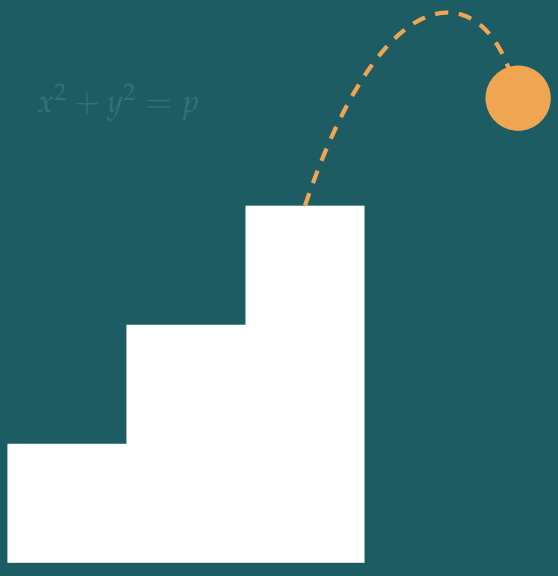
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 11 章

振動、轉動與運動參考系



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 11 章

振動、轉動與運動參考系

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 11 章：振動、轉動與運動參考系

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 11 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

11

振動、轉動與運動參考系

會擺動的東西、會旋轉的東西，以及從移動中的位置所看到的東西。

本章內容

11.1	共振	STEP II 1991
11.2	簡正模式	STEP III 2014
11.3	真實的擺	STEP III 1998
11.4	等時曲線	STEP III 1994
11.5	加速火車中的重力	STEP II 2021
11.6	後旋	STEP III 1997
11.7	桿中的辛普森法則	STEP II 1989
11.8	傾斜的平衡	STEP III 2025
11.9	安全拋物線	STEP II 2014
11.10	會朝你飛回來的球	STEP II 2019
11.11	外野手如何接球	STEP II 1998
11.12	橡皮繩上的螞蟻	STEP II 2018
11.13	鏟雪車問題	STEP III Specimen paper
11.14	是拋物線，不是懸鏈線	STEP I 1991
A	練習答案	第 95 頁

看清運動

年輕理論物理學家的事業，就是在愈來愈抽象的層次上處理諧振子。

— 相傳出自 Sidney Coleman

上一章利用守恆定律（conservation laws）來理解碰撞和引力。本章轉向動力學（dynamics）入門課程的另外幾個重要主題：會振動的東西、會轉動的東西，以及從最有用的觀點描述運動的藝術。

振動（oscillation）無處不在。單擺和彈簧是教科書上的例子，但同樣的數學也描述了分子的振動、建築物的搖晃、收音機裏的電路，以及在量子力學中光本身的行為。原因在於，幾乎任何處於穩定平衡（stable equilibrium）附近的東西，表現都像彈簧：把它拉開一點點，回復力（restoring force）便與位移成正比。因此，簡諧振子（simple harmonic oscillator）是幾乎所有物理系統的一階近似，而物理學有很大一部分，就是要弄清楚當這個近似不太準確時會發生甚麼事。

為甚麼這很重要

工程師必須知道所建造的每一座結構的固有頻率（natural frequency），使它們遠離風、交通和地震的頻率。化學家憑分子的振動來辨認分子。計時這門技藝，從惠更斯（Huygens）的擺鐘到石英錶和原子鐘，就是製造完美振子的藝術。轉動支配着一切，從桌球的旋轉到人造衛星的穩定性皆然。至於哪些參考系（frame of reference）才算「自然」這個問題，則經由引力與加速度的等效性，引出了愛因斯坦（Einstein）的廣義相對論。

本章最後有六道題目，歸為一組，稱為*出人意表的軌跡*：拋體、螞蟻、外野手和鏟雪車，它們的表現都與直覺所預料的不同。這些題目短小而優雅，每一道的核心都有一個真正的數學概念：包絡線（envelope）、單調性（monotonicity）、反饋（feedback）、發散（divergence）、線性微分方程（linear differential equation），以及拋物線（parabola）與懸鏈線（catenary）之間的分別。

你在大學會遇到甚麼

大學一年級的動力學課程涵蓋簡諧運動、阻尼（damped）諧運動和受迫（forced）諧運動、共振（resonance），以及耦合振子（coupled oscillators）及其簡正模態（normal modes）（這是線性代數與力學交匯之處）。課程也會處理剛體（rigid body）、轉動慣量

（moment of inertia）和滾動，以及在加速參考系和旋轉參考系中的運動，當中會出現離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。往後的課程會把這一切發展成拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）和哈密頓力學（Hamiltonian mechanics），坐標的選擇在其中成為核心主題；又會發展成波動理論，而波就是在空間中散佈開來的振動。非線性振動，例如大振幅的單擺，則通向橢圓函數（elliptic functions）和第 8 章的動力系統（dynamical systems）。

貫穿本章的問題

三大問題

1. **運動在甚麼時候是簡單的？**一個系統在甚麼時候會以單一而固定的頻率振動？若不是這樣，又會發生甚麼事？
2. **甚麼才是合適的觀點？**哪些坐標、哪些變量、哪個參考系能令問題變得容易？
3. **直覺可信嗎？**日常對運動的直覺在哪裏出錯？數學又如何糾正它？

本章由振動開始：共振(Section 11.1)、簡正模態、真實的單擺和等時曲線(tautochrone)。接着轉向參考系和剛體：一列加速中的火車、一顆旋轉的彈珠、一根表現得像三個質點的桿，以及一個可以按三種不同傾斜角度靜止的立體。最後六節就是那些出人意表的軌跡。

本章的概念

§	課題	概念
11.1	受迫振動	共振與拍（beats）
11.2	耦合振子	簡正模態就是特徵向量（eigenvectors）
11.3	真實的單擺	橢圓積分（elliptic integrals）；算術幾何平均（AGM）
11.4	等時曲線	以弧長（arc length）表示的簡諧運動
11.5	運動參考系	假想力（fictitious forces）；等效原理（equivalence principle）
11.6	滾動與滑動	一個守恆的角動量（angular momentum）
11.7	轉動慣量	動力等效（dynamical equivalence）；辛普森法則（Simpson's rule）
11.8	穩定性	通過質心（centre of mass）的法線
11.9	拋體	軌跡的包絡線
11.10	拋體	距離不一定遞增
11.11	接球	一條反饋法則
11.12	伸長的繩	分數與調和級數（harmonic series）
11.13	鏟雪車	把時間看成距離的函數
11.14	懸索橋	是拋物線，不是懸鏈線

Section 11.6 和 Section 11.7 這兩節用到轉動動力學（rotational dynamics）和轉動慣量，這些內容已於 2019 年從 STEP 考試範圍中刪去。收錄它們，是因為這兩道都是極好的題目；每一節都會給出所需的知識。

如何閱讀本章

動手計算之前，先問問題目想要的是哪個變量。等時曲線用弧長，耦合彈簧用 $x \pm y$，螞蟻用繩子的分數，鏟雪車則把時間看成距離的函數：在每一種情況下，選對了變量，難題就會變成熟悉的問題。

11.1 共振

題目

STEP II 1991，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/91-s2-q12`

引子

推鞦韆上的小孩時，只要每一下都推在恰當的時刻，輕輕的推力也會累積成大幅的擺動；節奏不對的話，就幾乎毫無效果。每個振動系統都有其*固有頻率*（natural frequency），以這個頻率去驅動它，所得的反應會大得與所花的力氣完全不成比例。這就是*共振*（resonance）。歌手能夠震碎酒杯，士兵過橋時要打亂步伐，收音機能夠從數以千計的電台中選出其中一個，都是這個緣故。

這道題目搖動一條彈性繩的頂端，問繩子在甚麼情況下會保持拉緊。答案含有因子 $\frac{1}{n-p}$，當驅動頻率 p 趨近固有頻率 n 時，這個因子會趨於無窮大：在接近共振時，輕輕一搖已足以令繩子鬆弛。

動筆之前

想一想 質點懸掛在平衡位置，繩的伸長量（extension）為 c。若繩的彈性模量（modulus）為 λ，則 λ、a、c、m 與 g 之間有甚麼關係？當頂端向下移動了 $b\sin pt$，而質點向下移動了 x 時，伸長量是多少？

在平衡狀態下，張力（tension）等於重量：$\frac{\lambda c}{a} = mg$。當頂端向下位移 $b\sin pt$，而質點向下位移 x 時，繩的長度增加了 $x - b\sin pt$，所以伸長量是 $c + x - b\sin pt$。

逐步解題

階段 1　運動方程

取向下為正，作用於質點的力有它的重量 mg，以及向上的張力 $\frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt)$：

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b\sin pt) = -\frac{\lambda}{a}(x - b\sin pt),$$

這裏用了 $\frac{\lambda c}{a} = mg$。由於 $\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2$，上式即 $\ddot{x} = -n^2(x - b\sin pt)$。 ■

質點受到一個彈簧力，把它拉向移動中的點 $b\sin pt$。假如沒有驅動，它會以角頻率（angular frequency）n 振動，這就是它的固有頻率。

階段 2　求解

> **想一想**　方程是 $\ddot{x} + n^2x = n^2b\sin pt$。試用 $x = C\sin pt$ 這種形式的特解（particular solution），然後加上 $\ddot{x} + n^2x = 0$ 的通解（general solution）。質點滿足哪些初始條件？

代入 $x = C\sin pt$ 得 $(-p^2 + n^2)C = n^2b$，所以 $C = \frac{n^2b}{n^2 - p^2}$（這裏需要 $p \neq n$）。餘函數（complementary function）是 $D\cos nt + E\sin nt$。質點由平衡位置從靜止開始運動：$x(0) = 0$ 令 $D = 0$，而 $\dot{x}(0) = 0$ 給出 $Cp + En = 0$，所以 $E = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}$。綜合起來，

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n\sin pt - p\sin nt). \qquad ■$$

階段 3　保持拉緊

> **想一想**　繩子拉緊，當且僅當它的伸長量為正。試把伸長量 $c + x - b\sin pt$ 以 t 表示。

從 $x(t)$ 減去 $b\sin pt$，

$$\begin{aligned} x - b\sin pt &= \frac{b}{n^2 - p^2}\left(n^2\sin pt - np\sin nt - (n^2 - p^2)\sin pt\right) \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p\sin pt - n\sin nt). \end{aligned}$$

所以繩子自始至終保持拉緊，當且僅當

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p\sin pt - n\sin nt) \geq 0 \qquad \text{對所有} t \geq 0.$$

想一想 $p\sin pt - n\sin nt$ 最小可以負到甚麼程度？

由於 $|\sin| \le 1$，我們有 $p\sin pt - n\sin nt \ge -(p+n)$。所以伸長量至少是

$$c - \frac{bp(n+p)}{n^2-p^2} = c - \frac{bp}{n-p},$$

當 $pb < (n-p)c$ 時，這個值為正。 ■

停一停，試一試 當 p 趨近 n 時，這個條件會變成怎樣？當 $p = 0.9n$ 時，搖動的振幅（amplitude）b 要有多小？當 $p = 0.99n$ 時又如何？

回顧

- **由平衡位置量起。**利用平衡時的伸長量 c，重力便從方程中消去了。
- **特解加餘函數。**頻率為 p 的受迫響應，加上頻率為 n 的自由振動，其中的常數由初始條件決定。
- **估界，不必求解。**我們沒有準確求出伸長量的最小值；對正弦作一個粗略的估界，已足以得出一個充分條件（sufficient condition）。

背後的數學

共振極限

在解中令 $p \to n$。分子和分母都趨於零，計算極限(或使用洛必達法則(l'Hôpital's rule)，對 p 求導）可得

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt).$$

$nt\cos nt$ 這一項會無止境地增大：恰好以固有頻率驅動時，振幅隨時間線性增長，每一下推動都與運動同步，為它再添一分。在略低於共振的頻率下，兩個頻率時而同步、時而錯開，產生拍（beats）：振幅以緩慢的頻率 $n-p$ 時漲時落（圖 11.1.1）。兩條結他弦的音高幾乎調準時，聽到的也是同樣的拍。

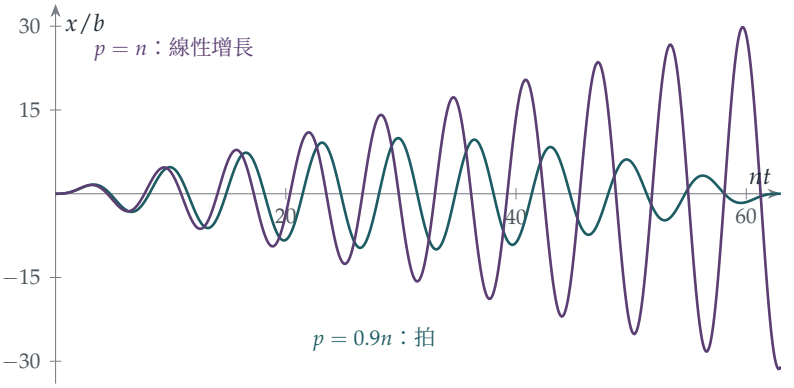


圖 11.1.1　質點的響應（不考慮繩子鬆弛），以搖動振幅 b 為單位。當 $p = 0.9n$（藍綠色）時，響應增大至約為 b 的十倍，然後再度消退，拍的周期為 $\frac{2\pi}{n-p}$。在恰好共振，即 $p = n$（紫紅色）時，振幅無止境地增長。

阻尼與共振曲線

現實中的系統會因摩擦或空氣阻力而損失能量，這就限制了振幅的增長。有阻尼（damping）時，系統對頻率為 p 的驅動力的穩態響應，其振幅在固有頻率附近達到峯值；峯愈尖銳，阻尼就愈小。工程師用品質因數（quality factor）Q 來描述這一點：粗略地說，它是系統在失去大部分能量之前所完成的振動次數。酒杯的 Q 數以千計，所以一個恰好等於其固有頻率的持續音可以把它震碎。汽車的懸掛系統則刻意設計成 Q 值很低，以免路面顛簸令車身彈跳不止。

會動的橋

1831 年，一隊士兵以整齊步伐操過曼徹斯特附近的布勞頓吊橋（Broughton Suspension Bridge），令橋身振動，最終倒塌；自此以後，軍隊過橋時都奉命打亂步伐。倫敦千禧橋（London Millennium Bridge）於 2000 年 6 月啟用，人羣一踏上橋，橋身便開始左右搖擺：行人不自覺地調整步伐去配合搖擺，同步地為它注入能量，結果該橋關閉了兩年，以便加裝阻尼器。1940 年塔科馬海峽吊橋（Tacoma Narrows Bridge）那次著名的倒塌，常被說成是共振，但其實是另一種現象，即氣動彈性顫振（aeroelastic flutter），當中風所施的力取決於橋本身的運動。要分析它，需要用到自激振動（self-excited oscillation）和極限環（limit cycle）的概念（Section 8.4）。

思維技巧

把受迫響應與自由響應疊加

對於受周期力驅動的線性方程，其解是驅動頻率下的響應，加上固有頻率下的自由振動，後者按初始條件選定。

這個方法之所以可行，全靠線性（linearity）：解可以相加。在大學裏，同一原理應用於多個驅動頻率之和，便引出傅立葉分析（Fourier analysis）、工程學中的傳遞函數（transfer function），以及物理學中的格林函數（Green's function）。

延伸練習

1 **下墜的升降機。**試做 STEP II 1996，第 11 題（`step.maths.org/questions/96-s2-q11`）：升降機內有一個質量繫於彈性繩上，升降機先開始加速，其後停止加速。留意最終的振幅如何取決於加速持續的時間。

2 **共振之時。**試用特解 $x = Ct\cos nt$，直接解 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$，其中 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$。驗證所得結果與上文的極限一致。

3 **拍。**證明 $n\sin pt - p\sin nt$ 可寫成兩項之和，而當 p 接近 n 時，其中一項近似於 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$。由此解釋拍的周期為何是 $\frac{2\pi}{n-p}$。

4 **有阻尼的共振。**對於 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$，其中 $k > 0$ 且很小，求穩態振幅，並證明當 $p^2 = n^2 - 2k^2$ 時振幅最大。

延伸閱讀

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。第 4 章講述受迫振動與共振，是這個課題的經典論述。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。講述事物如何趨於同步，從螢火蟲談到千禧橋。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。講述工程上的失敗個案，包括歷史專欄中提到的幾座橋。

11.2 簡正模式

題目

STEP III 2014，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/14-s3-q10`

引子

一個掛在彈簧上的質點，會以簡單而規律的方式上下彈動。把兩個質點用彈簧連起來，運動看起來就複雜得多：每個質點都不規則地忽動忽停，能量在兩者之間來回流轉。然而在這複雜的表象背後，藏着兩種極其簡單的運動，稱為**簡正模態**（normal modes）：兩個質點或一起同向運動，或恰好反向運動，而每個模態各以自己的頻率（frequency）振盪。系統的任何運動，都是這兩個模態的組合。

本題要找出夾在三條彈簧之間的兩個質點的簡正模態，然後證明一個令人驚訝的結論：若系統由靜止開始，而其中一個質點有初始位移，則系統**永遠不會**回到起始位置。原因在於兩個頻率之比是 $\sqrt{3}$，而 $\sqrt{3}$ 是無理數（irrational number）。

動筆之前

想一想 設 X 與 P 的距離為 $a+x$，Y 與 Q 的距離為 $a+y$，那麼中間的彈簧 XY 有多長？當 x 和 y 皆為正數時，哪些彈簧被拉長，哪些被壓縮？

三段長度之和為 $3a$，所以 $XY = 3a-(a+x)-(a+y) = a-x-y$。當 $x, y > 0$ 時，外側兩條彈簧被拉長（伸長量分別為 x 和 y），中間一條則被壓縮（壓縮量為 $x+y$）。

逐步解題

階段 1　運動方程

沿着由 P 指向 Q 的方向量度 x。彈簧 PX 的伸長量（extension）為 x，所以它的張力（tension）$\frac{\lambda x}{a}$ 把 X 拉回 P 的方向。彈簧 XY 的伸長量為 $-(x+y)$，所以它的張力 $-\frac{\lambda(x+y)}{a}$ 把 X 拉向 Y（負的張力即是推力）。因此

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{a} - \frac{\lambda(x+y)}{a} = -\frac{\lambda}{a}(2x+y). \qquad \blacksquare$$

根據對稱性（把 X 與 Y、P 與 Q 的角色互換），

$$m\ddot{y} = -\frac{\lambda}{a}(2y+x).$$

階段 2　解耦

想一想　每條方程都同時涉及 x 和 y。把兩條方程怎樣組合，才會只涉及 x 和 y 的某一個組合？

把兩式相減及相加，得

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\frac{\lambda}{a}(x-y), \qquad m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{3\lambda}{a}(x+y).$$

兩者都是簡諧運動（simple harmonic motion）的方程：$x-y$ 以 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$ 振盪，而 $x+y$ 則以 $3\omega^2$ 振盪。

階段 3　初始條件

起初 $XP = a$ 及 $YQ = \frac{1}{2}a$，所以 $x = 0$ 及 $y = -\frac{1}{2}a$，而且兩個質點都處於靜止。因此在 $t = 0$ 時，$x - y = \frac{1}{2}a$ 及 $x + y = -\frac{1}{2}a$，而兩者的變化率皆為零，由此得

$$x - y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t, \qquad x + y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

所以 $A = \frac{1}{2}a$ 及 $B = 0$。 $\blacksquare$

階段 4　永不返回

想一想　把 y 寫成 t 的函數。若 Y 要回到起始位置，便須 $y = -\frac{1}{2}a$。這時兩個餘弦必須各等於甚麼？

兩式相減，得 $y = \frac{1}{2}\big((x+y)-(x-y)\big) = -\frac{1}{4}a\big(\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t\big)$。要 $y = -\frac{1}{2}a$，便需要 $\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t = 2$；由於每個餘弦最大只能是 1，兩者必須都等於 1：

$$\omega t = 2\pi k, \qquad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi j$$

其中 k 和 j 為整數。當 $t > 0$ 時，$k \geq 1$，兩式相除得 $\sqrt{3} = \frac{j}{k}$，但 $\sqrt{3}$ 是無理數，所以這是不可能的。因此 Y 永遠不會回到起始位置。 $\blacksquare$

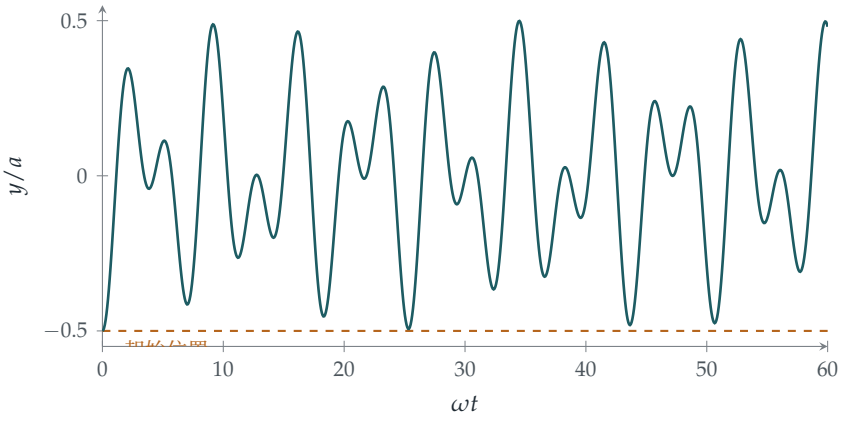


圖 11.2.1 質點 Y 的位移 y。它是兩個振盪之和，而兩者頻率之比為 $\sqrt{3}:1$，所以圖形永不重複。Y 一次又一次地接近起始位置（虛線），例如在 $\omega t \approx 25$ 附近（該處 $\omega t \approx 8\pi$ 及 $\sqrt{3}\,\omega t \approx 14\pi$），但永遠不會剛好到達。

回顧

- **找出能夠解耦的組合。**$x-y$ 和 $x+y$ 各自滿足一條屬於自己的方程。
- **對稱性會提示這些組合。**把左右兩邊互換，系統保持不變，所以對稱和反對稱的組合是很自然的選擇。
- **無理性會帶來物理後果。**運動之所以不是週期性的，是因為頻率之比是無理數。

背後的數學

簡正模態就是特徵向量

把兩條方程寫成一條矩陣方程：

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

能夠解耦的組合，正是這個矩陣的特徵向量（eigenvectors）：$(1,-1)$，其特徵值（eigenvalue）為 1；以及 $(1,1)$，其特徵值為 3（Section 7.2）。在第一個模態中，$x=-y$：兩個質點沿直線同向運動（記住 x 和 y 是從相反的兩端量度的），中間的彈簧長度保持不變。在第二個模態中，$x=y$：兩個質點反向運動，把中間的彈簧一壓一拉，頻率因而較高。頻率的平方就是特徵值乘以 $\frac{\lambda}{ma}$。

無論有多少個質點和彈簧，這個方法都適用。一個由 N 個耦合振子（coupled oscillators）組成的系統有 N 個簡正模態，它們由一個對稱矩陣的特徵向量給出，而譜定理（spectral

theorem）保證這些模態必定存在，並且互相垂直。分子以簡正模態振動，化學家正是憑分子所吸收的紅外光來辨認它們。建築物和橋樑也有簡正模態，工程師必須令這些模態的頻率遠離風和地震的頻率。當質點的數目趨向無限時，簡正模態就變成振動弦線的諧波（harmonics），這正是傅立葉分析（Fourier analysis）的起點。

接近而不到達

雖然 Y 永遠不會剛好返回，但它可以接近到任意程度。原因是克羅內克（Kronecker）的一條定理：若 α 是無理數，則各倍數 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ 取模 1 之後，可以任意接近 $[0,1]$ 內的每一個數。因此我們可以找到一些時刻，使 ωt 是 2π 的倍數，而 $\sqrt{3}\,\omega t$ 與另一個這樣的倍數之差小於任何指定的容許誤差。這種運動是*準週期*（quasi-periodic）的：它在一個環面（torus）上不斷纏繞（每個模態對應一個角），卻永遠不會閉合。有理與無理頻率比之間的這種區別，同樣是關於太陽系穩定性的 KAM 定理的核心。

思維技巧

以變數代換把方程解耦

當方程互相耦合時，設法找出各自獨立演變的變數組合。在線性問題中，這些組合就是特徵向量。

這與 Section 10.6 中質心和相對坐標的想法如出一轍。到了大學，它就成為對角化（diagonalisation）：選取一組令矩陣成為對角矩陣的基（basis），一組耦合的方程便會分拆成各自獨立的方程。

延伸練習

1. **能量。**證明總能量 $\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\tfrac{\lambda}{2a}\left(x^2+y^2+(x+y)^2\right)$ 是常數，並證明它可以分拆成兩項之和，每個簡正模態各佔一項，而每一項本身都是常數。

2. **純模態。**應該怎樣讓兩個質點開始運動，才能使運動是週期性的，且週期為 $\frac{2\pi}{\omega}$？若週期為 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ 又如何？

3. **較硬的中間彈簧。**若中間彈簧的彈性模量（modulus of elasticity）是 μ 而不是 λ，求兩個簡正模態的頻率。當 μ/λ 取哪些值時，所有運動都是週期性的？

4. **三個質點。**三個質量相等的質點排成一線，由四條相同的彈簧連接在兩個固定點之間。求對應的矩陣及其特徵值 $(2-\sqrt{2},\,2,\,2+\sqrt{2})$，並描述三個簡正模態。

延伸閱讀

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series），第 5 章，講述耦合振子與簡正模態。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge），關於特徵值的一章，當中以彈簧與質點作為主要例子。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 8 章，講述環面上的準週期運動。

11.3 真實的擺

題目

STEP III 1998，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/98-s3-q11`

引子

每個修讀物理的學生都學過：單擺（pendulum）的週期（period）是 $2\pi\sqrt{l/g}$，與擺動的幅度無關。伽利略（Galileo）對此深信不疑，相傳他曾在比薩大教堂以自己的脈搏為一盞搖晃的吊燈計時；擺鐘之所以能夠報時，靠的也正是這一點。然而這並不完全正確。這條公式源自近似式 $\sin\theta \approx \theta$，而擺動弧度大的單擺，所需的時間會較長。在 90° 時，週期長了 18%；若單擺從幾乎倒立的位置釋放，所需的時間則要多長有多長。

本題先把精確的週期寫成一個積分，再求出中等擺幅下的第一個修正項。這個積分無法用初等函數求出：它是一個*橢圓積分*（elliptic integral），而人們如何馴服這類積分的故事，由高斯（Gauss）的算術幾何平均一直延伸到橢圓曲線的理論。

動筆之前

想一想 擺錘沿半徑為 l 的圓周運動。以 θ 和 $\dot{\theta}$ 表示，它的速率和高度（相對於最低點）分別是甚麼？

速率是 $l\dot{\theta}$，而距最低點的高度是 $l(1-\cos\theta)$。由於繩子不作功（其張力恆與運動方向垂直），能量守恆（conservation of energy）。

逐步解題

階段 1 能量

在最大擺角 γ 處，擺錘瞬時靜止。由能量守恆得

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\gamma),$$

兩邊除以 ml，得 $\tfrac{1}{2}l\dot\theta^2 = g(\cos\theta - \cos\gamma)$。 ■

階段 2　把週期寫成積分

想一想　怎樣用半角表示 $\cos\theta - \cos\gamma$？另外，由 $\theta = 0$ 擺到 $\theta = \gamma$ 佔了週期的多少？

利用 $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$，可得 $\cos\theta - \cos\gamma = 2(\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2})$，所以

$$\dot\theta = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}.$$

根據對稱性，由 0 擺到 γ 需時四分之一個週期，所以

$$P = 4\int_0^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot\theta} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta. \qquad ■$$

階段 3　消除奇點

想一想　被積函數（integrand）在 $\theta = \gamma$ 處變成無窮大。設 $k = \sin\tfrac{\gamma}{2}$，並作代換（substitution）$\sin\tfrac{\theta}{2} = k\sin\phi$。$0 \le \theta \le \gamma$ 對應於 ϕ 的甚麼範圍？被積函數會變成怎樣？

當 θ 由 0 變到 γ 時，ϕ 由 0 變到 $\tfrac{\pi}{2}$。求導得 $\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$，所以

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

另一方面，$\sin^2\tfrac{\gamma}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2} = k^2(1-\sin^2\phi) = k^2\cos^2\phi$。那些棘手的因子互相抵銷：

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

由於 $k < 1$，新的被積函數性質十分良好。

階段 4　第一個修正項

想一想 當 k 很小時，用二項式定理(binomial theorem)展開 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$。$\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi$ 等於甚麼？

準確至一階，$(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\phi$，而 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{4}$。所以

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

當 γ 很小時，$k=\sin\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma}{2}$，故 $k^2\approx\frac{\gamma^2}{4}$，於是

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right). \qquad \blacksquare$$

擺幅為 20°（$\gamma\approx 0.35$）時，修正量不足 1%；在 60° 時則約為 7%（圖 11.3.1）。

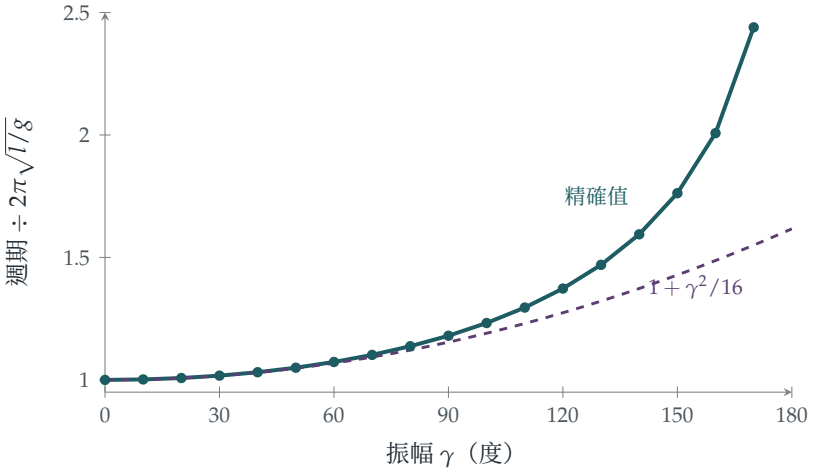


圖 11.3.1 單擺的精確週期（藍綠色）相對於小角度值的比，對振幅（amplitude）作圖，並與近似式 $1+\gamma^2/16$（紫紅色虛線）比較。在大約 60° 以內，這個近似極佳。當 $\gamma\to 180°$ 時，真正的週期趨向無窮大：一個倒立平衡的單擺要花無限長的時間才會倒下。

回顧

- **能量給出首次積分（first integral）。**二階方程變成了一階方程，而週期則變成了一個積分。
- **代換馴服奇點（singularity）。**被積函數在轉向點處趨向無窮大；代換 $\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\phi$ 消除了這個問題。

- **先求精確，再作近似。**我們先求出精確的公式，然後將它展開，這樣同時可以知道近似的效果有多好。

背後的數學

橢圓積分

積分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

稱為第一類完全橢圓積分（complete elliptic integral of the first kind），這個名稱的由來，是因為與它相近的另一個積分給出橢圓的周界。精確的週期是 $P = 4\sqrt{l/g}\,K\!\left(\sin\tfrac{\gamma}{2}\right)$。把被積函數完全展開，再利用 Section 4.4 中的沃利斯積分（Wallis integrals）$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$ 逐項積分，便得

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right).$$

$K(k)$ 無法以有限個熟悉的函數組合而成；它是一個名副其實的新函數。

高斯的非凡公式

計算 K 有一個好得多的方法。你在 Section 2.6 已見過算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）：由 a 和 b 開始，反覆以它們的算術平均和幾何平均取代它們。高斯在 1799 年發現

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\!\left(1, \sqrt{1 - k^2}\right)},$$

所以振幅為 γ 的單擺，其週期恰好是

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}\!\left(1, \cos\tfrac{\gamma}{2}\right)}.$$

AGM 收斂得極快：擺幅在大約 160° 以內時，只需三四步便可求得準確至十位有效數字的週期，圖 11.3.1 中的數值正是這樣算出來的。接近 180° 時，兩個初始值 1 和 $\cos\frac{\gamma}{2}$ 相距甚遠，需要多走一兩步，但即使在 179°，五步也已足夠。高斯在日記中寫道，這項發現「開闢了一個全新的分析領域」，而他說得一點不錯：把橢圓積分反演，引領阿貝爾（Abel）和雅可比（Jacobi）發現了橢圓函數（elliptic functions），而橢圓函數又引出了橢圓曲線（elliptic curves）。橢圓曲線如今是數論的核心（它們正是證明費馬最後定理（Fermat's Last Theorem）的關鍵），也是保障互聯網安全的密碼學的核心。

伽利略的吊燈與惠更斯的時鐘

伽利略大約在 1602 年提出，單擺的週期與振幅無關；對於他所研究的小幅擺動，這是個很好的近似。惠更斯（Christiaan Huygens）意識到這並不精確，並在 1659 年找到了一條曲線，沿着它擺動時週期確實與振幅無關：那就是擺線（cycloid），即 Section 11.4 的主題。他由 1656 年起製造的擺鐘，把計時的誤差由每天約一刻鐘減至約十五秒。航海天文鐘（marine chronometer）解決了在海上測定經度的難題，它後來完全捨棄了單擺，但直至 1920 年代，擺鐘仍然是世上最準確的計時器。

思維技巧

由精確積分到級數近似

當一個量由無法求值的積分給出時，先把它變換成性質良好的形式，然後展開被積函數並逐項積分。

物理學家正是這樣為理想化的結果求出修正項的，這也是微擾理論（perturbation theory）的起點。到了大學，你會學到逐項積分在甚麼情況下才成立（一致收斂（uniform convergence）），以及怎樣估計截斷級數所造成的誤差。

延伸練習

1 **繫着的質點。**試做 STEP III 2015，第 9 題（`step.maths.org/questions/15-s3-q9`）：這個振子即使在小幅振動時，週期也取決於振幅。為甚麼它會這樣，而單擺卻不會？

2 **下一項。**把二項式展開多取一項，證明 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}+\frac{11\gamma^4}{3072}\right)$。

3 **徒手計算 AGM。**用三步 AGM 估算振幅為 90° 的單擺的週期，並與圖中的數值 1.1803 比較。

4 **時鐘。**一座擺鐘經調校後，在振幅為 4° 時走時完全準確。若它的振幅增至 5°，它每天會慢多少秒？

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 4

章，當中討論了大振幅的單擺。

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。高斯的發現及其應用，包括計算 π 的最快方法。
- **Dava Sobel, *Longitude***（Fourth Estate）。海上計時的故事，講述單擺以外的發展。

11.4 等時曲線

題目

STEP III 1994，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/94-s3-q9`

引子

在一個碗內同時放開兩粒彈珠，一粒靠近碗邊，另一粒只比碗底高一點。哪一粒先到碗底？在普通的碗裏，通常是起點較低的那粒勝出。不過有一種碗，無論彈珠從哪裏出發，總是同時到達。這就是**等時曲線**（tautochrone，希臘文意為「相同時間」），它的橫切面是一條**擺線**（cycloid），即滾動的輪子邊緣上一點所描出的曲線。

惠更斯（Huygens）在 1659 年發現了這個性質，並用它設計出一種週期與擺幅無關的擺鐘，修正了 Section 11.3 中發現的缺陷。本題只用寥寥數行便證明了等時性質，關鍵在於選對變數：用沿曲線量度的距離，而不是水平位置。

動筆之前

想一想 碗面是光滑的。有哪些力作用在質點上？其中哪些力有作功？

重力和法向反作用力（normal reaction）。法向反作用力垂直於碗面，因而垂直於運動方向，所以不作功。只有重力作功，故能量守恆。

逐步解題

階段 1　沿曲線的能量

由於 s 是弧長（arc length），質點沿碗面的速率是 $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$。由能量守恆（conservation of

energy）得 $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy =$ 常數，所以 $\dot{s}^2 + 2gy$ 是常數。 ■

階段 2　以 s 表示的簡諧運動

> **想一想**　利用 $s = 2\sqrt{ky}$，把 y 換成 s 的函數。所得的方程描述的是哪一種運動？

由於 $y = \frac{s^2}{4k}$，能量方程變成

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{2k}s^2 = \text{常數} = \frac{g}{2k}s_0^2,$$

其中 $s_0 = 2\sqrt{kh}$ 是起始弧長（質點由靜止出發）。求導後得 $2\dot{s}\ddot{s} + \frac{g}{k}s\dot{s} = 0$，所以

$$\ddot{s} = -\frac{g}{2k}\,s.$$

這是以 s 為變數的簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \frac{g}{2k}$，與振幅（amplitude）無關：$s = s_0\cos\omega t$。

階段 3　到達底部所需的時間

質點經過四分之一個週期後到達 V（該處 $s = 0$）：

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

這與 h 無關。 ■

> **停一停，試一試**　為甚麼這樣行得通？沿曲線的「回復力」是 g 乘以斜率，即 $g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{g}{2k}s$：恰好與沿曲線量度、離底部的距離成正比。這正是簡諧運動的定義性質。起點較高的質點要走的路較長，但所受的推動也按比例加大。

階段 4　兩個質點

> **想一想**　兩個質點何時到達 V？到達時速率是多少？誰的動量較大？

兩者從相反的兩邊，在同一時刻 $T = \pi\sqrt{k/(2g)}$ 到達 V。在 V 的速率是 ω 乘以 s 的振幅，與 $\sqrt{\text{高度}}$ 成正比。設較重的質點從高度 h 放開，在 V 的速率為 U；較輕的質點從 $\alpha^2 h$ 放開，速率為 αU。它們的動量（momentum）分別是 $\alpha m \cdot U$ 和 $m \cdot \alpha U$，方向相反：大小相等，方向相反。碰撞時的總動量為零。

> **想一想**　總動量為零，而恢復係數（coefficient of restitution）為 α，碰撞剛結束時兩者的速度是多少？

動量保持為零，所以碰撞後兩個質點仍然朝相反方向運動，動量大小相等，而它們的相對速率是接近速率 $\alpha U + U$ 的 α 倍。若較輕的質點（質量 αm）此時以速率 w 運動，則較重的質點（質量 m）以速率 αw 運動，且 $w + \alpha w = \alpha(1+\alpha)U$，所以 $w = \alpha U$。每個質點反彈時，速率都乘以 α：質量為 αm 的質點以 αU 離開，質量為 m 的質點以 $\alpha^2 U$ 離開。

階段 5 **整個運動**

每個質點現在沿自己的一邊爬升，所達高度縮減為原來的 α^2 倍（因為高度與速率的平方成正比）：質量為 αm 的質點升至 $\alpha^2 h$，質量為 m 的質點升至 $\alpha^4 h$。由等時性質，兩者在 $2T$ 之後恰好同一時刻回到 V，動量仍然大小相等、方向相反。同樣的碰撞再次發生，只是所有速率都按 α 的比例縮小。因此：

- 兩個質點總是在 V 碰撞，時刻為 $T, 3T, 5T, \ldots$；
- 第 n 次碰撞後，它們分別升至高度 $\alpha^{2n} h$ 和 $\alpha^{2n+2} h$；
- 運動按幾何級數式衰減，但永不停止：碰撞有無限多次，並且永遠持續下去。 ■

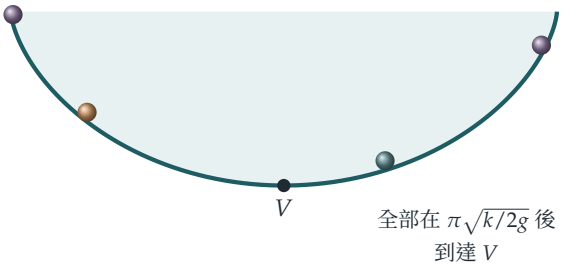


圖 11.4.1 等時曲線：一條倒轉的擺線，由沿直線滾動的輪子邊緣上一點描出。彈珠從曲線上任何位置由靜止放開，都在同一時刻到達最低點 V。對於由半徑為 R 的輪子生成的擺線，弧長與高度滿足 $s^2 = 8Ry$，所以 $k = 2R$。

回顧

- **選擇自然的變數。**以弧長 s 表示時，運動恰好是簡諧運動。以 x 或 y 表示，則一團糟。
- **能量給出方程。**對能量方程求導，便直接得出運動方程。
- **時間上的對稱。**由於每一趟到達底部的行程所需時間都相同，兩個質點永遠保持同步，碰撞也就原樣重複。

背後的數學

為甚麼是擺線？

半徑為 R 的輪子在一條直線下方滾動，描出擺線 $x = R(t + \sin t)$，$y = R(1 - \cos t)$。於是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R(1 + \cos t)$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R\sin t$，所以沿曲線的速率是 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R\cos\frac{t}{2}$。積分後，由底部起計的弧長是 $s = 4R\sin\frac{t}{2}$，而 $y = 2R\sin^2\frac{t}{2}$。因此 $s^2 = 8Ry$：擺線正是滿足 $s = 2\sqrt{ky}$ 的曲線，其中 $k = 2R$。反過來說，要求回復力與 s 成正比，就迫使曲線必定是擺線。

最速降線

1696 年，約翰·伯努利（Johann Bernoulli）向歐洲的數學家提出挑戰：一粒珠子從一點滑到較低的另一點（不在其正下方），沿哪一條曲線所需的時間最短？答案是最速降線（brachistochrone），它同樣是一條擺線。據說牛頓（Newton）收到題目後，一個晚上就解決了；他匿名發表了自己的解法，但伯努利認出了作者，說是「從爪認出獅子」。這個問題是*變分法*（calculus of variations）的開山例子，你在 Section 4.7 已經見過：找出使某個由積分定義的量取最小值的曲線。

惠更斯的擺線鐘

惠更斯知道單擺計時並不完美，因為它的週期取決於振幅。他在《*Horologium Oscillatorium*》（1673 年）中說明了怎樣令擺錘沿擺線運動：把擺線掛在兩塊彎成擺線形狀的「夾板」之間，擺線便會貼着夾板捲繞，使擺錘本身描出一條擺線（擺線的*漸伸線*（involute）是另一條擺線）。實際上，夾板因摩擦而引入的誤差比它消除的還要多，鐘錶匠於是改為保持小幅擺動。然而惠更斯的分析開創了*漸屈線*（evolute）與漸伸線的理論，他這部著作也是十七世紀力學的偉大作品之一。

思維技巧

找出令運動變得簡單的變數

沿曲線的運動，往往以沿曲線的距離來表示最爲簡單。要找出令方程變成線性的那個變數。

到了大學，這會發展成拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）中*廣義坐標*（generalised coordinates）的概念：任何能描述系統位形的變數都可以採用，選得好，就能令問題變得可解。

延伸練習

1 **不同的高度。**一個質點在等時曲線碗內從高度 h 放開。證明它在 V 的速率是 $\sqrt{2gh}$（由能量守恆，必然如此），並驗證這與 ωs_0 一致。

2 **普通的碗。**在半徑為 R 的半球形碗內，比較從很小的高度到達底部所需的時間與從碗邊出發所需的時間。哪一個較長？（利用 Section 11.3 的結果。）

3 **質量相等。**把題目的第二部分重做一次，這次兩個質點質量同為 m，分別從高度 h_1 和 h_2 放開，恢復係數為 e。它們是否仍然總是在 V 碰撞？

4 **擺線的弧長。**證明擺線的一拱長度為 $8R$，而拱下的面積為 $3\pi R^2$，即滾動圓面積的三倍。

延伸閱讀

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。書中包括等時曲線和最速降線，並附有相關歷史。
- **E. A. Whitman, "Some historical notes on the cycloid"**，*American Mathematical Monthly* 50 (1943)。講述擺線為何被稱為「幾何學家的海倫」。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。以歷史故事的方式講述最速降線及其他最優化問題。

11.5 加速火車中的重力

題目

STEP II 2021，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

引子

火車駛離車站時，你會感到自己被壓向椅背；桌上那杯咖啡的液面傾斜了；地板上的球滾向車尾。從車廂內看，一切就像重力傾斜了一樣：除了向下，還稍微指向後方。愛因斯坦（Einstein）領悟到這不僅僅是比喻，並把這個領悟稱為「我一生中最快樂的想法」：在局部範圍內，重力與加速度是無法區分的。

這道題把一顆珠子穿在彎曲的金屬線上，再放進一列正在加速的火車裏。從火車上看，珠子的運動就像身處一個傾斜了的重力場（gravitational field）之中，傾斜的角度的正切為 a/g。金屬線的底部不再是最低點，珠子會圍繞一個新的平衡位置（equilibrium）振動。

動筆之前

想一想 火車以加速度 a 向西（即沿負 x 方向）加速。對車上的觀察者來說，質量為 m 的物體看似受到怎樣的「假想」力作用？

在火車的參考系(frame)中，只要加上一個假想力(fictitious force)$-m\times$(參考系的加速度)，牛頓第二定律（Newton's second law）便仍然成立。參考系在 x 方向的加速度為 $-a$，所以假想力是 $+ma$，指向東。連同重力一併考慮，珠子每單位質量所感受到的有效重力（effective gravity）為 $(a,-g)$：向東傾斜。

逐步解題

階段 1　不能靜止於原點

在原點處，金屬線 $ky = x^2$ 是水平的。該處的法向反作用力（normal reaction）是鉛垂的，因此無法抵消向東的假想力 ma。沿金屬線方向的合力為 $ma \neq 0$，所以珠子不可能相對於火車保持靜止。 ■

階段 2　能量方程

> **想一想**　在火車的參考系中寫出牛頓定律，當中要包括法向反作用力 $\mathbf{N}$。然後與速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ 取點積。為甚麼 $\mathbf{N}$ 會消失？

在火車的參考系中，

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{N} + (ma, -mg).$$

金屬線是光滑的，所以 $\mathbf{N}$ 垂直於金屬線，因而也垂直於沿金屬線方向的速度 $(\dot{x}, \dot{y})$。與速度取點積（dot product），$\mathbf{N}$ 便會消去：

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = ma\dot{x} - mg\dot{y}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0. \quad ■$$

左邊是 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ 的導數，因此這個量是常數。 ■

這就是火車參考系中的能量守恆（conservation of energy），其中每單位質量的勢能（potential energy）$-ax + gy$ 已把假想力計算在內。

階段 3　能升到多高？

> **想一想**　由於珠子從原點由靜止出發，該常數為 0。在最高點，珠子瞬時靜止。由此可得出甚麼方程？

靜止時，$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$，所以 $ax = gy$。代入 $y = \frac{x^2}{k}$，得 $ax = \frac{gx^2}{k}$，所以（除了起點 $x = 0$ 之外）$x = \frac{ak}{g}$，而

$$b = \frac{a^2 k}{g^2}. \quad ■$$

珠子沿金屬線向東擺上至點 $\left(\frac{ak}{g}, \frac{a^2 k}{g^2}\right)$，然後返回原點，如此往復不息。

階段 4　最快的一點

> **想一想**　把速率的平方寫成只含 x 的函數。它在哪裏最大？

速率的平方是 $2(ax - gy) = 2\left(ax - \frac{gx^2}{k}\right)$，這是 x 的二次式，在 $x = \frac{ak}{2g}$ 處取得最大值，剛好在兩個轉向點（turning point）的正中間。該處速率的平方為 $2\left(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\right) = \frac{a^2k}{2g}$，所以最大速率是

$$a\sqrt{\frac{k}{2g}}. \qquad \blacksquare$$

想一想 求金屬線在 $x = \frac{ak}{2g}$ 處的斜率。它與有效重力 $(a, -g)$ 的方向有甚麼關係？

斜率是 $\frac{2x}{k} = \frac{a}{g}$。所以在這一點，金屬線垂直於有效重力：它是金屬線在傾斜重力場中的「最低」點，而珠子就圍繞它振動（圖 11.5.1）。

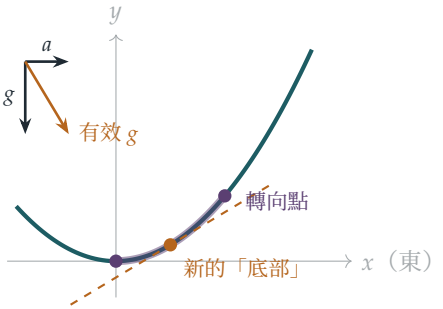


圖 11.5.1 火車參考系中的金屬線 $ky = x^2$（藍綠色，取 $k = 1$ 及 $a/g = 0.6$）。有效重力（琥珀色箭頭）向東傾斜，傾斜角的正切為 a/g。珠子在原點與 $x = ak/g$ 之間振動（紫紅色），圍繞着金屬線與有效重力垂直的那一點，該點就是新的最低點。虛線是傾斜重力場中的一條「水平」線。

回顧

- **在方便的參考系中解題，並加上假想力。**在火車的參考系中，金屬線是固定的，唯一的代價是多了一個恆力。
- **與速度取點積。**這樣可以消去約束力（constraint force），並得出能量方程。
- **詮釋答案。**轉向點和最快的一點都有幾何意義：有效重力傾斜了。

背後的數學

假想力

牛頓定律在慣性參考系(inertial frame)中成立，即沒有加速的參考系。在加速參考系中，只要加上假想力，牛頓定律便可繼續使用：對於加速度為 $\mathbf{A}$ 的參考系，要加上 $-m\mathbf{A}$；而在旋轉參考系中，則要加上離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。它們之所以稱為假想力，是因為沒有任何物體施加這些力；它們純粹是參考系造成的假象。但對身處其中的人來說，它們卻是千真萬確的。離心力使地球在兩極變得扁平；科里奧利力決定了颶風旋轉的方向（在北半球為逆時針），也令遠程炮彈偏離原來的方向。

等效原理

恆定的假想力 $-m\mathbf{A}$ 與質量成正比，這一點與重力完全相同。在一個密封的箱子內，沒有任何實驗能夠分辨箱子是靜止在行星上，還是在虛空中加速：這就是等效原理（equivalence principle）。愛因斯坦以它作為廣義相對論（general relativity）的出發點。既然光橫越一個加速中的箱子時看來會彎曲，光在重力場中也必定會彎曲；既然加速火箭的前端和後端的時鐘快慢不同，重力場中不同高度的時鐘也必定如此。這兩個預測都已得到證實，而每一顆 GPS 衛星都必須就第二個效應作出修正：單是這個效應，就令衛星上的時鐘每天比地面的時鐘快約 45 微秒。

愛因斯坦最快樂的想法

1907 年，愛因斯坦在伯爾尼的專利局工作，當時他正在撰寫一篇關於狹義相對論（special relativity）的綜述文章。據他後來憶述，就在這時，「我一生中最快樂的想法」出現了：一個從屋頂自由墮下的人，不會感覺到自己的重量。只要選取一個下墮中的參考系，重力就可以被「變換掉」。他再花了八年時間，並借助大量新的數學（由高斯（Gauss）和黎曼（Riemann）發展的彎曲空間微分幾何），才把這個想法變成 1915 年的廣義相對論。

思維技巧

在運動的參考系中尋找守恆量

在加速度恆定的參考系中，有一個恆定的假想力在起作用。它可以併入勢能之中，而能量在該參考系中守恆。

把運動方程與速度取點積以消去約束力，這個技巧在任何參考系中都適用。到了大學，它會成為一個普遍的原理：若一個系統的方程並不顯含時間，該系統便有一個守恆的能量。

延伸練習

1 **火車上的大炮。**試做 STEP I 2000，第 9 題（step.maths.org/questions/00-s1-q9）：在加速中的車廂內發射拋體（projectile），其中加速度的作用就如重力傾斜了一樣。

2 **逆風。**試做 STEP II 2006，第 11 題（step.maths.org/questions/06-s2-q11）：拋體迎着恆定的風飛行，風可以在它落地之前把它吹回你這邊。

3 **火車上的咖啡。**證明在加速中的火車上，一杯咖啡的液面是一個與水平面成 $\arctan(a/g)$ 角的傾斜平面。

4 **微小振動。**求珠子圍繞 $x = \frac{ak}{2g}$ 作微小振動的週期。（提示：在新的底部附近，金屬線近似於一個圓，其半徑等於金屬線在該處的曲率半徑（radius of curvature）。）

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），當中講述非慣性參考系與假想力的一章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（有多個版本）。愛因斯坦親自撰寫的普及讀物，當中包括加速箱子的討論。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一部廣義相對論的傳記。

11.6 後旋

題目

STEP III 1997，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/97-s3-q10`

引子

用手指按住一粒波子的後半部向下一壓，波子便會一邊向後旋轉，一邊向前彈出。它從你面前滑開，慢下來，停住，然後彷彿改變了主意似的滾回來。桌球（snooker）球手打「縮桿」（screw 或 draw）時用的正是同一效應：擊打母球的下部，使它向後旋轉，碰到目標球時停住，再退回來。

本題要求的是：後旋（backspin）恰好要多大，波子才會完全停定；又要多大，波子才會以初速的七分之一返回。計算時要追蹤兩個量，即線速度（linear velocity）和角速度（angular velocity），兩者都由同一個摩擦力（frictional force）改變。這背後有一條漂亮的捷徑：兩者的某個組合完全不受摩擦力影響。

關於課程大綱的說明

轉動動力學（rotational dynamics）已於 2019 年從 STEP 考試範圍中刪去。這裏你只需要知道：質量為 m、半徑為 a 的實心球，繞直徑的轉動慣量（moment of inertia）為 $I = \frac{2}{5}ma^2$；而力矩（torque）τ 按 $I\dot{\omega} = \tau$ 改變其角速度，這就是 $m\dot{v} = F$ 的轉動版本。

動筆之前

想一想　波子以 v 向前運動，並以 ω 向後旋轉。波子的最低點相對桌面移動得多快？摩擦力朝哪個方向作用？

最低點因波子本身的運動而有速度 v，再加上因後旋而來的 $a\omega$（後旋會把最低點帶向前）。因此它以 $v + a\omega$ 向前滑動，而摩擦力向後作用，阻礙滑動。只有當 $v + a\omega = 0$ 時，波子才會純滾動（rolling without slipping），即只滾不滑。

逐步解題

階段 1　摩擦力的作用

想一想　設摩擦力為 F，方向向後。它對 v 有甚麼影響？它對球心的力矩為 Fa：這會增加還是減少後旋？

摩擦力使波子減速：$m\dot{v} = -F$，所以 $v = v_0 - \frac{F}{m}t$。由於它在波子底部向後作用，它同時產生一個阻礙後旋的力矩 Fa：$I\dot{\omega} = -Fa$，於是代入 $I = \frac{2}{5}ma^2$ 得

$$\omega = \omega_0 - \frac{5F}{2ma}t.$$

波子滑動期間，v 和 ω 都穩定地減少。

階段 2　完全停定

想一想　波子要完全停下來，v 和 ω 必須在同一刻變成零。兩者各在何時變成零？

$v = 0$ 於 $t = \frac{mv_0}{F}$，而 $\omega = 0$ 於 $t = \frac{2ma\omega_0}{5F}$。當 $v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0$ 時兩者相等，即

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}. \qquad \blacksquare$$

在那一刻，波子既無線速度亦無角速度，而摩擦力（只在有滑動時才作用）隨即消失：波子就此停在原地。

階段 3　滾回來

想一想　若後旋較大，v 變成零時 ω 仍為正。最低點仍在向前滑動，所以摩擦力仍然向後作用。接下來會發生甚麼事？滑動何時停止？

摩擦力繼續把波子向後推，所以 v 變為負值，而 ω 繼續減少。當 $v + a\omega = 0$ 時滑動停止：

$$v_0 + a\omega_0 - \left(\frac{F}{m} + \frac{5F}{2m}\right)t = 0, \qquad t^* = \frac{2m(v_0 + a\omega_0)}{7F}.$$

在那一刻，

$$v = v_0 - \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7} = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

此後波子只滾不滑，摩擦力不再作用，v 保持不變。要它以速率 $\frac{v_0}{7}$ 滾回來，我們需要 $5v_0 - 2a\omega_0 = -v_0$，所以

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

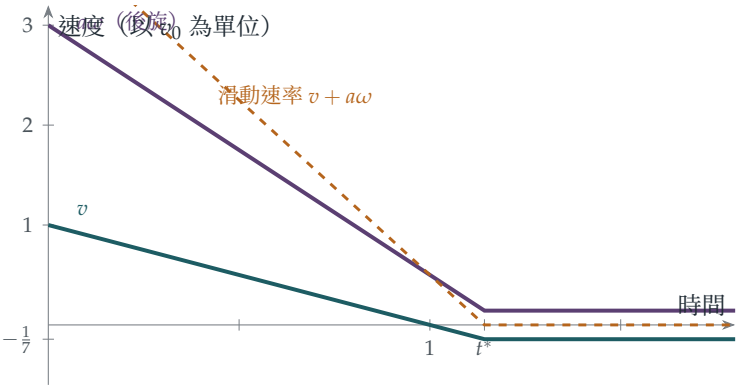


圖 11.6.1 $v_0/(a\omega_0) = \frac{1}{3}$ 的情況，時間以 mv_0/F 為單位。摩擦力以恆定的速率減少向前的速度 v（藍綠色）和後旋 $a\omega$（紫紅色），兩個速率之比為 2 : 5。波子在 $t = 1$ 時停止向前運動，但仍在滑動，所以被向後推，直至滑動速率（琥珀色）在 $t^* = \frac{8}{7}$ 時變成零。其後它以 $\frac{v_0}{7}$ 滾回來。

回顧

- **追蹤兩個量。**摩擦力同時改變 v 和 ω，兩者的變率成固定比例。
- **知道力何時消失。**滑動摩擦力只在有滑動時才作用；波子一旦滾動，它便停止作用。
- **滑動速率是關鍵變量。**它線性地減少，而它變成零的一刻，正是由滑動轉為滾動的一刻。

背後的數學

一個守恆量

要求最終速率，還有一個更快的方法。考慮波子對它與桌面接觸點的角動量（angular momentum）。摩擦力正正作用於該點，所以對該點沒有力矩，而法向反作用力（normal reaction）和重力都沿着通過該點的鉛垂線作用。因此波子滑動期間，這個角動量守恆（conserved）。它等於 mva（來自球心的運動）減去 $I\omega$（後旋以負值計算）：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

當波子以速率 V 滾動時，$a\omega = -V$，角動量為 $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$。令它等於初始值，

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

答案相同，卻完全不必提及摩擦力的大小，甚至不必理會它是否恆定。最終速率單憑守恆便已確定；摩擦力只決定要花多少時間才達到這個速率。

桌球、保齡球與網球

同樣的分析可以解釋許多運動中的現象。桌球被擊中正中央時，起初滑動，然後開始滾動，最終速率為初速的 $\tfrac{5}{7}$（在公式中取 $\omega_0 = 0$）。十瓶保齡球帶側旋擲出時，會沿球道滑行，到開始滾動時便「拐彎」。帶上旋（topspin）的網球會急速下墜，不過這裏的主要效應來自空氣動力：旋轉的球會使周圍的空氣偏轉，這就是馬格努斯效應（Magnus effect）。

科里奧利與桌球

科里奧利（Gaspard-Gustave Coriolis）如今因旋轉參考系中的虛擬力（fictitious force）而為人所知（Section 11.5），他在 1835 年寫了一整本關於桌球數學的書：*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*。他證明了不少結果，其中包括：帶旋轉擊出的球，在滑動期間沿拋物線運動，到滾動時才走直線；他亦精確地分析了本題的縮桿打法。研究這項運動的物理學家至今仍會引用此書。

思維技巧

追蹤由同一個力改變的兩個量

當一個力同時影響幾個量時，寫下它怎樣改變每一個量，並找出一個它完全不會改變的組合。

這裏摩擦力改變了 v 和 ω，卻沒有改變對接觸點的角動量。在大學裏，尋找這類組合是一個反覆出現的主題：選擇對哪一點取矩，使未知的力自動消去，正是選擇參考系的轉動版本。

延伸練習

1 **上旋。**若波子起初帶的是向前的旋轉 ω_0 而非後旋，求它最終的滾動速率。$v_0/(a\omega_0)$ 取甚麼值時它會加速？

2 **桌球。**一個球被擊中正中央，以 v_0 開始滑動而不帶旋轉。證明它最終以 $\frac{5}{7}v_0$ 滾動，並求動能（kinetic energy）損失的比例。（滾動時的動能為 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$。）

3 **圓環。**對一個在自身所在平面內滾動的薄圓環重做本題，其 $I = ma^2$。現在 $v_0/(a\omega_0)$ 為何值時，它會以 $\frac{v_0}{7}$ 返回？

4 **縮桿打法。**桌球球桿必須擊中球的甚麼位置（在球心以上多高，以 a 表示），球才會從一開始便只滾不滑？（提示：考慮衝量（impulse）作用期間對接觸點的角動量。）

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 8 章，講述角動量及帶滑動的滾動。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），關於剛體運動的各章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。這項運動的物理學，附有大量圖解。

11.7 桿中的辛普森法則

題目

STEP II 1989，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/89-s2-q13`

引子

一根均勻棒（uniform rod）受到推動和旋轉時，會有甚麼反應？原來就力學上的一切用途而言，一根棒的表現與三個質點（point mass）完全相同：兩端各佔其質量的六分之一，中點佔三分之二。無論你對這根棒做甚麼（推它，或讓它繞任何軸旋轉），都無法把它與這三個質點區分開來。

$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ 這幾個數也許似曾相識。它們正是*辛普森法則*（Simpson's rule）$\int_{-a}^{a} f \approx 2a\left(\frac{1}{6}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(a)\right)$ 中的權（weight），這是你可能在高級程度（A level）課程中學過的數值積分（numerical integration）方法。這並非巧合：動力等效（dynamically equivalent）系統與數值積分法則，解決的其實是同一個問題。

關於課程範圍的說明

轉動慣量（moment of inertia）已於 2019 年從 STEP 考試範圍中刪去。一個物體對某軸的轉動慣量是 $\sum m_i d_i^2$，即每份質量乘以它與該軸距離的平方之總和（對連續物體而言則是一個積分）。質量為 m、長度為 $2a$ 的均勻棒，對通過其中心的垂直軸的轉動慣量為 $\frac{1}{3}ma^2$。*平行軸定理*（parallel axis theorem）指出：對任何軸的轉動慣量，等於對通過質心（centre of mass）的平行軸的轉動慣量加上 md^2，其中 d 是兩軸之間的距離。

動筆之前

想一想　兩個系統的質量相同、質心相同，而且對通過質心的每一條軸的轉動慣量也相同。為甚麼平行軸定理隨即保證，它們對其他任何軸的轉動慣量也相同？

對任何軸而言，兩個系統的轉動慣量都等於（對通過 O 的平行軸的轉動慣量）$+md^2$。根據假設，第一項相同，而兩個系統的 m 和 d 也相同。 ■

逐步解題

階段 1　棒

想一想　在兩端各放質量 p，在中點放質量 q。由對稱性可知質心位置正確。總質量和對通過中心的垂直軸的轉動慣量，分別要求甚麼條件？

我們需要 $2p+q=m$，而對通過中點的垂直軸的轉動慣量必須是 $\frac{1}{3}ma^2$：$2pa^2=\frac{1}{3}ma^2$。所以 $p=\frac{1}{6}m$，$q=\frac{2}{3}m$。

想一想　這是否對通過中心的每一條軸都成立，而不只是垂直的那一條？

考慮一條通過中心、與棒成 ψ 角的軸：棒上與中心相距 r 的點，與該軸的距離為 $r\sin\psi$。因此每一個轉動慣量（不論是棒的還是質點的）都是垂直軸情況下數值的 $\sin^2\psi$ 倍，所以兩者對所有 ψ 都相等。（不在包含棒的平面上的軸也是同樣道理：只有各點與軸的距離才有關係，而對於一條通過 O 的直線上的點，這個距離與 r 成正比。）所以這根棒與質量 $\frac{1}{6}m$、$\frac{2}{3}m$、$\frac{1}{6}m$ 動力等效。 ■

階段 2　長方形

想一想　把薄片（lamina）切成與其中一邊平行的幼條，再把每一幼條換成它的三個等效質點。你會得到甚麼？接下來又可以怎樣做？

每一幼條都是一根棒，等效於把它質量的 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ 分別放在左邊、中線和右邊。把所有幼條加起來，薄片便等效於三根均勻棒（分別沿左邊、中間和右邊），質量為 $\frac{1}{6}M$、$\frac{2}{3}M$、$\frac{1}{6}M$。現在再把這三根棒各自換成比例相同的三個質點。每一點的質量是兩個分數之積（圖 11.7.1）：

$$\text{四角：}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36},\qquad \text{各邊中點：}\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9},\qquad \text{中心：}\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

全部再乘以 M。 ■

（嚴格來說，每一次替換都必須保持對通過整塊薄片中心的每一條軸的轉動慣量不變，而事實確是如此：每一次替換都保持了該部分的質量、質心，以及對通過該部分質心的各軸的轉動慣量，其餘的就交給平行軸定理。）

階段 3 正方形對其對角線

對於邊長為 $2a$ 的正方形，對角線通過兩個角和中心，這些點沒有任何貢獻。另外兩個角與對角線的距離為 $\sqrt{2}a$，而四個邊的中點與它的距離為 $\frac{a}{\sqrt{2}}$。所以

$$I = 2\cdot\tfrac{1}{36}M\cdot 2a^2 + 4\cdot\tfrac{1}{9}M\cdot\tfrac{a^2}{2} = \tfrac{1}{9}Ma^2 + \tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2. \qquad ■$$

這與對通過中心、平行於一邊的軸的轉動慣量相同。（這並非偶然：對正方形而言，在其平面上通過中心的所有軸都給出相同的答案，這可由練習中的一個對稱性論證得出。）

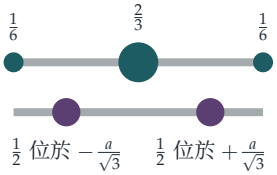
階段 4 非均勻棒

? **想一想** 設棒的長度為 L，在距離其中一端 x 處的密度為 $\frac{2mx}{L^2}$。在 $x = 0$、$\frac{L}{2}$、L 處分別放質量 p_0、p_1、p_2。令總質量、質心和對該端的轉動慣量一一吻合，便得到三條方程。它們是甚麼？

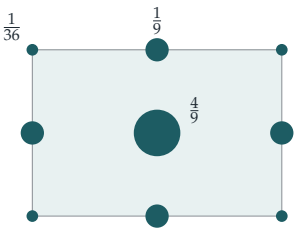
這根棒的總質量為 m，對較輕一端的一階矩（first moment）為 $\int_0^L x\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}mL$，二階矩（second moment）為 $\int_0^L x^2\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mL^2$。令這些量吻合：

$$p_0 + p_1 + p_2 = m, \qquad \tfrac{1}{2}Lp_1 + Lp_2 = \tfrac{2}{3}mL, \qquad \tfrac{1}{4}L^2p_1 + L^2p_2 = \tfrac{1}{2}mL^2.$$

把第二式（除以 L）減去第三式（除以 L^2），得 $\frac{1}{4}p_1 = \frac{1}{6}m$，所以 $p_1 = \frac{2}{3}m$，繼而 $p_2 = \frac{1}{3}m$，$p_0 = 0$。只需要兩個質點：$\frac{2}{3}m$ 位於中點，$\frac{1}{3}m$ 位於較重的一端。 ■



兩根等效的棒



薄片：$\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ 的乘積

圖 11.7.1 左上：一根均勻棒與位於兩端和中心的質量 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$（以佔其質量的分數表示）動力等效，這些正是辛普森法則的權。左下：它也等效於兩份各佔一半的質量，位於與中心相距 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 之處，即兩點高斯積分的節點。右：一塊長方形薄片等效於九個質量，圖中圓點的面積與質量成正比。

回顧

- **令各階矩吻合。**動力等效的意思，就是令質量分佈的零階矩、一階矩和二階矩一一吻合。
- **逐個維度建構。**長方形是由棒組成的棒，所以它的權是乘積。
- **數一數方程和未知數的數目。**要吻合的矩有三個，未知的質量也有三個；而有時解中恰好會出現一個零。

背後的數學

辛普森法則

令質量分佈的各階矩吻合，與設計一條數值積分法則是同一個問題。一條法則 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \;\approx\; w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ 若對 $f = 1, x, x^2$ 精確成立，就必須滿足

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -a w_0 + a w_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

這正是棒所要滿足的條件（其中 $f = 1, x, x^2$ 分別扮演質量、一階矩和轉動慣量的角色）。其解為 $w = 2a(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6})$：這就是辛普森法則。對稱性還帶來額外的收穫：這條法則對 $f = x^3$ 也精確成立，因為兩邊都等於零，所以辛普森法則能精確地積分三次多項式，而它對光滑函數的誤差與四階導數成正比。因此，一根棒與它的三個質點不僅在質量、質心和轉動慣量上吻合，連三階矩也吻合。

高斯求積法與慣性張量

如果位置和質量都可以自由選擇，兩個質點便已足夠：在 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 兩點各放一半質量。驗算：$2 \cdot \frac{1}{2}m \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}ma^2$。這就是兩點高斯－勒讓德法則（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$，它同樣對三次多項式精確成立。高斯（Carl Friedrich Gauss）在 1814 年證明，只要巧妙地選取 n 個點，便能精確地積分次數為 $2n-1$ 的多項式；高斯求積法（Gaussian quadrature）如今已是數值分析（numerical analysis）的標準方法。

在力學中，一個物體對通過其中心的所有軸的轉動慣量，都記錄在一個 3×3 對稱矩陣之中，稱為慣性張量（inertia tensor）。兩個物體若質量、質心和慣性張量都相同，對所有力的反應便完全一樣，這就是為甚麼工程師在模擬中可以用幾個質點取代一個複雜的部件。慣性張量的特徵向量（eigenvector）就是主軸（principal axes），即物體可以繞之穩定旋轉的軸。

思維技巧

把系統換成等效的系統

如果兩個系統在問題所涉及的每一個量上都一致，就把複雜的那個換成簡單的那個。

這裏只有三個矩有關係，所以一根連續的棒可以換成三個質點。在大學裏，這個想法會以多種面貌出現：高斯求積法、電磁學和引力理論中的多極展開（multipole expansion）（在遠處，電荷或質量分佈只有頭幾個矩有影響），以及統計學中的矩估計法（method of moments）。

延伸練習

1 **辛普森法則。**用只有一個區間的辛普森法則估算 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，並與 $\frac{\pi}{4}$ 比較。驗證這條法則對 $\int_{-1}^1 x^3\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-1}^1 x^2\,\mathrm{d}x$ 精確成立，但對 $\int_{-1}^1 x^4\,\mathrm{d}x$ 則不然。

2 **所有軸都一樣。**證明正方形薄片對在其平面上通過中心的任何軸的轉動慣量都是 $\frac{1}{3}Ma^2$。（提示：九個等效質點在旋轉 90° 之下是對稱的；這對一個關於 $\cos\psi$ 和 $\sin\psi$ 的二次式說明了甚麼？）

3 **三角形。**證明一塊質量為 M 的均勻三角形薄片，與位於其三邊中點、質量各為 $\frac{1}{3}M$ 的三個質點動力等效。

4 **實心立方體。**為一個均勻實心立方體找出一個由 27 個質點組成的動力等效系統，並用它求出邊長為 $2a$ 的立方體對其一條棱的轉動慣量。

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），關於剛體和轉動慣量的一章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press），關於數值積分的各章，包括辛普森法則和高斯求積法。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。經典參考書。

11.8 傾斜的平衡

題目

STEP III 2025，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

引子

把一個欖球放在桌上，它會側躺着停下來；把它豎起來，只要十分小心，它也可以這樣平衡，但輕輕一碰就會倒下。每一個放在桌上的剛體（rigid body）都有一組平衡位置（equilibrium positions），其中有些是穩定（stable）的，有些是不穩定（unstable）的，而哪些位置存在，只取決於它的形狀和質心（centre of mass）。一個物體可以有多少個平衡位置？最少又可以有多少個？

這道題構造了一個立體，形狀像陀螺，上半部是圓頂，下半部是尖底，並證明它除了可以正立或倒立之外，還可以在三個不同的傾斜角度上靜止。關鍵思路是一個簡單的幾何條件：物體能以其表面上某一點着地而靜止，當且僅當表面在該點的法線（normal）通過質心。這背後有一項近年的發現：一個稱為 Gömböc 的凸（convex）形體，它只有一個穩定位置和一個不穩定位置。

動筆之前

想一想 一個立體放在桌上，只以其曲面上的一點 X 與桌面接觸。作用於它的力是它的重量（作用於質心 G）和在 X 的反作用力（reaction）。這兩個力何時平衡？

桌面在 X 與曲面相切，而反作用力作用於 X，並垂直於桌面，即沿着曲面的法線。重量則沿鉛垂方向作用，並通過 G。兩個力只有在沿同一直線作用時才能平衡，所以通過 X 的鉛垂線，也就是在 X 的法線，必須通過 G。因此：*物體能以 X 着地而靜止，當且僅當在 X 的法線通過 G。*

逐步解題

階段 1　質心

想一想　把立體切成薄薄的圓柱殼（cylindrical shells），半徑為 x，厚度為 δx，高度為 y。一個圓柱殼的體積是多少？它的質心在哪裏？

由於 $y = \frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$，一個圓柱殼的體積是 $2\pi x y\,\delta x$，而它的質心在高度 $\frac{y}{2}$ 處。所以

$$V = \int_0^r 2\pi x y\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\pi r^3}{n+2},$$

而對底面的矩（moment）是

$$\begin{aligned}\int_0^r 2\pi x \cdot \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{r^{2n-2}}\int_0^r x(r^n - x^n)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi r^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{n^2\pi r^4}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

（括號可以化簡，是因為 $(n+1)(n+2) - 4(n+1) + (n+2) = n^2$。）兩者相除，得

$$\bar{y} = \frac{nr}{2(n+1)}.$$ ■

當 $n = 2$（拋物面，paraboloid）時，這是 $\frac{r}{3}$，正是大家熟悉的結果；當 $n \to \infty$ 時，立體變成圓柱，而 $\bar{y} \to \frac{r}{2}$。

階段 2　法線與軸相交之處

曲線在 $x = rp$ 的斜率（gradient）是 $-\frac{nx^{n-1}}{r^{n-1}} = -np^{n-1}$，所以法線的斜率是 $\frac{1}{np^{n-1}}$。沿法線由 $(rp, r(1-p^n))$ 走到 y-軸，x 減少了 rp，而 y 減少了 $\frac{rp}{np^{n-1}} = \frac{r}{np^{n-2}}$。所以

$$Y = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right).$$ ■

想一想　當 $n = 4$ 時，$Y = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4p^2}\right)$。它在哪裏取最大值？當 $p \to 0$ 時，以及在 $p = 1$ 時，情況如何？

$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = 0$ 成立於 $p^6 = \frac{1}{8}$，即 $p^2 = \frac{1}{2}$。這時 $Y = r\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}r$。 ■

當 $p \to 0$ 時，$Y \to -\infty$（圓頂在頂部附近非常平坦，它的法線幾乎是鉛垂的，要在很低的地方才與軸相交）；在 $p = 1$ 時，$Y = -\frac{1}{4}r$。所以當 p 由 0 增至 1 時，Y 由 $-\infty$ 上升至 $\frac{1}{4}r$，再回落至 $-\frac{1}{4}r$。

階段 3　陀螺

想一想 第 (iii) 部分的立體，是一個圓頂（$n = 4$）疊在一個倒轉的拋物面（$n = 2$）之上。它的質心在哪裏？

由步驟 1，圓頂的體積是 $\frac{2\pi r^3}{3}$，質心在 $\frac{2r}{5}$；拋物面的體積是 $\frac{\pi r^3}{2}$，而由於它是倒轉的，質心在 $-\frac{r}{3}$。所以

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\, r = \frac{\frac{4}{15}-\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}\, r = \frac{3r}{35}.$$

G 位於 $\left(0, \frac{3r}{35}\right)$，比最闊之處略高。

階段 4 數算平衡位置

想一想 傾斜的平衡位置需要有一點（不是 A 或 B），其法線通過 G。在曲面的每一部分上，有多少個點的法線與軸相交於高度 $\frac{3r}{35}$？

圓頂。它的法線與軸相交的高度 Y 由 $-\infty$ 上升至 $\frac{1}{4}r$，再下降至 $-\frac{1}{4}r$。由於 $-\frac{1}{4}r < \frac{3r}{35} < \frac{1}{4}r$，根據介值定理（intermediate value theorem），$\frac{3r}{35}$ 這個值在上升的一段取得一次，在下降的一段也取得一次：共兩點。

尖底。由第 (ii) 部分取 $n = 2$，再對 x-軸作反射，可知在參數為 p 的點上，法線與軸相交於 $-r\left(1 - p^2 - \frac{1}{2}\right) = r\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$，這個值由 $-\frac{1}{2}r$ 遞增至 $\frac{1}{2}r$。它恰好有一次等於 $\frac{3r}{35}$，就是在 $p^2 = \frac{41}{70}$ 時。

這三點各給出一個平衡位置，而三條法線與軸所成的角各不相同，所以 $\overrightarrow{AB}$ 與鉛垂線成三個不同的非零角（圖 11.8.1）。 ■

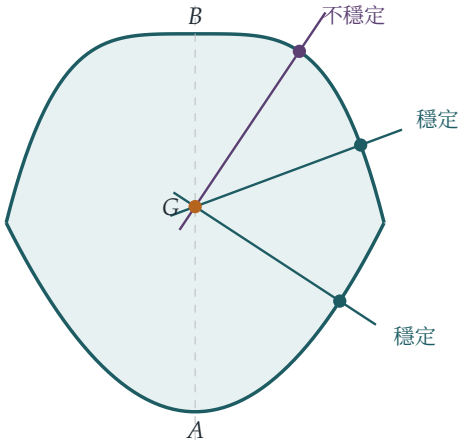


圖 11.8.1 第 (iii) 部分的立體的截面，以及它的質心 G（琥珀色）。在三個標記的點上，曲面的法線都通過 G，所以立體可以用該點着地而靜止。其中兩個平衡位置是穩定的（曲面在該處局部地離 G 最近），一個是不穩定的（局部地最遠）。

回顧

- **把物理條件化為幾何。**平衡變成了「法線通過 G」。
- **不用求解也能證明存在。**我們從沒有求出那些角。介值定理，加上函數 $Y(p)$ 的形狀，已說明了它們有多少個。
- **重用一般結果。**第 (ii) 部分對一般的 n 所得的結果，一併處理了第 (iii) 部分中曲面的兩個部分。

背後的數學

平衡位置即臨界點

當立體以點 X 着地而靜止時，G 離桌面的高度就是由 G 到在 X 的切平面（tangent plane）的距離；對凸體來說，當 GX 沿着法線時，這個距離就是 $|GX|$。一般而言，平衡位置就是由 G 到曲面的距離的*臨界點*（*critical points*）：使 $|GX|$ 取駐值的點 X，正好就是法線通過 G 的點。穩定的平衡位置是這個距離的局部極小值（G 盡可能低），而不穩定的則是局部極大值或鞍點（saddle points）。

沿着截面由 A 走到 B，與 G 的距離依次是：在 A 較大（極大值：以尖端平衡，不穩定），在尖底上的傾斜點較小（極小值，穩定），在邊緣較大，在圓頂上較低的傾斜點較小（穩定），在較高的傾斜點較大（不穩定），而在 B 較小（穩定：以圓頂的頂部着地）。正如圖中所示，極小值和極大值必定交替出現。（事實上還有一個題目沒有計算在內的平衡位置：立體可以不穩定地平衡在它尖銳的邊緣上，曲面在那裏沒有唯一的法線。）

Gömböc

一個凸體最少可以有多少個平衡位置？任何物體都至少有一個穩定位置和一個不穩定位置：就是曲面上離 G 最近和最遠的點。密度均勻的二維凸形狀總是至少有四個（距離的兩個極小值和兩個極大值，交替出現）。1995 年，阿諾爾德（Vladimir Arnold）提出一個問題：密度均勻的三維凸體，能否只有兩個平衡位置，即一個穩定、一個不穩定？2006 年，Gábor Domokos 和 Péter Várkonyi 構造出這樣的一個形體，就是 *Gömböc*：無論以甚麼姿勢把它放下，它都會滾動搖晃，直至到達它唯一的穩定位置為止。Domokos 後來留意到，有些陸龜的殼很接近這個形狀，這有助牠們在被翻轉後自行翻身。

阿基米德與浮體

對物體穩定性的研究可以追溯至阿基米德（Archimedes）。他在《論浮體》（*On Floating Bodies*）中，根據形狀和密度，分析了一個浮着的拋物面（船身的一個模型）何時能穩

定地直立，何時會翻側。他只用幾何便得出答案，當中涉及的正是本節所用的那種質心和法線的計算。造船工程師至今仍在運用他的想法，形式就是穩心（*metacentre*）：如果通過浮心（centre of buoyancy）的鉛垂線與船的軸線的交點位於質心之上，船便是穩定的。

思維技巧

勢能地形

平衡位置是勢能（potential energy）的駐點（stationary points），而穩定的平衡位置是它的極小值。與其把駐點逐一解出來，不如數算它們的數目。

這裏的勢能與 G 的高度成正比，也就是由 G 到曲面的距離。在大學裏，這個觀點貫穿力學、化學（分子會落入能量的極小值）和拓撲學；在拓撲學中，莫爾斯理論（*Morse theory*）說明，曲面上任何函數的極小值、極大值和鞍點的數目，都受曲面的形狀所限制。

延伸練習

1 **不倒翁玩具。**試做 STEP II 1996，第 9 題（`step.maths.org/questions/96-s2-q9`）：一個置於半球上的圓錐，何時會自行回正？（提示：相對於半球的球心，G 必須在哪裏？）

2 **球體。**對於均勻實心球體，每一條法線都通過球心。這說明它的平衡位置有甚麼特點？如果球體的質心稍為偏離球心，又會怎樣？

3 **橢圓。**證明一塊橢圓形圓盤在其自身所在的平面內沿一條直線滾動時，恰好有四個平衡位置，並指出哪些是穩定的。

4 **兩個拋物面。**把第 (iii) 部分的圓頂換成拋物面 $ry = r^2 - x^2$，使立體對 x-軸對稱。證明 G 位於原點，求出傾斜的平衡位置，並解釋為何它們成對出現，且每對的傾斜角相等。

延伸閱讀

► **Péter Várkonyi & Gábor Domokos,「Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem」**, *Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。提出 Gömböc 的

論文。

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），論平衡與穩定性。
- **Chris Rorres,「Completing Book II of Archimedes's *On Floating Bodies*」**, *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。阿基米德的穩定性分析，配以現代圖解。

11.9 安全拋物線

題目

STEP II 2014，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/14-s2-q10`

引子

一座噴泉以相同的速率向四方八面噴水。水柱形成一個閃閃生輝的圓頂，外緣輪廓分明：在裏面，每一點都有水經過；在外面，水一滴也到不了。這條邊界是一條拋物線（parabola），稱為*安全拋物線*（parabola of safety），因為炮口速率固定的大炮，無論以甚麼角度發射，都打不中它外面的目標。

令人意外的是，這條邊界本身並不是其中一條軌跡。它是整族軌跡的*包絡線*（envelope），即一條與每條軌跡都相切一次的曲線，就像 Section 8.1 中直線 $y = 0$ 與那族拋物線相切一樣。這道題目只需用到二次式的判別式（discriminant），便能把它求出來。

動筆之前

? **想一想** 用 t 表示 x 和 y，然後消去 t。怎樣用 $\lambda = \tan\theta$ 表示 $\sec^2\theta$？

由 $x = ut\cos\theta$ 和 $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$，代入 $t = \frac{x}{u\cos\theta}$：

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\lambda^2),$$

其中用到 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$。

逐步解題

階段 1　固定 x，改變角度

想一想　對於固定的 $x > 0$，把 y 看成 λ 的函數。它是哪一類函數？當 λ 取遍所有實數時，它會取哪些值？

對於固定的 x，y 是 λ 的二次函數，首項係數 $-\frac{gx^2}{2u^2}$ 為負：它是以 λ 為變量、開口向下的拋物線。它有極大值，而且當 $\lambda \to \pm\infty$ 時，$y \to -\infty$。由於它是連續的，所以它會取遍不超過極大值的每一個值。極大值出現在 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = x - \frac{gx^2}{u^2}\lambda = 0$ 之處，即 $\lambda = \frac{u^2}{gx}$，此時

$$Y = \frac{u^2}{gx}\,x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \frac{u^4}{g^2x^2}\right) = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}. \qquad \blacksquare$$

（等價的說法是：點 (x, y) 可以到達，當且僅當二次方程 $\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \frac{gx^2}{2u^2} + y = 0$ 有實根 λ，而判別式的條件給出 $y \le Y$。）

階段 2　區域

曲線 $Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ 是一條開口向下的拋物線，頂點位於 $\left(0, \frac{u^2}{2g}\right)$，即垂直向上發射所達到的高度；它與地面相交於 $x = \pm\frac{u^2}{g}$，即最大射程。在它上面或下方（並在地面以上）的每一點都可以到達，而在它上方的點則全都到不了（圖 11.9.1）。

想一想　經過嚴格位於曲線下方的一點，有多少條軌跡？經過曲線上的一點呢？

曲線下方的一點對應一個有兩個實根的 λ 二次方程：兩個拋射角，一高一低。曲線上的一點對應重根：恰好一條軌跡，並且在該點與曲線相切。

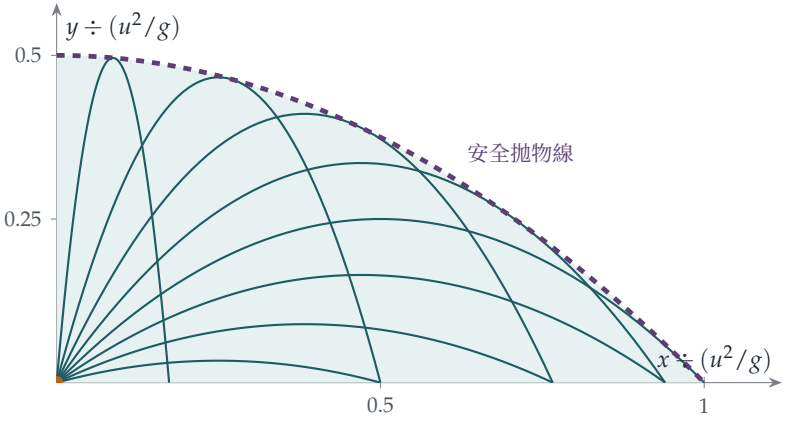


圖 11.9.1　以固定速率 u 及角度 $15°, 25°, \ldots, 85°$ 發射的軌跡（藍綠色）。每條軌跡都與虛線所示的安全拋物線 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ 恰好相切一次，而它下方的區域（陰影部分）正好是所有可到達的點所組成的集合。原點 O（琥珀色）是安全拋物線的焦點（focus）。

階段 3 最遠的點

想一想 距離 O 最遠的可到達點（在地面上或地面以上）位於邊界上。把距離的平方 x^2+Y^2 寫成 x^2 的函數。它是遞增還是遞減？

設 $X = x^2$。則

$$x^2+Y^2 = X + \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(x^2+Y^2) = 1 - \frac{g}{u^2}\left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gX}{2u^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{g^2X}{2u^4} > 0.$$

因此，沿着邊界向外移動時，距離不斷增加，而最遠的點就是邊界與地面相交之處，即 $x = \frac{u^2}{g}$。最遠距離為

$$\frac{u^2}{g},$$

由平常以 45° 發射的最大射程一擊達到。 ■

回顧

- **把問題反過來問。**不問某條給定的軌跡會去到哪裏，而問哪些軌跡會經過某個給定的點。
- **以參數為未知數的二次方程。**對於每一點，$\lambda = \tan\theta$ 所滿足的方程都是二次方程，而它的判別式決定該點能否到達。
- **兩個、一個或沒有。**區域內的點有兩個角度可以到達，邊界上的點有一個，區域外的點則一個也沒有。

背後的數學

包絡線

單參數曲線族（one-parameter family of curves）$\mathrm{F}(x,y,\lambda)=0$ 往往有一條*包絡線*：一條與族中每個成員都相切的曲線。求法是聯立解 $\mathrm{F}=0$ 和 $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda}=0$，這正是我們對 λ 求 y 的極大值時所做的事。包絡線在科學中隨處可見。一杯咖啡表面上那條明亮的光曲線，就是反射光線的包絡線，稱為*焦散線*（caustic）。超音速飛機的音爆，由它所發出聲波的包絡面傳送，那就是*馬赫錐*（Mach cone）。而在 Section 8.1 中，一個微分方程（differential equation）的一族解的包絡線，本身也是一個解，即所謂的「奇異」解。

焦點

安全拋物線有一個奇妙的性質：它的焦點就是發射點 O。（拋物線 $y = c - \frac{x^2}{4c}$ 的焦點位於原點；這裏 $c = \frac{u^2}{2g}$。）每條軌跡也都是拋物線，而所有軌跡的焦點都落在以 O 為圓心、

半徑為 $\frac{u^2}{2g}$ 的圓上。這可以用能量來解釋：拋射體在高度 y 時的速率是 $\sqrt{u^2 - 2gy}$，在準線（directrix）的高度 $\frac{u^2}{2g}$ 處為零；而以同一條直線為準線並且經過 O 的拋物線，其焦點都在那個圓上。

托里拆利的拋物線

伽利略（Galileo）在 1609 年前後證明了拋射體沿拋物線運動，並且在水平地面上，最大射程出現在 45°。他的學生托里拆利（Evangelista Torricelli）以發明氣壓計而較為人熟悉，他在 1644 年的著作 *De motu gravium* 中發現了安全拋物線。對炮手來說，它回答了一個實際問題：究竟哪些目標在射程之內？托里拆利還證明了，經過給定一點的軌跡成對出現，兩者的角度關於該點的方向與鉛垂線之間的角平分線對稱，這就是本題中的高射和低射。

思維技巧

曲線族的包絡線

要找出一族曲線所覆蓋區域的邊界，可固定一點，然後問：參數取哪些值時，會有曲線經過這一點？邊界就是解的數目發生變化的地方。

同一個想法，即隨着點的移動來數算解的數目，是光學中焦散線研究的基礎，也是動力系統（dynamical systems）中分歧（bifurcation）理論的基礎，更是突變理論（catastrophe theory）的基礎；突變理論把方程的解的數目可以怎樣變化加以分類。

延伸練習

1 **爆開的煙花。**試做 STEP II 2023，第 10 題（載於 OCR 提供下載的 2023 年試卷，`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）。這道題把爆炸產生的粒子看成一個球面，其球心作自由下落，並找出一顆沿着安全拋物面（paraboloid of safety）運動的粒子。

2 **向斜坡上發射。**求速率為 u 的拋射體沿傾角為 β 的斜面向上發射時的最大射程。（提示：直線 $y = x\tan\beta$ 與安全拋物線在哪裏相交？）證明最佳角度平分斜坡與鉛垂線之間的夾角。

3 **兩個角度。**證明能到達點 P 的兩個角度，關於 OP 與鉛垂線夾角的平分線對稱。

4 **焦點。**證明拋射角為 θ 的軌跡，其焦點位於 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$，並由此證明這些焦點都落在以 O 為圓心的一個圓上。

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，當中討論了軌跡的包絡線。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。幾何學中的包絡線與焦散線。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。包絡線、焦散線及許多經典曲線，並附作圖方法。

11.10 會朝你飛回來的球

題目

STEP II 2019，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

引子

把球向前拋出，它在落地之前會一直離你而去。這是理所當然的。把球垂直向上拋，它卻會回到你手上。在這兩種情況之間，必定有些事情起了變化：必定存在某些角度，令球先遠離你，然後向你*靠近*，到落地之前又再遠離。本題要找出的正是那個確切的分界線：$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，即大約 70.5°。

這個結果是數學中一種常見情況的好例子：人人都以為某個量是單調（monotonic）的，其實不然。它同時展示了一個在大學裏經常用到的標準技巧：要判斷一個距離是否正在增加，就對它的*平方*求導（differentiate），這樣便可避開平方根。

動筆之前

想一想 為甚麼處理 OP^2 比處理 OP 容易？「OP 遞增」與「OP^2 遞增」是同一回事嗎？

$OP^2 = x^2 + y^2$ 是 t 的多項式（polynomial），而 OP 則涉及平方根。由於 $OP \geq 0$，而平方運算在非負數上是遞增的，所以 OP 遞增的時候，正正就是 OP^2 遞增的時候。

逐步解題

階段 1　距離的平方

由 $x = ut\cos\alpha$ 及 $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$，可得

$$OP^2 = u^2t^2\cos^2\alpha + u^2t^2\sin^2\alpha - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 = u^2t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

想一想 對 t 求導。抽出因子 t 之後，剩下的是甚麼？它在甚麼情況下對所有 t 皆為正？

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = 2u^2t - 3ugt^2\sin\alpha + g^2t^3 = t(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2).$$

當 $t > 0$ 時，其正負號與二次式（quadratic）$g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2$ 的正負號相同。這個二次式的首項係數為正，所以只要它的判別式（discriminant）為負，它對每一個 t 都是正的：

$$9u^2g^2\sin^2\alpha - 8u^2g^2 < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin^2\alpha < \frac{8}{9} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

在這情況下，OP 在整個飛行過程中都在遞增。 ■

階段 2　較陡的拋擲

想一想 若 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，這個二次式有兩個實根。它們是正數嗎？較小的那個根是否出現在質點落地之前？

兩根之和為 $\frac{3u\sin\alpha}{g} > 0$，兩根之積為 $\frac{2u^2}{g^2} > 0$，所以兩根皆為正數；而在兩根之間，這個二次式為負，因而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2$ 也為負。質點在 $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 時落地。較小的根是

$$t_1 = \frac{u}{2g}(3\sin\alpha - \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}) < \frac{u}{2g}\cdot 3\sin\alpha < \frac{2u\sin\alpha}{g} = T.$$

所以緊接 t_1 之後（而且在落地之前），OP 正在遞減。 ■

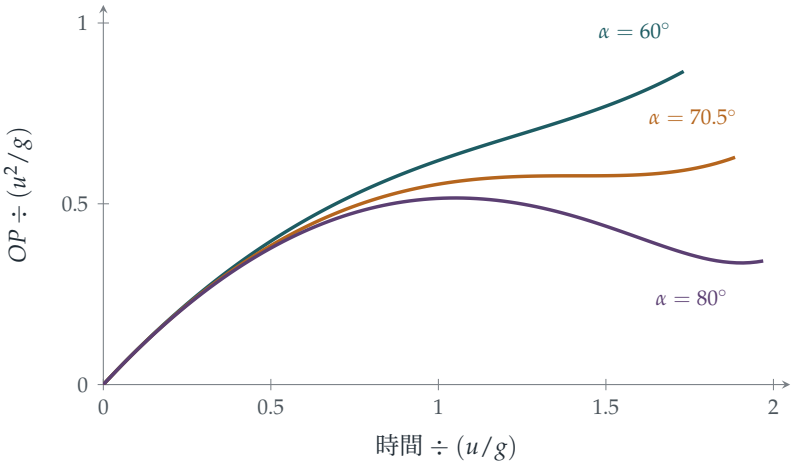


圖 11.10.1 三個不同角度下，球與拋球者的距離隨時間的變化，直至落地為止。在 60°（藍綠色）時，距離一直增加。在臨界角（critical angle）$\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$（琥珀色）時，距離有一瞬間停頓。在 80°（紫紅色）時，球先遠離，然後有一段時間向拋球者靠近，到落地前一刻又再遠離。

階段 3 移動的觀察者

想一想 Q 沿地面朝相反方向以速率 v 離開 O。從 Q 量度，水平距離是 $x + vt$。這對計算有甚麼影響？

間距 QP 的水平分量為 $(u\cos\alpha + v)t$，垂直分量為 $ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$。所以

$$QP^2 = \big((u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha\big)t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4,$$

與之前的式子相同，只是第一項中的 u^2 換成了 $w^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha$。其導數（derivative）為 $t\big(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2w^2\big)$，而它對所有 $t > 0$ 皆為正的條件是

$$9u^2\sin^2\alpha < 8w^2 \quad\Longleftrightarrow\quad u^2\sin^2\alpha < 8(u\cos\alpha + v)^2,$$

這是在兩邊消去 $8u^2\sin^2\alpha$ 之後所得的結果。兩邊取平方根（$u\sin\alpha$ 與 $u\cos\alpha + v$ 皆為正數），即得 $u\sin\alpha < 2\sqrt{2}(u\cos\alpha + v)$，整理後就是

$$2\sqrt{2}\,v > (\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)u. \qquad \blacksquare$$

（這個條件足以令 QP 在整個飛行過程中遞增，因為此時導數對所有 $t > 0$ 皆為正。）

回顧

- **對平方求導。**距離的平方是多項式，而它的導數與距離本身的導數正負號相同。

- **恆為正的二次式。**「在所有時間都遞增」這個條件，化成了一個關於判別式的條件。
- **把新問題化為舊問題。**移動的觀察者只改變了一個係數，所以之前的分析可以直接套用。

背後的數學

幾何觀點

OP 遞減的時候，正正就是 P 的速度指向「內側」的時候，即速度與向量 $\overrightarrow{OP}$ 成鈍角（obtuse angle），也就是 $\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{v}<0$ 的時候。對於陡峭的拋擲，質點在接近飛行最高點時，位於拋球者的高處而略為偏前，幾乎是水平地向外移動，但已開始下墜；相對於 $\overrightarrow{OP}$ 的方向而言，一旦速度中向下的部分蓋過向外的部分，質點便會靠近。對於較平的拋擲，質點總是在前方足夠遠的位置，以致它的速度從不指回 O。臨界情況就是速度恰好只在一個瞬間與 $\overrightarrow{OP}$ 垂直，亦即圖 11.10.1 中距離停頓的那一刻。

單調性並非必然

許多「顯然」會增加的量，其實並不如此。月球與地球的距離會來回振盪；在彎曲的路上，即使其中一輛車一直領先，兩車之間的距離仍可以減少；獵物大量繁殖的時候，捕食者的數量卻可以下降。要證明一個量是單調的，通常就是要證明某個導數的正負號固定不變，而這裏所用的技巧（化為多項式，再檢查它的根或判別式）正是標準的做法。在分析學（analysis）中，單調性往往是證明收斂（convergence）的關鍵：有界的單調數列必定收斂，正如你在第 2 章所見。

思維技巧

藉導數檢查單調性

要判斷一個量是否一直遞增，可對它（或對它的某個方便處理的函數，例如它的平方）求導，然後問：導數會否變號？

在大學裏，這類關於正負號的論證會用來證明不等式、找出極大值和極小值，以及研究微分方程（differential equation）解的穩定性；在後者中，一個一直遞減的量（如 Section 8.2 所示）便證明了系統會趨於平穩。

延伸練習

1 **有多近？**對於 $\alpha = 80°$，求 OP 取得局部極大值（local maximum）和局部極小值（local minimum）的時間，以及該兩刻的距離，以 u^2/g 為單位。

2 **在斜面上。**把球沿一個與水平成 β 角的斜面向上拋出，並落在斜面上，就這個情況重做第 (i) 部分。臨界角（從斜面量起）會改變嗎？

3 **考慮空氣阻力。**假設球還受到一個與其速度成正比的阻力（resistance）。不作計算，你預期臨界角會大於還是小於 70.5°？為甚麼？

4 **從高處拋出。**若球從懸崖頂拋出，並落在遠低於崖頂的地方，證明無論以甚麼角度拋出，OP 最終都會遞增，並判斷是否存在某些角度，令它在某個階段遞減。

延伸閱讀

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。數以百計出人意表的日常物理謎題。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，講述拋體運動，並附有數道有違直覺的題目。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。證明一樣東西恆大於另一樣東西的藝術。

11.11 外野手如何接球

題目

STEP II 1998，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/98-s2-q11`

引子

球被高高擊向外野。出色的外野手會立刻起步，並且剛好在球落下的一刻趕到。這是怎樣做到的？沒有人能在不足一秒之內心算出拋體運動（projectile motion）的方程，何況外野手根本不知道球的速率和角度。然而外野手，以至接飛碟的狗，都能輕易做到。

1968 年，物理學家 Seville Chapman 提出了一個答案，而本題正是要證明它。假如外野手留意着球的仰角（angle of elevation）θ，並且移動自己的位置，使 $\tan\theta$ 以恆定的速率增加，她就會剛好到達球的落點。她毋須懂得任何物理，只需能察覺球看起來是升得比穩定上升快，還是比穩定上升慢。一個困難的預測問題，就這樣換成了一條簡單的反饋（feedback）法則。

動筆之前

想一想 設擊球手位於原點，外野手在距離 D 處。若球位於 (x, y)，$\tan\theta$ 是甚麼？

球在外野手眼睛上方高度 y 處，並在她前方水平距離 $D - x$ 處（球正朝她飛來）。所以 $\tan\theta = \frac{y}{D-x}$。

逐步解題

階段 1　位置恰到好處的外野手

想一想　設球的水平速率為 U，初始垂直速率為 W，並在時間 T 落下（回到眼睛的高度）。試以 U、W、T、g 和 t 表示 x、y 和 D。你能把 y 因式分解嗎？

我們有 $x = Ut$ 和 $y = Wt - \frac{1}{2}gt^2$，而球在 $T = \frac{2W}{g}$ 時回到眼睛的高度，外野手正在該處：$D = UT$。由於 $W = \frac{1}{2}gT$，

$$y = \tfrac{1}{2}gt(T - t), \qquad D - x = U(T - t).$$

因子 $T - t$ 可以約去：

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}\,t.$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta = \frac{g}{2U}$，是一個常數。 ■

階段 2　奔跑中的外野手

想一想　現在外野手從距離 D_0 處起步，以速率 v 跑向擊球手，所以她的位置是 $D_0 - vt$。她在時間 T 接到球。D_0 是甚麼？把剛才的計算重做一次。

要在時間 T 接到球，她必須身處球的落點：$D_0 - vT = UT$，所以 $D_0 = (U + v)T$。她與球的水平距離是 $D_0 - vt - Ut = (U + v)(T - t)$，而該因子同樣可以約去：

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t.$$

所以只要她以適當的速率奔跑，$\tan\theta$ 就會以恆定的速率增加。

想一想　題目問的是逆命題（converse）：假如她奔跑時令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta$ 保持不變，她會接到球嗎？

假設她以速率 v 奔跑，而 $\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D_0-(U+v)t}$ 以恆定的速率 c 增加，所以 $\tan\theta = ct$（在 $t = 0$ 時它等於 0）。於是

$$\tfrac{1}{2}g(T - t) = c(D_0 - (U + v)t) \quad \text{對所有} t.$$

比較 t 的係數和常數項：$\frac{1}{2}g = c(U + v)$ 及 $\frac{1}{2}gT = cD_0$。兩式相除，得 $D_0 = (U + v)T$：這正是在時間 T 身處落點的條件。所以她應選擇 v 使 $\tan\theta$ 保持穩定上升，這樣她就能接到球。 ■

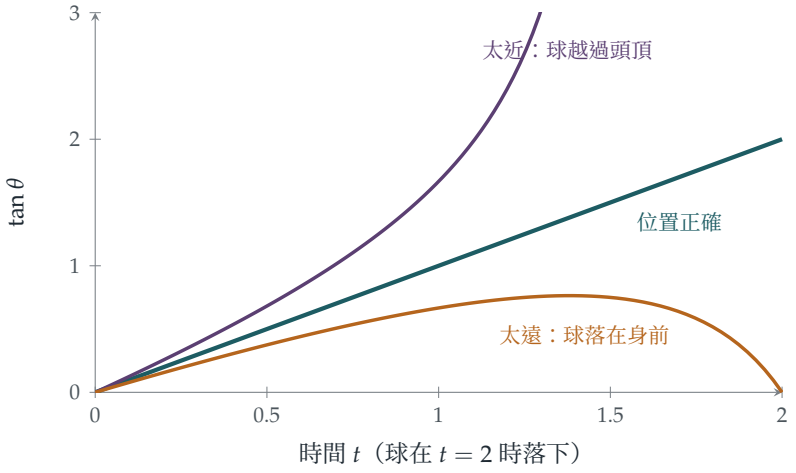


圖 11.11.1 站着不動的外野手所見的情況，球的落點在距離 2 處（取 $g = 2$，水平速率為 1）。站在正確的位置時，$\tan\theta$ 沿直線上升（藍綠色）。站得太近，$\tan\theta$ 會加速上升，球越過她的頭頂（紫紅色）；站得太後，它升得愈來愈慢，然後下降（琥珀色）。法則是：移動自己的位置，使球的影像穩定上升。

回顧

- **找出公因子。**高度和水平距離都含有 $T - t$，把它約去後，$\tan\theta$ 就變成線性。
- **證明逆命題。**要說明這條法則行得通（即它確實令人接到球），需要反方向的論證，也就是比較係數。
- **容易察覺的不變量（invariant）。**$\tan\theta$ 是否穩定上升，憑肉眼就能判斷；落點則不能。

背後的數學

光學加速度抵消

Chapman 的法則現稱為*光學加速度抵消*（optical acceleration cancellation）：外野手移動自己的位置，使「光學加速度」$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ 保持為零。假如球的影像加速上升，球就會越過她的頭頂，所以她要後退；假如影像減速，球就會落在她身前，所以她要向前跑（圖 11.11.1）。這個策略沒有告訴她球會落在哪裏，卻能把她帶到那裏。這是一條反饋控制律（feedback control law），與導引導彈所用的同出一轍：導彈採用*比例導引*（proportional navigation），使指向目標的視線角保持不變，那正是同一個想法的橫向版本。

外野手實際怎樣做

真實的外野手是否採用 Chapman 的法則？1990 年代有人把攝影機裝在棒球外野手的頭上做實驗，結果並不一致。Michael McBeath 及其同事於 1995 年在 *Science* 上提出，對於打向一側的球，外野手會沿彎曲的路線奔跑，使球的影像在視野中沿直線移動（即「線性光學軌跡」，linear optical trajectory），這同樣能把他們帶到接球的位置。其後的研究顯示，這兩種策略以及兩者的混合都有人使用，而且外野手往往並非以恆定速率奔跑。2004 年的一項研究發現，接飛碟的狗所走的路線，與同樣的光學法則吻合。無論細節如何，這個令人驚嘆的結論依然成立：接球並不需要預測，只需要正確的反饋。

Chapman 的論文

Seville Chapman 的「Catching a baseball」於 1968 年刊登在 *American Journal of Physics*，全文只有三頁，內容基本上就是本題的計算。他指出這個策略只在沒有空氣阻力時才成立，而真實棒球的軌跡會因阻力和旋轉而變形，令情況變得複雜。儘管如此，大腦利用視野中簡單的不變量來解決複雜的控制問題，這個想法在心理學和機械人學中已變得十分重要。

思維技巧

找出容易觀察的不變量

當某個量難以預測時，不妨找一個與它相關、可以直接觀察的量，而這個量恰好在一切順利時表現得簡單。

在這裏，落點難以預測，但 $\tan\theta$ 的變化率卻容易監察。在大學裏，這就是反饋控制的想法，也是選擇一個可觀察量、讓它包含你所需信息的想法。

延伸練習

1. **向後跑。**假如球會落在外野手起步位置的後方，證明她應該背離擊球手奔跑，而同一條法則依然適用。

2. **不是 θ 本身。**證明對於位置恰到好處的外野手，$\frac{d\theta}{dt}$ 並非常數。為甚麼 $\tan\theta$ 才是應該留意的量？

3. **眼睛的高度。**假如球是從外野手眼睛高度以下 h 的位置擊出，對於位置恰當的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 t 的線性函數？（假設她在眼睛的高度接球。）

4 **空氣阻力。**在線性空氣阻力之下，水平速度會按指數衰減。對於位置恰當的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 t 的線性函數？

延伸閱讀

- **Seville Chapman，「Catching a baseball」**，*American Journal of Physics* 36 (1968)。
- **Michael McBeath、Dennis Shaffer 及 Mary Kaiser，「How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls」**，*Science* 268 (1995)。
- **Dennis Shaffer 等，「How dogs navigate to catch Frisbees」**，*Psychological Science* 15 (2004)。

11.12 橡皮繩上的螞蟻

題目

STEP II 2018，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/18-s2-q10`

引子

一隻螞蟻沿着一條長一公里的橡皮繩出發，每秒走一厘米。每過一秒，繩子都會均勻地再拉長一公里。繩的遠端以每秒一千米的速度飛馳而去，比螞蟻快十萬倍。螞蟻最終能走到繩的盡頭嗎？

令人驚訝的是，答案是能。繩子拉伸時會帶着螞蟻一起前進；雖然螞蟻每次走過的路程佔繩長的比例愈來愈小，但這些比例加起來就像調和級數（harmonic series），而調和級數是發散（diverge）的（Section 2.3）。螞蟻終會到達，只是所需的時間遠遠超過宇宙的年齡。本題精確地解出這個問題的連續版本，並發現所需時間隨兩個速率之比呈指數增長。

動筆之前

想一想 繩子是均勻拉伸的：每一小段都按相同的倍數伸長。在時間 t，繩長為 $a+ut$。若距離釘子 x 的一點位於全長的 $\frac{x}{a+ut}$ 處，這一點移動得有多快？

繩上每一點所佔全長的比例 f 保持不變，所以它與釘子的距離是 $f(a+ut)$，速率是 $fu = \frac{ux}{a+ut}$。靠近釘子的點幾乎不動；遠端則以 u 的速率移動。

逐步解題

階段 1　螞蟻的方程

螞蟻相對於繩子的速率是 v，還要加上牠腳下那段繩子的速率：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

想一想 用商法則（quotient rule）對 $\frac{x}{a+ut}$ 求導，並代入 $\dot{x}$ 的方程。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = \frac{\dot{x}}{a+ut} - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut}. \qquad \blacksquare$$

螞蟻已走過的繩長比例以 $\frac{v}{a+ut}$ 的速率增加：即牠自身的速率除以當時的繩長。拉伸的影響完全消失了，因為拉伸不會改變任何一點所佔的比例。

階段 2　到達盡頭

想一想 由 0 積分至 t。比例何時達到 1？

螞蟻從釘子出發，所以

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v\,\mathrm{d}s}{a+us} = \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a}.$$

當比例等於 1 時，螞蟻到達盡頭：$\ln\frac{a+uT}{a} = \frac{u}{v} = k$，所以 $a + uT = ae^k$，即

$$uT = a(e^k - 1). \qquad \blacksquare$$

對數可以無限增大，所以無論繩子拉得多快，螞蟻總會到達。

階段 3　回程

想一想 往回走時，螞蟻相對於繩子的速度是 $-v$。現在牠所佔比例的變化率是多少？牠在時間 T 由比例 1 出發。

以 $-v$ 重複同樣的計算，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}$，所以

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a+uT}.$$

當 $a + ut = (a+uT)e^k$ 時，比例降至 0。由於 $a + uT = ae^k$，回程所需時間為

$$t - T = \frac{(a+uT)(e^k-1)}{u} = \frac{ae^k \cdot uT/a}{u} = Te^k. \qquad \blacksquare$$

回程所需的時間是去程的 e^k 倍：螞蟻掉頭的時候，繩子已是開始時的 e^k 倍長。

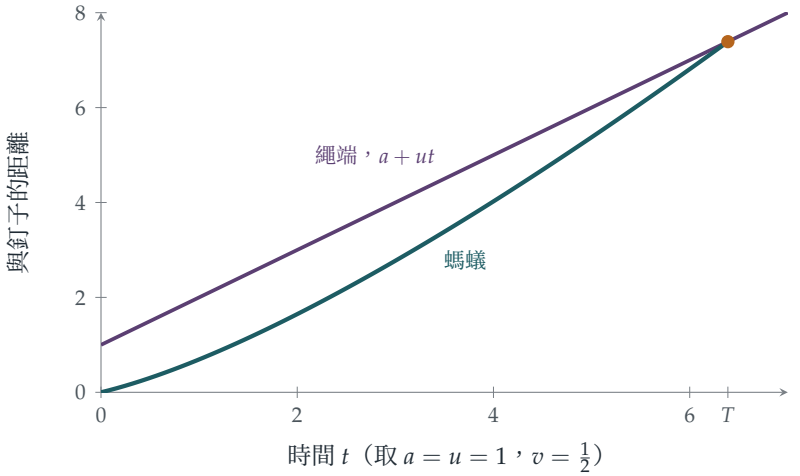


圖 11.12.1 螞蟻（藍綠色）沿着繩子行走，繩端（紫紅色）移動的速率是螞蟻步行速率的兩倍（$k=2$）。螞蟻被拉伸帶着前進，牠與釘子的距離增長得愈來愈快。牠在 $T=e^2-1\approx 6.39$ 時到達盡頭。

回顧

- **選對變量。**已走過的繩長比例是最自然的量：拉伸不會改變它。
- **喬裝了的積分因子（integrating factor）。**乘以 $\frac{1}{a+ut}$ 之後，一條線性微分方程（linear differential equation）就變成了一個恰好的導數。
- **發散勝過速度。**比例像對數一樣增長，而對數是無界的，所以螞蟻總會到達。

背後的數學

調和級數的版本

這個謎題通常是以離散的拉伸來敍述的。一條繩長 1 公里；螞蟻在第一秒走 1 厘米；然後繩子拉長 1 公里；然後螞蟻再走一厘米，如此類推。在第 n 秒，螞蟻在長 n 公里的繩上走了 1 厘米：所佔比例為 $\frac{1}{100\,000\,n}$。拉伸不會改變牠所佔的比例，所以 N 秒之後，牠已走過繩子的

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

。當 $H_N\approx 100\,000$ 時牠便到達，那大約是 $e^{100\,000}$ 秒之後，這個數有超過 43 000 位數字。（作為比較，宇宙的年齡約為 4×10^{17} 秒。）我們的連續版答案與此吻合：$k=\frac{u}{v}=100\,000$，而 $T\approx\frac{a}{u}e^k$。

膨脹宇宙中的光

繩上的螞蟻，正是光穿越膨脹宇宙的一個模型。遙遠的星系被空間本身的膨脹帶着遠離我們，而它們發出的光則以速率 c 在膨脹的空間之中向我們傳播，就像螞蟻沿着拉伸中的繩子行走一樣。遙遠星系的光最終能否到達我們這裏，取決於膨脹率如何隨時間變化。在一個以穩定速率膨脹的宇宙中，就像那條繩子一樣，光最終總會到達。而在一個加速膨脹的宇宙中（我們的宇宙看來正是如此），有些星系的光永遠不會到達我們這裏：這就是*宇宙事件視界*（cosmic event horizon）。對螞蟻來說，相應的情況是一條按指數拉伸的繩子，繩端的速率與繩長成正比地增長（可在練習中試試）。

加德納的螞蟻

這個謎題似乎是法國數學家 Denys Wilquin 在 1972 年發明的，當時說的是橡皮筋上的一條蟲；其後馬丁·加德納（Martin Gardner）在他的 *Scientific American* 專欄和著作 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* 中介紹，令它廣為人知。它是最著名的例子之一：結果違反直覺，卻又容易證明；它也是人們說明調和級數發散時最愛用的例子。

思維技巧

找出不受複雜因素影響的量

當問題中某個部分改變了一切（這裏是拉伸），就去找一個它不會改變的量。

拉伸會改變每一段距離，卻不改變任何比例。改用比例來處理，拉伸就從問題中消失了。在大學裏，這個想法會以宇宙學和流體力學中的*共動坐標*（comoving coordinates）的形式出現，更一般地說，就是尋找在某個變換下的不變量（invariant）。

延伸練習

1. **中途。**螞蟻何時走到繩子的一半？那是在時間 $\frac{T}{2}$ 之前還是之後？
2. **指數拉伸。**假設繩長改為 $ae^{\lambda t}$。證明螞蟻僅當 $v > \lambda a$ 時才能到達盡頭。（這就是宇宙事件視界。）
3. **加速的繩子。**若繩長為 $a + \frac{1}{2}bt^2$，螞蟻是否總能到達？

4 **離散的謎題。**在離散版本中，螞蟻需要多少秒才能走過繩子的 1%？請使用 $H_N \approx \ln N + 0.577$。

延伸閱讀

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。書中收錄了橡皮繩上的螞蟻。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。調和級數，以及這隻螞蟻。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨脹的空間、視界與共動坐標，屬大學本科程度。

11.13 鏟雪車問題

題目

STEP III Specimen paper，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/spec-s3-q11`

引子

雪不停地均勻落下。一輛剷雪車（snowplough）沿着一條路出發，前方的積雪愈來愈深，車速也愈來愈慢。稍後，第二輛剷雪車沿着已經清理過的路面跟上。它遇到的只是第一輛車駛過之後才落下的雪，積雪較淺，所以走得較快，最終會追上前車。那是甚麼時候？

這是一道著名問題的變體，原題由 Ralph Agnew 於 1942 年發表，後來成為微分方程（differential equations）中最廣為人知的趣題之一。它的妙處在於，第二輛車的速率取決於第一輛車何時駛過每一點，所以第 (i) 部分的解會代入第 (ii) 部分的方程之中。而這條方程「倒過來」寫，把時間看成距離的函數，才最為巧妙。

動筆之前

想一想 第一輛剷雪車在時間 t 遇到的積雪深度為 $h + kt$。它的速率是多少？求 x 作為 t 的函數較容易，還是求 t 作為 x 的函數較容易？

它的速率是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}$。這條方程可以乾淨利落地分離變數（separation of variables）。把它倒過來，$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k}$，這是一條以 t 為 x 的函數的簡單線性（linear）方程。對第一輛車來說，兩種寫法都行得通；對第二輛車來說，倒過來的形式卻必不可少。

逐步解題

階段 1　第一輛剷雪車

由 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \alpha(\frac{h}{k} + t)$ 可知，$\frac{h}{k} + t$ 這個量隨 x 按指數增長（exponential growth）：$\frac{h}{k} + t = Ce^{\alpha x}$。當 $x = 0$ 時 $t = 0$，所以 $C = \frac{h}{k}$，於是

$$t_1(x) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha x} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

第一輛車按指數規律減慢：走過相等的距離，所需的時間按指數遞增。

階段 2　第二輛剷雪車的方程

> **想一想**　第二輛剷雪車在時間 t 到達位置 y。那裏的積雪有多深？（第一輛車剛駛過之後，深度是多少？）

第一輛車在時間 $t_1(y)$ 清除了位置 y 上的所有積雪。自此之後，雪以速率 k 累積，所以在時間 t 的深度為 $z = k\big(t - t_1(y)\big)$。因此第二輛車的速率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha k\big(t - t_1(y)\big)} = \frac{1}{\alpha\big(t - t_1(y)\big)},$$

倒過來便得

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = t - \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

階段 3　求解

> **想一想**　這條方程對 t 是線性的：$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} - \alpha t = -\frac{\alpha h}{k}(e^{\alpha y} - 1)$。應該用哪個積分因子（integrating factor）？初始條件是甚麼？

乘以 $e^{-\alpha y}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(te^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - e^{-\alpha y}\right), \qquad te^{-\alpha y} = -\frac{\alpha h}{k}y - \frac{h}{k}e^{-\alpha y} + C.$$

第二輛車在 $t = T$ 時由 $y = 0$ 出發，所以 $T = -\frac{h}{k} + C$，得 $C = T + \frac{h}{k}$。再乘回 $e^{\alpha y}$ 並整理，

$$t_2(y) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right) + \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}. \qquad \blacksquare$$

（題目要求驗證，方法是：求導後代入；各項合併後正好是 $\alpha\big(t - t_1(y)\big)$。）

階段 4　相撞

想一想 兩輛剷雪車在同一時間到達同一點時便會相撞。試比較 $t_2(y)$ 與 $t_1(y)$。

兩者之差為 $t_2(y) - t_1(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}$，即兩輛車在位置 y 的時間差距。這個差距縮減至零時，

$$y = \frac{kT}{\alpha h}. \qquad \blacksquare$$

在這一點，第二輛車追上第一輛車：它前方的積雪深度為零，而在這個模型中，它的速率變成無限大（圖 11.13.1）。

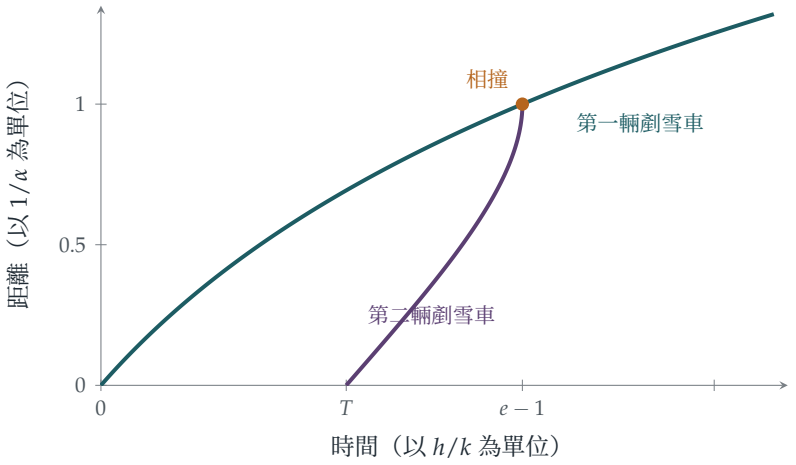


圖 11.13.1 兩輛剷雪車的距離對時間圖，其中 $T = \frac{h}{k}$（即第二輛車在積雪深度倍增之時出發）。第一輛車（藍綠色）隨積雪加深而減慢。第二輛車（紫紅色）較遲出發，路面已清理了一部分，它一邊拉近距離一邊加速，在距離 $\frac{kT}{\alpha h} = \frac{1}{\alpha}$、時間 $(e-1)\frac{h}{k}$ 處追上第一輛車。

回顧

- **把方程倒過來。**把 t 看成位置的函數，兩條方程都是線性的。
- **前一個解代入後一條方程。**第一輛車的時間表 $t_1(y)$ 出現在第二輛車的方程之中。
- **作比較，不必解兩次。**相撞的條件來自差 $t_2 - t_1$，而這個差有一個簡單的因子。

背後的數學

Agnew 的剷雪車

Ralph Palmer Agnew 的版本出自他 1942 年的教科書 *Differential Equations*：某天早上開始下起大雪，雪勢均勻不變；一輛剷雪車在正午出發，第一個小時走了 2 英里，第二個

小時走了 1 英里；雪是甚麼時候開始下的？剷雪車的速率與積雪深度成反比，而深度則與開始下雪以來所經過的時間成正比。答案（見下面的一道練習）涉及黃金比（golden ratio）：雪大約在正午前 37 分鐘開始下。其後才陸續出現像本題這樣有兩輛剷雪車的版本。

會傳遞的資訊

第二輛車的運動取決於路面上記錄下來的歷史：每一點最後一次被清理的時間。這是具有記憶（memory）的系統的一個簡單例子，在這類系統中，某處的狀態取決於該處先前發生過的事。交通流、冰川的運動和山火的蔓延都有這種特性，而它們背後的數學，即一階偏微分方程（first-order partial differential equations）及其特徵線（characteristics）的理論，是大學二年級的標準課題。把時間寫成位置的函數（「前沿何時到達這裏？」），正是處理這類問題時所用的到達時間（arrival times）方法。

思維技巧

選擇自變量（independent variable）

把變量的角色對調，微分方程可能會簡單得多。如果變化率取決於某處發生某事的時間，就把時間寫成位置的函數。

本題的兩條方程寫成 $t(y)$ 的方程後都變成線性。在大學裏，自由選擇哪個變量作自變量（並在方便時更換）是經常用到的手法，由流體力學中的速度圖法（hodograph method），到幾何中以弧長（arc length）作參數，比比皆是。

延伸練習

1. **Agnew 的問題。**雪在正午前某個未知的時間開始以穩定的速率落下。一輛剷雪車的速率與積雪深度成反比，它在正午出發，第一個小時走了 2 英里，第二個小時走了 1 英里。證明若雪在正午前 t_0 小時開始下，則 $\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3$，由此推出 $\frac{1}{t_0}$ 是黃金比，並求雪何時開始下。

2. **驗證。**用求導驗證 $t_2(y)$ 滿足第 (ii) 部分的微分方程。

3. **時間差距。**證明若 $kT > h$，時間差距 $t_2(y) - t_1(y)$ 先增加，然後減少至零，並求它在何處最大。若 $kT \le h$，又會怎樣？試解釋其意義。

4 **三輛剷雪車。**第三輛剷雪車在時間 $2T$ 出發。寫出它的運動方程。它追上第二輛車，是在第二輛車追上第一輛車之前還是之後？

延伸閱讀

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。剷雪車問題的原始出處。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press），書中討論了剷雪車問題和許多其他問題。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流與特徵線，程度淺易。

11.14 是拋物線，不是懸鏈線

題目

STEP I 1991，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/91-s1-q10`

引子

用手拿着一條鏈的兩端，它便會垂成一條稱為懸鏈線（catenary）的曲線（此名源自拉丁文的「鏈」字）。伽利略（Galileo）以為它是拋物線（parabola），其實不然，少年時代的惠更斯（Huygens）在 1646 年已證明了這一點。不過，若像懸索橋（suspension bridge）那樣，用等距排列的吊桿把沉重的路面掛在鏈上，鏈確實會形成拋物線。分別在於重量如何分佈：懸鏈線的重量沿彎曲的鏈身分佈，而橋的重量則沿水平方向均勻分佈。

本題只需在每個節點分解力（resolving forces），便能證明這條拋物線。關鍵在於張力（tension）的水平分量在整條鏈上處處相同，所以每一段的斜率都與它所承托的重量成正比。結果是一個優美的規律：相鄰節點之間的落差按奇數 $1, 3, 5, 7, \ldots$ 遞增，而這些奇數的部分和（partial sums）正是完全平方數。

動筆之前

想一想 在每個節點 A_i 上有三個力作用：相鄰兩段鏈的張力，以及吊桿上所掛的重量 w。重量無法影響張力的哪一個分量？

重量是鉛垂的，所以在每個節點上，兩個張力的水平分量必須互相平衡。因此，張力的水平分量（設為 H）在鏈的每一段都相同。

逐步解題

階段 1　每個節點上的方程

設線段 $A_{i-1}A_i$ 與水平線所成的俯角為 ϕ_i（由 A_{i-1} 向中間方向量度），則其張力 T_i 的水平分量為 $T_i\cos\phi_i$，鉛垂分量為 $T_i\sin\phi_i$。對 $1\le i\le n$，在 A_i 分解力：

$$T_i\cos\phi_i = T_{i+1}\cos\phi_{i+1} = H, \qquad T_i\sin\phi_i - T_{i+1}\sin\phi_{i+1} = w.$$

（外側的一段向上向外拉，鉛垂分量較大；內側的一段向內並稍微向下拉；兩者之差承托着吊桿。）

> **想一想**　在中間的節點 A_{n+1} 會怎樣？試利用橋的對稱性。

由對稱性，在 A_{n+1} 相接的兩段互為鏡像，所以各自承托該吊桿的一半重量：$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w$。

階段 2　由重量求斜率

由中間向外逐段計算，鉛垂分量為

$$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w, \quad T_n\sin\phi_n = \tfrac{3}{2}w, \quad \ldots, \quad T_1\sin\phi_1 = \tfrac{2n+1}{2}w.$$

把各式除以 H，得斜率為 $\tan\phi_i = \frac{(2(n+1-i)+1)w}{2H}$。線段 $A_{i-1}A_i$ 的斜率同時等於 $\frac{y_{i-1}-y_i}{h}$，所以

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{h} = \frac{w}{2H}, \qquad \frac{y_{n-1}-y_n}{h} = \frac{3w}{2H}, \qquad \cdots, \qquad \frac{y_0-y_1}{h} = \frac{(2n+1)w}{2H}.$$

取倒數後再乘以相應的奇數，可知 $\frac{h}{y_n-y_{n+1}}$、$\frac{3h}{y_{n-1}-y_n}$、…、$\frac{(2n+1)h}{y_0-y_1}$ 各項均等於 $\frac{2H}{w}$。 ■

階段 3　拋物線

> **想一想**　設 j 為由中間向外數的節點序數，使得 A_{n+1-j} 與 A_{n+1} 的水平距離為 jh。它比 A_{n+1} 高出多少？

把各段落差相加，並設 $c = \frac{wh}{2H}$：

$$y_{n+1-j} - y_{n+1} = c(1+3+5+\cdots+(2j-1)) = cj^2.$$

若 x 由中間量起，則 $x = jh$，所以該點高出最低節點 $\frac{c}{h^2}x^2 = \frac{w}{2Hh}x^2$。由對稱性，另一邊亦然，而兩個支承點（$j = n+1$）也符合同一公式。因此所有點都位於拋物線

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2. \qquad \blacksquare$$

上。

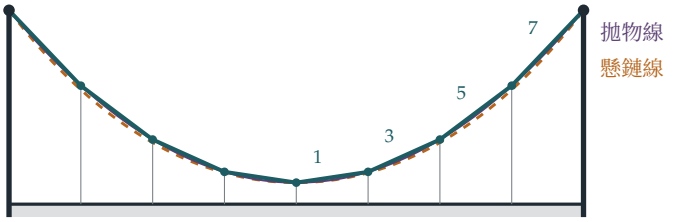


圖 11.14.1 一條在相等水平間距上承受相等負載的鏈（藍綠色）。它的節點位於一條拋物線上（紫紅色），而由中間向外，相鄰節點之間的落差之比為 $1:3:5:7$。一條只受自身重量、兩端和最低點相同的自由鏈，則會垂成懸鏈線（琥珀色虛線），其底部較平坦，近支承點處較陡。

回顧

- **找出不變的量。**只有鉛垂負載時，水平張力處處相同。
- **由中間開始累加。**每一段都承托它與中間之間的全部重量，所以鉛垂分量每次增加 w。
- **奇數之和是平方數。**$1+3+\cdots+(2j-1)=j^2$ 把一列斜率變成了一條拋物線。

背後的數學

拋物線還是懸鏈線？

把上述論證改為連續的版本，便能同時解釋這兩條曲線。對於一條水平張力恆為 H 的鏈 $y(x)$，張力的鉛垂分量為 Hy'，而在一小段上，它的變化等於該段所承受的負載：$H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$。

- 若負載沿水平方向均勻分佈（沉重的路面，每單位路面長度的重量為 ρ），則 $Hy'' = \rho$，所以 y 是二次函數：一條拋物線。
- 若負載是鏈本身的重量，沿鏈身均勻分佈（每單位鏈長的重量為 ρ），則 $Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$，其解為懸鏈線 $y = c\cosh\frac{x}{c}$，其中 $c = H/\rho$。

在底部附近，鏈幾乎是水平的，兩者差不多一樣；它們在支承點附近才有分別，因為那裏的鏈較陡，同一段水平距離內包含較多的鏈。真實的懸索橋，橋面遠比纜索重，所以形狀十分接近拋物線。

倒轉的鏈與拱

鏈處於純張力狀態；把它的形狀上下倒轉，便得到一個處於純壓力（compression）狀態的拱，完全沒有彎曲的傾向。胡克（Robert Hooke）在 1675 年以一個字謎（anagram）的形式發表了這個發現，解開後的意思是：「柔軟的繩怎樣懸垂，倒轉過來，堅硬的拱便怎樣屹立。」雷恩（Christopher Wren）與胡克把這個想法用於聖保羅大教堂（St Paul's Cathedral）的圓頂，而高迪（Antoni Gaudí）設計巴塞隆拿的聖家堂（Sagrada Família）時，則從天花板垂下掛着重物的繩子，再把照片倒轉來看。聖路易斯的拱門（Gateway Arch）就是一條（加權的）倒置懸鏈線。

懸鏈線的挑戰

1690 年，雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）向數學家提出挑戰：求出懸垂的鏈的形狀。不出一年，他的弟弟約翰（Johann）、萊布尼茲（Leibniz）和惠更斯都發表了解答。約翰·伯努利後來得意地憶述，出題的哥哥自己反而解不出來。懸鏈線是新興的微積分（calculus）最早的勝利之一，並引出了雙曲函數（hyperbolic functions）cosh 和 sinh；到了十八世紀，Vincenzo Riccati 和蘭伯特（Johann Heinrich Lambert）對這些函數作了有系統的研究。

思維技巧

在每個節點分解力

對於由節點和直桿件組成的結構，在每個節點上令各力平衡。不變的分量和逐步累積的負載，往往會揭示結構的形狀。

到了大學，這會發展成工程學中桁架（trusses）和框架（frameworks）的分析，而在連續極限下，則成為纜索、樑和薄膜的微分方程（differential equations）。由離散的鏈過渡到連續的鏈，與 Section 10.3 中由求和過渡到積分是同一步。

延伸練習

1 **偶數條吊桿。**把題目改為 $2n$ 條吊桿再做一次，此時鏈的最低處是中間的一段水平線段。各節點是否仍然位於一條拋物線上？

2 **張力。**以 H、w 和 n 表示鏈中的最大張力。它出現在哪裏？

3 **懸鏈線。**驗證 $y = c\cosh\frac{x}{c}$ 滿足 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$。證明懸鏈線由 $x = 0$ 到 $x = X$ 的長度為 $c\sinh\frac{X}{c}$。

4 **伽利略的錯誤。**一條長度為 $2L$ 的鏈懸掛在相距 $2d$ 的兩個支承點之間。當 L 只比 d 稍大時，證明懸鏈線的垂度（sag）與拋物線的垂度近似相同。為甚麼伽利略的實驗沒有顯示出兩者的分別？

延伸閱讀

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。懸鏈線、拋物線及其相關曲線。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。由胡克的鏈說起，講述磚石拱和圓頂如何屹立不倒。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。橋樑的藝術與工程。

我們學到了甚麼

這一章由會擺動的物體、會旋轉的物體，以及從運動中的位置所看到的景象說起。我們提出了三個問題：運動在甚麼時候才算簡單？怎樣才是合適的觀點？直覺是否可靠？以下是本章十四道題目所揭示的答案。

1. 運動在甚麼時候才算簡單？

簡諧運動（simple harmonic motion）只有單一頻率（frequency），而且頻率與振幅（amplitude）無關，是最理想的情況。以固有頻率（natural frequency）驅動它，便會產生共振（resonance）（Section 11.1）：稍為偏離共振時出現拍（beats），恰好處於共振時則無止境地增長。兩個耦合振子（coupled oscillators）原來只是兩個各自獨立的簡單振子喬裝而成（Section 11.2），但兩者頻率之比是無理數 $\sqrt{3}$，所以合成的運動永不重複。真實的擺一點也不簡單（Section 11.3）：它的週期（period）隨振幅增大，當中涉及一個橢圓積分（elliptic integral），而高斯（Gauss）的算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）能以驚人的速度把它算出來。至於等時曲線（tautochrone）（Section 11.4），則說明了只要把軌道彎成擺線（cycloid），運動便可以再次變得完全簡單。

2. 怎樣才是合適的觀點？

幾乎每一道題目，都是靠選對變量或選對參考系（frame）而解決的。

- **坐標。**弧長（arc length）令等時曲線變得簡單；組合 $x \pm y$ 把兩個彈簧解耦（decouple）；改用佔繩長的比例，便消去了螞蟻問題中繩子的伸長（Section 11.12）；把時間寫成距離的函數，令鏟雪車的方程變成線性（Section 11.13）。
- **參考系。**在加速的火車中（Section 11.5），一個虛擬力（fictitious force）使重力傾斜，珠子於是圍繞新的最低點振動。愛因斯坦（Einstein）把這個觀察發展成廣義相對論（general relativity）。
- **取矩的參考點。**對於旋轉的彈珠（Section 11.6），由於摩擦力正正作用於接觸點，所以對接觸點的角動量（angular momentum）守恆，毋須知道摩擦力的大小也可求得最終速率。
- **等效系統。**一根桿的表現與三個質點完全相同（Section 11.7），各質點的權重正是辛普森法則（Simpson's rule）中的權重；而一個立體的平衡位置，就是其法線（normal）

穿過質心（centre of mass）之處（Section 11.8）。

3. 直覺是否可靠？

往往並不可靠。大炮射程所及區域的邊界並不是一條彈道，而是所有彈道的包絡線（envelope）(Section 11.9)。把球拋得夠陡，它在落地之前會朝你飛回來(Section 11.10)。外野手毋須預測球的落點，只要令球的影像保持穩定上升，便可以把球接住（Section 11.11）。一隻螞蟻沿着繩子慢慢爬行，即使繩子伸長的速度比牠快十萬倍，牠仍然能到達盡頭(Section 11.12)。懸垂的鏈並不是拋物線，但承托着橋面的鏈卻是（Section 11.14）。在每一個例子中，一段簡短的計算都以精確的陳述取代了自信卻錯誤的直覺，而且通常還附帶一個解釋。

4. 處理振動與參考系的工具箱

方法	在哪裏用過
特解加餘函數（particular plus complementary solution）	共振（11.1）
以特徵向量（eigenvector）解耦	簡正模式（normal modes）（11.2）
能量積分與代換	擺（11.3）
自然變量	等時曲線（11.4）；螞蟻（11.12）
虛擬力	火車（11.5）
對某一點的角動量	回旋（11.6）
配對各階矩（matching moments）	辛普森桿（11.7）
數算駐點（stationary point）	傾斜的平衡（11.8）
判別式（discriminant）與包絡線	安全拋物線（11.9）
導數的正負號	飛回來（11.10）
比較係數	外野手（11.11）
積分因子（integrating factor）	螞蟻（11.12）；鏟雪車（11.13）
在接點處分解力	橋（11.14）

下一步

- 接下來的兩章轉向概率與統計，由 Section 12.1 開始。
- 簡正模式就是特徵向量（Section 7.2），而 Section 8.6 的量子諧振子（quantum harmonic oscillator），就是本章的振子在量子力學中的版本。
- 極限環(limit cycle)(Section 8.4)是能夠自我維持的振動，而混沌(chaos)(Section 8.7)則是非線性振子受驅動時可能出現的現象。

如果你想在入讀大學之前再進一步

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***：講解振動、共振與簡正模式的經典入門書。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***：轉動、參考系，以及許多出人意表的問題。
- **Steven Strogatz, *Sync***：由螢火蟲到橋樑，振子如何變得步伐一致。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***：等時曲線、最速降線（brachistochrone）與鏟雪車問題，連同它們的歷史。

Coleman 曾打趣說，物理學家的一生，就是以愈來愈抽象的方式處理諧振子。本章嘗試說明箇中原因：振子是最簡單的運動，而只要選對觀點，幾乎任何事物看起來都像一個振子。學會尋找這個觀點，不論是一個變量、一個參考系，還是一個組合，正是力學所教的最有用的技巧。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：只列出結果和關鍵步驟，讓你核對自己的做法。請先認真做完每道練習，然後才翻看。

11.1 共振

1. 在升降機的參考系（frame）中，重力實際上相當於 $g - f$，而弦線的勁度（stiffness）是 $\frac{mg}{a}$（在 mg 的作用下它伸長 a）。因此 $\ddot{y} + \frac{g}{a}y = g - f$，開始時 $y = a$、$\dot{y} = 0$。新的平衡位置（equilibrium）是 $a - \frac{af}{g}$，所以 $y = a - \frac{af}{g}(1 - \cos\omega t)$：振幅（amplitude）為 $\frac{af}{g}$，而最小伸長量 $a(1 - \frac{2f}{g})$ 是正數。升降機停止加速時，平衡位置回到 a，此時質點的位移是 $-\frac{af}{g}(1 - \cos\omega T)$，速度是 $-\frac{af}{g}\omega\sin\omega T$。新的振幅是 $\frac{af}{g}\sqrt{(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T} = \frac{2af}{g}\left|\sin\frac{1}{2}\omega T\right|$。

2. 由 $x = Ct\cos nt$ 得 $\ddot{x} + n^2x = -2Cn\sin nt$，所以 $C = -\frac{nb}{2}$。再加上 $\frac{b}{2}\sin nt$ 以符合初始條件：$x = \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt)$。對題目中的公式就 p 使用洛必達法則（L'Hôpital's rule），當 $p \to n$ 時會得到相同的結果。

3. $n\sin pt - p\sin nt = n(\sin pt - \sin nt) + (n - p)\sin nt = 2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2} + (n - p)\sin nt$。第二項很小。第一項是一個快速振盪，被包在緩慢變化的包絡（envelope）$\left|\sin\frac{(n-p)t}{2}\right|$ 之內，而這個包絡每隔 $\frac{2\pi}{n-p}$ 重複一次。

4. 振幅是 $\frac{F}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4k^2p^2}}$。把分母對 p^2 求極小：$-2(n^2 - p^2) + 4k^2 = 0$，所以 $p^2 = n^2 - 2k^2$。

11.2 簡正模式

1. 求導後，能量的變化率是 $\dot{x}\big(m\ddot{x} + \frac{\lambda}{a}(2x + y)\big) + \dot{y}\big(m\ddot{y} + \frac{\lambda}{a}(x + 2y)\big) = 0$。設 $u = x - y$ 及 $v = x + y$，能量便是 $\big(\frac{m}{4}\dot{u}^2 + \frac{\lambda}{4a}u^2\big) + \big(\frac{m}{4}\dot{v}^2 + \frac{3\lambda}{4a}v^2\big)$，每個括號都是一個簡諧振子（simple harmonic oscillator）的能量，所以各自都是常數。

2. 週期 $\frac{2\pi}{\omega}$：以 $x = -y$ 及 $\dot{x} = -\dot{y}$ 開始（使得 $v \equiv 0$）。週期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$：以 $x = y$ 及 $\dot{x} = \dot{y}$ 開始。

3. 作用於 X 的力是 $-\frac{\lambda}{a}x - \frac{\mu}{a}(x + y)$。模式（mode）$x - y$ 仍然有 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$，而 $x + y$ 現在則是 $\frac{\lambda+2\mu}{ma}$。當且僅當頻率之比 $\sqrt{1 + 2\mu/\lambda}$ 是有理數時，所有運動都是週期

性的。

4. 矩陣是 $\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，特徵向量（eigenvector）為 $(1,\sqrt{2},1)$、$(1,0,-1)$ 和 $(1,-\sqrt{2},1)$，分別對應 $2-\sqrt{2}$、2 和 $2+\sqrt{2}$。三個模式是：三者一同擺動，中間的擺幅最大；外側兩個反向擺動，中間的靜止不動；以及中間的與外側兩個反向擺動。

11.3 真實的擺

1. 能量：$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\frac{1}{2}mv^2$。位移最大時 $\sqrt{x^2+a^2}=a+\frac{v}{k}$，所以 $x_{\max}=\sqrt{\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2}}$。當 v 很小時，伸長量約為 $\frac{x^2}{2a}$，所以 $\dot{x}^2\approx v^2-\frac{k^2x^4}{4a^2}$。設 $x=Xu$ 及 $X=\sqrt{2av/k}$，週期 $4\int_0^X\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$ 便化為 $\frac{4X}{v}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$。回復力（restoring force）與 x^3 成正比，而不是與 x 成正比（在 $x=0$ 時弦線剛好處於自然長度），所以不存在簡諧極限。

2. $(1-m\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{m}{2}\sin^2\phi+\frac{3m^2}{8}\sin^4\phi$，其中 $m=\sin^2\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^4}{48}$。對 ϕ 取平均得 $1+\frac{m}{4}+\frac{9m^2}{64}$，而 γ^4 項是 $-\frac{1}{192}+\frac{9}{1024}=\frac{11}{3072}$。

3. 由 1 和 $\cos 45^\circ=0.70711$ 開始：$(0.85355,0.84090)$，然後 $(0.84722,0.84720)$，然後 0.847213。週期因子是 $\frac{1}{0.847213}=1.18034$。

4. 週期因子的變化是 $\frac{1}{16}(\gamma_5^2-\gamma_4^2)\approx 1.71\times10^{-4}$（以弧度計），所以時鐘每天大約慢 15 秒。

11.4 等時曲線

1. 由於 $y=\frac{s^2}{4k}$，$\ddot{s}=-g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-\frac{g}{2k}s$：這是 $\omega^2=\frac{g}{2k}$ 的簡諧運動（simple harmonic motion）。由 $s_0=2\sqrt{kh}$ 出發，在 V 處的速率是 $\omega s_0=\sqrt{2gh}$。

2. 這個碗相當於一個長度為 R 的擺。從很小的高度出發，到達底部所需的時間是 $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$。從碗邊（$\gamma=90^\circ$）出發，所需時間是這個值的 1.180 倍，約為 $1.85\sqrt{R/g}$。

3. 會。兩者都在四分之一週期後到達 V，並在該處碰撞。無論它們碰撞後以甚麼速度離開，各自都以 s 作簡諧運動，而且週期相同，所以各自恰好在半個週期後回到 V，並再次在 V 碰撞。（碰撞後靜止於 V 的質點則會一直留在該處。）

4. 設 $x=R(\theta-\sin\theta)$ 及 $y=R(1-\cos\theta)$，則 $\mathrm{d}s=2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$，所以一拱的長度是 $\int_0^{2\pi}2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=8R$。面積是 $\int y\,\mathrm{d}x=R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=3\pi R^2$。

11.5 加速火車中的重力

1. 在車廂的參考系中，每單位質量受到一個向後（向南）的力 a，方向與發射方向相同。飛行時間為 $\frac{2V\sin\theta}{g}$，所以射程是 $\frac{V^2}{g}\big(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\big)$。當 $\tan 2\theta = -\frac{g}{a}$ 時它的導數為零，所以 $2\theta \approx \frac{\pi}{2} + \frac{a}{g}$。極大值是 $\frac{V^2}{g}\big(\sqrt{1+a^2/g^2} + \frac{a}{g}\big) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2}$。

2. $x = ut\cos\theta - \frac{1}{2}ft^2$，在 $t = \frac{2u\sin\theta}{g}$ 時着地，着地點為 $x = \frac{2u^2\sin\theta}{g^2}(g\cos\theta - f\sin\theta)$。若 $\tan\theta > \frac{g}{2f}$，水平速度 $u\cos\theta - ft$ 會在着地前變為負數，所以 $\alpha = \tan^{-1}\frac{g}{2f}$。當 $f = g$ 及 $\theta = 45°$ 時，加速度剛好與初速度方向相反：拋體（projectile）沿直線 $y = x$ 筆直向上，停下，然後沿原路直接返回 O。

3. 有效重力（effective gravity）是向下的 g 加上向後的 a。自由液面與它垂直，所以傾斜的角度是 $\tan^{-1}\frac{a}{g}$。

4. 有效重力的大小是 $\sqrt{g^2+a^2}$，在 $x = \frac{ak}{2g}$ 處斜率是 $\frac{a}{g}$，曲率半徑（radius of curvature）是 $\rho = \frac{k}{2}\big(1+\frac{a^2}{g^2}\big)^{3/2}$。週期是 $2\pi\sqrt{\rho/\sqrt{g^2+a^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k(g^2+a^2)}{2g^3}}$，當 $a = 0$ 時簡化為 $2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$。

11.6 後旋

1. 摩擦力作用於接觸點，所以對該點的角動量（angular momentum）守恆：$maV + \frac{2}{5}ma^2\frac{V}{a} = mav_0 + \frac{2}{5}ma^2\omega_0$。因此 $V = \frac{5v_0+2a\omega_0}{7}$，當 $\frac{v_0}{a\omega_0} < 1$ 時它大於 v_0。

2. $V = \frac{5}{7}v_0$。最終能量是 $\frac{1}{2}m\big(\frac{5}{7}v_0\big)^2\big(1+\frac{2}{5}\big) = \frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$，所以損失了 $\frac{2}{7}$ 的能量。

3. 以 $I = ma^2$ 重複同一論證，得 $V = \frac{1}{2}(v_0 - a\omega_0)$。令 $V = -\frac{v_0}{7}$，得 $\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{7}{9}$。

4. 在球心上方高度 h 處施加衝量（impulse）J，得 $mv = J$ 及 $\frac{2}{5}ma^2\omega = Jh$。滾動需要 $v = a\omega$，所以 $h = \frac{2}{5}a$。

11.7 桿中的辛普森法則

1. $\frac{1}{6}\big(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\big) = \frac{47}{60} \approx 0.7833$，而 $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$。對於 $\int_{-1}^{1}$，法則 $\frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(-1) + 4\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(1)\big)$ 對 x^3 給出 0，對 x^2 給出 $\frac{2}{3}$（兩者都是準確值），但對 x^4 給出 $\frac{2}{3}$，而它的積分其實是 $\frac{2}{5}$。

2. 對於與基準方向成角 ψ 的軸，轉動慣量（moment of inertia）是一個二次型（quadratic form）$A\cos^2\psi + B\sin^2\psi + 2C\sin\psi\cos\psi$。在 $\psi \mapsto \psi + 90°$ 之下不變，迫使 $A = B$ 及 $C = 0$，所以對每一條軸都相同：$\frac{1}{3}Ma^2$，即對平行於一邊的軸的值。

3. 在每邊中點各放置 $\frac{1}{3}$ 的面積，便能準確地在三角形上積分任何二次式（可在直角三

角形上驗證 1、x、x^2、xy）。所以這三個質點與該薄片（lamina）有相同的質量、質心（centre of mass）和二階矩（second moments）。

4. 在每個方向上，取桿在 $-a$、0、a 處的權重 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ 的乘積：頂點處為 $\frac{M}{216}$，棱的中點處為 $\frac{M}{54}$，面心處為 $\frac{2M}{27}$，中心處為 $\frac{8M}{27}$。對通過中心且平行於一條棱的軸，$I = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2}{3}Ma^2$。根據平行軸定理（parallel axis theorem），對一條棱的轉動慣量是 $\frac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}a)^2 = \frac{8}{3}Ma^2$。

11.8 傾斜的平衡

1. 由公共面起向圓錐方向量度，G 位於 $\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3a}{8} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda a}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{3}} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(2+\lambda)}$。在半球上，接觸點處的法線必定通過該面的中心，所以當 G 低於該中心，即 $\lambda < \sqrt{3}$ 時，玩具會自行回正。側臥時，玩具沿圓錐的一條母線（generator）及在邊緣處與桌面接觸；若通過 G 的鉛垂線落在頂點與邊緣之間，它便會停留在那裏。這需要 G 的高度至少為 $-\frac{a}{\lambda}$，化簡後即 $\lambda^3 + \lambda + 8 > 0$：恆成立。

2. 均勻球體上的每一點都是平衡位置（隨遇平衡）。若質心稍微偏離球心，便只有兩個：G 在最低處（穩定）和 G 在最高處（不穩定）。

3. 平衡出現在法線通過中心之處：即兩軸的四個端點。靠在短軸的一端是穩定的（G 盡可能低）；靠在長軸的一端則不穩定。

4. 由對稱性，G 在原點。當 $n = 2$ 時，$Y = r\left(\frac{1}{2} - p^2\right)$，而傾斜平衡需要法線通過 G，所以 $Y = 0$ 及 $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$。該處的斜率是 $-\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 傾斜的角度是 $\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.7°$，若靠在另一個拋物面上則是 $125.3°$。兩者互為關於 x 軸的反射，這就是傾斜角成對出現的原因。

11.9 安全拋物線

1. 每個質點位於 $ut\,\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$，即在以 $-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$ 為球心、半徑為 ut 的球面上。從 $(0, \frac{u^2}{2g})$ 水平射出的質點沿 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ 運動：這正是安全拋物線（parabola of safety）。以角 α 射出的質點在時間 $\frac{u}{g\sin\alpha}$ 於 $x = \frac{u^2}{g\tan\alpha}$ 處與它相切；水平射出的質點需時 $\frac{x}{u}$ 到達該處，所以它必須在時間 $\frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{u}{g}\tan\frac{\alpha}{2}$ 發射（這需要 $\alpha \geq 45°$，使切點在地面之上）。

2. 該直線與安全拋物線相交於 $R\sin\beta = \frac{u^2}{2g} - \frac{gR^2\cos^2\beta}{2u^2}$ 之處，得 $R = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$。在極大值處，練習 3 的兩個角重合，所以最佳角度是角平分線的方向，即 $45° + \frac{1}{2}\beta$。

3. 設 $\lambda = \tan\theta$，兩個值滿足 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2u^2}{gx}$ 及 $\lambda_1\lambda_2 = 1 + \frac{2u^2y}{gx^2}$。所以 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x}{y}$ 及 $\theta_1 + \theta_2 = 90° + \varphi$，其中 φ 是 OP 的仰角。OP 與鉛垂線的角平分線位於 $\frac{1}{2}(90° + \varphi)$。

4. 頂點位於 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$，焦距（focal length）是 $\frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$，所以焦點（focus）的高度是 $\frac{u^2}{2g}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$。無論 θ 是多少，它與 O 的距離都是 $\frac{u^2}{2g}$。

11.10 會朝你飛回來的球

1. 取單位使 $u = g = 1$，則 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = t(t^2 - 3t\sin\alpha + 2)$，其根為 $t \approx 1.050$（局部極大，$OP \approx 0.516\frac{u^2}{g}$）和 $t \approx 1.904$（局部極小，$OP \approx 0.336\frac{u^2}{g}$）。球在 $t \approx 1.970$ 着地。

2. 沿斜面及垂直於斜面方向分解，$OP^2 = u^2t^2 - ugt^3\sin(\alpha' + \beta) + \frac{1}{4}g^2t^4$，其中 α' 由斜面起量度。這就是平地的公式，只是 $\alpha = \alpha' + \beta$。所以條件 $\sin(\alpha' + \beta) > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 所涉及的是與水平所成的角；若由斜面起量度，臨界角便降至 $70.5° - \beta$（前提是球尚未着地）。

3. 較小。阻力（drag）抵消水平運動，並使下降變得更陡，所以球落回時更接近鉛垂方向，令 OP 更容易縮短。

4. OP^2 的公式不涉及着地點，所以與之前一樣，當且僅當 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 時，OP 會有一段時間遞減（而飛行時間較長，意味着遞減階段必定在着地之前出現）。最終下落佔主導，OP 便會遞增。

11.11 外野手如何接球

1. 若她站在 D_0 處，並以速度 v 背離擊球手（batsman）跑動，球便在她前方 $D_0 + vt - Ut$ 的距離處。要接到球，她需要 $D_0 + vT = UT$，這時距離是 $(U - v)(T - t)$，所以 $\tan\theta = \frac{gt}{2(U-v)}$，同樣是線性的。若球落在她身後，則 $UT > D_0$ 及 $v > 0$：她向後跑。

2. $\theta = \tan^{-1}\frac{gt}{2U}$，所以 $\dot\theta = \frac{g/2U}{1+(gt/2U)^2}$，它是遞減的。$\tan\theta$ 之所以是線性的，是因為高度 $\frac{1}{2}gt(T - t)$ 和距離 $U(T - t)$ 有公因式 $T - t$。

3. 會。相對於她眼睛的高度是一個在接球時刻為零的二次式，所以可因式分解為 $(T - t)(c + dt)$；除以 $U(T - t)$ 後剩下一個線性函數（它起初是負數：她最初要向下看）。

4. 不會。有阻力時，水平距離是 $\frac{U}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kT})$，而高度並不等於它乘以 t 的一個線性函數，所以 $\tan\theta$ 不再是線性的。

11.12 橡皮繩上的螞蟻

1. $\frac{x}{a+ut} = \frac{1}{k}\ln\frac{a+ut}{a}$，它在 $t = \frac{a}{u}(\mathrm{e}^{k/2} - 1)$ 時等於 $\frac{1}{2}$。由於 $\frac{T}{2} = \frac{a}{2u}(\mathrm{e}^{k/2} - 1)(\mathrm{e}^{k/2} + 1)$ 而 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{k/2} + 1) > 1$，這個時刻在 $\frac{T}{2}$ 之前。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{v}{L} = \frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\lambda t}$，所以 $\frac{x}{L} = \frac{v}{a\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})$，只有當 $v > \lambda a$ 時才會達到 1。
3. $\frac{x}{L} = v\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a+\frac{1}{2}bs^2}$，它趨向 $\frac{v\pi}{\sqrt{2ab}}$。所以只有當 $v > \frac{\sqrt{2ab}}{\pi}$ 時，螞蟻才會到達。
4. 這需要 $\frac{H_N}{100\,000} = \frac{1}{100}$，所以 $H_N = 1000$，而 $N \approx \mathrm{e}^{999.4} \approx 10^{434}$ 秒。

11.13 鏟雪車問題

1. 正午後時間 t 的積雪深度與 $t+t_0$ 成正比，所以鏟雪車走過的距離是 $c\ln\frac{t+t_0}{t_0}$。條件 $x(1) = 2$ 及 $x(2) = 3$ 給出 $\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2$。設 $u = \frac{1}{t_0}$，這便化簡為 $u^2 - u - 1 = 0$，所以 $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 及 $t_0 \approx 0.618$ 小時：大約在 11:23 開始下雪。
2. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} - \frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y} + \alpha\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$，而 $\alpha\left(t - (\mathrm{e}^{\alpha y}-1)\frac{h}{k}\right)$ 與它相同。
3. 時間差距是 $\left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$，它的導數在 $y = \frac{kT-h}{\alpha h}$ 處為零。若 $kT > h$，差距會一直增大到該處，然後縮小，在 $y = \frac{kT}{\alpha h}$ 處減至 0。若 $kT \le h$，導數 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}\left(T - \frac{h}{k} - \frac{\alpha h y}{k}\right)$ 對所有 $y > 0$ 都是負數，所以差距從一開始便縮小。第二輛鏟雪車面對的積雪深度是 $k\times$（差距）；只要這比第一輛鏟雪車在同一地點遇到的積雪深，它便會落後得更遠。
4. $\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}y} = t_3 - t_2(y)$。寫成 $t_3 = t_2 + g$，得 $g = \mathrm{e}^{\alpha y}\left(T - \alpha T y + \frac{\alpha^2 h y^2}{2k}\right)$。若 $kT \ge 2h$，它在 $y = \frac{k}{\alpha h}\left(T - \sqrt{T^2 - 2hT/k}\right)$ 處為零，早於第二輛鏟雪車追上第一輛之處；若 $kT < 2h$，則第二輛會先追上第一輛。

11.14 是拋物線，不是懸鏈線

1. 是。水平張力 H 仍然是常數，中間一段的斜率為 0，其後斜率每次遞增 $\frac{w}{H}$。以水平一段的中點為起點量度 x，第 k 個接點位於 $x = (k-\frac{1}{2})h$，比最低的接點高出 $\frac{wh}{2H}k(k-1)$，即 $\frac{w}{2Hh}\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)$：是一條拋物線。
2. 張力是 $\sqrt{H^2+V^2}$，在垂直分量 V 最大之處最大：即在兩端的一段，該處 V 承托一半的負載，即 $\frac{(2n+1)w}{2}$。所以 $T_{\max} = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(2n+1)^2w^2}$。
3. $y' = \sinh\frac{x}{c}$ 及 $y'' = \frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}}$。長度是 $\int_0^X \cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = c\sinh\frac{X}{c}$。
4. 對於垂度(sag)為 s 的平緩曲線，懸鏈線(catenary)和拋物線的長度都約為 $2d + \frac{4s^2}{3d}$，所以兩者都給出 $s \approx \sqrt{\frac{3}{2}d(L-d)}$；它們只在 s^4 階才有分別。對於一條幾乎拉緊的鏈，這個差別遠小於伽利略（Galileo）所能量度的任何數值。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 11 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。