把分子和分母同除以 n，

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

因為 $\frac{1}{n} \to 0$。極限是 1。

第 (ii) 部分

最高次冪是 n^2，它只在分母出現。把分子和分母同除以 n^2，

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

極限是 0：分母的增長速度與 n^2 相若，而分子只與 n 相若。

第 (iii) 部分

對於大的整數 n，我們對 $\sin n$ 所知的有用資料只有一項，就是它有界：$|\sin n| \leq 1$。這已經足夠，因為

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

所以 $\dfrac{\sin n}{n}$ 被夾在 $-\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{n}$ 之間，而兩者都趨向 0，故極限是 0。

第 (iv) 部分

想一想 這不是和 (iii) 一樣嗎？

不一樣：這裏的角 $1/n$ 是縮小至 0，而不是不斷增大。設 $x = 1/n$。當 $n \to \infty$ 時，我們有 $x \to 0^+$，而所求的式子就是 $\dfrac{\sin x}{x}$，它在 $x \to 0$ 時的極限是以下標準結果

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

（其中一個理解方法：這正是 sin 在 0 的導數（derivative），即 $\cos 0 = 1$。又或者利用 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$，於是 $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$。）極限是 1。

第 (v) 部分

當 $n \to \infty$ 時，$\arctan n \to \frac{\pi}{2}$，因為當 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（由下方趨近）時 $\tan\theta \to +\infty$，而且 arctan 是連續（continuous）且遞增的。極限 $\frac{\pi}{2}$ 不是零，所以我們可以取倒數（reciprocal）：

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

留意 $(\arctan n)^{-1}$ 的意思是 $1/\arctan n$，而不是 arctan 的反函數（inverse function）（那樣只會得出 tan）。

第 (vi) 部分

分子和分母都趨向 0，所以不能直接分別取極限。把兩者各自乘以其共軛式：

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

因此

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)},$$

這裏把分子和分母同除以 $\sqrt{n}$。當 $n \to \infty$ 時，兩個平方根都趨向 1（因為 $\sqrt{\ }$ 是連續的），所以極限是

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

想一想 為甚麼答案應該是 $\frac{1}{2}$，而不是例如 1？

在一個大的 n 附近，$\sqrt{x}$ 的圖像幾乎是一條斜率（gradient）為 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 的直線。所以 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$（步長為 1），而 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$（步長為 2）：兩者之比約為 $\frac{1}{2}$，正是步長之比。

驗算

代入一個大的 n。取 $n = 10^6$：(i) 得 0.999999；(ii) 得 5×10^{-6}；(iii) 約得 -3.5×10^{-7}；(iv) 準確至七個小數位得 1.0000000；(v) 得 0.636620，對照 $2/\pi \approx 0.636620$；而 (vi) 以有理化（rationalised）後的形式計算，得 0.50000012。在 (vi) 中，也應取小的 n 核對有理化後的形式與原式是否一致：當 $n = 1$ 時，兩者都等於 $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$。

常見錯誤

- 把 (iii) 和 (iv) 當作同一回事：在 (iii) 中，正弦值保持有界而分母不斷增大；在 (iv) 中，分子和分母都縮小至 0，而兩者之比趨向 1。
- 把 (v) 中的 $(\arctan n)^{-1}$ 理解為反函數。
- 在 (vi) 中取極大的 n，直接按原式用計算機計算：兩個幾乎相等的數相減會損失精確度。應先有理化。

STEP 之外

在大學裏，「$a_n \to L$」有精確的定義：對每一個 $\varepsilon > 0$，都存在一個 N，使得對所有 $n > N$ 均有 $|a_n - L| < \varepsilon$。上面用過的每一個手法，例如 (iii) 中的夾逼、(v) 中對非零極限取倒數，以及 (vi) 中把極限移入連續函數之內，在第一個分析（analysis）課程中都會成為由這個定義出發證明的定理。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門書）把這些概念闡述得既嚴謹又易讀。

詳細解答

STEP II 1992，第 2 題

純數學 • 克萊羅微分方程

STEP II 1992，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q2

關鍵思路

這條方程的形式是 $y = xp - f(p)$，其中 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，稱為克萊羅方程（Clairaut equation）。求導一次後，麻煩的 p 項會互相抵消，餘下的式子可以因式分解成兩條簡單得多的方程。要留意的是，求導會丟失資訊（常數消失了），所以每個候選解都必須代回 $(*)$，才能定出當中的常數。

解答

設 $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，則 $(*)$ 可寫成 $y = xp - \cosh p$。

求導

把等式兩邊對 x 求導，對 xp 用積法則（product rule），對 $\cosh p$ 用鏈式法則（chain rule）：

$$p = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \sinh p\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

兩邊的 p 互相抵消，餘下

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(x - \sinh p\right) = 0, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\left(x - \sinh\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0.$$

乘積為零，當且僅當其中一個因子為零，所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ 或 $x - \sinh\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$，正是題目所求。

兩條方程

第一條方程。把 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$ 積分兩次，得通解（general solution）

$$y = Ax + B, \qquad A, B \text{ 為任意常數。}$$

第二條方程。這裏 $\sinh p = x$。由於 sinh 是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的雙射（bijection），所以對每個 x 都有 $p = \sinh^{-1} x$。用分部積分法（integration by parts），取 $u = \sinh^{-1} x$，$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned} y &= \int \sinh^{-1} x \,\mathrm{d}x = x \sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x \\ &= x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C, \qquad C \text{ 為任意常數。} \end{aligned}$$

$(*)$ 的解

$(*)$ 的每個解都滿足上面推導出的兩條方程之一，但反過來卻不成立，因為求導時丟掉了一個條件。所以我們要把每一族解代回 $(*)$。

> **想一想** 推導出的兩條方程分別有兩個和一個任意常數。為甚麼這些解不可能全部都滿足像 $(*)$ 這樣的一階方程？

一階方程的解應該是單參數族，而上面每一族解不是常數太多，就是有一個尚未驗證的常數。把 $(*)$ 求導，只能告訴我們 $y - xp + \cosh p$ 是常數；我們還需要這個常數等於零。

直線。當 $y = Ax + B$ 時，$p = A$，於是 $(*)$ 變成

$$Ax + B = Ax - \cosh A \iff B = -\cosh A.$$

所以我們得到單參數的直線族

$$y = Ax - \cosh A, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

另一條曲線。當 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ 時，$p = \sinh^{-1} x$，所以 $\sinh p = x$，而 $\cosh p = \sqrt{1 + \sinh^2 p} = \sqrt{1+x^2}$（因為 $\cosh p > 0$，故取正根）。於是 $(*)$ 的右邊是

$$xp - \cosh p = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2},$$

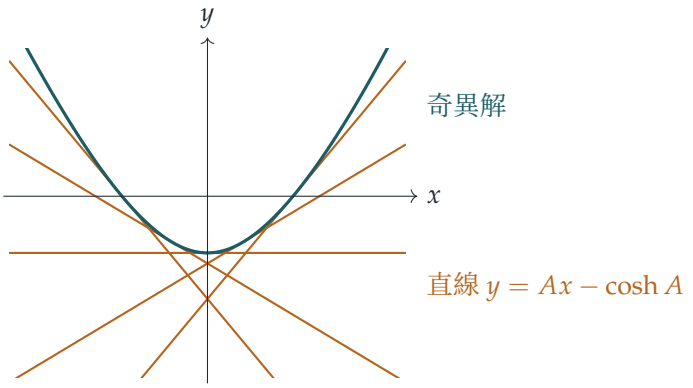
它等於 y，當且僅當 $C = 0$。這樣便多得一個解，當中不含任意常數：

$$y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}.$$

因此，$(*)$ 的解是直線 $y = Ax - \cosh A$（A 為任意實數），加上單獨一條曲線 $y = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}$。

兩者如何配合

斜率為 A 的直線在 $x = \sinh A$ 處與曲線相切。在該處，曲線的斜率是 $\sinh^{-1}(\sinh A) = A$，高度是 $A\sinh A - \cosh A$，與直線的相同。曲線的 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$，所以它是凸（convex）的，而每一條這樣的切線都位於它的下方。這條曲線是該直線族的包絡線（envelope），稱為奇異解（singular solution）。



這也解釋了一個微妙之處：由於條件 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x - \sinh p) = 0$ 是逐點成立的，一個解可以在兩種類型之間切換。例如，沿着曲線走到 $x = \sinh A$，然後改沿該處的切線繼續走，所得的函數有連續的導數，而且仍然處處滿足 $(*)$。這類分段的解都是由上面找到的解拼合而成的，而題目預期的答案是直線族加上奇異曲線。

驗算

- 當 $A = 0$ 時，直線是 $y = -1$，而曲線有 $y(0) = 0 - 1 = -1$，斜率為 $\sinh^{-1} 0 = 0$：兩者在 $(0, -1)$ 相切，與預期相符。
- 數值上，取 $x = 0.7$：$\sinh^{-1} 0.7 \approx 0.6527$，所以曲線給出 $y \approx 0.4569 - 1.2207 = -0.7638$，而 $xp - \cosh p \approx 0.4569 - 1.2207$，兩者吻合。在 y 上加上任何 $C \neq 0$，都會剛好相差 C。
- 在隨機選取的點上用有限差分（finite differences）檢驗 $(*)$，每一條直線 $y = Ax - \cosh A$ 和奇異曲線的殘差都只有捨入誤差的大小。

常見錯誤

- 做到 $y = Ax + B$ 或 $y = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ 便停下來：這些只是求導後的方程的解，而 $(*)$ 本身要求 $B = -\cosh A$ 和 $C = 0$。

▶ 把因子 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$「約去」，以致完全漏掉奇異解。

STEP 之外

形如 $y = xp - f(p)$ 的方程就是克萊羅方程。它們的通解永遠是直線族 $y = cx - f(c)$，而奇異解就是這個直線族的包絡線。這裏 $f = \cosh$，而包絡線 $y = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2}$ 是 cosh 的勒讓德變換（Legendre transform），這種構造在力學（由拉格朗日量（Lagrangian）過渡到哈密頓量（Hamiltonian））和熱力學中都會出現。這個例子也說明，當存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）的條件不成立時，一階方程的解不一定唯一。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）涵蓋一階方程和這條唯一性定理。

詳細解答

STEP II 1992，第 3 題

純數學 • 內擺線與面積

STEP II 1992，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q3

關鍵思路

一切都源自純滾動而不滑動（rolling without slipping）：小圓沿大圓滾過的弧長，等於小圓上曾經與大圓接觸的弧長。這就決定了小圓轉了多少，於是 B 不過是「圓心 P 加上一個方向正確的單位向量（unit vector）」。至於描繪曲線，值得留意的是，利用三倍角公式（triple-angle formulae），坐標可以化簡得非常簡潔。

解答

求 B 的坐標

由於小圓（半徑為 1）一直與大圓（半徑為 4）的內側相切，它的圓心與 O 的距離恆為 $4-1=3$。設 ϕ 為角 AOP，則

$$P = (3\cos\phi,\ 3\sin\phi).$$

設 T 為當前的切點（point of contact）。它位於射線 OP 的延長線上，所以 $T = (4\cos\phi, 4\sin\phi)$，而由 P 到 T 的方向與 x 軸成角 ϕ。

起初 B 位於切點 A。由於沒有滑動，大圓上的弧 AT 與小圓上的弧 BT 長度相同：

$$4\phi = 1 \times \angle BPT \quad \Longrightarrow \quad \angle BPT = 4\phi.$$

想一想 在 P 處量度，B 所在的角度是 $\phi + 4\phi$ 還是 $\phi - 4\phi$？

當 P 繞 O 逆時針移動時，小圓沿大圓的內側滾動，因此是順時針轉動的（見圖中箭頭）。點 B 是較早時的切點，所以它落在新切點 T 的後面：沿小圓由 T 到 B 是順時針轉了 4ϕ。

因此方向 $\overrightarrow{PB}$ 與 x 軸成角 $\phi - 4\phi = -3\phi$，又因為 $PB = 1$，

$$\begin{aligned} B &= P + (\cos(-3\phi),\ \sin(-3\phi)) \\ &= (3\cos\phi + \cos 3\phi,\ 3\sin\phi - \sin 3\phi), \end{aligned}$$

正如所求。（驗算：$\phi = 0$ 給出 $(4, 0) = A$。）

描繪 C

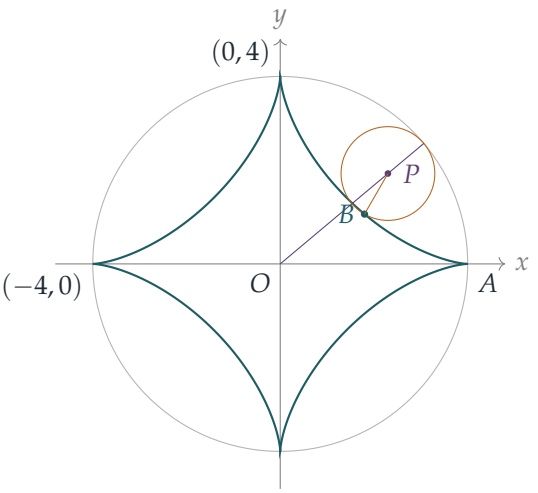
利用 $\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ 及 $\sin 3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$，

$$x = 4\cos^3\phi, \qquad y = 4\sin^3\phi.$$

所以 C 是曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$，即星形線（astroid）。它有以下特徵：

- B 在大圓上，當且僅當 $\cos^6\phi + \sin^6\phi = 1$，即 $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$，對應的點為 $(\pm 4, 0)$、$(0, \pm 4)$。這時 B 就是切點，所以它瞬時靜止，曲線在該處有一個尖點（cusp）。
- 曲線對兩條坐標軸都對稱（把 ϕ 換成 $-\phi$ 或 $\pi - \phi$）。
- 在第一象限，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{12\sin^2\phi\cos\phi}{-12\cos^2\phi\sin\phi} = -\tan\phi$，所以曲線沿 x 軸方向離開 $(4, 0)$，並沿 y 軸方向到達 $(0, 4)$。曲線向內彎曲：當 $\phi = \frac{\pi}{4}$ 時它通過 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$，遠在直線 $x + y = 4$ 之內。

P 繞行一周（ϕ 由 0 到 2π）之後，小圓相對於 OP 轉了 3 圈，而 B 回到 A，所以 C 是一條有四個尖點的閉曲線（closed curve）。



面積

我們有 $x = 3\cos\phi + \cos 3\phi$ 及

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 3\cos\phi - 3\cos 3\phi,$$

所以

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = 9\cos^2\phi - 6\cos\phi\cos 3\phi - 3\cos^2 3\phi.$$

在一個完整週期上，對任何整數 $k \neq 0$ 都有 $\int_0^{2\pi} \cos^2 k\phi \,\mathrm{d}\phi = \pi$（把被積函數寫成 $\frac{1}{2}(1 + \cos 2k\phi)$），而

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\cos 3\phi \,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 4\phi + \cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi = 0.$$

因此

$$\text{面積} = \int_0^{2\pi} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\,\mathrm{d}\phi = 9\pi - 0 - 3\pi = 6\pi.$$

答案為正數，這是應有的結果：隨着 ϕ 增加，B 沿 C 逆時針繞行。

驗算

- 由於 C 向內彎曲，所圍區域位於以四個尖點為頂點的正方形之內，該正方形的面積為 32；而確實 $6\pi \approx 18.85 < 32$。
- 數值上，對該積分使用辛普森法則（Simpson's rule），以及用鞋帶公式（shoelace formula）計算 C 的內接 200 000 邊形的面積，兩者都給出 $18.8496\ldots = 6\pi$。
- 標準的星形線公式（面積為 $\frac{3}{8}\pi a^2$），取 $a = 4$，同樣給出 6π。
- 在每個尖點處，B 的速率的數值結果為零，印證了 B 碰到大圓時處於靜止狀態，與滾動的要求完全吻合。

常見錯誤

- 把 $\overrightarrow{PB}$ 的角度取為 $+5\phi$ 或 $+3\phi$：小圓的轉動方向與 P 繞 O 運動的方向相反。
- 計算 P 的路徑時用了半徑 4 而不是 3。
- 把尖點畫成圓滑的末端，或把弧畫成向外凸出。

STEP 之外

一個圓在另一個圓內滾動時，圓上一點所描出的曲線稱為內擺線（hypocycloids）；在外面滾動則得到外擺線（epicycloids）。當半徑之比為 4：1 時，我們得到星形線；比為 3：1 時，則得到有三個尖點的三尖瓣線（deltoid）。面積公式 $\int x\,\mathrm{d}y$ 是格林定理（Green's theorem）的特殊情況，該定理把沿閉曲線的積分與曲線所圍區域上的二重積分（double integral）聯繫起來；它是大學一年級向量微積分（vector calculus）的一大亮點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）利用 $z = 3e^{i\phi} + e^{-3i\phi}$ 優雅地處理了這些滾動曲線。

詳細解答

STEP II 1992，第 4 題

純數學 • 微分法的公理

> **STEP II 1992，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 6.5 節從公理出發的微分法中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/derivations.html

關鍵思路

這四條規則正是我們熟悉的求導（differentiation）性質：乘積法則（product rule）、線性（linearity）以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$。題目要我們證明，單憑這些性質，就足以完全確定這個運算在多項式（polynomial）上的作用。處理常數的竅門，是把一個我們早已知道結果的乘積交給乘積法則，例如 $1 \times 1 = 1$。之後，乘積法則會逐步建立 x 的每一個冪，餘下的則由線性處理。

在整個過程中，我們只可使用題目給出的四條規則。不能因為 $\Diamond$ 看起來像求導，就假設它具有任何性質；這正是我們要證明的事。

解答

常數

> ? **想一想** 我們對 $\Diamond 1$ 一無所知。這些規則怎樣能告訴我們它是甚麼？

把乘積法則 (i) 應用於多項式 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = 1$。它們的乘積仍是 1，所以

$$\Diamond 1 = \Diamond(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Diamond 1 + 1 \cdot \Diamond 1 = 2\,\Diamond 1.$$

兩邊同時減去 $\Diamond 1$，得 $\Diamond 1 = 0$，即零多項式（zero polynomial）。

現設 $\mathrm{f}(x) = c$ 為任意常數多項式。則 $\mathrm{f}(x) = c \cdot 1$，而 c 是常數，所以由規則 (iv) 得

$$\Diamond c = \Diamond(c \cdot 1) = c \Diamond 1 = c \cdot 0 = 0.$$

這也涵蓋了 $c = 0$ 的情況，所以對每一個常數多項式都有 $\Diamond \mathrm{f}(x) = 0$，正如所求。

（求得 $\Diamond 1 = 0$ 的另一途徑：寫成 $x = x \cdot 1$，則由規則 (i) 和規則 (iii) 得 $1 = 1 \cdot 1 + x \Diamond 1$，因此 $x \Diamond 1 = 0$，而一個多項式乘以 x 後得 0，它必定是零多項式。）

冪 x^2 和 x^3

取 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{g}(x) = x$ 並使用乘積法則，再用規則 (iii)，

$$\Diamond x^2 = \Diamond(x \cdot x) = x \Diamond x + x \Diamond x = x + x = 2x.$$

接着，$x^3 = x^2 \cdot x$，所以由乘積法則、規則 (iii) 和剛剛得到的結果，

$$\Diamond x^3 = x \Diamond x^2 + x^2 \Diamond x = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

任意多項式

*第 1 步：x 的冪。*我們用歸納法（induction）證明

$$\Diamond x^n = nx^{n-1} \qquad \text{對每一個整數} n \geq 1.$$

當 $n = 1$ 時，這就是規則 (iii)。假設它對某個 $n = k \geq 1$ 成立。寫成 $x^{k+1} = x^k \cdot x$ 並使用乘積法則，再用規則 (iii) 和歸納假設（induction hypothesis），

$$\Diamond x^{k+1} = x \Diamond x^k + x^k \Diamond x = x \cdot kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k,$$

所以結果對 $n = k+1$ 成立。由歸納法，它對所有 $n \geq 1$ 成立。當 $n = 0$ 時，$x^0 = 1$ 是常數，所以由第一部分得 $\Diamond x^0 = 0$。在每一種情況下都有 $\Diamond x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n$。

*第 2 步：和。*規則 (ii) 只是就兩個多項式而言，但對項數作歸納，便可把它推廣至任意有限和：若 $\Diamond(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) = \Diamond \mathrm{f}_1 + \cdots + \Diamond \mathrm{f}_m$，則把規則 (ii) 應用於 $(\mathrm{f}_1 + \cdots + \mathrm{f}_m) + \mathrm{f}_{m+1}$，便得到 $m+1$ 項時的同一命題。

*第 3 步：綜合起來。*任意多項式都可寫成 $\mathrm{h}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，其中係數 a_k 為常數。先用第 2 步，再對每一項用規則 (iv)，然後用第 1 步，

$$\begin{aligned}
\Diamond \mathrm{h}(x) &= \Diamond(a_0) + \Diamond(a_1 x) + \cdots + \Diamond(a_n x^n) \\
&= a_0 \Diamond 1 + a_1 \Diamond x + \cdots + a_n \Diamond x^n \\
&= 0 + a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{h}(x)\big),
\end{aligned}$$

這正是我們要證明的結果。

驗算

值得確認一下求導確實滿足全部四條規則，否則這個結果便會流於空泛；它確實滿足（乘積法則、線性以及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$）。我們亦按照解答中的做法，只用這四條規則在電腦上構作了 $\lozenge$，並以 500 個次數不超過 7、係數為分數的隨機多項式，把它與普通的導數（derivative）作比較。兩者每次都一致，並且與數值差商（difference quotient）吻合；例如由這些規則可得 $\lozenge x^3 = 3x^2$。

常見錯誤

- 說「$\lozenge c = 0$，因為常數的導數是零」。這是假設了我們要證明的事；這個零必須由規則推出。
- 在最後一部分遺漏常數項。歸納法只由 $n = 1$ 開始，所以 a_0 需要用到關於常數的結果。
- 對多項之和使用規則 (ii)，卻沒有指出它是藉歸納法由兩項推廣而來。

STEP 之外

滿足規則 (i)、(ii) 和 (iv) 的運算稱為導子（derivation），代數和幾何中處處都會研究導子。本題說明，在多項式上，導子完全由它在 x 上的值決定。更一般地，$\lozenge \mathrm{h} = \mathrm{p}(x)\,\mathrm{h}'(x)$，其中 $\mathrm{p} = \lozenge x$；在微分幾何（differential geometry）中，這個想法成為向量場（vector field）的定義。至於多項式環（polynomial ring）這個代數背景，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

詳細解答

STEP II 1992，第 5 題

純數學 • 矩陣群

> **STEP II 1992，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q5

關鍵思路

這裏的一切都建基於條件 $wz - xy = 1$，它令 S 中矩陣（matrix）的逆矩陣（inverse）特別簡單。處理階為 3 的部分，最好的方法是留意到每個 2×2 矩陣都滿足一條由其跡（trace）和行列式（determinant）構成的二次方程。對於 S 中的矩陣，我們可藉此把 $\mathbf{A}^2$，繼而把 $\mathbf{A}^3$，用 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{I}$ 表示出來，於是條件 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ 就變成關於跡 $w + z$ 的條件。

（試卷上把 $\mathbf{A}$ 右下角的元素印成 x；但最後一部分提到 z，可見原意顯然是該位置為 z，以下一律採用此寫法。）

解答

元素的階

$g \in G$ 的階（order）是使 $g^n = e$ 成立的最小正整數 n，其中 e 是 G 的單位元（identity）。若 g 的任何正整數次冪都不等於 e，則 g 的階為無限。單位元是唯一階為 1 的元素。

逆矩陣

設

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}, \qquad wz - xy = 1.$$

2×2 逆矩陣的常用公式要除以行列式，而這裏行列式為 1，所以

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & w \end{pmatrix}.$$

乘開即可驗證：$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} wz - xy & 0 \\ 0 & wz - xy \end{pmatrix} = \mathbf{I}$，同理 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$。

S 是一個羣

我們逐一檢驗羣（group）的四條公理。

- 封閉性（*closure*）。若 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in S$，則 $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B} = 1 \times 1 = 1$，所以 $\mathbf{AB} \in S$。
- 結合律（*associativity*）。矩陣乘法的結合律可視為已知。
- 單位元。$\det\mathbf{I} = 1$，所以 $\mathbf{I} \in S$，而且對每個 $\mathbf{A}$ 都有 $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$。
- 逆元。上面求得的矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 的行列式為 $wz - (-x)(-y) = wz - xy = 1$，所以它屬於 S。

因此 S 在矩陣乘法下是一個羣。

自逆元素與階為 2 的元素

把 $\mathbf{A}^{-1}$ 與 $\mathbf{A}$ 逐個元素比較，可知 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ 當且僅當

$$z = w, \qquad -x = x, \qquad -y = y,$$

即 $x = y = 0$ 且 $z = w$。這時行列式條件變成 $w^2 = 1$，所以 $w = \pm 1$。因此自逆（self-inverse）元素為

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \text{和} \quad \mathbf{A} = -\mathbf{I}.$$

當 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$（等價於 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$）且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ 時，元素的階為 2。所以階為 2 的元素只有 $-\mathbf{I}$。

階為 3 的元素

記 $t = w + z$ 為 $\mathbf{A}$ 的跡。平方得

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} w^2 + xy & x(w+z) \\ y(w+z) & xy + z^2 \end{pmatrix}.$$

由於 $xy = wz - 1$，左上角的元素是 $w^2 + wz - 1 = tw - 1$，右下角的元素是 $tz - 1$。因此

$$\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}. \tag{$*$}$$

想一想 $(*)$ 對計算 $\mathbf{A}^3$ 有甚麼幫助？

把 $(*)$ 乘以 $\mathbf{A}$，再用一次 $(*)$ 消去 $\mathbf{A}^2$：

$$\mathbf{A}^3 = t\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = t(t\mathbf{A} - \mathbf{I}) - \mathbf{A} = (t^2 - 1)\mathbf{A} - t\mathbf{I}.$$

所以 $\mathbf{A}$ 的任何次冪都是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{I}$ 的組合，我們可以比較係數。

若 $w + z + 1 = 0$：則 $t = -1$，所以 $t^2 - 1 = 0$，從而 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$。另外 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$，因為 $\mathbf{I}$ 的跡是 $2 \neq -1$。$\mathbf{A}$ 的階整除 3 而又不是 1，所以是 3。

反過來，假設 $\mathbf{A}$ 的階爲 3。則 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$，所以

$$(t^2 - 1)\mathbf{A} = (1 + t)\mathbf{I}.$$

- 若 $t^2 \neq 1$，則 $\mathbf{A} = \dfrac{1+t}{t^2-1}\mathbf{I} = \dfrac{1}{t-1}\mathbf{I}$，是單位矩陣的倍數 $\lambda\mathbf{I}$。它的行列式為 $\lambda^2 = 1$，所以 $\lambda = \pm 1$。但 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 已被排除，而 $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ 的階是 2，不是 3。所以這個情況不可能出現。
- 若 $t = 1$，等式變成 $\mathbf{0} = 2\mathbf{I}$，這並不成立。

餘下唯一的可能是 $t = -1$，即 $w + z + 1 = 0$。這就證明了「當且僅當」(if and only if)。

一個例子。取 $w = 0$ 和 $z = -1$，並選 $x = -1$、$y = 1$，使得 $wz - xy = 0 + 1 = 1$：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{I}.$$

驗算

- 把上面的例子乘開，直接看出 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$。
- 旋轉 120° 的矩陣 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 的行列式為 1，跡為 -1，而它的階當然是 3。
- 我們用電腦對 S 中 20 000 個隨機有理數矩陣驗證了 $\mathbf{A}^2 = t\mathbf{A} - \mathbf{I}$。我們亦搜尋了 S 中所有元素均為 $\frac{1}{2}$ 的倍數且介乎 -4 與 4 之間的矩陣：階為 3 的恰好就是跡為 -1 的那 48 個，而 $-\mathbf{I}$ 是唯一階為 2 的矩陣。

常見錯誤

- 把 $\mathbf{I}$ 算作階為 2 的元素。它是自逆的，但它的階是 1。
- 只證明了階為 3 這個結果的其中一個方向。逆命題（converse）需要排除 $t^2 \neq 1$ 和 $t = 1$ 這兩個情況。
- 驗證羣公理時，忘記檢查逆矩陣本身的行列式也是 1。

STEP 之外

羣 S 就是特殊線性羣(special linear group)SL_2，是數學中最重要的羣之一。恆等式 $\mathbf{A}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{A} + (\det\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}$ 是凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）的 2×2 情形：每個方陣都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation）。它亦顯示出單憑跡就能告訴我們多少關於 SL_2 中元素的資訊：上面的論證可以推廣，證明階為有限數 n 的元素，其跡必為 $2\cos(2\pi k/n)$，其中 k 為某個整數。想進一步了解矩陣羣，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）；至於凱萊–哈密頓定理和特徵值（eigenvalue），可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數導論）。

詳細解答

STEP II 1992，第 6 題

純數學 • 切線與根的計數

STEP II 1992，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q6

關鍵思路

方程 $kx = \ln(2\sec x)$ 的解，就是通過原點的直線 $y = kx$ 與曲線 $y = \ln(2\sec x)$ 相交的點。這條曲線從原點上方出發，是凸（convex）的，並且急升至無窮大，所以通過原點的直線要麼與它不相交，要麼與它相切，要麼與它相交兩次。特殊值 k_0 就是由原點所作切線的斜率（gradient）。相切（tangency）的意思是兩條曲線在該點高度相同、斜率也相同，而其餘一切都可以由這兩條方程推出。

解答

兩個圖像

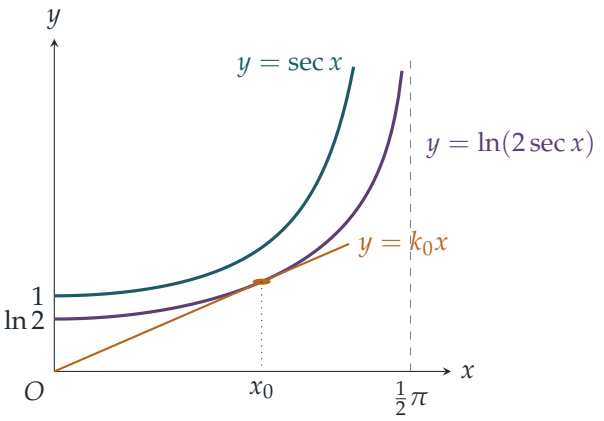
設 $f(x) = \ln(2\sec x) = \ln 2 - \ln\cos x$。則

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \qquad f''(x) = \sec^2 x > 0.$$

所以 $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$，$f'(0) = 0$，$f$ 在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，它是凸的（向上凹），而且當 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$ 時 $f(x) \to \infty$，因為 $\cos x \to 0^+$。

同樣地，$y = \sec x$ 滿足 $\sec 0 = 1$，斜率為 $\sec x \tan x$，在 $x = 0$ 處為 0，其後為正，而且當 $x \to \frac{1}{2}\pi^-$ 時 $\sec x \to \infty$。兩條曲線都以 $x = \frac{1}{2}\pi$ 為鉛垂漸近線（vertical asymptote），並且在該處都沒有定義。

對數曲線永遠位於正割曲線的下方。設 $u = \sec x \geq 1$，則有 $\ln(2u) < u$，因為 $\ln(2u) - u$ 的導數（derivative）是 $\frac{1}{u} - 1 \leq 0$，所以它不會超過它在 $u = 1$ 處的值，即 $\ln 2 - 1 < 0$。對數曲線的增長也慢得多：當 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 時，它的表現就像正割的 ln。



k 小時無解，k 大時有兩個解

由於 f 遞增，在 $[0, \frac{1}{2}\pi)$ 上有 $f(x) \geq \ln 2$，而在該處 $kx < \frac{1}{2}\pi k$。若 $k \leq 2\ln 2/\pi \approx 0.44$，則處處都有 $kx < \ln 2 \leq f(x)$，所以直線從曲線下方經過，方程無解。

當 k 大時，直線起初在曲線下方（在 $x = 0$ 處它的高度是 $0 < \ln 2$），但它夠陡，會在某處升到曲線之上：在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 處曲線的高度是 $\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.04$，只要 $k > \frac{6}{\pi}\ln 2 \approx 1.32$，直線在該處就較高。在 $\frac{1}{2}\pi$ 附近，曲線趨向無窮大，而直線的高度始終不超過 $\frac{1}{2}\pi k$，所以曲線最終又回到直線之上。直線先向上穿過曲線，然後又向下穿過一次：有兩個解。

解不可能多於兩個。函數 $f(x) - kx$ 的二階導數（second derivative）是 $\sec^2 x > 0$，所以它是凸的，而凸函數最多只有兩個零點。

為何 k_0 存在

由於 $f(0) = \ln 2 \neq 0$，每個解都滿足 $x > 0$，所以我們可以除以 x，把方程改寫成

$$k = g(x), \qquad \text{其中} g(x) = \frac{\ln(2\sec x)}{x}, \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以解的數目就是 g 的圖像到達高度 k 的次數。現在

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}, \qquad h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x),$$

而 $h'(x) = \tan x + x\sec^2 x - \tan x = x\sec^2 x > 0$。由於 $h(0) = -\ln 2 < 0$，而且當 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 時 $h(x) \to \infty$，h 恰好有一個零點 x_0。所以 g 在 $(0, x_0)$ 上遞減，在 $(x_0, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，而且在兩端都有 $g \to \infty$（當 $x \to 0$ 時分子趨向 $\ln 2$，當 $x \to \frac{1}{2}\pi$ 時分子趨向 ∞）。因此，取 $k_0 = g(x_0)$，即 g 的最小值，便有：

- $k < k_0$：無解；

- $k = k_0$：恰好有一個解，$x = x_0$；
- $k > k_0$：有兩個解。

從圖像來看，$y = k_0 x$ 就是 $y = \ln(2\sec x)$ 的通過原點的切線。這印證了草圖的論證，並準確地確定了臨界值。

> **想一想** 為甚麼「恰好有一個解」就表示直線是切線？

假如直線在 x_0 處橫截地穿過曲線，那麼把它繞 O 稍微轉動（令 k 稍為減小或增大），附近仍然會有一個交點，而上面的凸性論證又會給出第二個交點。一個單一而孤立的交點，在 k 減小時變成沒有交點，這正正就是切點。用代數來說，這就是 $h(x_0) = 0$，即 $g'(x_0) = 0$。

x_0 所滿足的方程

在切點處，直線與曲線的高度相同，斜率也相同：

$$k_0 x_0 = \ln(2\sec x_0), \qquad k_0 = f'(x_0) = \tan x_0.$$

（把兩式合起來，就是上面的 $h(x_0) = 0$。）把第二式代入第一式，得 $x_0 \tan x_0 = \ln(2\sec x_0)$，而由於 $0 < x_0 < \frac{1}{2}\pi$，$\tan x_0 \neq 0$，所以

$$x_0 = \cot x_0 \, \ln(2\sec x_0),$$

這正是所要證明的。

求 x_0 和 k_0

我們很自然會想直接用 $x_{n+1} = \cot x_n \ln(2\sec x_n)$ 來迭代（iterate）。這樣做收斂（converge）得很慢：右邊在 x_0 處的導數是 $1 - 2x_0/\sin 2x_0 \approx -0.89$，所以迭代值會來回振盪，每一步只能逼近約 11%。對 $h(x) = x\tan x - \ln(2\sec x)$ 使用牛頓法（Newton's method）則好得多，而且 $h'(x) = x\sec^2 x$ 十分簡單：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \tan x_n - \ln(2\sec x_n)}{x_n \sec^2 x_n}.$$

由 $x_1 = 1$ 開始（全部以弧度（radian）計算）：

$$x_2 \approx 0.9274, \qquad x_3 \approx 0.9147, \qquad x_4 \approx 0.91440.$$

為確認準確至兩位小數，我們檢查符號有否改變：$h(0.905) \approx -0.023 < 0$ 而 $h(0.915) \approx +0.0015 > 0$，所以 $0.905 < x_0 < 0.915$，於是

$$x_0 \approx 0.91.$$

然後 $k_0 = \tan x_0 \approx \tan 0.9144 \approx 1.30$。等價地，$k_0 = \ln(2\sec x_0)/x_0$，所得的值相同。

驗算

- k_0 的兩個表達式互相吻合：$\tan(0.91440) \approx 1.2981$ 而 $\ln(2\sec 0.91440)/0.91440 \approx 1.2981$。
- 以數值方法在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上掃描 $g(x) = \ln(2\sec x)/x$，得最小值為 1.2981，位於 $x \approx 0.914$。
- 數算 $kx - \ln(2\sec x)$ 的符號改變次數：$k = 1.29$ 時沒有根，$k = 1.31$ 時有兩個根。
- 答案符合先前求得的粗略界限：$0.44 < k_0 < 1.32$。

常見錯誤

- 使用角度制。這裏每一個 x 的值，包括牛頓法的迭代值和 $\tan x_0$，都必須以弧度計算。
- 只列出一條相切的方程。與曲線相交並不足夠：斜率也必須相等，而正是這第二個條件確定了 k_0。
- 未經檢查就聲稱準確至兩位小數。應展示 h 在 $[0.905, 0.915]$ 兩端符號相反，或者一直迭代至第二位小數穩定下來。

STEP 之外

透過考察 $f(x)/x$ 的值域（range）來數算 $kx = f(x)$ 的根的數目，是一個重要思想的一小部分。通過原點的切線，加上 f 的凸性，正是勒讓德變換（Legendre transform）和凸對偶（convex duality）的基礎，在分析學和力學中都是如此。牛頓法在這裏收斂得這麼快，是因為它在單根（simple root）附近是二次收斂（quadratically convergent）的，而不動點迭代（fixed-point iteration）只是線性收斂，比率為 $|\varphi'(x_0)|$。這兩個事實在分析學或數值方法的入門課程中都會證明。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）涵蓋了凸函數以及牛頓法的誤差分析。

詳細解答

STEP II 1992，第 7 題

純數學 • 三次方程的重根

> **STEP II 1992，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q7

關鍵思路

把 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 與該三次多項式比較係數（comparing coefficients），便可把 p、q 和 r 表示成根的對稱函數（symmetric functions）。在 (i) 中，有一個重根（repeated root），再加上「各根之和為零」，根的形式就只能是 $\alpha, \alpha, -2\alpha$，其餘一切皆由此而來。至於 (ii)，題目中的式子看起來就像 (i) 的答案，只是 q 和 r 換成了較複雜的東西。這提示我們把 x 平移以消去 x^2 項，然後對新的三次多項式應用 (i)。

解答

由於 a, b, c 是根，而首項係數為 1，

$$x^3 - px^2 + qx - r = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

對所有 x 成立。比較係數，得

$$p = a+b+c, \qquad q = ab+bc+ca, \qquad r = abc.$$

第 (i) 部分

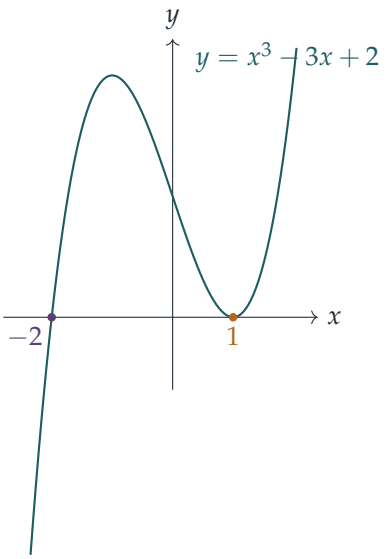
把各根標記成重根為 $a = b = \alpha$。那麼由 $p = 0$ 得 $c = -(a+b) = -2\alpha$，所以三個根是 $\alpha, \alpha, -2\alpha$。因此

$$q = \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) + (-2\alpha)\alpha = -3\alpha^2,$$
$$r = \alpha \cdot \alpha \cdot (-2\alpha) = -2\alpha^3.$$

於是

$$4q^3 + 27r^2 = 4(-27\alpha^6) + 27(4\alpha^6) = -108\alpha^6 + 108\alpha^6 = 0,$$

這正是所要證明的。這裏完全不需要 α 是實數，而三重根的情況（$\alpha = 0$，所有係數為零）亦已包括在內。



例如，$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ 有 $\alpha = 1, q = -3, r = -2$，而 $4(-27) + 27 \cdot 4 = 0$。二重根在圖像上表現為曲線與橫軸相切。

第 (ii) 部分

現在 p 不一定為零。原來的三次多項式各根之和為 p，所以它們的平均值是 $p/3$。按平均值平移，設

$$x = y + \tfrac{p}{3}.$$

那麼 $y = x - \frac{p}{3}$，所以關於 y 的新三次多項式的根是 $a - \frac{p}{3}$, $b - \frac{p}{3}$, $c - \frac{p}{3}$。它們的和是 $p - p = 0$，而且若 a, b, c 之中有兩個相等，這三個數之中亦有兩個相等。

> **想一想** 關於 y 的三次多項式究竟是甚麼？

把每一項展開，

$$\begin{aligned}
\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^3 &= y^3 + py^2 + \tfrac{p^2}{3}y + \tfrac{p^3}{27}, \\
-p\left(y + \tfrac{p}{3}\right)^2 &= -py^2 - \tfrac{2p^2}{3}y - \tfrac{p^3}{9}, \\
q\left(y + \tfrac{p}{3}\right) &= qy + \tfrac{pq}{3},
\end{aligned}$$

再把這些連同 $-r$ 相加，y^2 項互相抵消（這正是平移的目的），得

$$x^3 - px^2 + qx - r = y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y - \left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right),$$

當中用到 $\frac{p^3}{27} - \frac{p^3}{9} = -\frac{2p^3}{27}$。這個關於 y 的三次多項式具有 $y^3 - Py^2 + Qy - R$ 的形式，其中

$$P = 0, \qquad Q = q - \frac{p^2}{3}, \qquad R = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

它的 y^2 係數為零，並且有兩個相等的根，所以第 (i) 部分適用，得出 $4Q^3 + 27R^2 = 0$，即

$$4\left(q - \frac{p^2}{3}\right)^3 + 27\left(\frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r\right)^2 = 0,$$

這就是所求的結果。

驗算

- 當 $p = 0$ 時，(ii) 的結果簡化為 $4q^3 + 27r^2 = 0$，即第 (i) 部分。
- 對於 $(x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$，我們有 $p = 4, q = 5, r = 2$，所以 $Q = -\frac{1}{3}$ 而 $R = \frac{128}{27} - \frac{20}{3} + 2 = \frac{2}{27}$。於是 $4Q^3 + 27R^2 = -\frac{4}{27} + \frac{4}{27} = 0$。
- 我們亦以精確的有理數運算，在數百個隨機選取、帶有重根的三次多項式上測試了這兩個恆等式，並在隨機選取的點上檢驗了平移恆等式。

常見錯誤

- 韋達定理（Vieta's formulae）中的正負號出錯：本題選用的符號是 $-p, +q, -r$，因此 p, q, r 三者以根表示時全部帶正號。
- 按 $p/3$ 平移時弄錯方向。新三次多項式的根是 $a - \frac{p}{3}$ 等等，正因如此它們的和才是零。
- 在 (ii) 中硬用 a, a, c 把所有式子展開。這樣做行得通，但過程冗長又容易出錯；平移則可不費工夫地重用 (i)。

STEP 之外

對一般的三次多項式，(ii) 的左方等於 $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$，即判別式（discriminant）的相反數。它恰好在有兩個根重合時等於零，而它的正負號則告訴你一個實係數三次多項式是有三個實根還是只有一個。平移 $x = y + \frac{p}{3}$ 亦是以卡爾達諾公式（Cardano's formula）解三次方程的第一步。根的對稱函數、判別式，以及哪些方程可用根式求解（solved by radicals）的問題，都通往伽羅瓦理論（Galois theory）；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）是很好的入門讀物。

詳細解答

STEP II 1992，第 8 題

純數學 • 積分技巧

STEP II 1992，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q8

關鍵思路

三個標準技巧，每部分各用一個。在 (i) 中，我們把分母徹底因式分解（factorise），並留意到有一個重複因式，因此部分分式（partial fractions）需要包含平方項。在 (ii) 中，代換（substitution）$t = \tan\frac{x}{2}$ 可把任何關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數（rational function）化為 t 的有理函數，而這裏所得的二次式剛好可以漂亮地分解。在 (iii) 中，我們把 $\sinh x$ 寫成指數形式，再代入 $u = \mathrm{e}^x$，結果同樣歸結為部分分式。

解答

第 (i) 部分

由於 $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$，分母是 $(x-1)^2(x+1)$。因式 $x-1$ 重複出現，所以我們設

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

即

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

代入 $x=1$ 得 $1=2B$，所以 $B=\frac{1}{2}$。代入 $x=-1$ 得 $-1=4C$，所以 $C=-\frac{1}{4}$。比較 x^2 的係數得 $0=A+C$，所以 $A=\frac{1}{4}$。因此

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}-\tfrac{1}{4}\ln|x+1|+c\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+c.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

設 $t=\tan\frac{x}{2}$。則

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

最後一式是因為 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+t^2)$。所以

$$3\cos x+4\sin x=\frac{3-3t^2+8t}{1+t^2}=\frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

而因式 $1+t^2$ 互相約去：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

? **想一想** 我們怎樣知道二次式 $3+8t-3t^2$ 可以因式分解？

它的判別式（discriminant）是 $64+36=100=10^2$，是一個完全平方數，所以它的根 $t=3$ 和 $t=-\frac{1}{3}$ 都是有理數。（這並非巧合：$3^2+4^2=5^2$，這也正是下文的諧波形式（harmonic form）振幅為整數的原因。）

現在寫 $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)}=\dfrac{a}{1+3t}+\dfrac{b}{3-t}$，於是 $2=a(3-t)+b(1+3t)$。代入 $t=3$ 得 $b=\frac{1}{5}$；代入 $t=-\frac{1}{3}$ 得 $\frac{10}{3}a=2$，所以 $a=\frac{3}{5}$。因此

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{3\cos x+4\sin x}&=\int\left(\frac{3}{5(1+3t)}+\frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{5}\ln|1+3t|-\tfrac{1}{5}\ln|3-t|+c\\ &=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+c.\end{aligned}$$

另一方法：寫 $3\cos x+4\sin x=5\sin(x+\beta)$，其中 $\cos\beta=\frac{4}{5}$ 及 $\sin\beta=\frac{3}{5}$。則該積分為 $\frac{1}{5}\int\operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)\right|+c$。兩個答案是一致的：由於 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$（因為 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}=\frac{3/5}{9/5}$），由複角公式（addition formula）得

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta)=\frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{1+3t}{3-t}.$$

第 (iii) 部分

由於 $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$，把分子和分母同乘以 e^x 得

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

代入 $u = \mathrm{e}^x$，於是 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} &= \int \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c \\ &= \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right| + c = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c,\end{aligned}$$

其中最後一步是把分子和分母同除以 $\mathrm{e}^{x/2}$：$\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}} = \tanh\frac{x}{2}$。留意這與 (ii) 的另一方法中用到的 $\int \operatorname{cosec} x\,\mathrm{d}x = \ln|\tan\frac{x}{2}| + c$ 何其相似。

驗算

把每個答案求導。例如在 (iii) 中，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\tanh\frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sinh x}$。數值上，用辛普森法則（Simpson's rule）計算，(i) 的被積函數（integrand）的 $\int_2^5$ 為 0.548287，(ii) 的被積函數的 $\int_0^1$ 為 0.234276，而 $\int_{1/2}^2 \operatorname{cosech} x\,\mathrm{d}x$ 為 1.134488，各自與原函數（antiderivative）所得的值吻合至最少 12 個小數位。

常見錯誤

- 在 (i) 中，看漏了重複因式而只嘗試 $\frac{A}{x-1} + \frac{C}{x+1}$，又或者根本忘記了 x^2-1 可以因式分解。
- 漏掉對數內的絕對值符號：當 $x-1$、$1+3t$ 和 $\tanh\frac{x}{2}$ 取負值時，被積函數同樣有定義。
- 在 (ii) 中，忘記了來自 $\mathrm{d}x$ 的因子 $\frac{2}{1+t^2}$。

STEP 之外

代換 $t = \tan\frac{x}{2}$（有時稱為魏爾斯特拉斯代換，Weierstrass substitution）說明了每一個關於 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函數都有初等原函數（elementary antiderivative），因為部分分式可以處理 t 的任何有理函數。它背後是以有理函數對單位圓作出的參數化（parametrisation），而正是這個參數化生成了所有畢氏三元數組（Pythagorean triples）。至於究竟哪些函數才有初等原函數，這類問題會引向劉維爾定理（Liouville's theorem）和微分代數（differential algebra）；關於積分的分析基礎，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

詳細解答

STEP II 1992，第 9 題

純數學 • 純量三重積

> **STEP II 1992，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

關鍵思路

把 $\mathbf{r}$ 的表達式重新整理成 $\mathbf{a}$ 加上 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 的組合，便可看出它是通過 A、B 和 C 的平面。該平面的一個法向量（normal）是平面上兩個向量的向量積（cross product），而把這個向量積展開，恰好得出題目中的三個三重積（triple product）。此後，由於恆等式對所有 λ 和 μ 都成立，我們可以選取方便的數值。

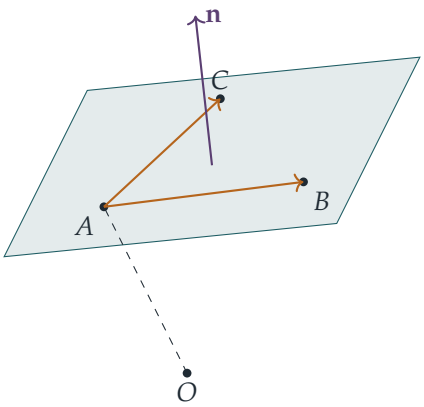
解答

軌跡

把方程改寫成

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

這就是點 A 加上向量 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ 與 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 的任意組合。這兩個向量並不平行：假如平行，A、B、C 便會共線，而一條直線連同 O 必定位於某個平面上，這與題設不符。因此，當 λ 和 μ 取遍所有實數時，$\mathbf{r}$ 掃出的就是**通過 A、B 和 C 的平面**。取 $(\lambda,\mu)=(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 便分別得到 A、B、C 三點本身。由於 O 不在平面 ABC 上，這個平面不通過原點。



方程 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

平面的法向量同時垂直於 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$，所以我們取

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

由於這兩個向量不平行，它不是零向量。展開，並利用 $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$，得

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

平面上每一點與 A 相差的向量都垂直於 $\mathbf{n}$，所以 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$。由於 $\mathbf{a}$ 垂直於 $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$，亦垂直於 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

因此平面的方程是 $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$。

? **想一想** 把 $\mathbf{r}$ 的參數形式（parametric form）代入後，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ 是甚麼？

我們需要 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$。在每一個之中，三項裏都有兩項消失，因為一個向量必定垂直於任何包含它的向量積：

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

對於所有 λ、μ，點 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ 都在平面上，所以由 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$ 得

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

兩邊同時減去 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，得

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

對所有純量 λ、μ 都成立，這正是所要證明的。

推論

由於恆等式對所有 λ 和 μ 都成立，可選取能把個別項分離出來的數值。

- $\lambda = 1, \mu = 0$：$-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$。
- $\lambda = 0, \mu = 1$：$-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$。

兩式合起來便得

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

（換一個等價的說法：左邊是 λ 和 μ 的線性式，而且恆等於零，所以 λ 的係數和 μ 的係數都必須為零。）

當 A、B、C 和 O 共面時

這時 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 全都位於同一個通過 O 的平面上。$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 垂直於該平面（或為零向量），所以 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$，其餘兩個三重積同樣為零。從幾何上看，以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 為棱的平行六面體（parallelepiped）是扁平的，體積為零。結果依然成立，但只是平凡地成立：$0 = 0 = 0$。若 A、B、C 不共線，軌跡仍然是一個平面，但它通過原點，所以 $p = 0$，其方程為 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$。若 A、B、C 共線，則 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$，軌跡只是一條直線（若三點重合，則只是一個點），所以這個論證得不出任何資訊。

驗算

- 取 $\mathbf{a} = \mathbf{i}$、$\mathbf{b} = \mathbf{j}$、$\mathbf{c} = \mathbf{k}$，三個三重積都等於 1，而 $\mathbf{n} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$，$p = 1$：平面為 $x + y + z = 1$，它確實包含這三點。
- 我們以精確分數運算測試了 2000 組隨機整數向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$：$\mathbf{n}$ 的展開式、p 的值、對隨機 λ、μ 的方程 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$，以及三個三重積相等，全部精確成立。對於共面的向量組，每個三重積都是 0。

常見錯誤

- 展開 $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ 時出現正負號錯誤：$-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ 一項變成 $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，而 $-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ 變成 $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$。
- 忘記說明為何 $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$，而這正是用上不共面條件（經由 A、B、C 不共線）的地方。

STEP 之外

純量三重積（scalar triple product）$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 就是以 **a**、**b**、**c** 為各行的 3×3 行列式（determinant），而這裏證明的循環對稱性，正是「把各行作循環置換（即兩次對換）不會改變行列式的值」這一事實。它的值是以這三個向量為棱的平行六面體的有向體積，並且恰好在三個向量線性相關（linearly dependent）時為零，也就是共面的情況。在大學一年級的課程中，這會發展成把行列式視為體積縮放因子的一般理論；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對此有清晰的闡述。

詳細解答

STEP II 1992，第 10 題

純數學 • 阿根圖上的軌跡

> **STEP II 1992，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q10

關鍵思路

把式子寫成 $\dfrac{z-1}{z} = \dfrac{1-z}{0-z}$：它的輻角（argument）就是由方向 $z \to 0$ 逆時針轉到方向 $z \to 1$ 的角。因此，固定輻角就等於固定由 0 到 1 的線段在 z 處所對的角，接下來便可交給圓的定理（circle theorems）處理（同弓形內的圓周角相等、圓內接四邊形對角互補）。最後一部分用的是同一個想法，只是把由 0 到 1 的線段換成弦 z_4z_2。

解答

（題目的敘述有一處誤植：條件應為 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$。）

整個解答全靠兩個事實。第一，由於 $\arg\dfrac{z-1}{z} = \arg(1-z) - \arg(0-z)$，這個輻角量度的是在 z 處由直線 $z0$ 逆時針轉到直線 $z1$ 的角。第二，它告訴我們 z 位於實軸（real axis）的哪一側：

$$\operatorname{Im}\frac{z-1}{z} = \operatorname{Im}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

所以 $\arg\frac{z-1}{z} \in (0,\pi)$ 當且僅當 $\operatorname{Im} z > 0$，而它落在 $(-\pi,0)$ 內當且僅當 $\operatorname{Im} z < 0$。實軸上的點給出的商是實數（輻角為 0 或 π），而 $z = 0,1$ 則根本沒有輻角。

第 (i) 部分

這裏 $\operatorname{Im} z > 0$，而由 0 到 1 的線段在 z 處所對的角為 α。在實軸上方，使一條固定的弦（chord）對着固定角度的所有點，組成一條通過弦兩端的圓弧（同弓形內的圓周角相等）。反過來，該弧上每一點看這條弦的角都是 α，而且因為該點位於弦的上方，這個角是逆時針方向轉的，所以整條弧都屬於所求的軌跡（locus）。

要確定這個圓：圓心角為 2α，所以長度為 1 的弦給出半徑 $\dfrac{1}{2\sin\alpha}$，而圓心位於 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ 上，高度為 $\frac{1}{2}\cot\alpha \geq 0$。軌跡就是圓

$$\left|z - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\cot\alpha\right| = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

位於實軸上方的那段弧，但不包括端點 0 和 1。由於 $\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$，這是優弧（major arc）。當 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 時，它就是以 0 到 1 為直徑的上半圓（半圓上的圓周角）。

第 (ii) 部分

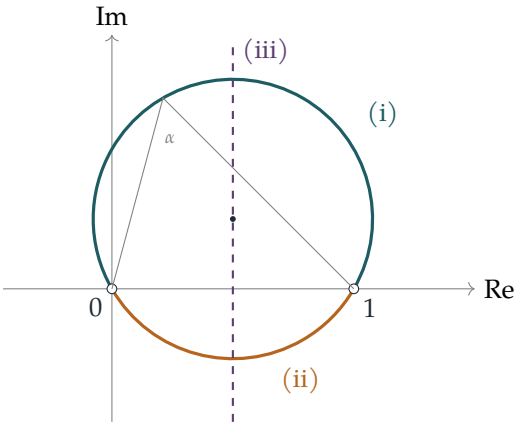
現在輻角 $\alpha - \pi$ 落在 $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ 內，所以 $\operatorname{Im} z < 0$，而弦在 z 處所對的角大小為 $\pi - \alpha$，方向為順時針。

> **想一想** 在實軸下方，弦所對的角為 $\pi - \alpha$ 的是哪一個圓？

就是 (i) 中的同一個圓。若 P 在 (i) 的弧上，而 Q 在該圓的另一段弧上，則 $0PQ1$（按適當的次序排列）是一個圓內接四邊形（cyclic quadrilateral），其中 P 與 Q 是對角，所以 P 和 Q 處的角之和為 π。因此，實軸下方的劣弧（minor arc）正正就是角為 $\pi - \alpha$ 的地方。軌跡是 (i) 中的圓位於實軸下方的那段弧，同樣不包括 0 和 1。(i) 和 (ii) 兩部分合起來，就是除去 0 和 1 之後的整個圓。（若 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$，(ii) 就是下半圓。）

第 (iii) 部分

$\left|\frac{z-1}{z}\right| = 1$ 即 $|z-1| = |z|$ 且 $z \neq 0$：z 與 0 和 1 等距。軌跡是垂直平分線（perpendicular bisector），即直線 $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$。



草圖所示為 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 的情況：藍綠色的優弧是 (i)，琥珀色的劣弧是 (ii)，紫紅色的虛線是 (iii)，空心圓圈標示被剔除的點 0 和 1。

最後一部分

設 $f(z) = \dfrac{z - z_2}{z - z_4}$。由於 $(z_1 - z_4)(z_3 - z_2) = (z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$，

$$\frac{f(z_1)}{f(z_3)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)} = w,$$

所以 $\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3)$（模 2π）。

函數 f 其實就是 (i) 和 (ii) 兩部分的那個函數，只是換了坐標。設 $z = z_4 + (z_2 - z_4)u$，這是先旋轉（rotation）和放大（enlargement），再平移（translation），把 $u = 0, 1$ 分別送到 z_4, z_2。於是

$$f(z) = \frac{(z_2 - z_4)(u - 1)}{(z_2 - z_4)u} = \frac{u - 1}{u}.$$

通過這四點的圓，對應於 u 平面上一個通過 0 和 1 的圓。

? **想一想** 為甚麼 z_1 和 z_3 位於不同的弧上？

這些點沿圓周依次為 z_1, z_2, z_3, z_4，所以弦 z_2z_4 把圓分成兩段弧，一段包含 z_1，另一段包含 z_3。在 u 平面上，其中一段位於實軸上方，另一段位於實軸下方。

由 (i) 和 (ii) 可知，$\frac{u-1}{u}$ 的輻角在上方的弧上取常數值 $\beta \in (0, \pi)$，在下方的弧上取值 $\beta - \pi$。這裏我們並沒有假設 $\beta \le \frac{1}{2}\pi$：上面運用圓的定理的論證從未用過這個限制。因此

$$\arg w = \arg f(z_1) - \arg f(z_3) = \pm\big(\beta - (\beta - \pi)\big) = \pm\pi \pmod{2\pi},$$

所以 w 是實數，而且其實是負數。 ■

驗算

對於正方形 $z_1 = 1$、$z_2 = \mathrm{i}$、$z_3 = -1$、$z_4 = -\mathrm{i}$，我們得到 $w = \dfrac{(1-\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})}{(-1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \dfrac{-(1-\mathrm{i})^2}{-(1+\mathrm{i})^2} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = -1$，確實是負實數。至於 (i)，取 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 和 $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$。則 $\frac{z-1}{z} = \frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$，其輻角為 $\frac{1}{2}\pi$。我們亦以數值方法驗證過：對若干個 α 的值，兩段弧上的輻角確如上文所述；並且在隨機的圓上依次隨機取四點，共 10^4 組，w 都是負實數。

常見錯誤

- 把整個圓當作 (i) 的答案。只有一段弧的輻角是對的；另一段弧給出的是 $\alpha - \pi$，那正是第 (ii) 部分。
- 忘記剔除 0 和 1，在這兩點輻角沒有定義。

- 因為處理 $(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)$ 中的負號時出錯，而弄錯 $\arg w$ 的正負號。像上面那樣把它們配對，就可避免這個問題。

STEP 之外

w 這個量（除了正負號和次序上的差別外）就是四個點的交比（cross-ratio）。它在每一個莫比烏斯變換（Möbius transformation）$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ 之下都保持不變，而四點共圓或共線，當且僅當它們的交比是實數。由於莫比烏斯映射把圓和直線送到圓和直線，這就提供了一個證明四點共圓（concyclicity）的巧妙方法。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這種幾何觀點發揮得淋漓盡致。

詳細解答

STEP II 1992，第 11 題

力學 • 拋體運動

> **STEP II 1992，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q11

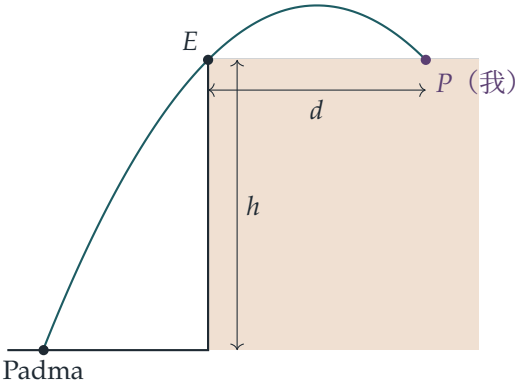
關鍵思路

這一擲的難處不在於把銀包拋到高度 h，而在於讓它越過崖頂：由崖邊到我所站之處，水平距離至少為 d，銀包在這一整段路程中的高度都不得低於 h。因此，我們只考慮銀包首次到達高度 h 那一刻之後的運動。由那一刻起，它就是一個在水平地面（即崖頂所在的水平面）上的普通拋體（projectile），其速率可由能量守恆（conservation of energy）求得，餘下的工作交給大家熟悉的最大射程（maximum range）u^2/g 便可。

解答

模型

把銀包視為一個只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力，並設它由地面拋出（Padma 的身高可忽略不計）。設 E 為懸崖的頂邊，P 為我所站的位置，因此 P 的高度為 h，並在 E 之後水平距離 d 處。崖面是鉛垂的，而沙灘在崖面的另一側，與我分處兩邊，所以無論 Padma 站在哪裏，銀包都必須越過 E（最差的情況是剛好擦過它），然後落到 P。



以下會反覆用到一個事實。若一個質點在某一水平面上的速率為 u，運動方向與水平線成仰角 α，則它經過時間 $2u\sin\alpha/g$ 後回到該水平面，其間的水平位移為

$$\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}=\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\le\frac{u^2}{g},$$

等號成立當且僅當 $\alpha=45°$。

條件是必要的

假設某一擲能把銀包送到 P。銀包必定到達高度 h，設 Q 為軌跡上首個高度為 h 的點。取崖腳為勢能（potential energy）的零點，由能量守恆可得銀包在 Q 的速率 u：

$$u^2=V^2-2gh.$$

想一想 為甚麼 Q 與 P 的水平距離必定至少為 d？

當銀包的水平位置與崖面相同時，它的高度必須至少為 h，否則便會撞上崖面（或在崖邊之下經過）。它的高度由 0 開始連續上升，所以在此之前它已經到達高度 h：Q 位於 E 靠沙灘的一側，或就在 E。由於 P 在 E 之後水平距離 d 處，Q 到 P 的水平距離至少為 d。

在 Q 與 P 之間，銀包以速率 u 出發，由高度 h 回到高度 h。根據上述關於射程的事實，它所走過的水平距離至多為 u^2/g。因此

$$d\le\frac{u^2}{g}=\frac{V^2-2gh}{g},\qquad\text{即}\qquad V^2\ge g(2h+d).$$

條件是充分的

現在假設 $V^2 \geq g(2h+d)$。則 $u^2 = V^2 - 2gh \geq gd > 0$，所以 $gd/u^2 \leq 1$，於是可以選取一個角 α，滿足 $0 < \alpha \leq 45^\circ$ 及

$$\sin 2\alpha = \frac{gd}{u^2}.$$

考慮這樣一條拋物線（parabola）軌跡：它以速率 u 經過 E，以仰角 α 朝遠離沙灘的方向運動。根據關於射程的事實，它在 E 之後水平距離 $u^2 \sin 2\alpha / g = d$ 處回落到高度 h，那正是 P。在 E 與 P 之間，它高於高度 h，所以能越過崖頂。

把這條軌跡由 E 起在時間上倒推回去：在較早的時刻，銀包的位置較低，而且在沙灘上方離崖面較遠（當時它的鉛垂速度較大，而且向上），所以軌跡會在沙灘上某一點與地面相交，該點與崖腳的水平距離為正數。在到達 E 之前，軌跡完全位於崖面靠沙灘的一側，所以途中沒有任何阻礙；又因為沙灘寬闊，Padma 可以站在該點。由能量守恆，銀包在該點的速率為 $\sqrt{u^2 + 2gh} = V$。因此，若 Padma 在該點以速率 V 沿軌跡的方向拋出銀包，銀包便會沿着這條軌跡到達我手上。

（當 $V^2 = g(2h+d)$ 恰好成立時，$\alpha = 45^\circ$，銀包剛好擦過崖邊 E；若 V 更大，則在 $(0^\circ, 90^\circ)$ 內有兩個角可行，而且兩者都令銀包嚴格地在崖邊上方經過。）

綜合以上兩部分，Padma 能把銀包拋給我，當且僅當 $V^2 \geq g(2h+d)$，這正是所要證明的。

驗算

- 若 $d = 0$，條件變成 $V^2 \geq 2gh$，這正是鉛垂上拋到達高度 h 所需的條件。
- 若 $h = 0$，條件變成 $V^2 \geq gd$，即水平地面上常見的最大射程。
- 若不理會崖邊，Padma 最有利的做法是站在崖腳，而所有軌跡的包絡拋物線（bounding parabola）只給出 $V^2 \geq g\left(h + \sqrt{h^2 + d^2}\right)$；由於 $\sqrt{h^2+d^2} \leq h + d$，這個條件較弱。所以崖邊確實是起決定作用的約束。
- 數值上，取 $g = 9.8$、$h = 20$ 及 $d = 15$，臨界速率為 $\sqrt{539} \approx 23.2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$；Padma 站在離崖腳約 11.4 m 處，而對這一擲進行逐步模擬，銀包落在崖邊之後 15.0 m 處，並擦過 E。對隨機選取的 h、V 掃描所有拋射角，結果證實軌跡上兩個高度為 h 的點之間的最大水平間距為 $(V^2 - 2gh)/g$。

常見錯誤

- 只對由崖腳拋往點 P 的情況使用包絡拋物線。這樣做忽略了崖邊，所得的條件是必要但不充分的。

- 只證明一個方向。「若」的方向需要明確構造出一擲，並檢查它由沙灘出發，而且不會撞上懸崖。

STEP 之外

在高度 h 重新開始考慮運動這一招之所以可行，是因為運動方程（equations of motion）不隨時間改變，在水平平移下亦保持不變，所以軌跡上任何一點都可以當作一次全新的拋射。「哪些目標可以到達？」這類問題，討論的是一族曲線的包絡線（envelope）；若途中有障礙物，答案便取決於哪一個約束最先生效，這個想法在最優化（optimisation）和變分法（calculus of variations）中會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）是進一步學習拋體運動和能量方法的好選擇。

詳細解答

STEP II 1992，第 12 題

力學 • 力矩與彈性繩

STEP II 1992，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q12

關鍵思路

每個輪子都可以自由轉動，所以它處於平衡（equilibrium）的唯一條件，就是對輪心的力矩（moment）互相抵銷：懸掛的質點（particle）要把輪子向一個方向轉，而彈性繩（elastic string）則把它向另一個方向拉回去。由幾何關係可以用 θ 表示彈性繩的伸長量（extension），於是由胡克定律（Hooke's law）得出張力（tension），再取力矩便得到一條關於 θ 的方程。因此，數算平衡位置的數目，就是數算這條方程在真正有意義的角度範圍內有多少個解。

解答

建立模型

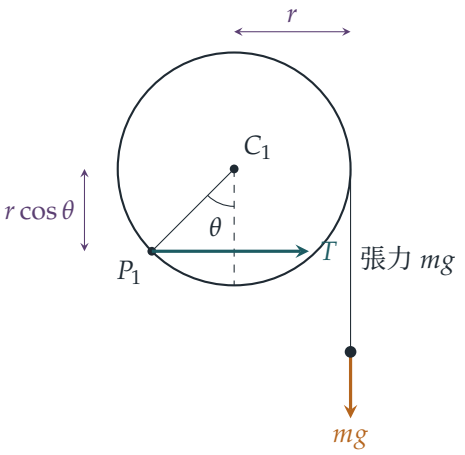
我們把各質點視為質點，把懸掛它們的繩視為輕（light）而不可伸長（inextensible）的繩，並把彈性繩視為輕而且服從胡克定律。輪軸是光滑（smooth）的，所以每個輪心處的反作用力對該輪心沒有力矩。

取 C_1C_2 為水平。在圖中，P_1 位於 C_1 外側（左方）$r\sin\theta$ 處，並在其下方 $r\cos\theta$ 處；P_2 則是它的鏡像。所以 P_1 和 P_2 處於同一高度，彈性繩是水平的，長度為

$$P_1P_2 = d + 2r\sin\theta.$$

它的自然長度（natural length）是 d，所以伸長量是 $2r\sin\theta$，而根據胡克定律，張力為

$$T = \frac{\lambda\,(2r\sin\theta)}{d}.$$



W_1 上的質點懸掛着並處於平衡，所以繫着它的繩的張力是 mg；這條繩在較接近 W_2 的一側沿切線方向離開輪子，與 C_1 的水平距離為 r。彈性繩以力 T 把 P_1 水平地拉向 W_2，而它的作用線在 C_1 下方 $r\cos\theta$ 處。

平衡條件

對 C_1 取力矩：重量使 W_1 順時針轉動（如圖所示），力矩為 mgr；張力則使它逆時針轉動，力矩為 $Tr\cos\theta$。所以

$$mgr = Tr\cos\theta = \frac{2\lambda r\sin\theta}{d}r\cos\theta = \frac{\lambda r^2\sin 2\theta}{d},$$

其中用了 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$。兩邊除以 λr^2，得

$$\sin 2\theta = \frac{mgd}{\lambda r},$$

這正是所要證明的結果。根據對稱性，對 C_2 取力矩也會得到同一條方程。

哪些角度是容許的？

? **想一想** 為甚麼 θ 不可以是任意角度，使得 $\sin 2\theta = k$ 有無限多個解？

張力的力矩必須與重量的力矩方向相反。若 $\sin\theta \le 0$，則 P_1 與 P_2 兩點相距不超過 d，於是彈性繩鬆弛，$T = 0$，沒有東西可以抵銷 mgr。若 $\cos\theta \le 0$，則彈性繩與 C_1 同高或在其上方，所以它對 C_1 的力矩是零，或者與重量一樣使輪子向同一方向轉動。無論哪種情況都不會有平衡。因此，平衡必須滿足

$$0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \text{即} \qquad 0 < 2\theta < \pi.$$

（兩個輪子可否處於不同的角度？張力對每個輪心的力矩，等於 T 乘以該輪心到直線 P_1P_2 的垂直距離，而兩個力矩都必須等於 mgr。所以 C_1 和 C_2 與這條直線的距離相同，

並且在直線的同一側，而直線在兩個輪心的下方。因此這條直線平行於 C_1C_2，所以 P_1 和 P_2 處於同一深度，兩個角度亦相同，因為假如兩個角度異號，彈性繩的長度便剛好是 d，因而鬆弛。所以每一個平衡位置都屬於圖中所示的對稱類型。)

設 $k = \dfrac{mgd}{\lambda r} > 0$。在 $0 < 2\theta < \pi$ 上，$\sin 2\theta$ 由 0 上升，在 $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 時達到 1，然後回落至 0，其間恰好兩次取得 $(0,1)$ 內的每一個值，並恰好一次取得 1 這個值。所以方程 $\sin 2\theta = k$

- 在 $k > 1$ 時無解；
- 在 $k = 1$ 時恰有一個解 $\theta = \frac{\pi}{4}$；
- 在 $0 < k < 1$ 時恰有兩個解 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$，其中 $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin k \in (0, \frac{\pi}{4})$。

由於 $k > 1 \iff \lambda < \dfrac{mgd}{r}$，答案如下：

第 (i) 部分

當 $\lambda < \dfrac{mgd}{r}$ 時沒有平衡位置：彈性繩太弱，在任何角度都無法拉住質點。

第 (ii) 部分

當 $\lambda = \dfrac{mgd}{r}$ 時只有一個平衡位置，此時 $\theta = \frac{\pi}{4}$。

第 (iii) 部分

當 $\lambda > \dfrac{mgd}{r}$ 時恰有兩個平衡位置，分別在 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$。

第 (iv) 部分

沒有任何 λ 的值可以給出多於兩個平衡位置，因為 θ 被限制在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之內。

驗算

- 量綱：λ 是力，mg 也是力，而 d/r 是兩個長度之比，所以 $mgd/(\lambda r)$ 是無量綱的，正弦值理應如此。
- 極限情況：當 $\lambda \to \infty$ 時，彈性繩變得不可伸長，兩個解分別趨向 $\theta \to 0$（伸長量極小，張力很大）和 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（彈性繩幾乎與輪心同高，所以力臂極小）。兩者都合理。
- 數值驗算：取 $m = 1$、$d = 4$、$r = 1$、$g = 9.8$ 和 $\lambda = 3mgd/r$，於是 $k = \frac{1}{3}$；一個包

含兩個輪子的完整模型（容許兩個角度不同）恰有兩個平衡位置，分別在 $\theta \approx 0.1699$ 和 $\theta \approx 1.4009$；它們就是 $\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}$ 以及 $\frac{\pi}{2}$ 減去這個值。

常見錯誤

- 把伸長量當作 $r\sin\theta$ 而不是 $2r\sin\theta$：彈性繩的兩端都向外移動了。
- 以 $r\sin\theta$ 作為張力的力臂。張力是水平的，所以它的力臂是垂直距離 $r\cos\theta$。
- 在 (iv) 中答「無限多個」，忘記了只有 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 在物理上才有可能。

STEP 之外

研究平衡位置的數目如何隨參數改變而變化，正是分岔理論（*bifurcation theory*）的起點。在這裏，$\lambda > mgd/r$ 時的兩個平衡位置在 $\lambda = mgd/r$ 時合而為一，然後消失，這稱為鞍結分岔（saddle-node bifurcation），又稱摺疊分岔（fold bifurcation）。考察勢能（potential energy）便會發現，這一對平衡位置中一個是穩定的，另一個是不穩定的，這正是摺疊分岔的典型特徵。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 講述了力矩、剛體平衡，以及如何由勢能判斷穩定性。

詳細解答

STEP II 1992，第 13 題

力學 • 摩擦力與連接質點

STEP II 1992，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

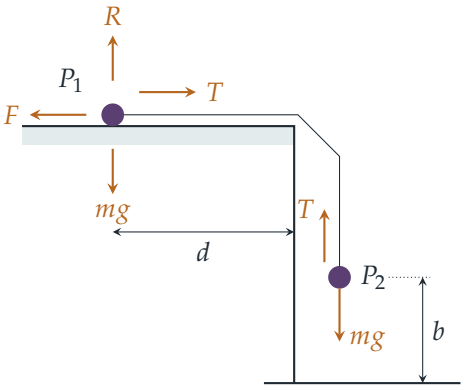
step.maths.org/questions/92-s2-q13

關鍵思路

整個運動分為兩個階段。P_2 下墜期間，繩子拉緊，兩個質點（particle）以同一個加速度一起運動。P_2 一撞到地面，繩子便鬆弛，P_1 只會在摩擦力（friction）作用下滑行至停下。一切都取決於碰撞一刻的速率：第一部分是把停下所需的距離與距離桌邊尚餘的距離作比較，第二部分則是比較兩段時間。

解答

我們把 P_1 和 P_2 視為質點，並把繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible），繞過光滑的桌邊，因此整條繩子的張力（tension）T 處處相同。桌面對 P_1 而言是粗糙的。我們假設 $b < d$，使得 P_2 在 P_1 到達桌邊之前已經着地（繩子的長度此後再無作用）。



第一部分

第一階段：繩子拉緊。對 P_1 沿豎直方向分解力，得 $R = mg$。它正在滑動，所以摩擦力達到極限值（limiting friction）：$F = \mu R = \mu mg$，方向與運動相反。設共同加速度為 a，

$$P_2 \text{ (向下)}: \quad mg - T = ma,$$
$$P_1 \text{ (朝向桌邊)}: \quad T - \mu mg = ma.$$

兩式相加，$2ma = mg(1-\mu)$，所以 $a = \frac{1}{2}g(1-\mu)$；由於 $\mu < 1$，這是正數，系統確實會開始運動。P_2 由靜止下墜距離 b，所以它到達地面時的速率 V 滿足

$$V^2 = 2ab = gb(1-\mu).$$

此刻 P_1 的速率同樣是 V，而且它已移動了距離 b，所以它距離桌邊 $d-b$。

第二階段：繩子鬆弛。碰撞之後，P_2 在地面上或正在向上彈起，而 P_1 繼續向桌邊移動，所以繩子鬆弛，$T = 0$。

> **想一想** 為甚麼 P_2 彈跳期間繩子不會再次拉緊？

碰撞一刻繩子剛好拉緊。其後 P_1 向桌邊靠近，讓更多繩子越過桌邊垂下，而 P_2 不會低於地面，所以它所需的繩子不會比碰撞時多。繩子自此一直保持鬆弛。

因此 P_1 只以 μg 減速，並在再移動距離

$$s = \frac{V^2}{2\mu g} = \frac{b(1-\mu)}{2\mu},$$

之後停下，前提是它沒有先到達桌邊。故此 P_1 掉下桌子，當且僅當（if and only if）$s > d-b$：

$$\frac{b(1-\mu)}{2\mu} > d-b \iff b - b\mu > 2\mu d - 2\mu b \qquad (\text{兩邊乘以} 2\mu > 0)$$
$$\iff b > \mu(2d-b)$$
$$\iff \mu < \frac{b}{2d-b},$$

其中最後一步是除以 $2d-b$，因為 $d > b$，這是正數。每一步都可逆，所以這正是所要求的「當且僅當」。（若 μ 等於 $b/(2d-b)$，P_1 剛好停在桌邊，不會掉下。）

第二部分

現在 $\mu > b/(2d-b)$，所以 P_1 會停在桌上。由 P_2 第一次撞到地面的一刻起計時。在那一刻兩個質點的速率都是 V。

P_1：由速率 V 起以 μg 減速，經過時間

$$t_1 = \frac{V}{\mu g}.$$

後停下。

P_2：根據牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），它以速率 eV 反彈。由於繩子鬆弛，它只在重力作用下自由運動，所以當 $eVt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 時它返回地面，即經過時間

$$t_2 = \frac{2eV}{g}.$$

（碰撞是瞬時的，所以第一次彈跳不耗時間。）

P_1 在第二次彈跳之前停下，正正就是 $t_1 < t_2$ 的時候：

$$\frac{V}{\mu g} < \frac{2eV}{g} \iff \frac{1}{\mu} < 2e \iff e > \frac{1}{2\mu},$$

這裏除以了 $V/g > 0$。所以若 $e > 1/(2\mu)$，P_1 會在 P_2 第二次彈跳之前停下，正如所求。事實上逆命題（converse）亦成立。

驗算

- 極限情況：當 $\mu \to 0$ 時，界限 $b/(2d-b)$ 顯然得到滿足，而 P_1 在光滑桌面上當然會滑出桌邊。若 $b = d$，界限變成 1，所以在 $\mu < 1$ 之下它必定掉下；這是對的，因為 P_2 着地時 P_1 已在桌邊，而且仍在運動。
- 由於 $\mu < 1$，第二個條件需要 $e > \frac{1}{2}$。地面幾乎沒有彈性時，彈跳很短，所以 P_2 會先再次着地，與我們的預期一致。
- 數值上，取 $d = 2$、$b = 1$、$\mu = 0.5$ 和 $e = 0.8$（取 $g = 9.8$），逐步模擬運動得出 $t_1 \approx 0.452\,\text{s}$ 和 $t_2 \approx 0.361\,\text{s}$，與 $V/(\mu g)$ 和 $2eV/g$ 在 $V^2 = 4.9$ 時的值吻合。這裏 $e = 0.8 < 1/(2\mu) = 1$，所以 P_2 先再次彈跳。在逐步模擬中對兩個判別條件所作的隨機測試，每一次結果都吻合。

常見錯誤

- 在第二階段仍保留張力：P_2 一着地，繩子便鬆弛，P_1 只受摩擦力減速。
- 忘記 P_1 已經移動了距離 b，把 s 與 d 比較，而不是與 $d - b$ 比較。
- 把系統的加速度寫成 $g(1-\mu)$，忘記了 $mg(1-\mu)$ 這個力要令兩個質量一起加速。

STEP 之外

這裏的繩子是一個單側約束（unilateral constraint）：它只能拉，不能推，所以繩子一鬆弛，運動方程便會轉換。支配方程在碰撞時或失去接觸時改變的系統，稱為分段光滑

（piecewise-smooth）系統或混合（hybrid）系統，在工程動力學和機械人學中都有深入的研究。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對繩子、摩擦和碰撞有仔細的論述，是很好的下一步讀物。

詳細解答

STEP II 1992，第 14 題

力學 • 連接質點與滑輪

STEP II 1992，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q14

關鍵思路

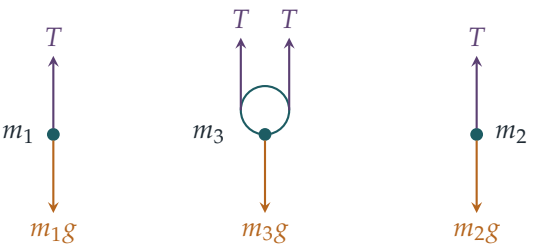
系統中有三個運動的物體，但只有一條繩，所以整條繩的張力（tension）都是同一個 T，而三個加速度（acceleration）之間只有一個約束條件。對每個質點寫出牛頓第二定律（Newton's second law）（滑輪 P_3 與掛在它上面的質點一起運動），再寫出繩長條件，便得到四個未知數的四條線性方程。至於靜止的條件，不過是說 P_3 的加速度為零。

解答

模型

滑輪（pulley）光滑而輕，繩輕而不可伸長（inextensible），所以整條繩上的張力處處相同，都等於 T。由於 P_3 是輕滑輪，它與質量為 m_3 的質點合成一個質量為 m_3 的物體，由兩段豎直的繩吊着，每段繩都以力 T 把它向上拉。

所有位移一律以向下為正：設 x_1、x_2、x_3 分別為質點 m_1、質點 m_2 和滑輪 P_3 在固定滑輪以下的深度，對應的加速度為 a_1、a_2、a_3（向下為正）。



運動方程

對每個物體沿豎直方向分解（向下為正）：

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T, \\ m_3 a_3 &= m_3 g - 2T. \end{aligned}$$

繩的約束條件

略去繞在滑輪上的固定長度不計，這條繩由以下各段組成：由 P_1 垂下至 m_1 的一段（長度 x_1）、由兩個固定滑輪垂下至 P_3 的兩段（每段長度 x_3），以及由 P_2 垂下至 m_2 的一段（長度 x_2）。由於繩不可伸長，

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = \text{常數}, \qquad \text{所以} \qquad a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

後一式由前一式求導兩次而得。

> **想一想** 為甚麼 x_3 的係數是 2 而不是 1？

當 P_3 下降距離 d 時，吊着它的兩段繩都各自長了 d，所以共用去 $2d$ 的繩。這些繩只能來自外側的兩段，因此 $x_1 + x_2$ 減少 $2d$。漏掉這個因子，是這道題最常見的出錯原因。

張力

把每條運動方程除以對應的質量，

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \qquad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \qquad a_3 = g - \frac{2T}{m_3}.$$

代入 $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$：

$$4g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 0.$$

全式乘以 $m_1 m_2 m_3$，再解出 T，

$$\boxed{T = \frac{4 m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1 + m_2) + 4 m_1 m_2}}$$

這個結果在整個運動過程中都成立（直至有質點碰到滑輪為止），因為方程中沒有任何一項與位置有關。

P_3 保持靜止的情況

系統由靜止開始運動，所以 P_3 保持靜止，當且僅當 $a_3 = 0$，即 $2T = m_3 g$。代入上面求得的 T：

$$\begin{aligned} \frac{8m_1 m_2 m_3\, g}{m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2} &= m_3 g \\ \iff \quad 8m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2)+4m_1m_2 \\ \iff \quad 4m_1m_2 &= m_3(m_1+m_2), \end{aligned}$$

其中我們除以了 $m_3 g > 0$，並乘以了為正數的分母。所以若 $4m_1m_2 = m_3(m_1+m_2)$，則 $a_3 = 0$，P_3 保持靜止，正是所要證明的。（每一步都可逆，所以這個條件既是充分條件，也是必要條件。）

要留意，外側的兩個質點不一定靜止：這時 $T = \frac{1}{2}m_3 g$，而 $a_1 = g - T/m_1 = -a_2$，除非 $m_1 = m_2$，否則不為零。一個質點上升，另一個以相同的快慢下降，繩在 P_3 下面滑過，卻沒有帶動它。

驗算

- 對稱情況 $m_1 = m_2 = m$：條件變成 $4m^2 = 2mm_3$，即 $m_3 = 2m$。這不過是靜力平衡，$2T = 2mg = m_3 g$：結果顯而易見，也令人放心。
- 若 $m_3 \to \infty$，則 $T \to \dfrac{4m_1m_2 g}{m_1+m_2}$，是大家熟悉的阿特伍德機（Atwood machine）張力 $\dfrac{2m_1m_2 g}{m_1+m_2}$ 的兩倍。這是合理的：很重的 P_3 近乎自由下落，$a_3 \to g$，所以各段繩加速得很快。若 $m_3 \to 0$，則 $T \to 0$，因為無質量的滑輪不能承受任何淨力。
- 數值上，取 $m_1 = 2$、$m_2 = 3$、$m_3 = 4$ 及 $g = 9.8$（國際單位制），公式給出 $T \approx 21.38\,\mathrm{N}$。另外用能量方法（拉格朗日方法，Lagrangian method）獨立求解，得到相同的加速度 $a_1 \approx -0.891$、$a_2 \approx 2.673$、$a_3 \approx -0.891\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。取 $m_1 = 1$、$m_2 = 3$、$m_3 = 3$ 時，靜止條件成立，而果然 $a_3 = 0$，同時 $a_1 = -a_2 = -4.9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。

常見錯誤

- 把約束條件寫成 $a_1 + a_2 + a_3 = 0$，忘記了 P_3 是掛在兩段繩上的。
- 忘記了作用在 P_3 上的力是 $2T$，而不是 T。
- 以為 P_3 靜止，整個系統就必定靜止。除非 $m_1 = m_2$，否則並非如此。

STEP 之外

約束條件 $x_1 + x_2 + 2x_3 =$ 常數 把系統的自由度（degrees of freedom）減至兩個，而處理這類系統最簡潔的方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）：只要用獨立的坐標寫出能量，就完全用不着張力（它是一種「約束力」（constraint force））。我們的數值驗算正是這樣做的。你會在大學一年級的動力學課程中學到它。想看看牛頓定律怎樣嚴謹地應用於滑輪這類受約束的系統，Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是個好去處。

詳細解答

STEP II 1992，第 15 題

概率與統計 • 隨機漫步

> **STEP II 1992，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q15

關鍵思路

若該點在 s 步之中有 R 步向正方向走，它最後會停在 $x = R - (s - R) = 2R - s$，而 R 服從二項分佈（binomial distribution）。因此，這裏每一個概率都是若干個二項式係數（binomial coefficients）之和。奇偶性（parity）幫了很大的忙：走了偶數步之後，只可能到達 $x = 2$ 和 $x = 4$；走了奇數步之後，只可能到達 $x = 3$ 和 $x = 5$，所以每個 $\mathrm{P}(s)$ 都只是兩個相鄰二項式係數之和。帕斯卡法則（Pascal's rule）隨即把這個和化簡為單一個係數。至於最大值，則要考察相鄰兩項之比（ratio），並把 s 為偶數和奇數的情況分開處理。

解答

設 R 為首 s 步中向正方向走的步數。各步互相獨立（independent），每一步向正方向走的概率為 $\frac{1}{2}$，所以 $R \sim \mathrm{B}(s, \frac{1}{2})$，而且

$$\mathrm{P}(R = r) = \binom{s}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^s.$$

走了 s 步之後的位置是 $X = 2R - s$，所以 $X = x$ 當且僅當 $R = \frac{1}{2}(s + x)$。特別地，X 的奇偶性與 s 相同。

$\mathrm{P}(5)$ 與 $\mathrm{P}(6)$ 的值

當 $s = 5$ 時，只有 $x = 3$ 和 $x = 5$ 可能出現，分別需要 $R = 4$ 和 $R = 5$：

$$\mathrm{P}(5) = \left[\binom{5}{4} + \binom{5}{5}\right]\frac{1}{2^5} = \frac{5+1}{32} = \frac{3}{16}.$$

當 $s=6$ 時，只有 $x=2$ 和 $x=4$ 可能出現，分別需要 $R=4$ 和 $R=5$：

$$\mathrm{P}(6)=\left[\binom{6}{4}+\binom{6}{5}\right]\frac{1}{2^6}=\frac{15+6}{64}=\frac{21}{64}.$$

一般的偶數情況

當 $s=2k$ 時，可能到達的目標點是 $x=2$ 和 $x=4$，分別需要 $R=k+1$ 和 $R=k+2$。根據帕斯卡法則 $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$，

$$\mathrm{P}(2k)=\left[\binom{2k}{k+1}+\binom{2k}{k+2}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\binom{2k+1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k},$$

最後一步用了 $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$，其中 $(2k+1)-(k+2)=k-1$。這就是所要求的結果。它在 $k=1$ 時同樣成立：這時 $\binom{2}{3}=0$，所以 $x=4$ 的那一項根本不存在，而公式給出 $\frac{1}{4}$，正是兩步都向正方向走的概率。

奇數情況

當 $s=2k+1$ 時，目標點是 $x=3$ 和 $x=5$，分別需要 $R=k+2$ 和 $R=k+3$。同理，

$$\mathrm{P}(2k+1)=\left[\binom{2k+1}{k+2}+\binom{2k+1}{k+3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\binom{2k+2}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}.$$

當 $k=2$ 時，這給出 $\binom{6}{1}/32=\frac{3}{16}$，與 $\mathrm{P}(5)$ 吻合。

最大值

對 $k\geq 1$ 記 $a_k=\mathrm{P}(2k)$，並對 $k\geq 1$ 記 $b_k=\mathrm{P}(2k+1)$（留意 $b_0=\mathrm{P}(1)=0$）。這些數全是正數，所以我們可以用比值來比較相鄰兩項。

> **想一想** 兩個二項式係數之比應該怎樣化簡？

把兩者都寫成階乘（factorials）再約簡。對於偶數項，

$$\frac{\binom{2k+3}{k}}{\binom{2k+1}{k-1}}=\frac{(2k+3)!}{k!\,(k+3)!}\cdot\frac{(k-1)!\,(k+2)!}{(2k+1)!}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{k(k+3)},$$

所以

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+3)(2k+2)}{4k(k+3)}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+12k}.$$

由於分母是正數，這個比值大於 1 當且僅當 $10k+6>12k$，即 $k<3$；當 $k=3$ 時它等於 1；而當 $k>3$ 時它小於 1。因此

$$a_1<a_2<a_3=a_4>a_5>a_6>\cdots,$$

而偶數步的最大值是 $a_3 = a_4 = \mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64}$。（驗算：$\mathrm{P}(8) = \binom{9}{3}/2^8 = 84/256 = 21/64$。）

對於奇數項，同樣的約簡給出

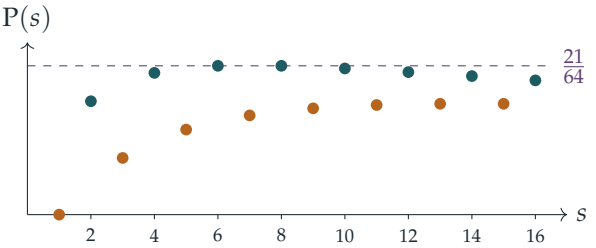
$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k+4)(2k+3)}{4k(k+4)} = \frac{4k^2+14k+12}{4k^2+16k},$$

它在 $k < 6$ 時大於 1，在 $k = 6$ 時等於 1，在 $k > 6$ 時小於 1。所以奇數步的最大值是

$$b_6 = b_7 = \mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \binom{14}{5}\frac{1}{2^{13}} = \frac{2002}{8192} = \frac{1001}{4096}.$$

最後，$\frac{21}{64} = \frac{1344}{4096} > \frac{1001}{4096}$，所以沒有任何奇數步的值能超過偶數步的最大值。因此 $\mathrm{P}(s)$ 取得最大值 $\frac{21}{64}$ 的時候，是

$$s = 6 \quad 及 \quad s = 8.$$



藍綠色的點對應偶數 s，琥珀色的點對應奇數 s：這是兩個獨立的數列，各自先升後降，而偶數的那個始終在上方。

驗算

- 用手計算小的情況：$\mathrm{P}(2) = \frac{1}{4}$（兩步都向右），$\mathrm{P}(3) = \frac{1}{8}$（三步都向右）；而取 $k = 1$ 時，公式給出 $\binom{3}{0}/2^2 = \frac{1}{4}$ 和 $\binom{4}{0}/2^3 = \frac{1}{8}$，正如所料。
- 用電腦對這個漫步作精確窮舉（以分數運算，$s \le 60$），結果證實兩條公式都正確，$\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(8) = \frac{21}{64} \approx 0.328$ 是整體的最大值，而 $\mathrm{P}(13) = \mathrm{P}(15) = \frac{1001}{4096} \approx 0.244$ 是奇數步的最大值。

常見錯誤

- 對每個 s 都把全部四個目標點加起來：基於奇偶性，其中一半根本不可能到達。
- 求出偶數步的最大值便停下來。奇數步的值構成另一個獨立的數列，你必須驗證它的峯值較低。

- 停在「比值 > 1 對 $k < 3$ 成立」便只答 $s = 6$：比值在 $k = 3$ 時等於 1，所以 $s = 8$ 與它並列。

STEP 之外

這就是簡單對稱隨機漫步（simple symmetric random walk），是概率論的核心對象之一。走了 s 步之後，它的位置擴散的幅度大約與 $\sqrt{s}$ 成正比，所以它落在任何一個固定有限範圍內的概率會先上升，最終下降至零；$s = 7$ 附近的峯值，正是擴散幅度與該範圍大小相若的時候。同樣的二項式計數方法還會引出反射原理（reflection principle），以及一維漫步以概率 1 返回原點這個事實。Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）中有一章講隨機漫步，寫得很好。

詳細解答

STEP II 1992，第 16 題

概率與統計 • 條件概率

STEP II 1992，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s2-q16

本題在 *Beyond STEP* 第 12.17 節巴拿赫的火柴盒中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/matchboxes.html

關鍵思路

這是巴拿赫（Banach）火柴盒問題的一個變體。題目告訴了我們何時發現糖果不夠（第 N 次伸手），所以這是一個條件概率（conditional probability）問題。因此我們要計算兩個聯合概率（joint probability）：第一次失敗發生在第 N 次伸手而且拿的是拖肥糖，以及第一次失敗發生在第 N 次伸手而且拿的是薄荷糖。兩者都是「頭 $N-1$ 次伸手中每種糖恰好各有若干次，然後下一次是指定的一種」這類計算，屬於二項（binomial）概率的計算。

解答

假設各次伸手互相獨立（independent），每次拿拖肥糖的概率為 p，拿薄荷糖的概率為 q，其中 $0 < p < 1$。設 T 為以下事件（event）：她在第 N 次伸手時想拿拖肥糖，卻發現拖肥糖那包已經空了，而且之前各次伸手都沒有發現任何一包是空的。設 M 為把拖肥糖換成薄荷糖後的相應事件。我們要求的是

$$\mathrm{P}(\text{拖肥糖} \mid \text{首次發現時的伸手次數為} N) = \frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(M)}.$$

T 的概率

要 T 發生，拖肥糖那包必須在 $N-1$ 次伸手之後已經空了。到目前為止沒有一次伸手失敗，所以這些伸手每一次都拿到了一顆糖。因此頭 $N-1$ 次伸手中恰好有 n 次是拿拖肥糖（多一次就會失敗），其餘 $N-1-n$ 次是拿薄荷糖。然後第 N 次伸手是拿拖肥糖。

反過來，假設頭 $N-1$ 次伸手中恰好有 n 次拿拖肥糖，以及 $N-1-n \leq m$ 次拿薄荷糖，次序不限。那麼之前不可能有任何一次伸手失敗：在任何階段，她伸手拿拖肥糖都不超過 n 次，拿薄荷糖都不超過 m 次。這樣，如果第 N 次伸手是拿拖肥糖，T 就會發生。

> **想一想** 頭 $N-1$ 次伸手的次序難道不要緊嗎？不是要確保她不會提早把糖拿光嗎？

不要緊。她只有在某一包已空而又伸手進去的時候，才會發現那一包是空的。提早把拖肥糖拿光（即拿第 n 顆拖肥糖之時）並無問題，只要她在第 N 次伸手之前不再伸手拿拖肥糖便可。這一點自動成立，因為頭 $N-1$ 次伸手中只有 n 次是拿拖肥糖。所以全部 $\binom{N-1}{n}$ 種次序都可以，於是

$$\mathrm{P}(T) = \binom{N-1}{n} p^n q^{N-1-n} \cdot p = \binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}, \qquad n \leq N-1 \leq n+m,$$

其他情況下 $\mathrm{P}(T) = 0$。如果 $N-1 < n$，她不可能已經把拖肥糖拿光。如果 $N-1 > n+m$，她就需要多於 m 顆薄荷糖。

M 的概率

把兩種糖的角色對調，用完全相同的方法可得

$$\mathrm{P}(M) = \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}, \qquad m \leq N-1 \leq n+m,$$

其他情況下 $\mathrm{P}(M) = 0$。

答案

這次發現必定發生在第 $\min(n,m)+1$ 次至第 $n+m+1$ 次伸手之間。第 $n+m+2$ 次伸手是不可能的，因為到那時兩包糖都已經空了，早就應該有一次伸手失敗。

- 如果 $N \leq m$（即 $\mathrm{P}(M) = 0$ 但 $\mathrm{P}(T) > 0$），她肯定是在拿拖肥糖：概率為 1。
- 如果 $N \leq n$（即 $\mathrm{P}(T) = 0$），概率為 0。

- 如果 $\max(n,m)+1 \le N \le n+m+1$，兩種情況都有可能，而

$$\mathrm{P}(\text{拖肥糖}) = \frac{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n}}{\binom{N-1}{n} p^{n+1} q^{N-1-n} + \binom{N-1}{m} q^{m+1} p^{N-1-m}}.$$

在最後一種情況，我們可以把分子和分母同時除以 $\mathrm{P}(T)$ 來化簡。二項式係數（binomial coefficient）中的公因數 $(N-1)!$ 互相約去，而各個冪則合併成 $(q/p)^{n+m+2-N}$。由此得出

$$\mathrm{P}(\text{拖肥糖}) = \left[1 + \frac{n!\,(N-1-n)!}{m!\,(N-1-m)!} \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m+2-N}\right]^{-1}.$$

驗算

- 對稱性：如果 $n=m$ 而且 $p=q=\frac{1}{2}$，兩個式子相等，答案是 $\frac{1}{2}$，正如所料。
- 取 $n=2$、$m=3$、$p=\frac{1}{2}$、$N=5$。那麼 $\mathrm{P}(T)=\binom{4}{2}/2^5=\frac{3}{16}$，而 $\mathrm{P}(M)=\binom{4}{3}/2^5=\frac{1}{8}$，所以答案是 $\frac{3/16}{5/16}=\frac{3}{5}$。拖肥糖較少，所以先把拖肥糖拿光的可能性較大。
- 對 $N=1,\ldots,n+m+1$ 求和，有 $\sum_N \big(\mathrm{P}(T)+\mathrm{P}(M)\big)=1$，因為終究必有一次伸手會失敗。我們已就所有 $n,m\le 6$ 及若干個 p 值，以逐步的精確枚舉核對過這一點以及上述公式。以 $n=4$、$m=3$、$N=7$、$p=0.55$ 進行 2×10^5 次試驗的模擬（simulation），結果是 0.527，而精確值是 0.528。

常見錯誤

- 漏掉第 N 次伸手本身所對應的最後一個因數 p（或 q）。
- 答了 $\mathrm{P}(T)$，而不是條件概率 $\mathrm{P}(T)/(\mathrm{P}(T)+\mathrm{P}(M))$。題目已告訴我們，發現是在第 N 次伸手時發生的。
- 以為所指的事件是「拖肥糖在第 N 次伸手時拿光」。拿走最後一顆拖肥糖並不算發現，下一次再去拿才是發現。

STEP 之外

第一次失敗發生的時間，其分佈是兩個負二項（negative binomial）分佈的混合（mixture）。負二項分佈計算的是取得指定次數的成功所需的試驗次數。巴拿赫原本的火柴盒問題（$n=m$，$p=\frac{1}{2}$）問的是：在發現的一刻，另一個盒子裏還剩下多少根火柴。其答案可以用斯特靈公式（Stirling's formula）來近似，得出平均值（mean）約為 $2\sqrt{n/\pi}$。

關於負二項分佈，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教材）。費勒（Feller）的經典著作 *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* 第 1 卷（概率論及其應用導論）中，有一段關於火柴盒問題的著名討論。

詳細解答

STEP III 1992，第 1 題

純數學 • 麥克勞林級數

STEP III 1992，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q1

關鍵思路

在第 (i) 部分，那兩個恆等式（identity）就是一部製造導數（derivative）的機器：一旦把 f'' 用 f' 表示出來，再逐次求導便可得到所有更高階的導數，而在 $x = 0$ 處，一切都由 $f'(0) = \frac{1}{2}$ 構建而成。在第 (ii) 部分，麻煩在於因子 $\sinh x$，它在原點處等於零；乘以 x 便可消去這個零點，於是展開式就是兩個可以徒手求出的級數（series）之積。對稱性（奇函數（odd function）與偶函數（even function））預先告訴我們哪些冪次可能出現。

解答

第 (i) 部分

利用鏈式法則（chain rule）對 $f(x) = \ln(1 + e^x)$ 求導，

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

所以它的對數有定義，並且

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

這就是第一個結果。對這個恆等式求導，左邊得出 $f''(x)/f'(x)$，所以

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

正是所求。把它寫成 $f'' = f'(1 - f')$ 會較為方便。

? **想一想** 怎樣才能不必對 $\ln(1 + e^x)$ 求導四次，就得到 f''' 和 f''''？

直接對恆等式 $\mathrm{f}'' = \mathrm{f}' - (\mathrm{f}')^2$ 本身求導，對 $(\mathrm{f}')^2$ 使用積法則（product rule）：

$$\mathrm{f}''' = \mathrm{f}'' - 2\mathrm{f}'\mathrm{f}'' = \mathrm{f}''(1 - 2\mathrm{f}'),$$
$$\mathrm{f}'''' = \mathrm{f}'''(1 - 2\mathrm{f}') - 2(\mathrm{f}'')^2.$$

現在代入 $x = 0$，此時 $\mathrm{f}(0) = \ln 2$ 而 $\mathrm{f}'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$：

$$\mathrm{f}''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{f}'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$\mathrm{f}''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

根據麥克勞林定理（Maclaurin's theorem），$\mathrm{f}(x) = \sum \mathrm{f}^{(n)}(0)\, x^n/n!$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

其中 x^3 項為零（而 $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$）。

第 (ii) 部分

為何 g 沒有這樣的展開式。 一個只含非負冪次的級數 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ 在 $x = 0$ 處取有限值 a_0，並且在該處連續（continuous）。但 $\sinh 0 = 0$ 而 $\cosh 0 = 1$，所以當 $x \to 0$ 時，分母 $\sinh x \cosh 2x$ 趨向 0；事實上，由於 x 很小時 $\sinh x \approx x$，我們有 $\mathrm{g}(x) \approx 1/x$，它在 0 附近是無界的（unbounded）。因此 $\mathrm{g}(x)$ 在原點附近不可能等於這樣的級數。

為何 $x\mathrm{g}(x)$ 有。 寫成

$$x\,\mathrm{g}(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

由於 $\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$，因子 x 可以約去，於是

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

這是 1 除以一個常數項為 1 的級數；這樣的倒數可以用二項式展開（binomial expansion）寫成非負冪次的級數。同樣，$\cosh 2x \geq 1$ 永不為零，而 $1/\cosh 2x$ 亦可用同樣的方法展開。兩個這樣的級數之積仍是這樣的級數。

為何只有偶數冪次。 sinh 是奇函數而 cosh 是偶函數，所以 $\mathrm{g}(-x) = -\mathrm{g}(x)$：g 是奇函數。因此 $h(x) = x\,\mathrm{g}(x)$ 滿足 $h(-x) = (-x)(-\mathrm{g}(x)) = h(x)$，所以 h 是偶函數。若 $h(x) = \sum a_n x^n$，則 $h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ 為奇數}} a_n x^n$ 恆等於零，而由於恆等於零的冪級數（power series）所有系數皆為零，故對每個奇數 n 都有 $a_n = 0$。（你也可以直接看出這一點：上面兩個因子都是 x^2 的級數。）

展開式。 利用 $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$，取 $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$，並保留至 x^4 的各項，

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

因為 $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$。其次，$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$（來自 $\frac{(2x)^2}{2}$ 和 $\frac{(2x)^4}{24}$），所以取 $v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$，

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

把兩個級數相乘並按冪次整理：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{g}(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

因為 $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$。

驗算

- 第 (i) 部分中 x^3 項消失並非偶然：$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{2} = \ln(\mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$ 是偶函數，所以在 $\frac{x}{2}$ 之後只會出現偶數冪次。
- 數值上，在 $x = 0.1$ 處：$\ln(1 + \mathrm{e}^x) \approx 0.7443966600$，與四次多項式 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$ 相差僅約 3.5×10^{-10}。
- 在 $x = 0.05$ 處，$x\,\mathrm{g}(x)$ 與 $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$ 相差約 9×10^{-8}，大約是 $6x^6$，與下一項為 x^6 項時的預期相符。

常見錯誤

- 把 $1/(1+u)$ 只展開成 $1 - u$：u^2 項對 x^4 有貢獻（即上面的 $\frac{1}{36}$ 和 $4x^4$）。
- 寫成 $\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24}\cdots$，忘記了 $2x$ 的 4 次方是 $16x^4$。

STEP 之外

第 (ii) 部分談的是帶有*極點*（pole）的函數：g 像 $1/x$ 那樣趨向無窮，而乘以 x 便可消除這個奇點（singularity）。在複分析（complex analysis）中，這樣的函數有一個*洛朗級數*（Laurent series）$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{13}{6}x^2 + \cdots\right)$，而 $1/x$ 的系數（即*留數*（residue），這裏是

1）正是計算許多實積分的關鍵。這個級數的收斂半徑（radius of convergence）取決於分母最接近的另一個零點，即 $\cosh 2x = 0$ 之處 $x = \pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）把這些想法闡述得十分精彩。

詳細解答

STEP III 1992，第 2 題

純數學 • 矩陣的冪與數學歸納法

> **STEP III 1992，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q2

關鍵思路

一切都建基於一個事實：$\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$。這表示任何形如 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 的矩陣（matrix）相乘，所得的積仍然是這個形式，所以我們自始至終只需追蹤一個數。只要留意到在乘法之下表現良好的是 $1 + 2p$ 而不是 p，那些看似累贅的式子 $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$ 便一目了然。

解答

一條乘法法則

由於

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J},$$

而且 $\mathbf{I}$ 與任何矩陣都可交換（commute），所以對任意實數 p 和 q，

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p + q + 2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

留意

$$1 + 2(p + q + 2pq) = (1 + 2p)(1 + 2q),$$

所以如果我們把數 $1 + 2p$ 配給矩陣 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$，矩陣相乘便對應於這些數相乘。對於 $\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$，所配的數是 $1 + 2a$。

平方與立方

在 $(*)$ 中取 $p = q = a$，得

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + (2a + 2a^2)\mathbf{J}, \qquad 及 \qquad \tfrac{1}{2}\left[(1+2a)^2 - 1\right] = \tfrac{1}{2}(4a + 4a^2) = 2a + 2a^2,$$

所以 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]\mathbf{J}$，正如題目所求。

至於立方，寫成 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}$，並在 $(*)$ 中取 $p = 2a + 2a^2$，$q = a$：

$$\begin{aligned} p + q + 2pq &= 2a + 2a^2 + a + 2a(2a + 2a^2) \\ &= 3a + 6a^2 + 4a^3 \\ &= \tfrac{1}{2}(6a + 12a^2 + 8a^3) = \tfrac{1}{2}\big[(1+2a)^3 - 1\big], \end{aligned}$$

當中用到 $(1+2a)^3 = 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$。所以 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I} + \frac{1}{2}[(1+2a)^3 - 1]\mathbf{J}$，正如題目所求。

至於四次方，最快捷的做法是 $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$。取 $p = q = \frac{1}{2}[(1+2a)^2 - 1]$，則 $1 + 2p = (1+2a)^2$，所以配給 $\mathbf{A}^4$ 的數是 $(1+2a)^2(1+2a)^2 = (1+2a)^4$。因此

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}\big[(1+2a)^4 - 1\big]\mathbf{J} = \mathbf{I} + (4a + 12a^2 + 16a^3 + 8a^4)\mathbf{J}.$$

一般次方

從以上規律可以猜想

$$p_k = \tfrac{1}{2}\big[(1+2a)^k - 1\big], \qquad \text{等價地} \qquad 1 + 2p_k = (1+2a)^k.$$

我們用歸納法（induction）證明，對所有整數 $k \geq 1$，$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ 成立。

基礎步驟。當 $k = 1$ 時，$p_1 = \frac{1}{2}(1 + 2a - 1) = a$，而 $\mathbf{A}^1 = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$。（公式亦給出 $p_0 = 0$，與 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ 吻合。）

歸納步驟。假設 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$，其中 p_k 如上所述。那麼由 $(*)$，

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \mathbf{I} + (p_k + a + 2ap_k)\mathbf{J},$$

而

$$\begin{aligned} p_k + a + 2ap_k &= (1+2a)p_k + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)\big[(1+2a)^k - 1\big] + a \\ &= \tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1} - \tfrac{1}{2}(1+2a) + a \\ &= \tfrac{1}{2}\big[(1+2a)^{k+1} - 1\big] = p_{k+1}. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$，由歸納法可知

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}\big[(1+2a)^k - 1\big]\mathbf{J} \qquad \text{對所有整數} k \geq 1.$$

想一想 假如題目沒有先給出 $\mathbf{A}^2$ 和 $\mathbf{A}^3$，我又怎樣猜到 p_k 的形式？

答案就在遞推關係（recurrence）本身：歸納步驟顯示 $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$，這是一個一階線性遞推關係。兩邊同時加上 $\frac{1}{2}$，得 $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$，所以 $p_k + \frac{1}{2}$ 是等比數列（geometric sequence），公比為 $1+2a$，首項為 $a + \frac{1}{2}$。這正正就是 $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$。

負數次方（額外收穫）。 若 $a \neq -\frac{1}{2}$，公式對 $k = -1$ 同樣成立：$p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$，而由 $(*)$ 得 $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$，所以 $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})(\mathbf{I} + p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$。若 $a = -\frac{1}{2}$，則 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 是奇異（singular）矩陣，而公式對每個 $k \geq 1$ 都給出 $p_k = -\frac{1}{2}$：事實上 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$。

驗算

- 取 $a = 1$：$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，直接相乘得 $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$。公式給出 $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$ 及 $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$。
- $\mathbf{A}$ 有特徵向量（eigenvector）$(1,1)$，對應的特徵值（eigenvalue）為 $1+2a$；另有特徵向量 $(1,-1)$，對應的特徵值為 1。所以 $\mathbf{A}^k$ 的特徵值是 $(1+2a)^k$ 和 1；矩陣 $\mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ 的特徵值是 $1+2p_k$ 和 1，兩者一致。
- 我們以精確的有理數運算，對 $0 \leq k \leq 12$ 以及四十個隨機選取的 a 值（包括 $a = -\frac{1}{2}$）驗證了 $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$。

常見錯誤

- 用二項式定理（binomial theorem）展開 $(\mathbf{I} + a\mathbf{J})^k$ 是合理的（因為 $\mathbf{I}$ 與 $\mathbf{J}$ 可交換），但若忘記 $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$ 而誤當作 $\mathbf{J}$，便會得出錯誤的係數。
- 在歸納步驟中，先寫下關於 p_{k+1} 的結論再倒推回去，並不算是證明；應該由 $\mathbf{A}^k\mathbf{A}$ 出發。

STEP 之外

我們配給 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ 的數 $1+2p$，正是該矩陣對應於向量 $(1,1)$ 的特徵值；所有這類矩陣都有相同的特徵向量 $(1,1)$ 和 $(1,-1)$，所以它們可以用同一個基底變換（change of basis）同時對角化，而計算次方時只需把特徵值自乘 k 次。這就是對角化（diagonalisation）背後的

想法，它把矩陣次方、矩陣指數和線性遞推關係都化為純量計算。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）以大量例題闡述這個想法。

詳細解答

STEP III 1992，第 3 題

純數學 • 曲線與多項式的根

STEP III 1992，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q3

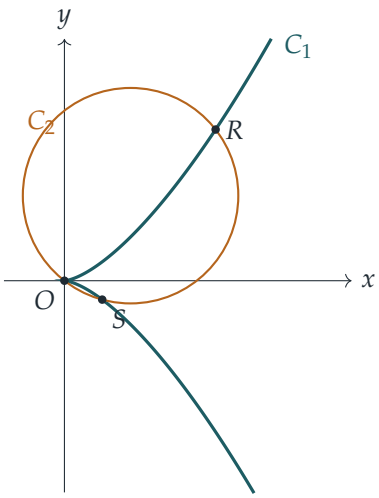
關鍵思路

把參數化（parametrisation）直接代入通過原點的圓的一般方程。這樣會得到一個關於 t 的多項式方程，它的根就是各交點的參數，而原點則以因子 t^2 的形式出現。餘下的是一個沒有 t^3 項的四次方程（quartic），所以它的根之和是固定的，兩兩乘積之和也是固定的。既然已知其中兩個根 r 和 s，另外兩個根便完全確定。

解答

草圖

由於 $x = t^2 \geq 0$，曲線位於半平面 $x \geq 0$ 內。把 t 換成 $-t$ 會把 (x, y) 變成 $(x, -y)$，所以曲線關於 x 軸對稱。消去 t 得 $y^2 = x^3$，故 $y = \pm x^{3/2}$。當 $t = 0$ 時，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$，而在原點附近 $|y| = x^{3/2}$ 遠小於 x。因此兩條分支離開 O 時都與 x 軸相切，曲線在 O 處有一個尖點（cusp）。當 t 很大時，兩條分支上升得很陡，因為 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$。



曲線 C_1 以藍綠色繪出。琥珀色的圓是 C_2 的一個例子，即 $r=1$、$s=-\frac{1}{2}$ 時通過 O、R 和 S 的圓。

四次方程

通過原點的圓，其方程沒有常數項：

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0,$$

其中 g 和 f 是不同時為零的實常數。參數為 t 的點位於圓上，當且僅當

$$t^4+t^6+2gt^2+2ft^3=0, \qquad \text{即} \qquad t^2\left(t^4+t^2+2ft+2g\right)=0.$$

因子 t^2 給出 $t=0$，也就是原點。除 O 以外的每個交點都有 $t\neq 0$，所以它的參數滿足

$$t^4+t^2+at+b=0, \qquad a=2f, \quad b=2g.$$

特別地，r 和 s 都是這個方程的根，而 a、b 是實常數，正如題目所要求。

C_1 上每一點恰好對應一個參數，因為當 $x\neq 0$ 時 $t=y/x$（而當 $x=0$ 時 $t=0$）。所以相異的兩點 R 和 S 有相異的參數，即 $r\neq s$，而 C_1 與 C_2 的交點恰好對應方程 $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$ 的實根。

另外兩個根

設四次方程的四個根（實根或複根）為 r、s、p 和 q。比較

$$(t-r)(t-s)(t-p)(t-q)=t^4+0\cdot t^3+1\cdot t^2+at+b$$

兩邊的係數，得

$$r+s+p+q=0,$$
$$rs+(r+s)(p+q)+pq=1.$$

（這裏我們把六個兩兩乘積分組為 rs、pq 和四個交叉項 $rp+rq+sp+sq=(r+s)(p+q)$。）

想一想 四個根之中我們只知道兩個。在不知道 a 和 b 的情況下，怎樣才能求出另外兩個？

t^3 和 t^2 這兩項的係數，即沒有用字母表示的那兩個，完全與圓無關。第一條方程給出 $p+q=-(r+s)$。代入第二條方程，

$$pq=1-rs+(r+s)^2=r^2+rs+s^2+1.$$

所以 p 和 q 是以下二次方程的根：

$$t^2+(r+s)\,t+\left(r^2+rs+s^2+1\right)=0,$$

其係數只取決於 r 和 s。C_1 與 C_2 若再有其他交點，其參數必須是這個二次方程的實根。

（順帶可得 $a=-(r+s)(r^2+s^2+1)$ 及 $b=rspq=rs(r^2+rs+s^2+1)$，所以通過 O、R 和 S 的圓由 r 和 s 確定。）

再沒有其他實交點

這個二次方程的判別式（discriminant）是

$$\begin{aligned}\Delta&=(r+s)^2-4\left(r^2+rs+s^2+1\right)\\&=-3r^2-2rs-3s^2-4\\&=-\left[2(r^2+s^2)+(r+s)^2+4\right].\end{aligned}$$

方括號內的數值至少是 4，因為 $2(r^2+s^2)$ 和 $(r+s)^2$ 都是非負的。所以 $\Delta\le -4<0$，這個二次方程沒有實根：p 和 q 是一對非實數的共軛複數（complex conjugates）。

因此 $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$ 的實根只有 0、r 和 s。由於每個實根恰好對應 C_1 上的一點，C_1 與 C_2 的實交點就只有 O、R 和 S。這正是我們要證明的。

驗算

取 $r=1$，$s=-\frac{1}{2}$。由上面的公式得 $a=-\frac{9}{8}$ 及 $b=-\frac{7}{8}$，所以 $f=-\frac{9}{16}$，$g=-\frac{7}{16}$。圓心是 $(\frac{7}{16},\frac{9}{16})$，而 $R=(1,1)$ 和 $S=(\frac{1}{4},-\frac{1}{8})$ 與圓心的距離平方都是 $\frac{130}{256}$，O 也是如此。

餘下的二次式是 $t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{4}$，其判別式為 $\frac{1}{4} - 7 < 0$。這就是圖中的圓，可以看到它與 C_1 只相交於 O、R 和 S。我們還用數值方法檢驗了 400 對隨機選取的 (r, s)。對每一對，我們求出通過 O、R、S 的圓，確認了因式分解，並在 $-30 \leq t \leq 30$ 的範圍內逐點檢查：圓方程只在 $t = r$ 和 $t = s$ 處變號。

常見錯誤

- 忘記通過 O 的圓沒有常數項。一般的圓有三個常數，而正是因為少了常數項，才會出現因子 t^2。
- 以為重根（double root）$t = 0$ 表示圓在 O 處與 C_1 相切。其實這個重根來自尖點：每一個通過 O 的圓都會給出因子 t^2。
- 只說判別式「顯然是負數」，卻沒有把它寫成「負的平方和加正常數」的形式。

STEP 之外

曲線 $y^2 = x^3$ 是奇異三次曲線（singular cubic curve）的標準例子。像本題這樣連同重數（multiplicity）一起計算交點，正是貝祖定理（Bézout's theorem）的起點：次數分別為 m 和 n 的兩條曲線，按適當方式計算，相交於 mn 點。一條三次曲線和一個圓給出 6 個交點，這與我們的結果吻合：O 處的兩個，加上 R、S 和兩個複數點。同一套韋達（Vieta）式的係數關係，也是橢圓曲線（elliptic curves）上羣律（group law）的基礎。Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry* 以及 Silverman 與 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves* 都把這些想法進一步發展下去。

詳細解答

STEP III 1992，第 4 題

純數學 • 正交軌線

> **STEP III 1992，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q4

關鍵思路

把 S_1 的每條曲線寫成 $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$：它是一條等軸雙曲線（rectangular hyperbola），漸近線（asymptote）為 $x = a$ 和 $y = 1$，而且每一條都通過原點。要找出整個曲線族的微分方程（differential equation），先求導，再利用曲線本身的方程消去 a。兩條曲線正交，當且僅當它們的斜率（gradient）之積為 -1，因此把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 換成 $-1\Big/\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，就可以把 S_1 的方程變成 S_2 的方程，而後者可以分離變數（separation of variables）。

解答

S_1 的曲線

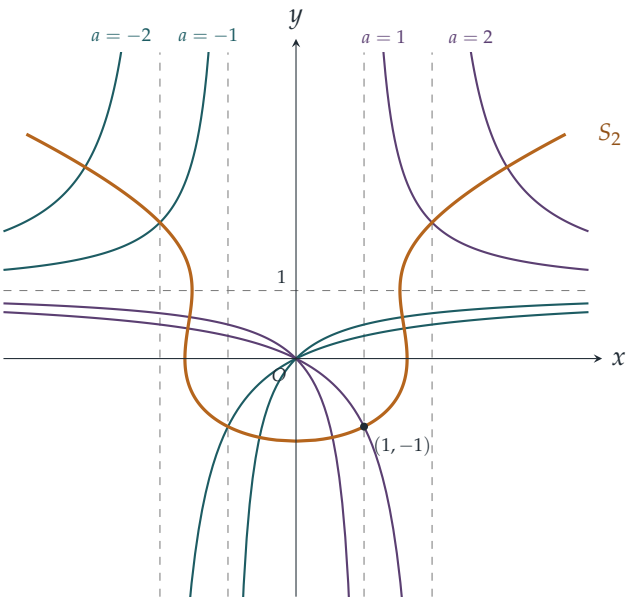
由於 $x = (x-a) + a$，

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

因此當 $a \neq 0$ 時，曲線是一條等軸雙曲線，鉛垂漸近線為 $x = a$，水平漸近線為 $y = 1$，並且通過原點。

- 若 $a > 0$，斜率恆為負。$x < a$ 的一支從 $y = 1$（當 $x \to -\infty$）向下走，經過 O，並在 $x \to a^-$ 時跌向 $-\infty$；$x > a$ 的一支則從 $+\infty$ 向下趨近 $y = 1$。
- 若 $a < 0$，斜率恆為正。$x > a$ 的一支從 $-\infty$ 上升，經過 O，趨近 $y = 1$；$x < a$ 的一支則位於 $y = 1$ 之上。

把 x 換成 $-x$，$\frac{x}{x-a}$ 就變成 $\frac{x}{x+a}$，所以對應 $-a$ 的曲線，是對應 a 的曲線沿 y 軸的反射。一個方便描繪的點：當 $x = \frac{3}{2}a$ 時，$y = 3$。



虛線是漸近線。琥珀色的曲線是 S_2 中通過 $(1,-1)$ 的那一條，它的形狀我們會在下文說明理由。

S_1 的微分方程

由 $y(x-a)=x$ 可得 $x-a=\dfrac{x}{y}$ 及 $a=x-\dfrac{x}{y}=\dfrac{x(y-1)}{y}$。（在 S_1 的曲線上，只有在原點才有 $y=0$，所以在該點以外我們可以除以 y。）代入斜率的式子，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{a}{(x-a)^2}=-\frac{x(y-1)}{y}\cdot\frac{y^2}{x^2}=-\frac{y(y-1)}{x},$$

所以 S_1 的每一條曲線都滿足

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(1-y).$$

S_2 的微分方程

兩條曲線正交，當且僅當它們在交點處的斜率之積為 -1。因此，若在某個公共點上 S_1 曲線的斜率為 p_1，S_2 曲線的斜率為 p_2，則 $p_1p_2=-1$，即 $p_1=-1/p_2$。

想一想 剛才求得的方程是關於 S_1 的。為甚麼它能告訴我們有關 S_2 的事情？

通過每一點 (x,y)（其中 $x,y\neq 0$）的 S_1 曲線恰好有一條，就是 $a=x(y-1)/y$ 的那一條，而它在該點的斜率為 $-y(y-1)/x$。通過同一點的 S_2 曲線，斜率必須是 $p_2=-1/p_1$，

所以在 S_2 上

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{-y(y-1)/x} = \frac{x}{y(y-1)}, \qquad \text{即} \qquad x = y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

正如題目所求。

S_2 中通過 $(1,-1)$ 的曲線

這個方程可以分離變數：

$$\int (y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C.$$

在 $(1,-1)$：$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C$，所以 $C = -\frac{4}{3}$。兩邊乘以 6，圖中所畫的曲線就是

$$3x^2 = 2y^3 - 3y^2 + 8.$$

要描繪這條曲線，設 $g(y) = 2y^3 - 3y^2 + 8$，則 $x = \pm\sqrt{g(y)/3}$，而曲線對稱於 y 軸。由於 $g'(y) = 6y(y-1)$，g 有局部極大值（local maximum）$g(0) = 8$ 和局部極小值（local minimum）$g(1) = 7$。兩者皆為正數，所以 g 只有一個實零點，位於 -2 與 -1 之間（因為 $g(-2) = -20$，$g(-1) = 3$）；其數值為 $y_0 \approx -1.214$。因此這條曲線：

- 最低點在 $(0, y_0)$，該處 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$；
- 在 $y = 0$（即 $x = \pm\sqrt{8/3} \approx \pm 1.63$）和 $y = 1$（即 $x = \pm\sqrt{7/3} \approx \pm 1.53$）處有鉛垂切線，因為在這些位置 $y(y-1) = 0$；
- 在 $y = 0$ 與 $y = 1$ 之間稍微向軸彎回去（當 $x > 0$ 時，斜率 $x/(y(y-1))$ 在那裏是負的），然後當 $|x|$ 很大時，大致按 $y \approx (\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$ 增長。

為核對圖形，通過 $(1,-1)$ 的 S_1 曲線滿足 $-1 = \frac{1}{1-a}$，所以 $a = 2$，在該點的斜率為 -2；S_2 的斜率為 $\frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}$，而確實 $(-2)\cdot\frac{1}{2} = -1$。$y = 1$ 處的鉛垂切線也合情合理：曲線在那裏與 $y = 1$（即 S_1 中 $a = 0$ 的成員）正交。

驗算

- 在 $(1,-1)$：$3(1)^2 = 3$，而 $2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 8 = 3$。✓
- S_2 的曲線與 $a = 1$ 的曲線相交於 $(2,2)$：在該點 S_1 的斜率為 $-1/(2-1)^2 = -1$，S_2 的斜率為 $2/(2\cdot 1) = 1$，乘積為 -1。
- 以數值方法，我們找出了琥珀色曲線與圖中四條雙曲線的全部十二個交點（每條三個，例如 $a = -2$ 時的 $(1.5901,\ 0.4429)$），而斜率之積在每個交點都是 -1.00000000。

常見錯誤

- 微分方程中仍然留有 a：關鍵正正在於利用 $y = x/(x-a)$ 本身把它消去。
- 用了 $p_2 = -p_1$ 或 $p_2 = 1/p_1$，而不是 $p_1 p_2 = -1$。
- 把 S_2 的曲線畫成簡單的 U 形：它在 $y = 0$ 和 $y = 1$ 處有鉛垂切線，兩者之間還有一小段向後彎的部分。

STEP 之外

S_2 的曲線是 S_1 的正交軌線（orthogonal trajectories）。它們在物理學中以場線（field lines）與等勢線（equipotentials）相交的形式出現，又或者是流線（streamlines）與等速度勢線相交。這裏的技巧（消去參數，再把 y' 換成 $-1/y'$）是標準方法，而由此得出的一階方程，是常微分方程（ODE）入門課程的必備內容；參見 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入門教科書）。

詳細解答

STEP III 1992，第 5 題

純數學 • 三維向量幾何

> **STEP III 1992，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q5

關鍵思路

對稱性幾乎包辦了所有工作。以平面 $y+z=2$ 作反射(reflection)，四面體(tetrahedron)會映射到自身，而 A 和 D 保持不動，所以這個反射必定把 B 和 C 對調。由此可知 BC 垂直於該平面，而且它的中點（midpoint）N 位於該平面上。之後的一切都只是畢氏定理（Pythagoras）和純量積（scalar product），當中用到四個頂點與球心 Y 的距離全部相等這一事實。

解答

求 N 和半徑

我們有 $\overrightarrow{AY} = (3,-2,4)-(0,4,-2) = (3,-6,6)$，所以球面（sphere）的半徑（radius）是

$$YA = \sqrt{9+36+36} = 9.$$

由於 $\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$，可得 $\overrightarrow{YN} = (1,-2,2)$，所以 $N=(4,-4,6)$ 而 $YN=3$。

留意 A、Y 和 N 全部滿足 $y+z=2$：三點都位於對稱平面（plane of symmetry）上。

為何 BC 垂直於該平面

設 Π 為平面 $y+z=2$。以 Π 作反射會把四面體映射到自身，所以它把各頂點重新排列(permute)。它固定 A 和 D，這兩點都在 Π 上。B 和 C 都不在 Π 上：假如其中一點在該平面上，反射便會固定這一點，於是也必須固定第四個頂點，結果四個頂點全部落在 Π 上，根本構不成四面體。因此反射把 B 和 C 對調，即是說 C 是 B 的鏡像。由此可知

- BC 垂直於 Π，所以它平行於法向量（normal）$(0,1,1)$；
- BC 的中點 N 位於 Π 上（與我們先前求得的結果吻合）。

想一想 為甚麼三角形 YNB 在 N 處成直角？

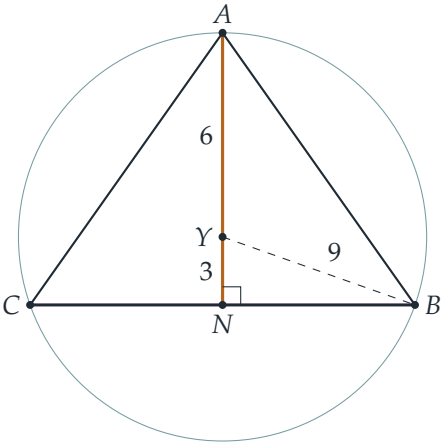
Y 和 N 都在 Π 上，所以 YN 是 Π 上的一條直線。但 NB 沿着 Π 的法線方向。法線垂直於平面上的每一條直線，所以 $\angle YNB = 90°$。

BN 與 B、C 的坐標

B 在球面上，所以 $YB = 9$。在三角形 YNB 中應用畢氏定理，

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{所以} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

正如題目所求。



上圖按比例繪出平面 ABC，該平面包含 Y（因為 Y 在 AN 上）。琥珀色的線段 AN 是它與 Π 相交之處；圓則是它截球面所得的截口。

沿 BC 方向的單位向量（unit vector）是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$，所以

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

已知 $N = (4,-4,6)$，這條弦（chord）的兩個端點是 $(4,2,12)$ 和 $(4,-10,0)$。所以

$$B = (4,2,12),\ C = (4,-10,0) \qquad \text{或} \qquad B = (4,-10,0),\ C = (4,2,12).$$

驗算一下：$(4,2,12) - (3,-2,4) = (1,4,8)$ 的長度是 $\sqrt{1+16+64} = 9$，所以 B 確實在球面上。

D 的坐標

設 $\overrightarrow{YD} = (p, q, r)$。我們有三個條件。

- D 和 Y 都在 Π 上，所以 $\overrightarrow{YD}$ 垂直於法向量 $(0,1,1)$：$q + r = 0$。
- D 在球面上：$p^2 + q^2 + r^2 = 81$。
- 角度條件：$\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = YA \cdot YD \cos \angle AYD = 9 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 27$。

> **想一想** 三個未知數、三條方程，但其中一條是二次的。我們預期會有多少個解？

最多兩個，因為最後會得到一條二次方程。從幾何角度看，D 位於 Π 截球面所得的圓上（這是一個大圓（great circle），因為 $Y \in \Pi$），而該圓上與 YA 成指定角度的點，正是分處 A 兩側、互為鏡像的兩個位置。

利用 $\overrightarrow{YA} = (-3, 6, -6)$ 和 $r = -q$，角度條件給出

$$-3p + 6q + 6q = 27 \quad \Longrightarrow \quad p = 4q - 9.$$

代入球面方程，並利用 $r^2 = q^2$：

$$\begin{aligned} (4q - 9)^2 + 2q^2 &= 81 \\ 18q^2 - 72q &= 0 \\ 18q(q - 4) &= 0. \end{aligned}$$

- $q = 0$：這時 $p = -9$，$r = 0$，所以 $\overrightarrow{YD} = (-9, 0, 0)$，而 $D = (-6, -2, 4)$。
- $q = 4$：這時 $p = 7$，$r = -4$，所以 $\overrightarrow{YD} = (7, 4, -4)$，而 $D = (10, 2, 0)$。

兩者都給出真正的四面體：D 在 Π 上，但不在直線 AN 上（平面 ABC 只有這一部分落在 Π 內），所以 D 不在平面 ABC 上。因此

$$D = (-6, -2, 4) \qquad \text{或} \qquad D = (10, 2, 0).$$

驗算

- 每個 D 都滿足 $y + z = 2$，而且兩種情況下均有 $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$（分別是 81 和 $49 + 16 + 16$）。
- 對於 $D = (10, 2, 0)$：$\overrightarrow{YA} \cdot \overrightarrow{YD} = -21 + 24 + 24 = 27 = 81 \cdot \frac{1}{3}$。✓
- B 和 C 互為鏡像：把 (x, y, z) 以 $y + z = 2$ 作反射，得到 $(x, 2 - z, 2 - y)$，它把 $(4, 2, 12)$ 送到 $(4, -10, 0)$。

- 用電腦搜尋 Π 上坐標不超過 20 的所有整數點，找出位於球面上且滿足 $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$ 的點，結果恰好只有 $(-6,-2,4)$ 和 $(10,2,0)$。兩種情況下四面體的體積都是 $1728/6 = 288$，所以它並非扁平。

常見錯誤

- 求錯 N。$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$ 表示 Y 位於 AN 的四分之三處，所以 $N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$，而不是 $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$。
- 把 YN 或 AN 當作半徑。半徑是 $YA = 9$；$YN = 3$ 只是球心到弦 BC 的距離。
- 忘記 D 必須位於 Π 上。少了 $q + r = 0$ 這個條件，可能的點便有整整一個圓那麼多。

STEP 之外

「反射必定把 B 和 C 對調」這個論證，其實是羣論（group theory）的一小片段：一個圖形的對稱通過重新排列其頂點來作用，而反射的不動點（fixed point）必定位於鏡面上。這個反射本身就是線性代數中的映射 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$，是一個行列式（determinant）為 -1 的正交變換（orthogonal transformation）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 討論反射和正交矩陣（orthogonal matrix），而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 則闡述對稱羣（symmetry group）的理論。

詳細解答

STEP III 1992，第 6 題

純數學 • 三角函數歸約公式

> **STEP III 1992，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q6

關鍵思路

兩個化簡都建基於同一做法：把三角函數之差化為含有因子 $\sin x$ 的乘積，從而約去礙事的分母。對 I_n 而言，所用的工具是 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$；對 J_n 而言，則是 $\sin P - \sin Q$ 的和差化積公式（sum-to-product formula）。分母一旦消去，餘下的只是初等積分，而兩條遞推公式（reduction formula）亦可裂項相消（telescope）。

解答

先談談被積函數（integrand）。兩者的分母都有 $\sin x$，它在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 處為零，但這些奇點是可去奇點（removable singularity）：由於當 $x \to 0$ 時 $\sin(nx)/\sin x \to n$，而當 $x \to \pi$ 時 $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$，兩個被積函數都保持有界。因此下文所有積分都是連續函數的普通積分。

關係式 $I_n - I_{n-1} = J_n$

利用 $\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$ 及和差化積公式，

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \left(2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2}\right)\left(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}\right) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

取 $A = nx$ 及 $B = (n-1)x$，便得

$$\sin^2(nx) - \sin^2\big((n-1)x\big) = \sin\big((2n-1)x\big)\sin x.$$

因此，對 $n \geq 1$，

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi} \frac{x\left[\sin^2(nx) - \sin^2\big((n-1)x\big)\right]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

正如所求。（當 $n = 1$ 時，我們把 I_0 理解為 $x\sin^2 0/\sin^2 x = 0$ 的積分，故 $I_0 = 0$。）

J_n 的遞推公式

現在比較 J_{n+1} 與 J_n。由和差化積公式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

於是 $\sin x$ 再次被約去：

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ 作分部積分（integration by parts），

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\Big[\cos(2nx)\Big]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

這是因為對整數 n 有 $\sin(2n\pi) = 0$ 及 $\cos(2n\pi) = 1$。因此遞推公式為

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

> **想一想** 一條說 $J_{n+1} = J_n$ 的遞推公式，看來簡單得令人起疑。這真的是答案嗎？

是的：式中出現的 $2\cos(2nx)$ 與 x 相乘後，在整數個週期上的積分為零，所以由一個 n 到下一個，數值毫無改變。要確定這個值，我們只需計算首項：

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

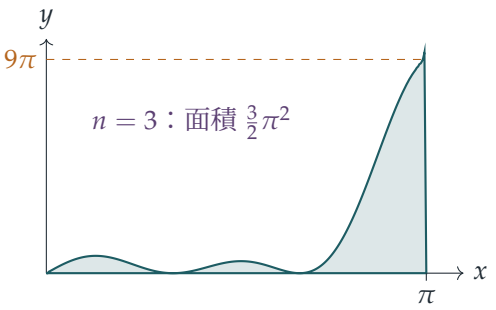
因此對每個正整數 n，都有 $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$。

C 之下的面積

由於在 $(0,\pi)$ 上 $x \geq 0$ 且 $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$，曲線永不低於 x 軸，所以 C 之下的面積正好是 I_n。把第一條關係式求和（各項裂項相消），並利用 $I_0 = 0$，

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

所以 C 之下的面積是 $\frac{1}{2}n\pi^2$，正如所求。



驗算

- $n=1$：曲線是 $y=x$，而該三角形的面積是 $\frac{1}{2}\pi^2$。✓
- 對 $n=1,\ldots,8$ 的積分使用辛普森法則（Simpson's rule），每次都得出 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$，又例如 $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$。
- 曲線在 $x=\pi$ 處升至 $y=n^2\pi$，但面積只隨 n 線性增長：各個峯愈來愈高，卻愈來愈窄（寬度約為 π/n），兩者並無矛盾。

常見錯誤

- 忘記了 $I_0=0$（或從未查看 I_0 的意思），以致裂項求和沒有起始值。
- 計算 $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ 時弄錯正負號；較簡潔的做法是留意到邊界項為零，而餘下的 $\sin(2nx)$ 在 $[0,\pi]$ 上的積分亦為零。

STEP 之外

函數 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$ 除了相差一個因子 $1/n$ 之外，就是傅立葉分析（Fourier analysis）中的費耶核（*Fejér kernel*），而 $\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$ 基本上就是狄利克雷核（*Dirichlet kernel*）。你在這裏發現的事實，即它們的積分與 n 無關，而函數本身卻集中於區間的兩端，正是它們能用來證明傅立葉級數（Fourier series）收斂的原因。Stein 與 Shakarchi 的 *Fourier Analysis: An Introduction*（傅立葉分析入門）對此有精彩的闡述；至於實分析（real analysis）的背景知識，可參看 Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門讀本）。

詳細解答

STEP III 1992，第 7 題

純數學 • 向量幾何

STEP III 1992，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q7

關鍵思路

題目中的一切都由平行四邊形（parallelogram）以及按給定比例分割各邊的點構成，而這正是位置向量（position vector）最擅長處理的情況。把原點設在 A，並用兩個邊向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 表示每一個點。然後求出其中兩條直線的交點，再驗證這個點位於第三條直線上。

解答

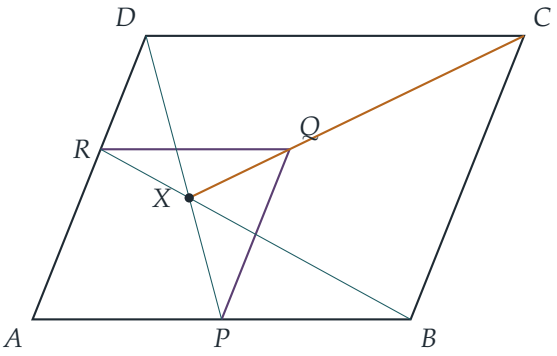
取 A 為原點，並設 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$，$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$。由於 $ABCD$ 是一個真正的平行四邊形，這兩個向量並不平行。因此平面上每一點都可以寫成 $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$，其中實數對 (λ, μ) 恰好只有一組，於是我們可以比較係數（compare coefficients）。

由於 $ABCD$ 是平行四邊形，C 的位置向量是 $\mathbf{b} + \mathbf{d}$。因為 P 在邊 AB 上，而 R 在邊 AD 上，我們可以寫成

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

由於 $APQR$ 是平行四邊形，$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$，所以

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$



BR 與 DP 的交點

直線 BR 上的一般點是

$$\mathbf{b} + s(r\mathbf{d} - \mathbf{b}) = (1 - s)\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d},$$

而直線 DP 上的一般點是

$$\mathbf{d} + t(p\mathbf{b} - \mathbf{d}) = tp\,\mathbf{b} + (1 - t)\,\mathbf{d}.$$

在公共點上，$\mathbf{b}$ 的係數和 $\mathbf{d}$ 的係數必須分別相等：

$$1 - s = tp, \qquad sr = 1 - t.$$

把 $s = 1 - tp$ 代入第二條方程，得 $r - rpt = 1 - t$，所以 $t(1 - pr) = 1 - r$。

? **想一想** 我們可以除以 $1 - pr$ 嗎？

由於 $0 \le p, r \le 1$，只有當 $p = r = 1$ 時才有 $pr = 1$，即 $P = B$ 且 $R = D$ 的情況。這時 $Q = C$，「直線」CQ 沒有定義，也就沒有甚麼需要證明。因此我們排除這個情況，於是 $1 - pr > 0$。這亦說明 BR 與 DP 並不平行，所以它們恰好相交於一點。於是

$$t = \frac{1 - r}{1 - pr}, \qquad s = 1 - tp = \frac{1 - pr - p + pr}{1 - pr} = \frac{1 - p}{1 - pr},$$

而交點 X 是

$$\mathbf{x} = tp\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d} = \frac{p(1 - r)\,\mathbf{b} + r(1 - p)\,\mathbf{d}}{1 - pr}.$$

X 位於 CQ 上

直線 CQ 上的一般點是

$$\mathbf{c} + u(\mathbf{q} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + u\big((p - 1)\mathbf{b} + (r - 1)\mathbf{d}\big) = \big(1 - u(1 - p)\big)\mathbf{b} + \big(1 - u(1 - r)\big)\mathbf{d}.$$

試取 $u = \dfrac{1}{1-pr}$。**b** 的係數變成

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

而 **d** 的係數變成

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

這正好就是 **x** 的係數。所以 X 也位於 CQ 上，三條直線 BR、CQ 和 DP 都通過 X。它們交於一點，正如所求。 ■

（當中的對稱性令人放心：把 B, P, p 與 D, R, r 的角色互換，BR 與 DP 便會互換，CQ 保持不變，而 **x** 的公式亦不變。）

驗算

- 若 $P = A$（$p = 0$），則 $Q = R$，而 $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$，即是 R。事實上，DP 就是直線 DA，它與 BR 交於 R；而 CQ 就是 CR，它通過 R。
- 若 P 和 R 分別是 AB 和 AD 的中點，則 $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$，位於由 A 到 C 的三分之一處。這是三角形 ABD 的形心（centroid），理應如此，因為 BR 和 DP 是它的其中兩條中線（median）。
- 我們隨機選取了 5000 個平行四邊形以及 P 和 R 的隨機位置，用分數精確地檢驗了共點性（concurrency）。每一個情況都與 **x** 的公式吻合。

常見錯誤

- 忘記了正因為 **b** 與 **d** 不平行，才可以比較這兩個係數。
- 兩條不同的直線用了同一個參數。每條直線都需要有自己的參數（s、t、u）。
- 沒有提及退化情況（degenerate case）$P = B$、$R = D$，這時 $Q = C$，直線 CQ 沒有定義。

STEP 之外

留意整個解答從未用過長度或角度，只用了平行線和直線上的比例。因此這個結果屬於仿射幾何（affine geometry）：仿射映射（affine map，即先作線性映射、再作平移）可以把任何平行四邊形變成正方形，同時保持共點性，所以只需就正方形證明這個結果便已足夠。關於直線相交的問題在射影幾何（projective geometry）中也十分自然，塞瓦

（Ceva）定理和笛沙格（Desargues）定理等都屬於這個範疇。如想廣泛而輕鬆地遊覽這些概念，可參閱考克斯特（Coxeter）的 *Introduction to Geometry*（幾何學入門），或 Brannan、Esplen 與 Gray 的 *Geometry*（幾何學）。

詳細解答

STEP III 1992，第 8 題

純數學 • 以方程的根求三角函數之和

STEP III 1992，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q8

關鍵思路

棣美弗定理（De Moivre's theorem）把 $\sin(2n+1)\theta$ 化為 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的多項式，再除以 $\sin^{2n+1}\theta$，便得到一個 $\cot^2\theta$ 的多項式。角 $k\pi/(2n+1)$ 令左邊等於零，所以它們的餘切平方就是一個已知多項式的根。只要知道了全部的根，那三個和其實不過是韋達定理（Vieta's formulas，即根之和與根的倒數之和）換了個樣子而已。

解答

恆等式

設 $c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$ 及 $N=2n+1$。由棣美弗定理和二項式定理(binomial theorem)，

$$\cos N\theta+\mathrm{i}\sin N\theta=(c+\mathrm{i}s)^N=\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

虛數項就是 j 為奇數的那些項。設 $j=2m+1$，則 $\mathrm{i}^{2m+1}=\mathrm{i}(-1)^m$，所以

$$\sin N\theta=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

現在以 $r=n-m$ 把求和的次序倒轉。這時 $2m+1=2n+1-2r$，而由二項式係數(binomial coefficients）的對稱性，$\binom{2n+1}{2n+1-2r}=\binom{2n+1}{2r}$。因此

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta&=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}c^{2r}s^{2n+1-2r}\\&=\sin^{2n+1}\theta\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

當中抽出了 s^{2n+1}，並用了 $c^{2r}/s^{2r} = \cot^{2r}\theta$。只要 $\sin\theta \neq 0$，此式便成立，正如題目所求。

多項式的根

設

$$p(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} x^r,$$

並對 $k = 1, \ldots, n$ 取 $\theta_k = k\pi/(2n+1)$。於是 $(2n+1)\theta_k = k\pi$，所以 $\sin(2n+1)\theta_k = 0$，而 $0 < \theta_k < \pi/2$ 則保證 $\sin\theta_k \neq 0$。把恆等式除以 $\sin^{2n+1}\theta_k$，再乘以 $(-1)^n$，得

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{2n+1}{2r} \cot^{2r}\theta_k = 0, \qquad \text{即} \qquad p\left(\cot^2\theta_k\right) = 0.$$

想一想 我們怎樣知道這些就是全部的根？下面的求和全靠這一點。

角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ 全都位於 $(0, \pi/2)$ 之內，而 cot 在這個區間上為正，並且嚴格遞減（strictly decreasing）。所以這 n 個數 $\cot^2\theta_k$ 互不相同。p 的首項係數（leading coefficient）是 $(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1) \neq 0$，所以 p 的次數恰好是 n，因而最多有 n 個根。由此可知，$p(x) = 0$ 的根恰好就是 $\cot^2\theta_k$（$k = 1, \ldots, n$），而且每個都是單根（simple root）。

我們需要的係數是

$$[x^n]:\ (-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1),$$
$$[x^{n-1}]:\ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} = (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3},$$
$$[x^1]:\ -\binom{2n+1}{2} = -n(2n+1), \qquad [x^0]:\ 1.$$

第 (i) 部分

根之和等於 x^{n-1} 與 x^n 的係數之比的相反數：

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

第 (ii) 部分

由於 $\tan^2\theta_k = 1/\cot^2\theta_k$，我們要求的是各根 x_k 的倒數之和。這些根全都不是零（常數項是 1），而

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{\sum_k \prod_{j\neq k} x_j}{\prod_k x_k},$$

根據韋達定理，其分子和分母分別是 $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$ 和 $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$。兩者之比是 $-[x^1]/[x^0]$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^2\theta_k=-\frac{-n(2n+1)}{1}=n(2n+1).$$

（換個說法：倒數 $1/x_k$ 是 $x^n p(1/x)$ 的根，也就是把係數次序倒轉後所得的多項式的根，我們只須讀出它的根之和。）

第 (iii) 部分

利用 $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$ 和第 (i) 部分，

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec}^2\theta_k=n+\frac{n(2n-1)}{3}=\frac{3n+2n^2-n}{3}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

驗算

當 $n=1$ 時，多項式是 $1-3x$，它的根是 $\frac{1}{3}=\cot^2(\pi/3)$。這時 (i) 給出 $\frac{1}{3}$，(ii) 給出 $3=\tan^2(\pi/3)$，(iii) 給出 $\frac{4}{3}=\operatorname{cosec}^2(\pi/3)$，全部正確。當 $n=3$ 時，各角是 $\pi/7,2\pi/7,3\pi/7$，用計算機算得三個和分別是 5、21 和 8，與 $\frac{3\cdot5}{3}$、$3\cdot7$ 和 $\frac{2\cdot3\cdot4}{3}$ 吻合。我們還以數值方法，就隨機選取的 θ 和 n 驗證了恆等式，並就 $n\le29$ 驗證了全部三個和。

常見錯誤

- 忘記論證各個 $\cot^2\theta_k$ 互不相同，以及 p 的次數恰好是 n。缺了這一步，便不能把韋達定理用在 $\cot^2\theta_k$ 上。
- 係數的正負號出錯：因子 $(-1)^n$ 在第 (i) 部分會約去，但前提是兩個係數都帶有這個因子。
- 把 k 一直取到 $2n$：當 $k>n$ 時，角 $k\pi/(2n+1)$ 只會重複相同的 $\cot^2$ 值，所以只有 $k\le n$ 才給出互不相同的根。

STEP 之外

把第 (iii) 部分與 $0<\theta<\pi/2$ 時成立的不等式 $\cot^2\theta<1/\theta^2<\operatorname{cosec}^2\theta$ 結合起來，便可把 $\sum_{k=1}^{n}1/k^2$ 夾在這裏求得的兩個和的倍數之間。令 $n\to\infty$，就得到歐拉（Euler）的著名結果 $\sum 1/k^2=\pi^2/6$；這是一個漂亮的初等證明，大學一年級的分析（analysis）課

程經常介紹。從多項式的係數讀出各種和，這個想法同樣是對稱函數（symmetric functions）和牛頓恆等式（Newton's identities）的基礎。分析方面，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

詳細解答

STEP III 1992，第 9 題

純數學 • 橢圓的極坐標方程

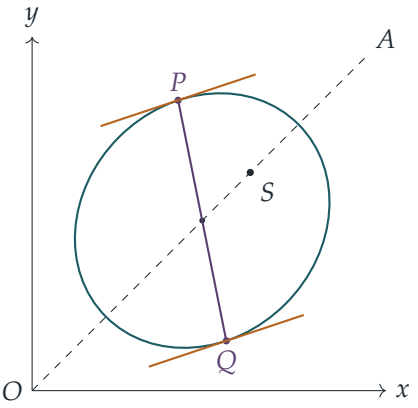
STEP III 1992，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q9

關鍵思路

極坐標（polar coordinates）以 S 為極點量度，始線沿 $y = x$ 的方向，因此極角為 θ 的點，從 S 看去在直角坐標（Cartesian coordinates）中的方向角是 $\theta + \frac{\pi}{4}$。把 x 和 y 寫成 θ 的函數再求導，便得到斜率（gradient）。至於第二部分，直徑（diameter）真正用得上的性質，是橢圓（ellipse）關於其中心對稱：直徑兩端的切線（tangent）互相平行。於是我們令兩個斜率相等，餘下的工夫交給半角三角公式便可。



在草圖中（$e = \frac{1}{2}$），PQ 是通過中心的直徑，而 P 和 Q 處的切線互相平行。

解答

切線的斜率

由於 S 位於第一象限內的直線 $y = x$ 上，設 S 為點 (s, s)，其中 $s > 0$。沿 SA 方向的單位向量（unit vector）是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$，與 x 軸成 $\frac{\pi}{4}$ 角。所以，以 S 為極點、極坐標為 (r,θ) 的點是

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{其中} \phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

在 E 上有 $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

以 r' 表示 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，並利用 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

我們只關心兩者之比，所以把兩式同乘以正數 $(1+e\cos\theta)/r$：

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\tfrac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \tfrac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

這是因為 $\theta - \phi = -\frac{\pi}{4}$。現在 $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$，而 $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta)$。全式乘以 $\sqrt{2}$，可知在 $\theta = \alpha$ 處的一個切向量（tangent vector）是

$$\mathbf{d}(\alpha) = \big(-(\sin\alpha + \cos\alpha + e),\ \cos\alpha - \sin\alpha + e\big). \qquad (*)$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha + e}{-(\sin\alpha + \cos\alpha + e)} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha - e}{\sin\alpha + \cos\alpha + e},$$

正是所求。（當 $\sin\alpha + \cos\alpha + e = 0$ 時，切線是鉛垂的；$(*)$ 在該處依然成立。）

直徑的兩端

> **想一想** 我們還未求出中心，怎樣才能把「PQ 通過中心」化為一條關於 α 和 β 的方程？

我們利用第一部分的結果。橢圓繞其中心 C 旋轉半周（half-turn）後與自身重合。若 P 和 Q 是一條直徑的兩端，這個半周旋轉會把兩點互換，並把 P 處的切線映射到 Q 處的切線。半周旋轉把每條直線都變成與之平行的直線，所以*P 和 Q 處的切線互相平行。*

因此，設 P 處 $\theta = \alpha$，Q 處 $\theta = \beta$，則由 $(*)$ 得出的向量 $\mathbf{d}(\alpha)$ 和 $\mathbf{d}(\beta)$ 互相平行。用向量而不用斜率來處理，即使切線是鉛垂的，我們也永遠不會除以零。記 $s_\alpha = \sin\alpha$，$c_\alpha = \cos\alpha$，餘此類推。平行的條件是

$$(s_\alpha + c_\alpha + e)(c_\beta - s_\beta + e) = (s_\beta + c_\beta + e)(c_\alpha - s_\alpha + e).$$

展開後，$c_\alpha c_\beta$、$-s_\alpha s_\beta$、ec_α、ec_β 和 e^2 各項在等號兩邊都出現，互相抵消，剩下

$$s_\alpha c_\beta - c_\alpha s_\beta + es_\alpha - es_\beta = s_\beta c_\alpha - c_\beta s_\alpha + es_\beta - es_\alpha,$$

亦即

$$\sin(\alpha-\beta) + e(\sin\alpha - \sin\beta) = 0.$$

現在利用 $\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 和 $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$：

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

想一想 我們可以約去 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 嗎？

可以。P 和 Q 是不同的點，所以 α 與 β 之差不是 2π 的倍數，故 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$。因此

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} = 0.$$

以 $\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\beta}{2}$ 展開：

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2} + (1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2} = 0.$$

除以 $(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$（因為 E 是橢圓，所以這裏 $1-e>0$），得

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2} = -\frac{1+e}{1-e},$$

正是所求。除非 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 或 $\cos\frac{\beta}{2}$ 等於零，否則這一步除法是成立的。假如（例如）$\alpha=\pi$，方程便迫使 $\sin\frac{\beta}{2}=0$，所以 $\beta=0$。這條直徑就是沿 OSA 的長軸（major axis），此時兩個正切之積沒有定義。其餘每一條直徑都滿足這個結果。

驗算

- 在 $\alpha=0$（較接近 S 的頂點）處，公式給出斜率 $\frac{-1-e}{1+e} = -1$。這是對的：長軸端點處的切線與 $y=x$ 垂直。
- 當 $e=\frac{1}{2}$ 時，乘積應為 -3。取 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，則 $\tan\frac{\alpha}{2}=1$。於是 $\tan\frac{\beta}{2}=-3$，所以 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$ 而 $\cos\beta=-\frac{4}{5}$。由 $(*)$ 得 $\mathbf{d}(\alpha)=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ 和 $\mathbf{d}(\beta)=(\frac{9}{10},\frac{3}{10})$，兩者互相平行。✓
- 數值上，隨機選取 2000 組 ℓ、e、S 和 α，斜率公式都與以有限差分（finite difference）計算的導數吻合；而把 P 對中心（位於從 S 沿 AS 方向距離 $\ell e/(1-e^2)$ 之處）作反射，所得的點 Q 在 E 上，其 β 滿足該恆等式，誤差在 10^{-13} 以內。

常見錯誤

- 忘記了 $\frac{\pi}{4}$ 的旋轉而使用 $x = r\cos\theta$，這樣得出的是另一個坐標系中的斜率，並不是題目所求。
- 除以 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ 而沒有說明它為何不等於零。
- 試圖先求出中心，再直接加上「C 是 PQ 的中點」這個條件。這樣做是行得通的，但遠比利用平行切線繁複。

STEP 之外

直徑兩端的切線互相平行，屬於共軛直徑（conjugate diameters）理論的一部分：一族平行弦的中點都落在同一條直徑上，而該直徑兩端的切線與這些弦平行。在一個把橢圓變成圓的仿射映射（affine map）之下，這一切都化為初等的圓幾何，這正是仿射幾何和射影幾何（projective geometry）如此強大的原因之一。這裏的半角正切，也是天體力學中描述軌道時所用的標準參數化（parametrisation）。想在大學一年級的程度踏入這門幾何，不妨一讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》），或 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題集》）。

詳細解答

STEP III 1992，第 10 題

純數學 • 弧長與面積

> **STEP III 1992，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q10

關鍵思路

兩條曲線的周界（perimeter）都是弧長（arc length）積分，而且都無法用初等函數求出（它們是*橢圓積分*（elliptic integrals）），所以要證明兩者相等，唯一的方法就是把其中一個積分化成另一個。先寫出每條曲線的弧長元素，利用 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 化簡各自的被積函數（integrand），再作一次代換（substitution），加上一點對稱性，便可看出兩者其實是同一個積分。面積則較容易處理，因為兩者都可以直接計算出來。

（試卷上印出的範圍以 $\frac{1}{4}\theta$ 結尾。這顯然是 $\frac{1}{4}\pi$ 的誤印，我們取 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$。）

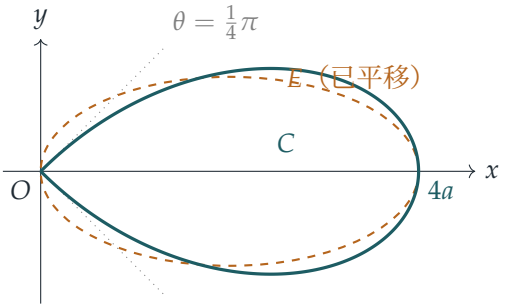
解答

描繪 C 的草圖

當 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ 時，我們有 $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $r = 4a\cos 2\theta > 0$ 恆成立（取 $a > 0$）。曲線有以下特徵：

- $r(-\theta) = r(\theta)$，所以 C 關於始線（initial line）對稱。
- 最大值 $r = 4a$ 在 $\theta = 0$ 處取得，即點 $(4a, 0)$。
- 當 $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$ 時，$r \to 0$，所以曲線會進入原點，並在該處與直線 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 相切。

所以 C 是單一個閉合環圈，也就是四瓣玫瑰線（rose）$r = 4a\cos 2\theta$ 的其中一瓣，沿正 x-軸伸展。下圖把它與 E 的一個複本畫在一起，該複本平移了 $2a$，使它橫跨同一個區間 $0 \le x \le 4a$。



C 的周界

對於極坐標（polar）曲線，弧長元素滿足 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。這裏 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$，所以

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

由於當 θ 走遍 $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ 時，環圈恰好被描畫一次，因此

$$\text{周界}C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

代入 $\phi = 2\theta$，於是 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$，而積分上下限變成 $\pm\frac{1}{2}\pi$：

$$\text{周界}C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

最後一步成立，是因為被積函數是 ϕ 的偶函數（even function）。

E 的周界

設 $x = 2a\cos\phi$，$y = a\sin\phi$，則

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

而當 ϕ 由 0 走到 2π 時，E 恰好被描畫一次，所以

$$\text{周界}E = a\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

? **想一想** 為甚麼 $\int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 是在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的積分的四倍？

記 $g(\phi) = \sqrt{1+3\sin^2\phi}$。因為 $\sin^2(\pi-\phi) = \sin^2\phi$，$g$ 在 $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ 上的圖像是它在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的圖像的鏡像，所以 $\int_0^{\pi} g = 2\int_0^{\pi/2} g$。因為 $\sin^2(\phi+\pi) = \sin^2\phi$，$g$ 的周期為 π，所以 $\int_{\pi}^{2\pi} g = \int_0^{\pi} g$。（從幾何上看，橢圓在四個象限內的部分長度相等。）因此

$$\text{周界} E = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

這正好就是我們之前求得的 C 的周界的表達式。所以兩個周界相等，而我們從頭到尾都不必計算這個積分的值。

面積

極坐標曲線所圍的面積是 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。利用 $\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$，

$$\begin{aligned}\text{所圍面積} C &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4a^2\left[\theta + \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 4a^2\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi a^2.\end{aligned}$$

至於橢圓，一條以逆時針方向描畫的閉合曲線所圍的面積是 $\frac{1}{2}\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$，由此得

$$\text{所圍面積} E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi + 2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2\pi = 2\pi a^2.$$

（同樣地，這就是標準公式 $\pi \times$ 半軸 $\times$ 半軸 $= \pi(2a)(a)$。）所以兩個面積相等，同為 $2\pi a^2$。

驗算

- 取 $a = 1.7$，以 200 000 邊的多邊形逼近每條曲線，得出兩個周界均為 16.470362，與用森遜法則（Simpson's rule）算出的 $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 相等。所以每個周界約為 $9.6884a$。
- 同樣的多邊形給出兩個面積均為 $18.158406 = 2\pi(1.7)^2$。
- 對 C 的面積作一個合理性檢查：它位於長方形 $0 \le x \le 4a$，$|y| \le 1.1a$ 之內，該長方形的面積約為 $8.8a^2$，而 $2\pi a^2 \approx 6.3a^2$ 佔其中一個合理的比例。

常見錯誤

- 代入 $\phi = 2\theta$ 時，忘記了來自 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$ 的因子 $\frac{1}{2}$。因子 $4a$ 對 C 而言會變成 $2a$，要到偶函數那一步之後才再次變回 $4a$。

- 計算極坐標面積時，用了 $\int r\,\mathrm{d}\theta$ 而不是 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。
- 把 $0 \leq \theta < 2\pi$ 範圍內的整條玫瑰線 $r = 4a\cos 2\theta$ 當作 C。題目給定的範圍只選出其中一瓣。

STEP 之外

積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ 稱為第二類完全橢圓積分（complete elliptic integral of the second kind），它沒有初等的原函數（antiderivative）。這就是題目不准計算積分的原因：橢圓的周界並沒有閉合形式（closed form）。我們的積分是 $k^2 = -3$ 的情況。只要把 $\sin^2\phi$ 換成 $1 - \cos^2\phi$，再把 ϕ 換成 $\frac{1}{2}\pi - \phi$，便可把它改寫成 $0 < k < 1$ 的標準形式。橢圓積分引出了橢圓函數（elliptic functions）和橢圓曲線（elliptic curves），而這些都是現代數論的核心。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學難題》）收錄了更多 STEP 題目，同樣以這種方式比較極坐標曲線和參數（parametric）曲線的弧長和面積。

詳細解答

STEP III 1992，第 11 題

力學 • 碰撞與恢復係數

STEP III 1992，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

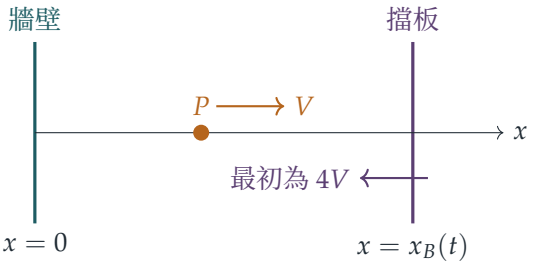
step.maths.org/questions/92-s3-q11

關鍵思路

所有位置一律由牆壁量起，這樣質點和擋板與牆壁的距離各自都有一條簡單的公式。所謂碰撞，不過是其中兩條公式取值相同的一刻，於是每個關於時間的問題都化為一條二次方程（quadratic）。碰撞時，牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）針對的是相對速度（relative velocity），所以擋板在該瞬間本身的速度至關重要。

解答

把 P 看成一個質點（particle），在光滑（smooth）桌面上沿着通過 O 並垂直於牆壁的直線運動。取 x 為與牆壁 AB 的距離，以朝向擋板的方向為正，並由拋射的一刻起計時間 t。速度以離開牆壁的方向為正。



第一次碰撞

擋板起初與牆壁相距 $\frac{75}{32}VT$，速度為 $-4V$，並有恆定加速度（constant acceleration）$+4V/T$，所以由勻加速運動公式可得

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

在首次碰到任何東西之前，P 以恆定速率運動（因為桌面光滑），所以 $x_P = Vt$。兩者在 $x_P = x_B$ 時相遇。設 $s = t/T$，則

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \iff 64s^2 - 160s + 75 = 0 \iff (8s-5)(8s-15) = 0.$$

首次相遇對應較小的根，所以碰撞發生於 $t = 5T/8$，正如題目所求。（在此之前，間距 $x_B - x_P$ 為正，因為它在 $s = 0$ 時為正，而其間並無任何根。）

此刻 P 位於 $x = \frac{5}{8}VT$，而擋板的速度為

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

所以擋板仍然朝着牆壁運動，速率為 $\frac{3}{2}V$。

碰撞後的速率

擋板的運動不受影響，所以只需用到牛頓實驗定律（Newton's experimental law）。接近速率（speed of approach）為 $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$。若 P 在緊接碰撞之後的速度為 w，則分離速率（speed of separation）為 $-\frac{3}{2}V - w$，而

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \implies w = -\tfrac{11}{4}V.$$

所以 P 以速率 $\dfrac{11V}{4}$ 朝牆壁反彈。

想一想 為甚麼反彈後的速率比 P 原先的速率 V 還要大？

碰撞的一刻，擋板正朝着 P 運動，就像球棒擊球一樣。恢復定律針對的是 P 相對於擋板的速率：相對於擋板，P 以 $\frac{5}{2}V$ 到達，以 $\frac{5}{4}V$ 離開。再加上擋板本身朝向牆壁的 $\frac{3}{2}V$，便得 $\frac{11}{4}V$。

從牆壁反彈與第二次碰撞

P 要以速率 $\frac{11}{4}V$ 走過距離 $\frac{5}{8}VT$，需時 $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$。因此它撞上 AB 的時刻為

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

擋板不可能在途中擋路。在這段時間內，它朝牆壁運動的速率始終比 P 慢（它的速率由 $\frac{3}{2}V$ 起不斷下降），而且它根本不會到達牆壁：它最接近牆壁的時刻是 $t = T$，此時 $v_B = 0$，而 $x_B = \frac{75}{32}VT - 4VT + 2VT = \frac{11}{32}VT > 0$。

牆壁固定不動，所以當 $e=\frac{1}{2}$ 時，質點以速率 $\frac{11}{8}V$ 反彈，其後

$$x_P=\tfrac{11}{8}V\left(t-\tfrac{75}{88}T\right)=\tfrac{11}{8}Vt-\tfrac{75}{64}VT.$$

下一次與擋板碰撞，發生於 t_1 之後首次出現 $x_P=x_B$ 的時刻。以 $s=t/T$ 表示，

$$\tfrac{75}{32}-4s+2s^2=\tfrac{11}{8}s-\tfrac{75}{64}\quad\Longleftrightarrow\quad 128s^2-344s+225=0\quad\Longleftrightarrow\quad(8s-9)(16s-25)=0.$$

兩根為 $s=\frac{9}{8}$ 和 $s=\frac{25}{16}$。由於 $\frac{75}{88}<1<\frac{9}{8}$，兩者都在 t_1 之後。在 t_1 時，間距 $x_B-x_P=x_B(t_1)$ 為正，所以間距首次縮減至零的時刻是較小的根。因此下一次與擋板碰撞，是在開始後 $9T/8$ 的時刻，正如題目所求。（作為驗算，屆時兩者都位於 $x=\frac{3}{8}VT$。）

想一想 為甚麼必須取較小的根，而不是隨便取一個根？

這條二次方程所描述的，是假設兩者可以互相穿過時的運動。它的第二個根 $\frac{25}{16}T$，對應的是真正碰撞之後的一次「相遇」，但那時運動早已改變。實際的碰撞，是間距首次縮減至零的時刻。

驗算

- 當 $t=\frac{5}{8}T$：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{80}{32}+\frac{25}{32}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$（以 VT 為單位），與 x_P 相等。
- 當 $t=\frac{9}{8}T$：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{144}{32}+\frac{81}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$，而 $x_P=\frac{11}{8}\cdot\frac{24}{88}=\frac{3}{8}$。
- 取 $V=T=1$（步長 10^{-6}）作逐步時間模擬，得出碰撞時刻為 $t\approx 0.6250$（反彈速度 -2.750）、$0.8523\approx\frac{75}{88}$ 及 1.1250。

常見錯誤

- 只對 P 本身的速率套用恢復定律，結果得出 $\frac{1}{2}V$ 而不是 $\frac{11}{4}V$。擋板正在運動，所以要用相對速度。
- 弄錯加速度的正負號。擋板起初朝牆壁運動，但正在減速，並在 $t=T$ 時掉頭。
- 忘記檢查在 P 從 AB 反彈之前，擋板不會先碰到 P（或牆壁）。

STEP 之外

這裏的巧妙之處，是在碰撞的瞬間改用擋板的參考系（frame of reference）來考慮。由於擋板的質量極大，恢復定律會把相對速度反向並按比例縮小，與固定的牆壁無異。這樣轉換參考系是大學一年級力學的核心技巧，並由此引伸出伽利略不變性（Galilean invari-

ance)，以及二體碰撞中的質心參考系（centre-of-mass frame）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對這些概念有細緻的闡述。

詳細解答

STEP III 1992，第 12 題

力學 • 動量守恆

STEP III 1992，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

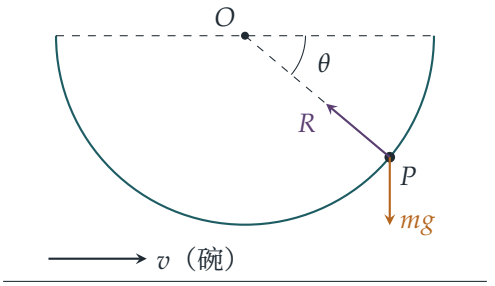
step.maths.org/questions/92-s3-q12

關鍵思路

碗與質點組成的系統並無受到任何水平方向的外力，而且除重力外沒有其他力作功，所以我們有兩條守恆定律：水平動量守恆（conservation of horizontal momentum）和能量守恆（conservation of energy）。動量把碗的速率與 $\dot{\theta}$ 聯繫起來；能量隨後給出 v^2。至於反作用力（reaction），最簡潔的做法是在碗的（加速）參考系（frame）中處理，在那裏質點只是繞 O 作圓周運動；同時要記住，反作用力也是碗所受的唯一水平力。

解答

模型。碗是光滑的，所以 P 所受的反作用力 R 沿法線方向，即沿 PO 方向。小車是輕的，桌面是光滑的，所以碗（連同小車）所受的唯一水平力，就是質點推力的水平分量。設 P 從碗邊的右端出發，於是當 P 向下滑時，θ 從 0 開始增加；碗則向右移動。



水平動量守恆

設碗的水平位置為 X，則 $\dot{X} = v$。相對於 O，質點位於 $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，所以它的位置是 $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，而它的速度是

$$\big(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta\big).$$

系統沒有受到水平方向的外力，而且由靜止開始，所以總水平動量始終為零：

$$2mv + m\big(v - a\dot{\theta}\sin\theta\big) = 0 \quad\Longrightarrow\quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

這正是所要求的結果。留意此時質點的水平速度是 $v - 3v = -2v$：它以碗的速率的兩倍向左移動，這樣才能抵銷碗的動量 $2mv$。

能量

反作用力所作的淨功為零（它是內力，而且表面光滑），桌面也不作功，所以能量守恆。當 OP 處於角度 θ 時，質點已下降了 $a\sin\theta$。利用 $a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$，質點的垂直速率為 $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$，所以

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m\big[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta\big] \\ &= mv^2\Big(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\Big). \end{aligned}$$

兩邊乘以 $2\sin^2\theta/m$：

$$2ga\sin^3\theta = v^2\big(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta\big) = v^2\big(9 - 3\sin^2\theta\big),$$

所以

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

這就是第二個結果。

反作用力

> **想一想** 碗正在加速。我們怎樣寫出質點沿 PO 方向的運動方程（equation of motion）？

用兩條方程。第一，考慮碗：質點以大小為 R、方向由 O 指向 P 的力推它，這個力的水平分量是向右的 $R\cos\theta$。所以碗的加速度 A 滿足

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

第二，考慮質點，在碗的參考系中處理。在那裏質點以速率 $a\dot{\theta}$ 在以 O 為圓心、半徑為 a 的圓上運動，而除了 R 和 mg 之外，它還受到一個向左的假想力（fictitious force）mA。

沿指向 O 的方向（方向為 $(-\cos\theta, \sin\theta)$）分解，重力的貢獻是 $-mg\sin\theta$，假想力的貢獻是 $+mA\cos\theta$，所以

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

（等價地，在地面參考系中，質點的加速度等於碗的加速度 A 加上它相對於碗的圓周運動加速度；把它沿 PO 方向分解，會得到同一條方程。）

由頭兩個結果，

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

把由 (1) 得到的 $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$ 代入 (2)，並把含 R 的項合併：

$$R\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

由於 $1 + \frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$，

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

驗算

- 在起點，$\theta = 0$ 給出 $R = 0$，這是應有的結果：質點靜止於碗邊，沒有任何東西把它壓向碗。
- 在碗底，$\theta = \frac{1}{2}\pi$：碗的加速度為零（由 (1)），$a\dot{\theta}^2 = 3g$，而 $R - mg = 3mg$，所以 $R = 4mg$，與公式給出的 $2mg\cdot 8/2^2$ 吻合。
- 假如碗是固定的（無限重），通常的結果會是 $v_P^2 = 2ga\sin\theta$ 和 $R = 3mg\sin\theta$；碗的反衝令 R 在碗邊附近變小（當 θ 很小時約為 $2mg\sin\theta$ 而不是 $3mg\sin\theta$，因為碗正在遠離 P），但在碗底卻變大（$4mg$ 而不是 $3mg$）。
- 以數值方法逐步求解完整的運動方程（取 $m = 1.3$、$a = 0.7$、$g = 9.81$），由碗邊一直到碗底，都重現了 $3v = a\dot{\theta}\sin\theta$、$v^2$ 的公式和 R 的公式，誤差在 10^{-7} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$，彷彿碗是固定的。碗在加速，所以質點的加速度並不只是它相對於碗的圓周運動加速度。
- 用 $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$ 作為質點的動能（kinetic energy）：$a\dot{\theta}$ 是它相對於碗的速率，而不是相對於桌面的速率。

STEP 之外

這是一個二自由度（two-degree-of-freedom）系統，而最簡潔、最有系統的處理方法是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）：把動能和勢能（potential energy）用 X 和 θ 表示，動量守恆便會自然得出，因為 X 並不出現在拉格朗日量（Lagrangian）之中（它是一個「循環」（cyclic）坐標）。我們所用的假想力，是非慣性參考系（non-inertial frame）力學中最簡單的情形；大學一年級的課程會把它推廣到旋轉參考系，並引入離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對非慣性參考系和相互作用物體的系統都有很出色的講解。

詳細解答

STEP III 1992，第 13 題

力學 • 繞固定軸的轉動

> **STEP III 1992，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q13

關鍵思路

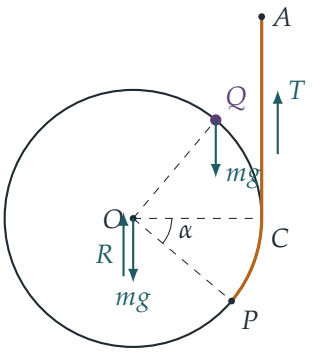
轉軸固定，所以圓盤與質點構成一個剛體（rigid body），只需一個坐標，即轉過的角度。由能量守恆（conservation of energy）（彈性勢能、重力勢能、動能）可得每個位置的角速率（angular speed），而「P 到達 C」的意思不過是動能在途中始終不會降至零。求得在 C 處的角速率後，把牛頓（Newton）第二定律應用於整個系統的質心（centre of mass），便可求出轉軸上的反作用力（reaction）。

解答

模型與幾何

我們把 Q 視為質點，並把弦線視為輕弦。我們假設盤邊光滑，所以整條弦線上的張力 T 處處相同，而弦線對盤邊的法向接觸力都通過 O。因此，弦線對 O 的力矩（moment）只有在 P 處沿切線方向拉扯的張力所產生的力矩，即 $2bT$。（若把張力看成作用於弦線在 C 處離開盤邊的位置，所得的力矩完全相同：張力沿 AC 鉛垂向上，與 O 的距離為 $2b$。）

設 $\alpha = \angle POC$，其中 P 在 OC 下方。釋放時 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，而 P 到達 C 時 $\alpha = 0$。由於 $\angle POQ = 90°$，OQ 在 OC 上方並與之成角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$，所以 Q 的高度比 O 高 $2b\cos\alpha$。特別地，Q 起初與 O 同高（位於 C），而當 P 到達 C 時，它在 O 的正上方。



弦線的總長度為 $AC + \text{弧}CP = \pi b + 2b\alpha$，而其自然長度（natural length）為 πb，所以伸長量（extension）為 $2b\alpha$。由胡克定律（Hooke's law），

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

而所儲存的彈性勢能（elastic energy）為

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

對轉軸的轉動慣量（moment of inertia）等於圓盤的轉動慣量加上盤邊上 Q 的轉動慣量：

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P 到達 C

當圓盤轉動，使 P 向 C 上升（即 α 減小）時，弦線縮短並釋出彈性勢能，同時 Q 上升。轉軸固定而且光滑，所以能量守恆。系統在 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 處由靜止開始運動，此時 Q 相對於 O 的高度為 0，且 $E = \frac{1}{2}\pi kmgb$，於是

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

圓盤確實會朝正確的方向開始轉動：釋放時弦線以 $T = kmg$ 在半徑 $2b$ 處拉扯，而 Q 的重量則在水平距離 $2b$ 處產生反方向的力矩，所以淨力矩為 $2(k-1)mgb > 0$，因為 $k > \frac{4}{\pi} > 1$。

P 能到達 C，只要對 $[0, \frac{\pi}{2})$ 內的每個 α，動能都保持為正，即只要

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{對於} 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

由於 $k > \frac{4}{\pi}$ 且 $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$，左邊大於

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

所以只需證明在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有 $g(\alpha) = 1 - \dfrac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$。

想一想 怎樣在整個區間上比較一個二次函數與 $\cos\alpha$？

考慮二階導數（second derivative）。我們有 $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$，$g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$，所以 $g'(0) = 0$，而 $g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$。由於 $\frac{8}{\pi^2} < 1$，而 $\cos\alpha$ 由 1 遞減至 0，故存在唯一的 α_0，使得在 $[0, \alpha_0)$ 上 $g'' > 0$，在 $(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上 $g'' < 0$。

- 在 $[0, \alpha_0]$ 上，g' 由 $g'(0) = 0$ 開始遞增，所以 $g' \geq 0$，從而 $g \geq g(0) = 0$。
- 在 $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上，g 是凹（concave）的，所以它的圖像位於連接兩端點值 $g(\alpha_0) \geq 0$ 與 $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ 的弦之上；因此在該處同樣有 $g \geq 0$。

所以 $g \geq 0$ 處處成立，而嚴格不等式 $k > \frac{4}{\pi}$ 使動能在 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 時嚴格為正。圓盤在 $\alpha = 0$ 之前不會靜止下來，所以 P 到達 C。特別地，在 C 處（代入 $\alpha = 0$），

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi k m g b}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

其中 ω 是 P 位於 C 時的角速率。（由此可見條件 $k > \frac{4}{\pi}$ 的來由：它正好保證 $\omega^2 > 0$。）

轉軸上的反作用力

當 P 位於 C 時，有兩件事同時發生。

- 弦線處於自然長度（$AC = \pi b$，而弧段已消失），所以 $T = 0$。
- Q 在 O 的正上方，所以它的重量對 O 沒有力矩。

所以在該瞬間對轉軸沒有力矩，角加速度為零。圓盤的中心 O 固定不動，而 Q 沿半徑為 $2b$ 的圓運動，角加速度為零，所以它的加速度純粹是向心（centripetal）的：大小為 $2b\omega^2$，方向由 Q 指向 O，即鉛垂向下。

想一想 求反作用力的方程中應包括哪些力？

對整個系統（圓盤連同 Q）在鉛垂方向應用牛頓第二定律。外力包括兩個重量，合共 $2mg$ 向下；轉軸上的反作用力 R 向上；以及弦線的張力，它在此瞬間為零。Q 與圓盤之間的內力互相抵消。只有 Q 有加速度，所以

$$R - 2mg = m\,(-2b\omega^2),$$

因此

$$R = 2mg - 2mb \cdot \frac{(\pi k - 4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k - 4)}{3} = \frac{mg(10 - \pi k)}{3},$$

正如所求。（反作用力的水平分量在此瞬間為零，因為 Q 沒有水平加速度。）

驗算

- 在臨界情況 $k = \frac{4}{\pi}$ 下，系統僅僅能夠緩緩升到 C，此時 $\omega = 0$，而公式給出 $R = 2mg$，即靜止時的值。兩者吻合。
- 用電腦對運動方程 $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$（其中 $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$）作數值積分。取 $m = g = b = 1$ 及 $k = 2$，系統到達 C 時 $\omega^2 = 0.38053$，與 $(2\pi - 4)/6$ 相符，且 $R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$。對於 $k = 1.29, 1.5, 3$，結果同樣準確至小數點後六位。
- 若 $k > \frac{10}{\pi}$，公式給出 $R < 0$：轉軸必須向下拉，因為 Q 越過頂點時轉得太快，所需的向心力超過了系統的重量。

常見錯誤

- 把伸長量自始至終當作 πb。事實上，當 P 到達 C 時，伸長量會縮減至零，這正是張力在該處消失的原因。
- 忘記圓盤本身的轉動慣量 $\frac{1}{2}m(2b)^2$，只用了 Q 的轉動慣量。
- 只證明在 C 處的動能為正。「P 到達 C」要求動能在整段路程上都保持為正。

STEP 之外

最後一步是「外力總和等於總質量乘以質心加速度」的剛體版本，而求支點上的反作用力正是它的經典應用。大學一年級的剛體動力學課程會把它與角動量方程 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$ 一併發展。不等式 $\cos\alpha \le 1 - 4\alpha^2/\pi^2$ 是約當不等式（Jordan's inequality）$\sin x \ge 2x/\pi$ 的近親，這裏是用標準的凸性（convexity）論證來證明的。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對定軸轉動及支點反作用力有非常清晰的講解。

詳細解答

STEP III 1992，第 14 題

力學 • 解繞繩的動力學

> **STEP III 1992，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

關鍵思路

整個問題只由一個角 θ 決定。繩子未貼着圓盤的部分在 Q 點與圓盤相切（tangent），其長度等於已從圓盤鬆開的那段繩子的弧長，因此很容易用 θ 表示 P 的位置（P 所描出的曲線是圓的漸伸線（involute））。求導之後，會發現 P 的速度（velocity）與繩子垂直。所以繩子的張力（tension）不作功，沿運動方向只有摩擦力（friction）起作用。於是沿 PQ 方向和垂直於它的方向分解，便可把問題乾淨利落地一分為二。

解答

P 的位置

把 P 視為水平桌面上的一個質點（particle），所受阻力只有題目給出的摩擦力，並把繩子視為輕而不可伸長（light and inextensible）。重力與法向反作用力（normal reaction）互相抵銷，所以水平方向的力只有沿 PQ 的張力 T 和摩擦力。

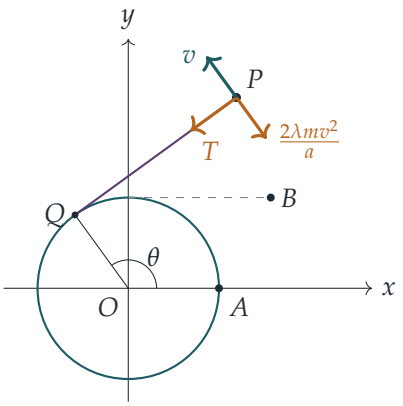
取 $A = (a, 0)$ 在 x 軸上，則切點為 $Q = (a\cos\theta,\, a\sin\theta)$。當 P 位於 A 時，整條繩子都繞在圓盤上；由於繩子不可伸長，鬆開的部分 QP 的長度等於已解開的弧 AQ 的長度，即 $a\theta$。繩子在 Q 點與圓盤相切，所以 QP 垂直於 OQ，方向為單位向量（unit vector）$(\sin\theta,\, -\cos\theta)$（當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，這向量是 $(1, 0)$，由圓盤頂點指向 B，如圖所示）。因此

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta,\, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta,\, -\cos\theta),$$

所以

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

第一條式子就是所求的 x 坐標。在 B 點，鬆開的繩子與 OA 平行，並在圓盤頂點與圓盤相切，所以該處 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而 $B = (\frac{\pi a}{2},\, a)$。



速度與加速度

設 $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ 為沿 OQ 方向的單位向量，$\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 為由 P 指向 Q 的單位向量（與上文的繩子方向相反）。注意 $\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$ 及 $\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$。

對 x 和 y 求導，

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

所以速度為 $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$：它與 OQ 平行，因而與繩子垂直。利用乘法法則（product rule）再求導一次，

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\left(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta\right)\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a\left(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta\right)\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

所以加速度沿 PQ 方向（指向 Q）的分量為 $a\theta\dot\theta^2$，而垂直於 PQ 方向（即 $\mathbf{e}$ 的方向）的分量為 $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$，正如題目所要求。

運動方程

在 B 點，$\theta = \frac{\pi}{2}$，速度為 $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$。質點沿垂直於 OA 並遠離 OA 的方向拋出，即表示速度 V 沿 y 軸正方向，所以

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{（起初）。}$$

只要 $\dot\theta > 0$，速率便是 $v = a\theta\dot\theta$，而運動方向為 $+\mathbf{e}$，所以大小為 $2\lambda mv^2/a = 2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2$ 的摩擦力沿 $-\mathbf{e}$ 方向作用。張力沿 $\mathbf{f}$ 方向作用，沒有 $\mathbf{e}$ 分量。

> ? **想一想** 要得到一條只含 θ 的方程，應該用加速度兩個分量中的哪一個？

應該用垂直的那個：張力 T 是未知的，而它只出現在沿 PQ 方向的分量之中。在垂直於 PQ 的方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$m\left(a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta\right) = -2\lambda ma\theta^2\dot\theta^2.$$

兩邊除以 $ma\theta\dot\theta$（這是容許的，因為 $\theta>0$ 且 $\dot\theta>0$），

$$\frac{\ddot\theta}{\dot\theta}=-\left(\frac{1}{\theta}+2\lambda\theta\right)\dot\theta,$$

這就是所求的結果。

求 $\dot\theta$

左邊是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot\theta$，而根據鏈式法則（chain rule），右邊是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\ln\theta-\lambda\theta^2\right)$。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln(\theta\dot\theta)+\lambda\theta^2\right)=0,\qquad\text{所以}\qquad\theta\dot\theta\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2}=\text{常數}.$$

在 B 點，這個常數為 $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}=\frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$。於是

$$\dot\theta=\frac{V}{a\theta}\exp\!\left(\lambda\left(\frac{\pi^2}{4}-\theta^2\right)\right).$$

這對任何 θ 都是正數，所以 $\dot\theta$ 永不為零，上文所用的假設 $\dot\theta>0$ 自始至終成立。（答案除了 θ、λ 和 a 之外，必然還涉及 V。）等價地說，速率為 $v=a\theta\dot\theta=V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4-\theta^2)}$。

$\theta=\pi$ 時的張力

沿 PQ 方向只有 T 這一個力，它指向 Q，所以 $T=ma\theta\dot\theta^2$。當 $\theta=\pi$ 時，

$$\dot\theta^2=\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4-\pi^2)}=\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

所以

$$T=ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}=\frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

驗算

- 鬆開的繩子 PQ 長度為 $a\theta$，而它正是漸伸線的曲率半徑（radius of curvature），所以 Q 是曲率中心（centre of curvature），指向 Q 的加速度分量應為 $v^2/(a\theta)=a\theta\dot\theta^2$。結果確是如此。
- 當 $\lambda=0$（沒有摩擦力）時，速率保持為 V；這是必然的，因為張力與運動方向垂直，不作功。在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，$T=mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$，這正是以 B 點的繩長 $r=\frac{\pi a}{2}$ 代入 mv^2/r 的結果。
- 數值方面，取 $a=1.3$、$m=0.7$、$V=2.1$、$\lambda=0.25$，我們用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）逐步求解 θ 的方程：結果與 $\dot\theta$ 的公式吻合，誤差在 10^{-14} 以內。以有限差分（finite difference）計算 (x,y) 的加速度，所得結果與兩個分量及摩擦力均吻合，並在 $\theta=\pi$ 時得出 $T\approx0.018667$，與公式一致。

常見錯誤

- 以 $\theta = 0$ 作為初始值：質點由 B 出發，該處 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而不是由 A 出發。
- 沿 PQ 方向分解來求 $\dot{\theta}$：那條方程含有未知的張力，而摩擦力在該方向沒有分量。
- 忘記摩擦力與速度方向相反，而速度是沿 OQ 方向，不是沿繩子方向。

STEP 之外

P 的路徑是圓的漸伸線，即拉緊的繩子從線軸上鬆開時，繩端所描出的曲線，也是大多數齒輪輪齒所採用的形狀。這裏用到的事實(速度與繩子垂直，以及繩長就是曲率半徑)，都是曲線微分幾何(differential geometry)中漸屈線(evolute)與漸伸線關係的特殊情況。從動力學的角度看，這是一個很好的例子，說明如何利用內稟(intrinsic)分量(即切向和法向分量)把已知的力與未知的約束力(constraint force)分開。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）正是以這種思路討論極坐標（polar coordinates）和內稟坐標下的運動，以及受約束的運動。

詳細解答

STEP III 1992，第 15 題

概率與統計 • 幾何概率

STEP III 1992，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q15

關鍵思路

由於山羊的位置在田地上均勻分佈（uniformly distributed），每一個概率都只是某塊面積除以 a^2。所以整道題歸根究底，就是要求出正方形內與角 O 的距離小於 r 的那部分的面積。當 r 超過 a 之後，四分之一圓會溢出正方形以外，而要求出仍留在正方形內的面積，最利落的做法是把它切成兩個直角三角形和一個扇形（sector）。之後把分佈函數微分便得到密度，而繫繩的山羊則是同一個想法，只是換了一個區域。

解答

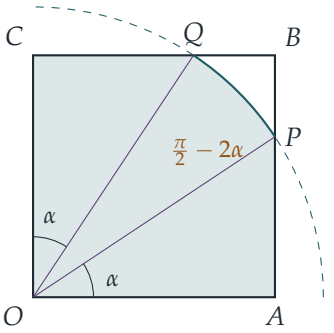
把 O 放在原點，OA 沿 x 軸，OC 沿 y 軸，於是田地就是 $0 \le x \le a$、$0 \le y \le a$。記 $F(r) = \mathrm{P}(R < r)$，它等於田地中滿足 $x^2 + y^2 < r^2$ 的那部分的面積除以 a^2。

R 的分佈

當 $0 < r \le a$ 時。以 O 為圓心、半徑為 r 的四分之一圓盤完全落在田地之內，所以

$$F(r) = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{4a^2}.$$

當 $a \le r \le a\sqrt{2}$ 時。這時圓弧與邊 AB（即直線 $x = a$）相交於 $P = \left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$，與邊 CB（即直線 $y = a$）相交於 $Q = \left(\sqrt{r^2 - a^2}, a\right)$。設 $\alpha = \cos^{-1}(a/r)$，它就是角 AOP（因為 $\cos \angle AOP = a/r$）。根據對稱性，角 COQ 也等於 α。



陰影區域（即田地中與 O 的距離小於 r 的部分）可分成三塊：

- 三角形 OAP，直角在 A，兩條直角邊分別為 a 和 $\sqrt{r^2 - a^2}$，所以面積為 $\frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$；
- 三角形 OCQ，與它全等（congruent），面積相同；
- 扇形 OPQ，半徑為 r，圓心角為 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$，面積為 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\pi r^2}{4} - r^2\alpha$。

把三者相加再除以 a^2，

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{a^2} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\,\alpha \\ &= \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned}$$

這正是所求的結果。（當 $r \geq a\sqrt{2}$ 時，整塊田地與 O 的距離都小於 r，所以 $F(r) = 1$。在 $r = a\sqrt{2}$ 處，公式給出 $1 + \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$，與預期相符。）

中位數

在 $r = a$ 處有 $F(a) = \pi/4 \approx 0.785 > \frac{1}{2}$，所以中位數（median）$m$ 落在 $0 < m < a$ 的範圍內，這裏適用的是較簡單的那條公式：

$$\frac{\pi m^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798a.$$

概率密度函數

概率密度函數（probability density function）為 $f(r) = F'(r)$。當 $0 < r < a$ 時，$f(r) = \dfrac{\pi r}{2a^2}$。

當 $a < r < a\sqrt{2}$ 時，我們需要 $\cos^{-1}(a/r)$ 的導數：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1 - a^2/r^2}} \cdot \left(-\frac{a}{r^2}\right) = \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

然後對 F 逐項微分（最後一項要用積法則（product rule）），

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{\pi r}{2a^2} - \frac{2r}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}} \\ &= \frac{r}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

因為第一項與最後一項互相抵消。所以

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2a^2}, & 0 < r \le a, \\ \dfrac{r}{a^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right), & a < r \le a\sqrt{2}, \\ 0, & \text{其他情況。} \end{cases}$$

這在幾何上也說得通：$f(r)\,\mathrm{d}r$ 等於（半徑為 r 的圓在田地內的弧長）$\times\,\mathrm{d}r/a^2$，而該段弧所對的圓心角在 $r \le a$ 時為 $\frac{\pi}{2}$，在 $r > a$ 時為 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$。兩段公式在 $r = a$ 處吻合（都給出 $\pi/(2a)$），而 f 在 $r = a\sqrt{2}$ 處降至 0，那裏 $\alpha = \pi/4$。

繫繩的山羊

山羊被繫住之後，只能到達田地中 $R \le a$ 的點，即以 O 為圓心、半徑為 a 的四分之一圓盤，其面積為 $\frac{1}{4}\pi a^2$。牠的位置仍然是均勻分佈，只是現在分佈在這個四分之一圓盤上。這恰好就是原來的模型以事件 $R \le a$ 為條件之後的情況。

> ? **想一想** 哪一個坐標量度的是與圍欄 OC 的距離？

由於 OC 沿 y 軸，與 OC 的距離就是 x。所以我們需要求出四分之一圓盤中 $x > a/2$ 的那部分的面積：

$$\begin{aligned} \int_{a/2}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/2}^{a} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}\,a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\,a^2}{8}. \end{aligned}$$

（從幾何上看，這是一個圓心角為 $\pi/3$ 的扇形減去一個邊長為 $a/2$ 和 $\sqrt{3}a/2$ 的三角形，因為直線 $x = a/2$ 與圓弧的交點和 OA 所成的角為 $\pi/3$。）除以面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$，

$$\mathrm{P}\left(\text{距}OC > \tfrac{a}{2} \,\middle|\, R \le a\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391.$$

驗算

- 連續性：F 的兩條公式在 $r = a$ 處都給出 $\pi/4$，而且 $F(a\sqrt{2}) = 1$。

- 以單位正方形內 4×10^5 個均勻分佈的點進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation），結果在 $r = 0.3, 0.7, 1.1, 1.25, 1.4$ 處與 $F(r)$ 吻合至大約小數點後三位。模擬得出的樣本中位數為 0.7986，而 $\sqrt{2/\pi} = 0.7979$；條件比例為 0.3914，而 $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.3910$。
- 密度在 $[0, a\sqrt{2}]$ 上的數值積分為 1，並且在若干個點上與 F 的數值導數相符。
- 繫繩情況的答案小於 $\frac{1}{2}$，這是應有的結果：四分之一圓盤在遠離 OC 的地方較窄。

常見錯誤

- 求中位數時忘記了 F 在 $r > a$ 時要用另一條公式。值得先檢查 $F(a) > \frac{1}{2}$，由此可知中位數落在容易處理的範圍內。
- 把扇形的圓心角寫成 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 而不是 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$。被切去的角位有兩塊，兩邊各一。
- 在繫繩的部分除以 a^2。條件概率（conditional probability）應除以四分之一圓盤的面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$。

STEP 之外

這裏的 R 是在某個區域內均勻選取的一點的函數，而它的分佈是透過量度 $R < r$ 的區域而得出的。這正是求隨機變量（random variable）的函數的分佈的一般方法，而密度公式 $f(r) = (\text{弧長})/a^2$ 則讓人初嘗「餘面積」（coarea）的想法，即把一個區域切成一片片水平集（level sets）。同樣的幾何推理也是布豐投針（Buffon's needle）以及正方形內兩個隨機點之間的距離等問題的基礎。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*，以及 Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*，都有闡述這種處理連續隨機變量的幾何方法。

詳細解答

STEP III 1992，第 16 題

概率與統計 • 泊松稀疏化

STEP III 1992，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s3-q16

關鍵思路

一旦錯字的總數固定下來，每個錯字都是一次獨立試驗（independent trial），我要麼發現它，要麼看漏，所以第 (i) 部分是一個二項概率（binomial probability）。第 (ii) 部分是條件概率（conditional probability），而分母，即我恰好發現 m 個錯字的概率，需要我們對所有可能的看漏數目逐一相加。這個和原來是一個指數級數（exponential series），正因如此，整個式子才會化簡成簡潔的泊松（Poisson）形式。

解答

全篇記 $q = 1 - p$。設 N 為該期報紙的錯字總數，S 為我發現的錯字數目，$U = N - S$ 為我未能發現的數目。題目告訴我們

$$\mathrm{P}(N = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

第 (i) 部分

已知 $N = m + n$ 時，這 $m + n$ 個錯字各自以概率 p 被發現，彼此獨立。因此，在 $N = m + n$ 的條件下，被發現的錯字數目服從二項分佈（binomial distribution）$\mathrm{B}(m + n, p)$。任意指定哪 m 個錯字被發現、哪 n 個被看漏，其概率都是 $p^m q^n$，而這樣的選法共有 $\binom{m+n}{m}$ 種，所以

$$\mathrm{P}(S = m \mid N = m + n) = \binom{m+n}{m} p^m (1-p)^n.$$

第 (ii) 部分

我們要求 $\mathrm{P}(U = n \mid S = m)$。事件 $\{S = m,\ U = n\}$ 與 $\{N = m+n,\ S = m\}$ 是同一事件，所以由第 (i) 部分可得

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S = m,\ U = n) &= \mathrm{P}(N = m+n)\,\mathrm{P}(S = m \mid N = m+n)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{m+n}}{(m+n)!}\cdot\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,p^m q^n\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\frac{(\lambda q)^n}{n!}.\end{aligned}$$

因子 $(m+n)!$ 剛好約去，這正是本題得以順利解出的關鍵。

> **想一想** 我們不知道總共有多少個錯字，那麼怎樣求 $\mathrm{P}(S = m)$ 呢？

如果我恰好發現 m 個，看漏的數目可以是 $0, 1, 2, \ldots$ 中的任何一個，而這些情況互斥（mutually exclusive）。因此我們把聯合概率（joint probability）對 U 的所有取值 j 求和：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S = m) &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\frac{(\lambda q)^j}{j!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{\lambda q}\\ &= \frac{(\lambda p)^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

這裏用到 $\sum_{j\ge 0} x^j/j! = \mathrm{e}^x$ 及 $-\lambda + \lambda q = -\lambda p$。（由此可見，我發現的錯字數目本身也服從泊松分佈（Poisson distribution），平均值（mean）為 λp。）這個概率是正數，所以可以用它作除數。於是

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = n \mid S = m) &= \frac{\mathrm{P}(S = m,\ U = n)}{\mathrm{P}(S = m)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}\cdot\dfrac{(\lambda q)^n}{n!}}{\mathrm{e}^{-\lambda p}\,\dfrac{(\lambda p)^m}{m!}}\\ &= \frac{(\lambda q)^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda+\lambda p} = \frac{(1-p)^n\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda},\end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

答案完全不依賴 m：知道我發現了多少個錯字，並不能告訴我看漏了多少個。無論 m 是多少，看漏的數目都服從平均值為 $(1-p)\lambda$ 的泊松分佈。

驗算

- 把最後的答案對 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 求和，得 $\mathrm{e}^{(1-p)\lambda}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda} = 1$，條件分佈理應如此。
- 當 $p \to 1$ 時，我會發現所有錯字，而答案在 $n = 0$ 時趨向 1，在 $n \ge 1$ 時趨向 0。吻合。

- 取 $\lambda = 3$、$p = 0.6$、$m = 2$、$n = 1$，公式給出 $1.2\,\mathrm{e}^{-1.2} \approx 0.3614$。模擬 400 000 份報紙，只保留恰好發現兩個錯字的那些，所得結果為 0.360。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分漏掉二項式係數（binomial coefficient）$\binom{m+n}{m}$：被發現的 m 個錯字可以是 $m+n$ 個之中的任意 m 個。
- 把 $\mathrm{P}(S = m)$ 當成 $\mathrm{P}(N = m)$，或當成第 (i) 部分的答案，而沒有對所有可能的看漏數目求和。

STEP 之外

這就是泊松分佈的*稀疏化*（thinning，又稱分裂 splitting）性質：如果有 Poisson(λ) 個物件，每個各以概率 p 被保留，那麼被保留的數目與被捨棄的數目是*獨立*的泊松變量，平均值分別為 λp 和 $\lambda(1-p)$。我們求得的聯合概率恰好分解成這兩個部分。稀疏化是泊松過程（Poisson process）理論中的重要工具，它讓你把一串隨機事件分拆成若干串互相獨立的子事件流。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）有講述這個性質，也介紹了只需一行便能證明它的母函數（generating function）方法。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

1992 年詳細解答. 全書各章及
所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為
beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。