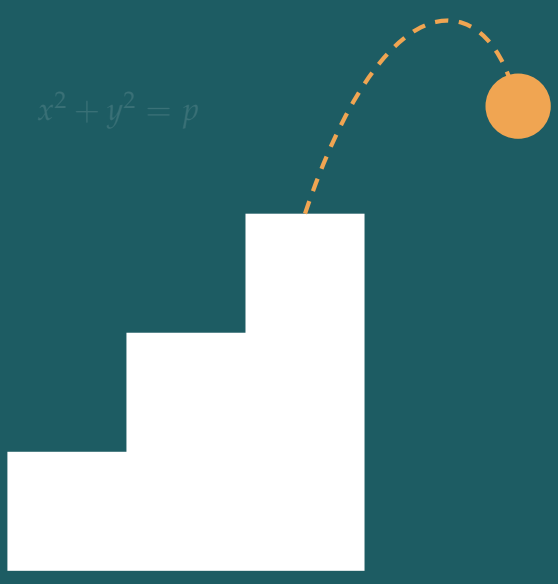
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 10 章

守恆定律、碰撞與引力



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 10 章

守恆定律、碰撞與引力

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 10 章：守恆定律、碰撞與引力

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 10 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

10

守恆定律、碰撞與引力

有些東西永遠不變。知道是哪些，物理學就懂了一半。

本章內容

10.1	牛頓擺	STEP II 1990
10.2	疊球效應	STEP II 2010
10.3	火箭與槍炮	STEP III 2017
10.4	一個分子與一個活塞	STEP I 2002
10.5	有限時間內的無限次反彈	STEP III 2002
10.6	二體化為一體	STEP III 2004
10.7	球殼內的引力	STEP III 1999
10.8	排成三角形的三顆恆星	STEP I 1999
A	練習答案	第 59 頁

甚麼保持不變

> 有一個事實，或者你願意的話，可稱之爲一條定律，支配着迄今所知的一切自然現象。這條定律至今未見任何例外。
>
> — 費曼（Richard Feynman）論能量守恆，*The Feynman Lectures on Physics*（1963）

學校裏的力學（mechanics）通常離不開力：畫一幅圖，分解各力，再應用 $F = ma$。這套方法對付斜面上的木塊綽綽有餘，卻對付不了歷時僅千分之一秒的碰撞（collision），因為其間的力既巨大又未知；也對付不了一邊飛行一邊改變質量的火箭，或者三顆同時互相牽引的恆星。在這些情況下，出路是不再追問力，而改為追問甚麼不能改變。

只要沒有外力作用，動量（momentum）就守恆。在彈性碰撞（elastic collision）中能量守恆，而在其他碰撞中，能量的損失可以量度出來。質量、角動量（angular momentum）和質心（centre of mass）的運動也遵從類似的規律。這些定律不會告訴你一切，但它們永遠成立，適用於複雜得根本無法仔細分析的系統，而且往往在動手計算之前，就已排除了大部分的可能性。

守恆定律為何重要

守恆定律（conservation law）是物理學中最可靠的工具。在稱為 β 衰變（beta decay）的放射過程中，射出的粒子的能量加起來對不上數；泡利（Wolfgang Pauli）沒有放棄能量守恆，反而在 1930 年預言有一種看不見的粒子帶走了失去的能量，而中微子（neutrino）在二十六年後果然被探測到。工程師靠動量和能量的收支帳來設計防撞欄、安全氣袋和火箭。天文學家靠觀察質心來秤量恆星、尋找行星。到了 1918 年，諾特（Emmy Noether）解釋了這些定律為何成立：每一條守恆定律都是大自然某種對稱性（symmetry）的投影。動量守恆，是因為物理定律在任何地方都相同；能量守恆，是因為物理定律在任何時刻都相同。

引力（gravity）是本章的第二個主題。牛頓（Newton）正是用這種力把天上與地上統一起來，而它與守恆定律是天生的拍檔：軌道、引力彈弓和塌縮的星雲，全都要透過能量和動量，再加上一個關於球體的奇妙事實，才能理解。

你在大學會遇到甚麼

大學一年級的動力學（dynamics）課程就從這裏開始。你會遇到質點系統、質心與約化質量（reduced mass）、不同參考系（frame）中的碰撞、火箭之類的變質量系統，以及

物體在引力下的運動：開普勒（Kepler）定律、軌道、逃逸速度（escape velocity）。往後的課程會用拉格朗日（Lagrange）和哈密頓（Hamilton）的語言重新表述力學，屆時諾特定理（Noether's theorem）會成為一個精確的命題，而守恆定律可以從單獨一個函數的對稱性中直接讀出。再往前走，便是天體力學與三體問題（three-body problem）、分子運動論（kinetic theory）與統計力學（statistical mechanics）（Section 10.4 的活塞在那裏會變成氣體理論），以及愛因斯坦（Einstein）的引力理論。

貫穿本章的問題

三大問題

1. **守恆定律單憑自身能決定甚麼？**動量和能量何時能決定結果，何時只能排除某些可能？
2. **小步驟如何累積？**一個簡單的事件，例如一次碰撞或一次發射，重複多次甚至無限多次，會發生甚麼事？
3. **如何馴服多個物體？**哪些坐標的選擇、哪些對稱性，能把涉及幾個相互作用物體的問題，化為我們解得到的問題？

本章由碰撞開始：牛頓擺（Newton's cradle）做得到甚麼、做不到甚麼（Section 10.1），以及一串球如何令速率倍增（Section 10.2）。接着探討重複的過程：從貨車上開炮與火箭方程（rocket equation）、分子撞向活塞而愈來愈快，以及在有限時間內彈跳無限多次的冰球。最後三節轉向互相吸引或排斥的物體：質心與約化質量、球殼的引力，以及拉格朗日那個由恆星組成的旋轉三角形。

本章的概念

§	課題	概念
10.1	牛頓擺	守恆定律作為約束條件
10.2	疊球	迭代（iteration）同一種碰撞；引力彈弓
10.3	火箭	變質量；火箭方程
10.4	分子運動論	絕熱不變量（adiabatic invariant）
10.5	非彈性碰撞（inelastic collision）	有限時間內無限多次彈跳
10.6	二體問題（two-body problem）	質心與約化質量
10.7	牛頓引力	球殼定理（shell theorem）；自由落體式塌縮
10.8	三體問題	拉格朗日的等邊三角形解

如何閱讀本章

計算之前，先列出甚麼是守恆的，以及在哪個參考系中守恆。然後問一問：換個位置看，問題會否簡單一些？例如從質心看、從移動中的活塞看、從彈跳中的球看。本章不少題目在合適的參考系中幾乎變得不費吹灰之力，而力學的大部分功夫，正在於找出這個參考系。

10.1 牛頓擺

題目

STEP II 1990，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/90-s2-q14`

引子

把牛頓擺（Newton's cradle）的一個球拉開，然後放手：另一端會有一個球飛出。拉開兩個，就有兩個飛出。為甚麼？為甚麼不是一個球以兩倍速率飛出，或者三個球以三分之二的速率飛出？這兩種情況的動量同樣正確。

答案要從力學的兩大守恆定律（conservation laws）說起。動量（momentum）與能量（energy）合起來所施加的限制，遠比其中任何一個單獨施加的嚴格得多，你想像得到的結果大多會被它們排除。本題把這兩條定律用作約束條件（constraints）：不是用來計算會發生甚麼，而是用來判斷甚麼可以發生。把守恆定律看成每一個可能結果都必須遵守的規則，這種想法貫穿整個物理學。

動筆之前

想一想 一粒質量為 m 的彈珠以速率 u 運動，撞上一粒質量為 M 的靜止彈珠，而動能（kinetic energy）守恆。碰撞後兩者的速度是多少？若 $M = m$ 又如何？

設碰撞後的速度為 p 和 q。由動量得 $mp + Mq = mu$，由能量得 $mp^2 + Mq^2 = mu^2$。把這兩式寫成 $m(u-p) = Mq$ 和 $m(u-p)(u+p) = Mq^2$，然後相除，得 $u + p = q$。於是

$$p = \frac{m-M}{m+M}\,u, \qquad q = \frac{2m}{m+M}\,u.$$

當 $M = m$ 時，第一粒彈珠停下，第二粒以速率 u 離開：兩者只是交換了速度。這就是

質量相等的彈珠能把運動沿着隊列傳遞下去的原因。

逐步解題

階段 1　只有最後兩粒運動

想一想　假設碰撞後只有 A_n（速度 p）和 A_{n+1}（速度 q）運動。寫出守恆定律。哪一粒彈珠的運動限制了 p 的正負號？

由動量和能量得

$$mp + \lambda m q = mu, \qquad \tfrac{1}{2}mp^2 + \tfrac{1}{2}\lambda m q^2 = \tfrac{1}{2}mu^2.$$

這正是質量為 m 的彈珠撞上質量為 λm 的彈珠時的方程，所以（除了 $p = u$、$q = 0$ 這個解之外，而該解需要 A_n 穿過 A_{n+1}）

$$p = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,u, \qquad q = \frac{2}{1+\lambda}\,u.$$

若 $\lambda < 1$，兩者皆為正，且 $p < q$：A_n 跟在 A_{n+1} 後面，但走得較慢，所以兩者分開，一切並無矛盾。若 $\lambda > 1$，則 $p < 0$：A_n 向後運動。但 A_{n-1} 靜止在它的正後方，並與它接觸，而 A_n 不能穿過它。所以這種運動不可能發生。 ■

階段 2　三粒彈珠

想一想　現在假設只有 A_{n-1}、A_n 和 A_{n+1} 運動，速度分別為 a、b、c。已知哪些彈珠靜止、哪一粒在哪一粒後面，a、b、c 必須滿足甚麼不等式（inequalities）？

彈珠 A_{n-2} 靜止在 A_{n-1} 後面（它確實存在，因為 $n \geq 3$），所以 $a \geq 0$。而且沒有彈珠可以越過前面的那一粒，所以 $a \leq b \leq c$。合起來就是 $0 \leq a \leq b \leq c$。守恆定律為

$$a + b + \lambda c = u, \qquad a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2.$$

想一想　把動量方程平方，再與能量方程比較。剩下甚麼？

平方後，$u^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 c^2 + 2ab + 2\lambda ac + 2\lambda bc$。減去能量方程，

$$0 = \lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b).$$

由於 $\lambda > 1$ 且 $a, b, c \geq 0$，右邊每一項都非負，所以每一項都等於零。特別地，$c = 0$，於是 $0 \leq a \leq b \leq c$ 迫使 $a = b = 0$。但這樣總動量就是 0，而不是 mu。矛盾：這種運動不可能發生。 ■

停一停，試一試 留意這個論證的結構。把動量方程平方會產生 $2ab$ 之類的交叉項（cross terms），而能量方程卻沒有這些項。兩者之差量度了運動有多「分散」。當 $\lambda > 1$ 時，同一個論證可以排除只有 $A_k, \ldots, A_{n+1}$ 以非負速度運動的任何結果，你看得出原因嗎？

階段 3 兩粒可以運動的彈珠

想一想 向前運動的彈珠必須全部位於遠端，而這種情況既然行不通，也許有一粒彈珠是向後運動的。哪一粒彈珠可以自由地向後運動？

只有 A_0 的後面沒有任何東西。不妨試試：A_0 以速度 p 運動（可能是負數），A_{n+1} 以速度 q 運動，其餘全部靜止。守恆定律再次與質量為 m 和 λm 的兩個物體碰撞時相同，所以

$$p = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,u, \qquad q = \frac{2}{\lambda + 1}\,u.$$

A_0 反彈，A_{n+1} 向前運動，中間的彈珠保持靜止，一切並無矛盾。這就完全像是 A_0 直接撞上了 A_{n+1}，而中間那一列相等的彈珠充當了完美的信差。 ■

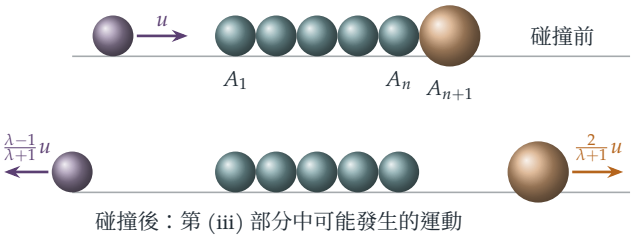


圖 10.1.1 一列相等的彈珠（藍綠色），末端是一粒較重的彈珠（琥珀色，$\lambda > 1$）。碰撞後，A_0 反彈，重彈珠離開，中間每一粒彈珠都保持靜止，完全像是 A_0 直接撞上了 A_{n+1}。

回顧

- **以守恆定律作為約束條件。**我們從來沒有仔細追蹤每一次碰撞，只是問：動量、能量和幾何條件容許哪些結果？
- **物理上的不等式十分重要。**「彈珠不能互相穿過」給出了不等式 $0 \le a \le b \le c$，而排除第 (i) 和第 (ii) 部分的，正是這些不等式，而不是守恆定律。
- **平方後相減。**把動量的平方與能量比較，會得出一個由交叉項組成的和，而這個和必須等於零。

背後的數學

為甚麼只有一個球飛出

在由相等的球組成的牛頓擺中，假設有 k 個球以速率 w 一起離開。由動量得 $kw = u$，由能量得 $kw^2 = u^2$。兩式相除，得 $w = u$ 及 $k = 1$。所以在離開的球一起運動的各種結果之中，只有「一個球以原來的速率離開」同時符合兩條定律。兩個球以一半速率離開，動量正確，但能量只有一半；一個球以兩倍速率離開，則只有當它是半個球時動量才正確。

但問題並未就此解決。若有 n 個球，就有 n 個未知的速度，而守恆定律只有兩條，所以同時符合兩者的結果有無窮多個（試找出一個三個球以不同速率運動的結果）。實際出現哪一個，取決於各球在接觸期間如何變形。1980 年代初，Frank Herrmann 和他的同事證明，我們熟悉的現象有賴於衝擊沿着隊列傳遞時不會擴散開去，而堅硬的鋼球之間留有極小空隙時正是如此。若用軟球，或者把球緊緊壓在一起，牛頓擺的表現就沒有那麼乾淨利落；仔細的量度更顯示，其他的球總會稍為移動。

守恆定律與對稱

守恆定律從何而來？1918 年，諾特（Emmy Noether）證明了一條定理，它是現代物理學的基石之一：物理系統的每一種連續對稱（continuous symmetry），都對應一個守恆量（conserved quantity）。如果物理定律在這裏與在左邊一米處相同（空間平移對稱），動量就守恆。如果物理定律今天與明天相同（時間平移對稱），能量就守恆。如果物理定律在每個方向都相同（旋轉對稱），角動量（angular momentum）就守恆。你會在大學二年級的拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）課程中學到諾特定理（Noether's theorem）；本章自始至終都在運用它的推論。

惠更斯、雷恩與沃利斯

1668 年，英國皇家學會（Royal Society）徵求物體碰撞問題的解答。沃利斯（John Wallis）處理了非彈性碰撞（inelastic collisions），而雷恩（Christopher Wren）和惠更斯（Christiaan Huygens）則各自獨立地解決了彈性（elastic）的情況。惠更斯的關鍵洞見是轉換參考系（frame）：在一艘隨質心（centre of mass）運動的船上觀察碰撞，這時兩個相等的球只是以相反方向、原來的速率彈回，然後再變換回岸上的觀點。他還注意到某一個量，即各質量乘以速率平方之和，在碰撞前後相同；不過要再過一個世紀，動能本身才被確認為一個守恆量。

思維技巧

利用守恆量排除不可能的情況

當一個過程複雜得無法追蹤時，列出不會改變的量，看看它們容許哪些結果。

物理學家正是這樣推斷粒子加速器中的碰撞：當中相互作用的細節並不清楚，但動量、能量和電荷必須平衡。再配合一個不等式（這裏是彈珠不能互相穿過），就可以證明某個結果不可能發生。

延伸練習

1 **同一個問題再現。**試做 STEP I 2006，第 11 題（`step.maths.org/questions/06-s1-q11`）：槽中有一列粒子，末端是較重的一粒。哪些最終狀態是可能的？

2 **追蹤各次碰撞。**把第 (iii) 部分的撞擊看成一連串獨立的兩粒彈珠碰撞，由 A_0 撞上 A_1 開始。逐步追蹤這一連串碰撞，並證明最後得到的正是第 (iii) 部分所求得的運動。

3 **兩個球撞入。**在一個由五個相等的球組成的牛頓擺中，兩個球同時釋放，以速率 u 撞上其餘三個。證明「兩個球以速率 u 離開」與兩條守恆定律並無矛盾，並找出另一個同樣符合的結果。

4 **末端較輕。**若 $\lambda < 1$，追蹤一連串的兩粒彈珠碰撞。除了 A_n 和 A_{n+1} 之外，最後還有其他彈珠在運動嗎？

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。動量守恆與能量守恆，附有大量關於碰撞的習題。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, "Simple explanation of a well-known collision experiment"**，*American Journal of Physics* 49 (1981)。解釋牛頓擺為何行得通。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。深入淺出地講述對稱與守恆之間的聯繫。

10.2 疊球效應

題目

STEP II 2010，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/10-s2-q10`

引子

把一個網球放在籃球上面，然後讓兩個球一起落下。籃球從地面反彈，網球隨即向上飛射，升到原來下落高度的好幾倍，有時甚至高得撞上天花板。這個實驗請到戶外去做。

題目的第 (i) 部分說明，單獨一次碰撞有一個速率上限：無論撞過來的球有多重，一個靜止的球被撞之後，速率都不可能超過來球速率的兩倍。第 (ii) 部分則說明怎樣打破這個上限：讓運動沿着一串愈來愈輕的球傳遞下去，每傳一步，速率都會再乘上一個倍數。把太空探測器送往外行星，靠的正是同一個想法；也有人提出，超新星（supernova）爆發的機制當中有一部分也是如此。

動筆之前

想一想 根據 Section 10.1：若質量為 M、以速率 u 運動的物體與質量為 m 的靜止物體發生彈性碰撞（elastic collision），碰撞後 m 的速率是多少？

那一節的結果（把兩個質量的角色對調）給出被撞粒子的速率為 $\frac{2M}{M+m}u$。還有另一個記法：在彈性碰撞中，相對速度（relative velocity）會反向。如果重球幾乎沒有減慢，輕球離開時的速率就必定比重球的速率大約多出 u，也就是大約 $2u$。

逐步解題

階段 1　速率上限

取 $M = bm$，碰撞後 A 的速率為

$$v_A = \frac{2bm}{bm + m}\,u = \frac{2b}{b+1}\,u.$$

想一想 $\frac{2b}{b+1}$ 與 2 相比，哪個較大？當 $b \to \infty$ 時會怎樣？

由於對任何 b 都有 $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{2}{b+1} < 2$，所以 A 的速率總是小於 $2u$，無論 B 有多重。當 $b \to \infty$ 時，這個速率趨近 $2u$：一個無限重的球會把 A 彈開，就像 A 撞上一堵移動中的牆一樣。 ■

階段 2　沿着一串粒子傳遞

想一想 在第 (ii) 部分，每個粒子的質量都是下一個粒子的 λ 倍。對於這串粒子中的每一次碰撞，第 (i) 部分告訴了我們甚麼？

B_1（質量 $\lambda^n m$）撞上 B_2（質量 $\lambda^{n-1} m$），後者的質量是前者的 λ 分之一。在第 (i) 部分取 $b = \lambda$，可知 B_2 以速率 $\frac{2\lambda}{\lambda+1}u$ 離開。接着 B_2 撞上 B_3，後者的質量同樣是前者的 λ 分之一，於是 B_3 以速率 $\left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^2 u$ 離開。經過 n 次這樣的碰撞之後（最後一次是 B_n 撞上 A），

$$v_A = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

（各個 B 之間其後再發生的碰撞，只會把 A 推得更快，不會使它減慢，因為從來沒有東西從前方撞向 A。）

想一想 $\frac{2\lambda}{\lambda+1}$ 比 1 大還是比它小？

由於 $\lambda > 1$，故 $2\lambda > \lambda + 1$，因此比值 $r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$ 大於 1，而且當 $n \to \infty$ 時 $r^n \to \infty$。所以只要 n 取得夠大，A 的速率要多快就有多快。 ■

階段 3　快二十倍

取 $\lambda = 4$，則 $r = \frac{8}{5} = 1.6$，我們需要 $1.6^n > 20$。取以 10 為底的對數（logarithm），

$$\log_{10} 1.6 = \log_{10} 16 - 1 = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412, \qquad \log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 \approx 1.30103,$$

所以我們需要 $n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37$。最小的值是 $n = 7$。（事實上 $1.6^6 \approx 16.8$，而 $1.6^7 \approx 26.8$。） ■

回顧

- **把單一結果反覆套用。**第 (i) 部分的結果在第 (ii) 部分用了 n 次，把有界的增益變成無界的增益。

- **永遠達不到的極限。**速率可以趨近上界 $2u$，卻永遠達不到，所以正確的寫法是嚴格不等式（strict inequality）。
- **對數把乘方化為乘積。**「需要多少步」這個問題，變成了一道除法。

背後的數學

籃球與網球

設兩個球從高度 H 一起落下，到達地面時的速率為 $U = \sqrt{2gH}$。假設一切碰撞都是完全彈性的，而且籃球比網球重得多。籃球從地面反彈，以速率 U 向上運動，隨即遇上仍以速率 U 向下運動的網球。在籃球的參考系（frame）中，網球以 $2U$ 的速率迎面而來，撞上一個非常重的物體後反彈，再以 $2U$ 的速率離開。回到地面參考系，那就是以 $2U + U = 3U$ 的速率向上運動（圖 10.2.1）。由於上升高度與拋射速率的平方成正比，網球會升到 $9H$ 的高度。

現實中的球並不是完全彈性的。若恢復系數（coefficient of restitution）為 e，質量比為 M/m，網球離開時的速率就是 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$。練習中的 STEP I 2014 Q10，就是由量度所得的高度反推質量比。

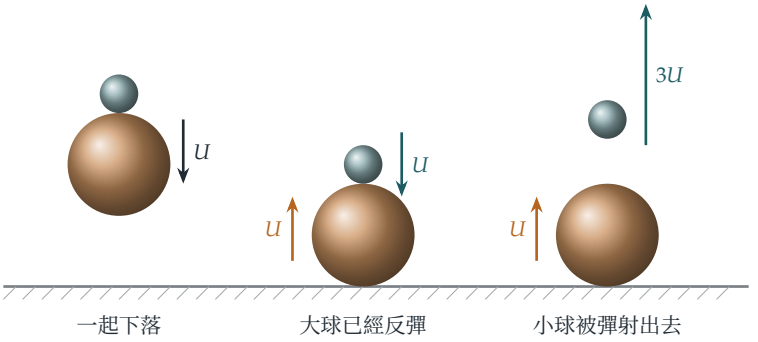


圖 10.2.1 疊球效應：兩個球都是完全彈性的，而且下面的球重得多。大球以速率 U 向上反彈，遇上以速率 U 落下的小球。相對於大球，小球以 $2U$ 的速率到達，又以 $2U$ 的速率離開，所以在地面參考系中它以 $3U$ 的速率離開，升到原來高度的九倍。

引力彈弓

太空探測器飛掠行星時並沒有碰到行星，但引力的作用就像與一個非常重的物體發生一次非常柔和的彈性碰撞。在行星的參考系中，探測器繞過行星，離開時的速率與到達時相同。如果行星正以速率 V 朝探測器運動，那麼在太陽的參考系中，探測器的速率最多可以增加 $2V$，與網球的情況完全一樣。1977 年發射的兩艘航行者號（*Voyager*）探測器，

利用了外行星一次罕見的排列，從木星飛往土星（航行者 2 號（*Voyager 2*）更繼續飛往天王星和海王星），每次與行星相遇都獲得加速。假如沒有這些引力助推（gravity assist），前往海王星的旅程就要花上大約三十年，而不是十二年。能量來自行星，而行星因此減慢的幅度小得無法量度。

彈力球與超新星

1968 年，W. R. Mellen 在 *American Journal of Physics* 上描述了一種「彈力球反彈拋射體」（superball rebound projectile）：把幾個由大至小的球疊起來，最頂的球可以用撞擊速率的許多倍彈射出去。天體物理學家指出，這與核心塌縮超新星（core-collapse supernova）有一點粗略的相似之處：恆星向內墜落的外層物質撞上堅硬而緻密的核心後反彈，衝擊波（shock wave）把動量（momentum）向外帶進密度愈來愈低的物質，把這些物質加速到極高的速率。疊球效應的示範常用來向學生解釋這個想法，不過真實的超新星所涉及的物理比彈跳的球多得多，中微子（neutrino）就是其中之一。

思維技巧

把單一結果反覆套用

如果一個過程只是把一個簡單步驟重複多次，就先把這一步解決一次，然後把它複合起來。

每一步的增益因子都小於 2，但經過很多步之後，增益卻變成無界，因為這些因子是相乘的。到了大學，這就是轉移矩陣（transfer matrix）、多級放大器和多級火箭（Section 10.3）背後的想法：一條鏈的增益，等於鏈上各個環節的增益的乘積。

延伸練習

1 **真實的情況。**試做 STEP I 2014，第 10 題（`step.maths.org/questions/14-s1-q10`）：這是帶有真實數據、反彈並不完美的疊球問題。

2 **非彈性的鏈。**試做 STEP I 2017，第 10 題（`step.maths.org/questions/17-s1-q10`）。這一題讓碰撞沿着一串質量按幾何級數增長的粒子傳遞下去。在甚麼情況下，每個粒子都恰好參與兩次碰撞？

3 **三個球。**把三個完全彈性的球疊起來，每個球都比它下面的球輕得多。證明最頂的球以 $7U$ 的速率離開，並升到 $49H$ 的高度。若有 k 個球，證明最頂的球以 $(2^k - 1)U$

的速率離開。

4 **能量從何而來？**在第 (ii) 部分，證明即使 A 的速率無界，總動能（kinetic energy）仍然守恆。那些重的粒子會怎樣？

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章，當中包括疊球問題。
- **W. R. Mellen,「Superball rebound projectiles」**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。篇幅短小，讀來有趣。
- **Gary Flandro,「Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter」**, *Astronautica Acta* 12 (1966)。這篇論文提出了航行者號的「行星大巡遊」（grand tour）。

10.3 火箭與槍炮

題目

STEP III 2017，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/17-s3-q11`

引子

太空中的火箭沒有任何東西可以借力。它靠把質量向後拋出而前進，其餘的就交給動量守恆（conservation of momentum）。一輛從車尾開炮的貨車，就是一枚拆成一塊塊的火箭：每枚拋射體（projectile）都是一團噴出的廢氣。

那麼，這些炮應該同時發射，還是逐一發射？這道題給出了明確的答案，但要看清楚它比較的是甚麼。同時發射會令貨車得到較大的速率，但也消耗較多能量，所以在兩種情況下，這些炮所做的並不是同一件事。只要改變保持不變的量，答案就會逆轉。把這一點弄清楚，便會引出太空飛行中最重要的方程——齊奧爾科夫斯基（Tsiolkovsky）的*火箭方程*（rocket equation），也會明白為甚麼真正的火箭要分成多級。

動筆之前

想一想 某一門炮發射之前，貨車以 V 行駛。發射之後，拋射體的速度是 $V - v$（即以速率 $v - V$ 向後運動）。拋射體*相對於發射前的貨車*的速度是多少？

答案是 $(V - v) - V = -v$。所以每門炮都以速率 v 把拋射體向後拋出，這個速率是相對於貨車在發射前一刻的速度而言的。這就是本題的固定規則；請牢記它，因為答案正是由它決定的。

逐步解題

階段 1　同時發射

系統最初靜止，動量為零。發射之後，貨車（質量為 M）以 u 向前運動，而 n 枚拋射體則以速率 v 向後運動（因為發射前 $V=0$）。所以

$$Mu - nmv = 0, \qquad u = \frac{nmv}{M}.$$

所獲得的動能（kinetic energy）為

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\Big(1 + \frac{nm}{M}\Big). \qquad \blacksquare$$

階段 2　逐一發射

> **想一想**　在第 r 門炮發射前的一刻，貨車連同餘下的拋射體的質量是多少？速率又是多少？寫出第 r 次發射的動量守恆式。

第 r 次發射之前，貨車載有 $n-r+1$ 枚拋射體，所以它的質量是 $M+(n-r+1)m$，速率是 u_{r-1}。發射之後，載有 $n-r$ 枚拋射體的貨車速率為 u_r，而射出的拋射體速度為 $u_{r-1}-v$。動量守恆：

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

把含 mu_{r-1} 的項整理後，得 $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$，這就是 $(*)$。 $\blacksquare$

把各個增量相加，

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m} = \frac{mv}{M} + \frac{mv}{M+m} + \cdots + \frac{mv}{M+(n-1)m}.$$

第一項之後的每一項都小於 $\frac{mv}{M}$，而且 $n>1$，所以 $u_n < \frac{nmv}{M} = u$。 $\blacksquare$

> **停一停，試一試**　為甚麼在這裏逐一發射的效果較差？第一門炮發射時，它要加速的不只是貨車，還有那 $n-1$ 枚未發射的拋射體，所以它帶來的速率增幅，比起作用在空車上時要小。

階段 3　能量的帳單

> **想一想**　寫出第 r 次發射時動能的變化。$(*)$ 怎樣幫助你化簡含 $u_r^2 - u_{r-1}^2$ 的那一項？

動能的變化為

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1} - v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r+1)m\big)u_{r-1}^2.$$

最後兩項合併成 $\frac{1}{2}m(v^2 - 2vu_{r-1}) - \frac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_{r-1}^2$。然後，把平方差因式分解，並利用 $(*)$，

$$\tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)(u_r^2 - u_{r-1}^2) = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}).$$

所以

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r - u_{r-1}). \qquad \blacksquare$$

由 $r = 1$ 加到 n，增量 $u_r - u_{r-1}$ 逐項相消（telescope），餘下 u_n：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n. \qquad \blacksquare$$

最後，$K = \frac{1}{2}nmv^2 + \frac{1}{2}nmv^2 \cdot \frac{nm}{M} = \frac{1}{2}nmv^2 + \frac{1}{2}mvu$，而 $u_n < u$，所以 $K_n < K$。 $\blacksquare$

回顧

- **每一步都用動量。**每次發射都是一個小型的二體問題：一邊是貨車連同所載的東西，另一邊是一枚拋射體。
- **裂項求和。**$(*)$ 的增量和能量的增量都能乾淨利落地加起來。
- **仔細閱讀結論。**同時發射得到較大的速率，但要付出較多能量。題目比較的是兩個做功多少並不相同的過程。

背後的數學

應該讓甚麼保持不變？

真正的炮或火箭引擎，是以相對於*自身*的固定速率拋出拋射體的，而這個速率是在拋射體剛離開之後量度的。本題的參照對象卻是貨車在發射*之前*的速率。對一枚細小的拋射體來說，兩者相差極微；但當 n 枚拋射體同時發射時，差別就很大：在第 (i) 部分，一大批沉重的拋射體以速率 v 被向後拋出，彷彿貨車完全沒有後座（recoil）一樣，這需要大量能量。

假如改為每枚拋射體都以相對於發射*之後*的貨車的速率 v 離開，結論就會逆轉。同時發射得 $u = \frac{nmv}{M+nm}$；逐一發射得 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$，後者較大，因為每一項都至少是 $\frac{mv}{M+nm}$。這時逐一發射勝出：每枚拋射體都是從一輛已在運動的貨車上蹬出去的，而且越後發射的炮，要加速的質量越少。（請在練習中驗證這一點。）

火箭方程

現在讓拋射體變得極小而數目極多，並保持總質量 $\mu = nm$ 不變：這就是一枚連續燃燒燃料的火箭。u_n 的和變成一個積分（兩種約定給出相同的極限）：

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

這就是**齊奧爾科夫斯基火箭方程**：若火箭噴出的廢氣以相對於火箭的速率 v 離開，火箭所增加的速率為

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{初}}{m_{末}}.$$

圖 10.3.1 比較了這三個答案。麻煩就出在對數（logarithm）上：若排氣速率約為 4.5 km/s（優良的化學燃料），要達到約 7.8 km/s 的軌道速率，質量比必須是 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$；一旦把空氣阻力和重力計算在內，這個比值更接近 10 或以上。火箭幾乎全是燃料。

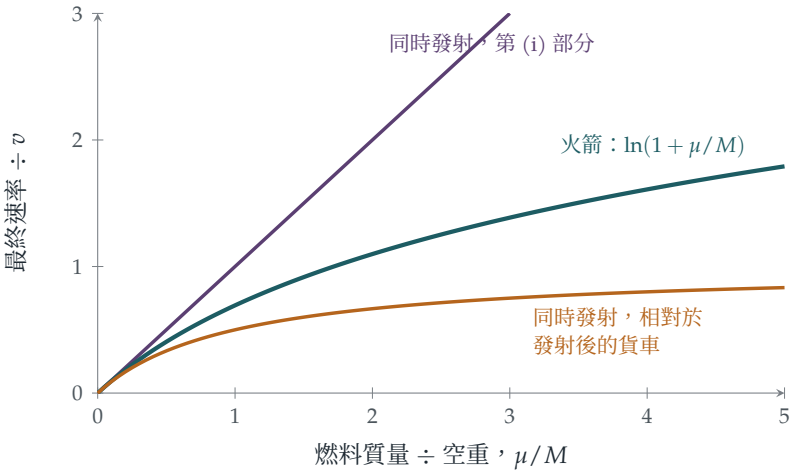


圖 10.3.1　最終速率與燃料質量對空重之比的關係。按題目的約定，全部同時發射得 μ/M（紫紅色）；但若排氣速率是相對於後座中的貨車量度，則只得 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）。連續發射的火箭介乎兩者之間，為 $\ln(1+\mu/M)$（藍綠色）。這幅圖所表達的就是不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$。

為甚麼火箭要分級

對數也解釋了分級（staging）的道理。火箭若在升空途中拋掉用完的燃料箱，就不必再加速這些無用的質量。各級所得的速率增量是**相加**的（就像那些炮一樣），而每一級的增量則取決於該級質量的**比**，所以把火箭分成多級，就能達到總質量相同的單級火箭無法達到的速率。把太空人送上月球的土星五號（Saturn V）有三級；它的第一級在不足三分鐘內燒掉約 2000 公噸燃料。

齊奧爾科夫斯基

康斯坦丁·齊奧爾科夫斯基（Konstantin Tsiolkovsky）是俄羅斯外省小城卡盧加（Kaluga）一位失聰的教師，他在 1903 年一篇題為「利用反作用裝置探索外太空」的論文中發表了火箭方程。多級火箭、液態氫和液態氧燃料，以及太空站，他都一一推算過，比這些東西真正造得出來早了數十年。這條方程其實更早就在一些較不起眼的地方出現過（William Moore 在 1810 年已推導出其中一個版本），但齊奧爾科夫斯基是第一個看出它對太空飛行意味着甚麼的人。他寫道：「地球是人類的搖籃，但人不能永遠活在搖籃裏。」

思維技巧

從離散過程到極限

連續的過程，往往可以理解爲許多細小離散步驟的極限（*limit*）。先把離散的問題精確地解出來，再讓步長縮小：和就變成積分。

在這裏，n 門炮變成了一枚火箭，一個和變成了一個對數。到了大學，每逢推導物理定律，你都會見到同一手法：先分析一個微小的單元，再把結果加起來，成為一個積分或一條微分方程（differential equation）。

延伸練習

1 **另一種約定。**假設每枚拋射體都以相對於發射之後的貨車的速率 v 離開，重做第 (i) 和第 (ii) 部分。證明這時逐一發射所得的最終速率較大。

2 **塵埃雲中的彗星。**試做 STEP III 2009，第 11 題（`step.maths.org/questions/09-s3-q11`）。它和火箭一樣是變質量（variable mass）問題，但彗星的質量是增加而不是減少。留意它的速率趨向甚麼值。

3 **兩級火箭。**一枚火箭的排氣速率為 v，空重為 M，燃料質量為 $9M$。求它的最終速率。現在把它分成兩級，每級的空重為 $\frac{1}{2}M$，燃料為 $4.5M$，第一級在燃料用盡後拋掉。比較兩個最終速率。

4 **不等式。**在 $[0, x]$ 上把 $\frac{1}{1+s}$ 分別與 1 和 $\frac{1}{1+x}$ 比較，從而證明當 $x \geq 0$ 時，$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$。

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章。動量、變質量和火箭方程。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工程學上的標準教科書；讀完本節後，開首幾章已可讀懂。
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA 譯本，可在網上免費閱讀）。一位先驅的親身記述。

10.4 一個分子與一個活塞

題目

STEP I 2002，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/02-s1-q10`

引子

替單車輪胎打氣時摸一摸氣泵：它會發熱。壓縮氣體會令氣體變暖，柴油引擎（單靠壓縮就能點燃燃料）、雪櫃以至恆星的形成，背後都是這個原理。但為甚麼壓縮會令氣體升溫？溫度就是分子的平均動能（kinetic energy），所以問題其實是：為甚麼分子會加速？

這道題目只用一個分子就回答了這個問題。分子每次從推進中的活塞（piston）反彈，都會多得一點速率，就像網球碰上揮動中的球拍一樣。把每次反彈準確地追蹤下去，便會發現一條隱藏的定律：分子的速率乘以氣缸的長度，幾乎保持不變。這就是一個絕熱不變量（adiabatic invariant），也是你在物理課遇到的氣體定律在微觀層面的來源。

動筆之前

想一想 一個以速率 w 運動的球，撞上一堵以速率 u 迎面移來的牆，並作彈性（elastic）反彈。反彈後球的速率是多少？（試在牆的參考系中思考。）

在牆的參考系（frame）中，球以 $w+u$ 接近；由於它是從一個極重的物體上彈性反彈，所以亦以 $w+u$ 離開。回到地面參考系，牆正以 u 朝着與反彈後的球相同的方向運動，所以球的速率是 $w+2u$。每次從推進中的活塞反彈，速率都增加 $2u$。（從氣缸靜止的一端反彈，則甚麼也不會改變。）

逐步解題

階段 1　反彈 n 次後的速率

質點（particle）起初的速率是 v。每次與活塞碰撞（collision），速率增加 $2u$，而與末端碰撞則不會改變速率。所以與活塞碰撞 n 次之後，

$$v_n = v + 2nu. \qquad \blacksquare$$

階段 2　長度的遞推關係

> **想一想**　在第 n 次與第 $(n+1)$ 次碰撞之間，質點由活塞走到末端再折返。它走了多遠？活塞又移動了多遠？

在時間 t_n 內，活塞移動了 ut_n，所以 $d_n - d_{n+1} = ut_n$。與此同時，質點以速率 v_n 由活塞走到末端（距離 d_n），再返回活塞（距離 d_{n+1}），所以 $d_n + d_{n+1} = v_n t_n$。把兩條方程相除，便可消去 t_n：

$$\frac{d_n + d_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}, \qquad \text{所以} \qquad d_{n+1}(v_n + u) = d_n(v_n - u).$$

代入 $v_n = v + 2nu$，得

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n. \qquad \blacksquare$$

這就是所求的遞推關係（recurrence）。

階段 3　裂項相消

> **想一想**　把 d_n 寫成 d_1 乘以 $n-1$ 個這樣的分數之積。哪些項會互相抵消？

$$d_n = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u} = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1. \qquad \blacksquare$$

每個分子都與前一個分母抵消，只剩下第一個分子和最後一個分母。

階段 4　$v = u$ 的情況

這時 $d_n = \frac{2u}{2nu} d_1 = \frac{d_1}{n}$，而

$$ut_n = d_n - d_{n+1} = d_1\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{d_1}{n(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

把這些加起來，$u(t_1 + t_2 + \cdots) = d_1\big(1 - \tfrac12 + \tfrac12 - \tfrac13 + \cdots\big) = d_1$：活塞在第一次碰撞後經過時間 d_1/u 到達氣缸末端，這正是理所當然的結果。在活塞到達之前，質點反彈了無限多次（圖 10.4.1）。

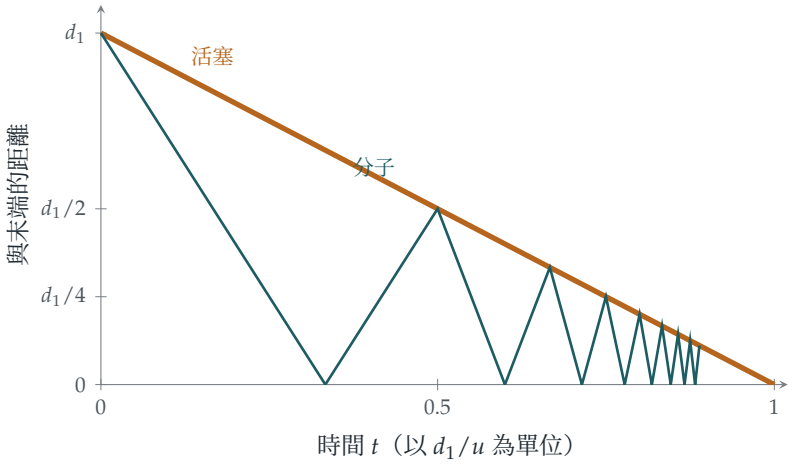


圖 10.4.1　$v = u$ 情況下的時空圖：與氣缸末端的距離對時間。活塞（琥珀色）穩步推進；分子（藍綠色）在活塞與末端之間來回反彈。它的鋸齒形軌跡愈來愈陡（愈來愈快），也愈來愈短。第 n 次與活塞的碰撞發生在距離 d_1/n 處，所以分子的速率大致與 1/(長度) 成正比。

回顧

- **處理碰撞時轉換參考系。**在活塞的參考系中，反彈再簡單不過。
- **兩條方程，消去未知量。**質點與活塞在同一段時間內所走的距離，給出了一個不含 t_n 的遞推關係。
- **裂項相消（telescoping）。**那個乘積一下子化簡了，正如 $\frac{1}{n(n+1)}$ 之和一樣。

背後的數學

一個絕熱不變量

把速率乘以長度：

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1 \approx (v+u)d_1$$

這在 n 很大時成立，在 u 遠小於 v 時亦然。所以

$$\text{速率} \times \text{長度} \approx \text{常數}.$$

如果活塞相對於分子移動得很慢，那麼無論活塞移動多遠，乘積 vd 都幾乎不變。像這樣在系統緩慢改變時幾乎保持不變的量，稱為*絕熱不變量*。一般而言，往復運動的絕熱不變量是 $\oint p\,\mathrm{d}q$，即動量（momentum）沿一個週期的積分；在這裏它就是 $mv \times 2d$。

從一個分子到一團氣體

由於 $v \propto 1/d$，動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 與 $1/d^2$ 成正比。對於由許多沿同一方向運動的分子組成的氣體，溫度與平均動能成正比，所以 $T \propto 1/d^2$：長度減半，溫度便變成四倍。在三維空間中，能量由三個運動方向分擔，而同樣的論證（費曼（Feynman）在他的 *Lectures* 中給出了這個論證）可推出單原子氣體（monatomic gas）的絕熱壓縮定律，

$$TV^{2/3} = \text{常數}, \qquad \text{或等價地} \qquad pV^{5/3} = \text{常數}.$$

指數 $\frac{5}{3}$ 就是單原子氣體著名的比熱比（ratio of specific heats）γ。把單車氣泵內的空氣壓縮至原來體積的五分之一，如果做得夠快而且沒有熱量散失，其絕對溫度會升高至原來的 $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍（空氣分子有兩個原子，因而 $\gamma = 1.4$）：由 20°C 升至約 280°C。氣泵之所以沒有那麼熱，只是因為壓縮得慢，熱量又會散走。

費米的宇宙射線

1949 年，恩里科·費米（Enrico Fermi）提出，宇宙射線（cosmic rays）這些從太空而來、能量極高的粒子，其加速方式與本題的分子如出一轍：它們在星際氣體雲中運動的磁場上反覆反彈，每次獲得一點能量。現時認為，「費米加速」（Fermi acceleration）在超新星殘骸的激波處發生，粒子在那裏來回穿越激波，就像分子在活塞與牆壁之間往返一樣。絕熱不變量在量子力學的誕生中也扮演過一個角色：保羅·埃倫費斯特（Paul Ehrenfest）在 1916 年指出，被量子化的量必定是絕熱不變量，因為緩慢的改變不可能令系統在量子態之間躍遷。

思維技巧

從物理過程建立遞推關係

當一個過程不斷重複時，把其中一個週期準確地描述出來，並寫下狀態怎樣由一個週期變到下一個週期。

這裏的狀態是每次碰撞時的一對量（速率，長度）。這個遞推關係可以精確地解出，而它的解揭示了一個近似守恆的量。在大學裏，同樣的方法（先考慮一個週期，然後得出遞推關係或「回歸映射」（return map））會用於軌道、振子，以及 Section 8.7 的迭代映射。

延伸練習

1 **不變量的精確形式。**證明 $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，並由此推出當 $n \to \infty$ 時 $v_n d_n \to (v+u)d_1$。

2 **把活塞拉出。**設活塞改為以速率 $u < v$ 向外抽出，把題目重做一次。證明質點會減速，並求 $v_n d_n$。（氣體膨脹時會冷卻。）

3 **能量。**在 $v = u$ 的情況下，隨着活塞逼近末端，分子的速率會無止境地增長。求第 n 個週期內活塞所受的平均力（動量的改變除以 t_n），並證明它按 n^3 的速度增長。這說明了把活塞一直推到盡頭所需的功有甚麼特點？

4 **彈跳的球。**一個球在重力作用下於地板上作彈性彈跳，而地板被緩慢地升高。試猜出這個運動的一個絕熱不變量。（提示：與 vd 相對應的量是平均速率乘以彈跳的高度，或等價地，能量乘以兩次彈跳之間的時間。）

延伸閱讀

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I**（《費曼物理學講義》第一卷，可在網上免費閱讀），第 39 章「The kinetic theory of gases」（氣體動力論）。同一個活塞論證，並推廣至三維。
- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press）。大學一年級程度的絕熱過程與氣體動力論。
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann），§49。對絕熱不變量的精簡論述，留待日後閱讀。

10.5 有限時間內的無限次反彈

題目

STEP III 2002，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/02-s3-q11`

引子

埃利亞的芝諾（Zeno of Elea）曾經論證，你永遠走不到一堵牆：你必須先走完一半的距離，然後再走完餘下距離的一半，如此類推，永無止境。化解這個悖論的關鍵，在於無窮多步所需的總時間可以是有限的，也就是一個收斂（converge）的無窮級數（infinite series）。這道題目正是芝諾悖論（Zeno's paradox）的真實版本：一個冰球滑進楔形的角落，在兩面牆之間反彈無窮多次，卻在有限時間內到達角落。

大自然也會這樣做。一個球在地板上彈跳，若恢復系數（coefficient of restitution）小於 1，它會在有限時間內彈跳無窮多次，然後靜止下來。在顆粒物質（沙、穀物、雪）的電腦模擬中，這種「非彈性坍縮」（inelastic collapse）是個實實在在的難題：電腦要在有限時間內處理無窮多次碰撞。

動筆之前

想一想 當一個質點（particle）以恢復系數 e 撞向一面光滑的牆時，速度沿牆方向的分量會怎樣？垂直於牆的分量又會怎樣？

光滑的牆不會沿着牆面施力，所以速度平行於牆的分量保持不變。垂直分量則會反向，並乘以 e。因此，若質點以與牆成 α 的角度到達，並以 β 的角度離開，則

$$\tan\beta = e\tan\alpha,$$

而由於平行分量不變，（入射速率）$\cos\alpha$ =（離開速率）$\cos\beta$。

逐步解題

階段 1　離開的角度

想一想　質點到達 M_1 時與牆 OA 成角 θ（在遠離 O 的一側量度）。它離開時與 OA 所成的角 φ 是多少？利用三角形 OM_1N_1，以 θ 表示 φ。

質點離開 M_1 時朝着 O 的一側前進，與牆成角 φ，所以角 OM_1N_1 等於 φ。在三角形 OM_1N_1 中，位於 O 的角是 30°。在 N_1，角 M_1N_1B 等於 θ，而 O、N_1、B 在同一直線上，所以角 ON_1M_1 等於 $180^\circ - \theta$。三角形的內角和為 180°：

$$30^\circ + \varphi + (180^\circ - \theta) = 180^\circ, \qquad \text{所以} \qquad \varphi = \theta - 30^\circ.$$

（特別地，$\theta > 30^\circ$。）於是由恢復定律 $\tan\varphi = e\tan\theta$ 可得

$$e = \frac{\tan(\theta - 30^\circ)}{\tan\theta},$$

而由平行分量守恆 $u_1\cos\theta = v_1\cos\varphi$ 可得

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)}. \qquad \blacksquare$$

階段 2　規律重複出現

想一想　在 N_1，質點到達時與牆 OB 成角 θ（在遠離 O 的一側量度）。把這個情況與它到達 M_1 時的情況比較一下。接下來會發生甚麼事？

N_1 的情況是 M_1 的情況的鏡像：質點以角 θ 撞上一面牆，而這個角位於遠離 O 的一側。所以它以角 $\theta - 30^\circ$ 離開，再以角 θ 撞上 OA，如此類推，永無止境。每一次反彈都是第一次反彈按比例縮放後的複製品。三角形 OM_kN_k、ON_kM_{k+1}、... 每一個都與前一個相似（圖 10.5.1），而每次反彈時速率都乘以同一個因子。

階段 3　兩個比

想一想　由一次反彈到下一次反彈，與 O 的距離按甚麼因子 ρ 縮小？速率按甚麼因子 k 縮小？那麼每一段路程所需的時間又按甚麼因子縮小？

在三角形 OM_1N_1 中應用正弦定理（sine rule），可得

$$\rho = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

下一個三角形的所有長度都是這個三角形的 ρ 倍，所以路徑的每一段都是前一段的 ρ 倍長。每次反彈時速率都乘以 $k = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}$。時間等於長度除以速率，所以每一段所需的時間是前一段的

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-30^\circ)\cos(\theta-30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$$

倍。

階段 4 一個等比級數

總時間是 $T_1(1 + r + r^2 + \cdots)$，其中 T_1 是第一段所需的時間，而 $r = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$。這是一個等比級數（geometric series），若 $0 < r < 1$，總時間便是有限的。

想一想 $\sin(2\theta - 60^\circ) < \sin 2\theta$ 在甚麼時候成立？利用恆等式 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$。

$$\sin 2\theta - \sin(2\theta-60^\circ) = 2\cos(2\theta-30^\circ)\sin 30^\circ = \cos(2\theta-30^\circ),$$

當 $2\theta - 30^\circ < 90^\circ$，即 $\theta < 60^\circ$ 時，上式為正。另外，由於 $\theta > 30^\circ$，故 $r > 0$。所以當 $30^\circ < \theta < 60^\circ$ 時，級數收斂：質點反彈無窮多次，它與 O 的距離每次按因子 $\rho < 1$ 縮小，並在有限時間 $\frac{T_1}{1-r}$ 之後到達 O。 ■

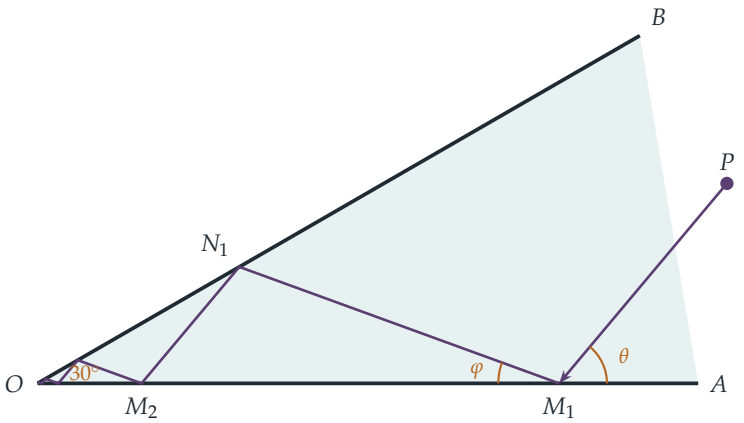


圖 10.5.1 $\theta = 50^\circ$ 時質點在楔形內的路徑，此時 $\varphi = 20^\circ$，$e = \tan 20^\circ / \tan 50^\circ \approx 0.31$。每一次反彈都是前一次的複製品，按 $\rho \approx 0.45$ 的比例縮小，而每一段所需的時間約為前一段的 0.65 倍。質點經過無窮多次反彈後，在有限時間內到達 O。

回顧

- **自相似性（self-similarity）。**一旦弄清楚一次反彈，其後每一次反彈都只是按比例縮放的複製品，所以整個無窮過程就歸結為兩個比。
- **正確地組合各個比。**距離按 ρ 縮小，速率按 k 縮小，所以時間按 ρ/k 縮小。
- **無窮多個事件，有限的總和。**公比小於 1 的等比級數收斂。

背後的數學

當 $\theta \geq 60^\circ$ 時

當 $\theta = 60^\circ$ 時，這個比恰好等於 1：每一段所需的時間都相同，質點雖然愈來愈接近 O，卻永遠到不了。（速率和每段的長度都按同一個因子縮小。）當 $\theta > 60^\circ$ 時，每一段所需的時間愈來愈長。在所有情況下，質點都會趨近 O，並反彈無窮多次；只有當 $\theta < 60^\circ$ 時，它才會在有限時間內到達。$e = \tan 30^\circ / \tan 60^\circ = \frac{1}{3}$ 這個值就是分界線。

彈跳的球與非彈性坍縮

同一現象最簡單的例子：一個球掉落到地板上，反彈至高度 e^2H，然後是 e^4H，如此類推。兩次彈跳之間的時間與每次彈跳時的速率成正比，而速率按因子 e 縮小，所以總時間是一個等比級數：設 $T_0 = \sqrt{2H/g}$ 為第一次下落的時間，則球在

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

之後停止彈跳。無窮多次彈跳，然後靜止。1992 年，Sean McNamara 和 William Young 證明了，在模擬排成一直線的多個非彈性質點時，同樣的事情也會發生：其中一組質點可以在有限時間內發生無窮多次碰撞，這就是「非彈性坍縮」。沙和顆粒流的模擬必須加入特別的規則來避免這種情況，而這個現象也有助解釋為何顆粒氣體會自發地聚集成團。

芝諾與收斂

芝諾的悖論約於公元前 450 年提出，困擾了哲學家兩千年。數學上的解答，即無窮和可以有有限的值，要到十九世紀才變得嚴謹，當時柯西（Cauchy）、魏爾斯特拉斯（Weierstrass）等人以極限（limit）來定義收斂（這是第 2 章的主題）。這道題目令人驚訝之處，在於這個過程在物理上是無窮的：確確實實有無窮多次碰撞，發生在有限時間之內。研究多邊形內的桌球運動和碰撞質點運動的數學家，把這種行為稱為芝諾現象（Zeno phenomenon）；要證明由互相碰撞的硬球組成的系統在所有時刻都有明確定

義的運動，這正是其中一個微妙之處。

思維技巧

為無窮過程求和

當一個過程以固定的縮放因子不斷重複時，任何可加的量（時間、距離、能量）的總和都是一個等比級數。根據公比判斷它是否收斂。

這裏的關鍵是找出正確的比：不是距離之比，也不是速率之比，而是時間之比。在大學裏，同樣的推理支配着迭代法(iterative methods)的收斂性、分形(fractal)理論，以及對反覆把問題減半的演算法（algorithm）的分析。

延伸練習

1 **總距離。**證明對於 30° 與 90° 之間的每一個 θ，由 M_1 到 O 所走的總距離都是有限的，並以 OM_1 和 θ 表示這個總距離。

2 **其他楔形。**把 30° 換成角 α 的楔形，重做這道題目。證明 $\varphi = \theta - \alpha$，並求出質點在有限時間內到達 O 時 θ 須滿足的條件。

3 **彈性牆。**若 $e = 1$，質點有可能到達 O 嗎？(提示：把楔形沿它的牆反覆反射，使路徑變成一條直線。圍繞 O 可以放下多少個 30° 的楔形？)

4 **彈跳的球。**一個球從 1 m 的高度掉下，$e = 0.8$。它會彈跳多久？它總共走了多遠？(取 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$。)

延伸閱讀

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。書中有多道關於彈跳的球和無窮多次連續碰撞的題目。
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**（一維顆粒介質中的非彈性坍縮與聚團），*Physics of Fluids A* 4 (1992)。
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society；可在網上免費閱讀)。講述桌球的數學，包括練習中用到的展開技巧。

10.6 二體化為一體

題目

STEP III 2004，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/04-s3-q11`

引子

兩個物體互相吸引或排斥：地球與月球、兩顆恆星、一個質子與一個電子。每個物體的運動都取決於另一個物體的位置，因此兩條方程是耦合（coupled）的，看來非要同時求出兩個運動不可。牛頓（Newton）的重大簡化在於更換變數：不用兩個位置，而改用**質心**（centre of mass）和**間距**（separation）。質心的運動彷彿完全不受力，而間距的運動則像一個質量經過修正的單一質點。一個難題就此化為兩個易題。

本題就兩個在直線上運動的質點，實際做一次這樣的分離。過程中還有一個小小的奇蹟：間距原來是 t 的二次式的平方根，而箇中原因與題目本身的設定毫無關係，卻完全源於平面上的運動。

動筆之前

想一想 寫出每個質點的牛頓第二定律（Newton's second law）。每個力朝哪個方向作用？

這個力是排斥力，所以它把（左邊的）P 推向左，把（右邊的）Q 推向右：

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad 1\cdot\ddot{x}_2 = +\frac{2}{z^3}.$$

這兩條方程是耦合的，因為每一條都含有 $z = x_2 - x_1$。

逐步解題

階段 1　間距

想一想　兩條方程的哪一個組合只含有 z？

相減：$\ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3}$。 ■

間距的表現就像一個質量為 $\frac{2}{3}$ 的單一質點，受力 $\frac{2}{z^3}$ 推動。$\frac{2}{3} = \frac{2\times 1}{2+1}$ 這個數就是約化質量（reduced mass）$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$。

階段 2　間距的能量

想一想　利用 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$，分離變數然後積分。$z$ 和 $v = \dot{z}$ 的初始值是多少？

由 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3}$，積分得 $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C$。起初 $z = 1$ 而 $\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 - 1 = -1$，所以 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$，得 $C = 2$：

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}.$$

（這就是間距的能量守恆（conservation of energy）：以每單位約化質量計，動能加上勢能 $\frac{3}{2z^2}$ 是常數。）

階段 3　出奇簡單的解

想一想　要證明的答案是 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1$。所以不妨考慮 $w = z^2$，而不是 z。以 w 表示，$\dot{w}^2$ 是甚麼？

設 $w = z^2$，則 $\dot{w} = 2z\dot{z}$，所以

$$\dot{w}^2 = 4z^2\dot{z}^2 = 4z^2\left(4 - \frac{3}{z^2}\right) = 16w - 12.$$

求導得 $2\dot{w}\ddot{w} = 16\dot{w}$，所以（只要 $\dot{w} \neq 0$）$\ddot{w} = 8$。因此 w 是 t 的二次式：$w = 4t^2 + \alpha t + \beta$。起初 $w = 1$ 而 $\dot{w} = 2z\dot{z} = -2$，所以 $\beta = 1$ 及 $\alpha = -2$：

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}. \qquad \blacksquare$$

（你可以直接驗證：$\dot{w}^2 = (8t-2)^2 = 64t^2 - 32t + 4 = 16(4t^2 - 2t + 1) - 12$。）兩個質點在 $t = \frac{1}{4}$ 時最接近，此時 $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$，其後便永遠愈離愈遠。

階段 4　質心

想一想　$2x_1 + x_2$ 滿足甚麼方程？為甚麼它是最自然要考慮的組合？

把兩條運動方程相加，$2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0$。兩個力大小相等、方向相反（牛頓第三定律），所以總動量（momentum）$2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ 是常數。它的初始值是 $2 \times 1 + 0 = 2$，而 $2x_1 + x_2$ 的初始值是 1，所以

$$2x_1 + x_2 = 1 + 2t.$$

質心位於 $\frac{2x_1+x_2}{3}$，以速率 $\frac{2}{3}$ 勻速移動。再結合 $x_2 - x_1 = z$，

$$x_1 = \frac{1 + 2t - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + 2t + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}. \qquad \blacksquare$$

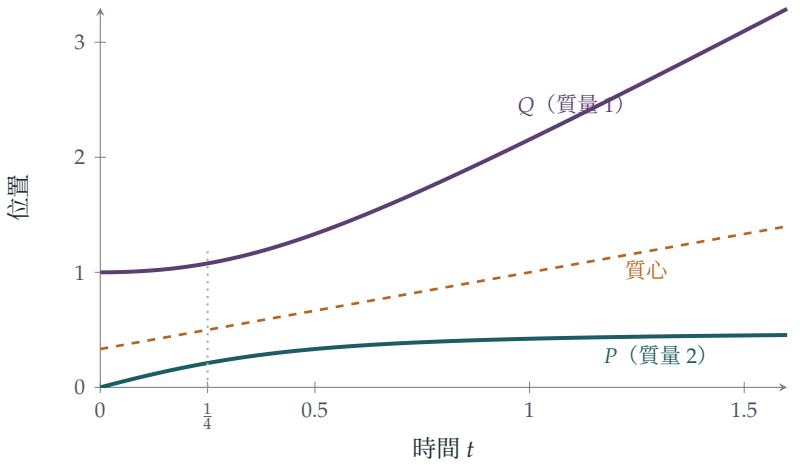


圖 10.6.1 P（藍綠色）和 Q（紫紅色）的位置隨時間的變化。P 向 Q 移動，受排斥力減慢並折返，逐漸趨近一個固定位置，而 Q 則被推開。兩者在 $t = \frac{1}{4}$ 時最接近。質心（琥珀色虛線）自始至終以恆定速率移動。

回顧

- **更換變數以解除耦合。**兩條方程之差只含有 z；加權之和只涉及質心。
- **能量積分。**寫成 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$，便把二階方程化為一階方程：這就是能量守恆。
- **更換未知量。**z 的方程不好處理；z^2 的方程卻簡單不過。

背後的數學

為甚麼 z^2 是二次式

對任何形如 $\ddot{z} = k/z^3$ 的力律，同樣的計算都給出 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 常數，因為 $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ 正是守恆的能量。所以 z^2 必定是 t 的二次式。為甚麼？

隱藏的原因是這樣的。設想一個質點在平面上自由運動，即沿直線以恆定速率前進。它與原點的距離 r 滿足 $r^2 =$（一個二次式，變數為 t），因為 $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$。而在極坐標（polar coordinates）中，它的徑向運動方程是 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$；由於角動量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ 是常數，方程變成

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

立方反比的排斥力，正正就是隱藏的角向運動所產生的**離心**（centrifugal）效應。在我們的問題中，$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}$ 是某一點與原點距離的平方，該點以速率 2 沿一條直線運動，而這條直線與原點的距離為 $\tfrac{\sqrt{3}}{2}$。一維上互相排斥的兩個質點，就是二維自由運動的影子。

二體問題

只要兩個物體之間的力僅取決於它們的間距，並沿兩者的連線作用，本題的方法便適用，一維如是，三維亦如是。質心作勻速運動，而間距向量 $\mathbf{r}$ 服從 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$，其中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$。對引力而言，這就是**開普勒問題**（Kepler problem），由牛頓在《自然哲學的數學原理》（*Principia*）中解決：間距描出的軌跡是橢圓、拋物線或雙曲線。地球和太陽都繞着它們的共同質心運行，而這個質心位於太陽內部；地球和月球則繞着距離地心約 4700 km 的一點運行，這一點在地球內部，但離地心頗遠，所以地球每月都會擺動一次。天文學家正是靠偵測恆星的這種擺動，來尋找環繞其他恆星的行星。

可積系統

1969 年，Francesco Calogero 研究直線上多個質點以平方反比勢（即立方反比力）互相排斥的情況，發現無論質點數目多少，這個系統竟然都可以精確求解。Jürgen Moser 在 1975 年解釋了箇中原因，他用上一個矩陣，其特徵值（eigenvalues）在矩陣隨時間演化時保持不變：這就是 Section 7.7 的 *Lax* 對（Lax pairs）。*Calogero–Moser* 系統如今是**可積系統**（integrable system）的核心例子，所謂可積系統，就是守恆量多得足以完全求解的系統；它把力學與隨機矩陣、量子場論及孤立子理論聯繫起來。

思維技巧

> **選擇能解除耦合的坐標**
>
> 當兩個量互相耦合時，找出不耦合的組合。和與差，配上適當的常數作加權，往往能把問題拆成互相獨立的部分。

質心坐標與相對坐標是第一個例子。到了大學，同一個想法會以矩陣對角化（簡正模態（normal modes），Section 11.2）、偏微分方程的分離變數法等形式出現，也見於量子力學。

延伸練習

1 **繩上的兩個質量。**試做 STEP III 2023，第 9 題（載於 OCR 提供下載的 2023 年試卷，`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）。題目考察以繩相連的兩個質點，並利用質心把運動分離。留意其中一個質點何時向後移動。

2 **吸引力。**把力改為吸引力 $\frac{2}{z^3}$，重做本題。證明 z^2 仍然是 t 的二次式，並求兩個質點何時相撞。

3 **隱藏的平面。**就題目中的運動，求出平面上與原點距離為 $z(t)$ 的那條直線運動軌跡，以及掃過的角 $\theta(t)$。驗證 $z^2\dot{\theta}$ 是常數，且 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$。

4 **開普勒第三定律。**兩顆質量分別為 m_1 和 m_2 的恆星相距 a，在引力作用下繞它們的質心作圓周運動。證明週期 T 滿足 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$。

延伸閱讀

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books），第 8 章。二體問題、約化質量與軌道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 10 章，論有心力。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。給有志挑戰的讀者：精確可解系統的世界。

10.7 球殼內的引力

題目

STEP III 1999，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/99-s3-q9`

引子

試想像一顆空心的行星：一層薄薄的岩石球殼（spherical shell），裏面空無一物。假如你站在球殼內靠近殼壁的地方，也許會以為自己會被附近的岩石吸過去。事實上你會浮在原處：球殼內任何一處，球殼的引力都恰好是零。球殼較近的一側距離較短，但較遠的一側面積較大，兩種效應剛好完全抵銷。

這就是*牛頓球殼定理*（*Newton's shell theorem*）。牛頓（Newton）花了多年才把它證明出來，而它對牛頓的引力理論至為重要：連同與它配對的另一個結果（在球體之外，引力就如全部質量都集中在球心一樣），它說明了為何可以把地球和太陽當作點來處理。在練習和「背後的數學」一節中，我們會用這個定理計算一團氣體雲塌縮成恆星需要多少時間。

動筆之前

想一想 考慮圓環上兩小段位於同一直徑兩端的部分。畫出它們對質點（particle）所施的力。哪些分量（component）互相抵銷，哪些相加？

這兩小段與質點的距離相同。它們的引力沿軸方向的分量相等，因而相加；垂直於軸的分量大小相等、方向相反，因而抵銷。把整個圓環這樣逐對配起來，可知合力沿着軸，指向圓環的中心。

逐步解題

階段 1　圓環

圓環上每一小段與質點的距離都是 $\sqrt{x^2+r^2}$，而連接兩者的直線與軸成角 ψ，其中 $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$。質量為 δm 的一小段所施的引力為 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}$，其中沿軸方向的分量為 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$。每一小段的距離和角度都相同，所以這些分量直接相加，得

$$\frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}}. \qquad \blacksquare$$

階段 2　把球殼切成圓環

> **想一想**　設球殼的中心為 O，質點位於軸上，與 O 相距 b。把球殼切成多個垂直於軸的薄圓環，並以圓環上的點在 O 處與軸所成的角 ϕ 來標記各圓環。圓環的半徑、位置和質量分別是甚麼？

角度為 ϕ 的圓環半徑為 $a\sin\phi$，其中心沿軸與 O 相距 $a\cos\phi$，因此與質點相距 $a\cos\phi - b$。圓環的寬度為 $a\,\delta\phi$，所以面積為 $2\pi a\sin\phi\cdot a\,\delta\phi$，佔球殼面積 $4\pi a^2$ 的 $\frac{1}{2}\sin\phi\,\delta\phi$。它的質量是 $\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi$。根據第 1 階段的結果，它沿着軸把質點拉向 $\phi = 0$ 的一端，力的大小為

$$\frac{G\cdot\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi\,(a\cos\phi - b)}{\big((a\cos\phi-b)^2 + a^2\sin^2\phi\big)^{3/2}} = \frac{GM}{2}\cdot\frac{(a\cos\phi-b)\sin\phi\,\delta\phi}{(a^2-2ab\cos\phi+b^2)^{3/2}}.$$

（正負號會自動處理妥當：位於質點前方、滿足 $a\cos\phi > b$ 的圓環把質點拉向一方，位於質點後方的圓環則把它拉向另一方。）

階段 3　合適的變量

> **想一想**　分母含有 $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$。$s$ 在幾何上代表甚麼？$\mathrm{d}s$ 以 $\mathrm{d}\phi$ 表示是甚麼？

根據餘弦定理（cosine rule），s 是質點到圓環的距離。求導可得 $2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$，而由 $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ 解出 $a\cos\phi$，可得 $a\cos\phi - b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}$。所以合力為

$$\frac{GM}{2}\int\frac{a^2-b^2-s^2}{2b\,s^3}\cdot\frac{s\,\mathrm{d}s}{ab} = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s,$$

其中 s 由 $a-b$（最近的點，$\phi=0$）變到 $a+b$（最遠的點，$\phi=\pi$）。

階段 4　結果為零

$$\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\,\mathrm{d}s=(a^2-b^2)\Big(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\Big)-2b=(a^2-b^2)\cdot\frac{2b}{a^2-b^2}-2b=0.$$

球殼對質點不施任何力。 ■

> **停一停，試一試** 如果質點在球殼之外，即 $b>a$，情況會有甚麼不同？s 的上下限變成 $b-a$ 和 $b+a$。重做最後一行，並證明所受的力為 $\frac{GM}{b^2}$，指向球心，就如全部質量都集中在球心一樣。

回顧

- **先看對稱性（symmetry）。**把相對的小段配對，未經任何計算便已看出力的方向。
- **由較簡單的形狀逐步建構。**點組成圓環；圓環組成球殼。
- **選擇切合物理情境的變量。**把變量由角 ϕ 換成距離 s，一個棘手的積分便變得輕而易舉。

背後的數學

牛頓的圓錐論證

牛頓本人的證明（《自然哲學的數學原理》（*Principia*）第一卷命題 70）完全沒有用到積分。以質點為頂點，畫一個狹窄的對頂圓錐，它在球殼上截出兩小塊曲面（圖 10.7.1）。這兩小塊的面積與它們到質點的距離的平方 r_1^2 和 r_2^2 成正比（兩小塊與圓錐所成的角相等，因為一條弦在兩端與圓所成的角相等）。所以它們的質量與 r_1^2 和 r_2^2 成正比，而它們的引力與質量除以距離平方成正比，因此大小相等、方向相反。每一個通過質點的對頂圓錐都互相抵銷，所以合力為零。這種抵銷之所以成立，正是因為平方反比定律（inverse-square law）：若換成距離的任何其他次方，球殼便會對質點產生推力或拉力。

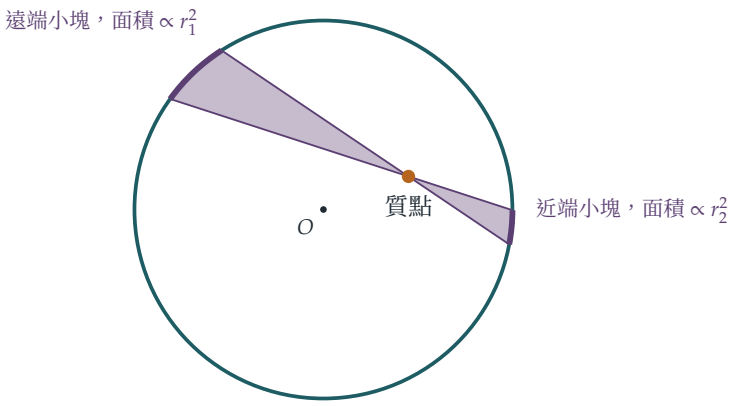


圖 10.7.1　牛頓的論證。由質點出發的一個細窄對頂圓錐在球殼上截出兩小塊。遠端的一塊較大，面積之比等於距離平方之比，但它的引力也恰好按同一比例減弱。兩個引力互相抵銷，其餘每一對亦然：在球殼之內，引力消失。

塌縮的雲團

STEP III 1987 Q14 把這個定理反過來用。在均勻球體之外，位於球面的質點所受的引力為 GMm/r^2，就如全部質量都集中在球心一樣。現在取一團靜止的均勻球狀塵埃雲，半徑為 R，質量為 M，讓它在自身引力下塌縮。球面上的質點只感受到它以內的質量，而在所有物質向內墜落的過程中，這質量一直是 M，所以它向內的速率 $v = -\dot{r}$ 滿足

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = 2GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\Big).$$

代入 $r = R\cos^2\alpha$（其中一道練習），可得到達半徑 r 所需的時間為 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\big(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\big)$。當 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 時，整團雲塌縮成一點，所需時間就是**自由落體時間**（*free-fall time*）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

其中 ρ 是密度。值得注意的是，雲團的每一層球殼都在同一刻到達中心，因為這個時間只取決於密度（圖 10.7.2）。對於一團典型的星際雲，每立方米約有 10^{-17} kg，t_{ff} 約為 700 000 年：這決定了恆星形成的時間尺度。

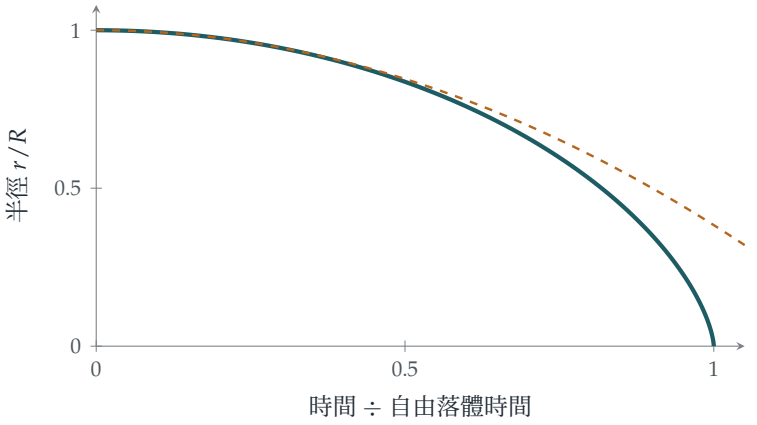


圖 10.7.2 塌縮中的均勻塵埃雲的半徑隨時間的變化（青綠色曲線）。它起初很慢，就像一塊剛放手的石頭（琥珀色虛線拋物線是恆定加速度的近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$），其後急劇加速，並在 $t = t_{\text{ff}}$ 時降至零。這條曲線是半條擺線（cycloid）。

牛頓的延遲與高斯定律

牛頓早在 1660 年代已掌握平方反比定律，但到 1687 年才發表他的引力理論。據一些歷史學家所說，其中一個原因是他在證明球殼定理之前，無法說明為何可以把地球當作點質量（point mass）；一旦證明了，《自然哲學的數學原理》的其餘部分便水到渠成。今天，這個定理只是高斯定律（*Gauss's law*）的一個簡短推論。高斯定律指出，穿過任何閉合曲面向外流出的引力場總量，與曲面內的質量成正比。在球殼內取一個同心的球面。它沒有包圍任何質量，所以穿過它的總流量為零。單憑這一點並不足以令場為零（均勻場穿過任何閉合曲面的總流量都是零，從一邊流入，從另一邊流出），但這裏對稱性幫了忙：場必定筆直指向球心或背離球心，而且在球面上各處強度相同，所以總流量為零就意味着場為零。同一條定律也支配電場，這就是為甚麼帶電金屬殼內沒有電場，也是為甚麼汽車能保護你免受雷擊。

思維技巧

積分即求和

要求出一個連續物體的效應，可把它切成效應已知的小塊，再把它們加起來。利用對稱性來選擇怎樣切。

點組成圓環，圓環組成球殼，球殼組成實心球。在大學裏，每一種場（引力場、電場、磁場）都是這樣由場源計算出來的，由此更引出高斯（Gauss）定理和斯托克斯（Stokes）定理的向量微積分（vector calculus）。

延伸練習

1 **球殼之外。**完成「暫停思考」方框中的問題：證明在球殼之外，所受的力為 $\frac{GM}{b^2}$。由此推斷，質量為 M 的均勻實心球對球外質點的引力，就如其質量集中在球心一樣。

2 **塌縮時間。**試做 STEP III 1987，第 14 題（`step.maths.org/questions/87-s3-q14`）。這道題求一團塵埃雲在自身引力下塌縮需要多少時間；用三角代換（trigonometric substitution）便可算出積分。

3 **穿越地球的隧道。**證明在均勻實心球之內，與球心相距 b 處所受的力為 $\frac{GMb}{a^3}$，與 b 成正比。由此推斷，把一個球投進一條穿過地球中心的隧道，它會來回振盪，週期（period）為 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$，約 84 分鐘，與一顆貼着地面飛行的衛星的週期相同。

4 **另一種力的定律。**假如引力遵從立方反比定律，球殼內所受的力是否仍然為零？（重做第 3 階段，以 $\frac{1}{s^3}$ 取代 $\frac{1}{s^2}$。）

延伸閱讀

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），關於萬有引力的章節，當中包括球殼定理。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。由一位諾貝爾獎得主講解牛頓的證明，包括命題 70 和 71。
- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。講述引力、塌縮和模擬如何解釋宇宙的結構。

10.8 排成三角形的三顆恆星

題目

STEP I 1999，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/99-s1-q11`

引子

兩個以引力互相吸引的天體，其運動可以完全解出，這是牛頓（Newton）證明了的，Section 10.6 亦已解釋過：兩者各自沿一條圓錐曲線（conic）繞共同的質心（centre of mass）運動，若兩者互相束縛，軌道是橢圓；若能量足以互相逃逸，則是拋物線或雙曲線。再加入第三個天體，一切就不同了。三體問題（three-body problem）沒有能用常見函數表示的通解，而在 1890 年，龐加萊（Henri Poincaré）更發現它的解可以是混沌的，這是混沌（chaos）在數學中首次出現。

然而，有些特殊解卻十分簡單。1772 年，拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）發現，位於等邊三角形（equilateral triangle）三個頂點的三個天體可以作剛性旋轉，整個三角形像車輪一樣轉動。本題要找的，就是質量相等時的這個解。拉格朗日的三角形並非只是趣聞：太陽、木星和數以千計的「特洛伊」（Trojan）小行星正好構成這種位形，今天的太空望遠鏡亦停泊在類似的點上。

動筆之前

想一想 一顆星要以角速度（angular velocity）ω 沿半徑為 R 的圓運動，它所受的總力必須是甚麼？

總力的大小必須是 $m\omega^2 R$，方向指向圓心。因此我們要檢查每顆星所受的總引力是否指向三角形的中心，並求出使其大小恰好相符的 ω。

逐步解題

階段 1　幾何

想一想　邊長為 a 的等邊三角形，每個頂點與中心相距多遠？

中心位於每條中線（median）上，與頂點的距離是中線長度的三分之二。中線的長度為 $a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以每個頂點到中心的距離是

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

由對稱性（symmetry）可知，三角形的中心就是三顆相同的星的質心。

階段 2　一顆星所受的力

想一想　另外兩顆星各以大小為 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ 的力拉它。這兩個拉力之間的夾角是多少？它們的合力（resultant）是多少，又指向哪個方向？

兩個拉力分別沿着三角形在該星處相交的兩條邊，所以它們之間的夾角是 60°。由對稱性可知，合力沿着這個角的角平分線（bisector），而角平分線通過中心。每個拉力與角平分線成 30°，所以合力的大小是

$$2\cdot\frac{\gamma m^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2},$$

方向指向中心（圖 10.8.1）。

階段 3　角速度

令合力等於 $m\omega^2 R$：

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2}, \qquad \text{所以} \qquad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

取這個角速度時，同樣的計算（由對稱性）適用於每一顆星，所以三顆星都繞中心作圓周運動，三角形保持剛性不變。 ■

階段 4　中心的第四顆星

想一想　一顆質量為 λm 的星位於中心，與每個頂點的距離是 $\frac{a}{\sqrt{3}}$。它對每顆頂點上的星額外施加多大的力？質心會移動嗎？中心的星有沒有受到淨力？

中心的星不會改變質心的位置，而由對稱性可知，它所受的三個拉力互相抵消，所以它保持靜止。它把每顆頂點上的星拉向中心，力的大小是 $\frac{\gamma\lambda m^2}{(a/\sqrt{3})^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2}$。現在頂點上的

星所受指向中心的總力是 $(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}$，所以

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}}=(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2},\qquad \omega^2=\frac{(3+3\sqrt{3}\,\lambda)\gamma m}{a^3}=\frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda).\qquad\blacksquare$$

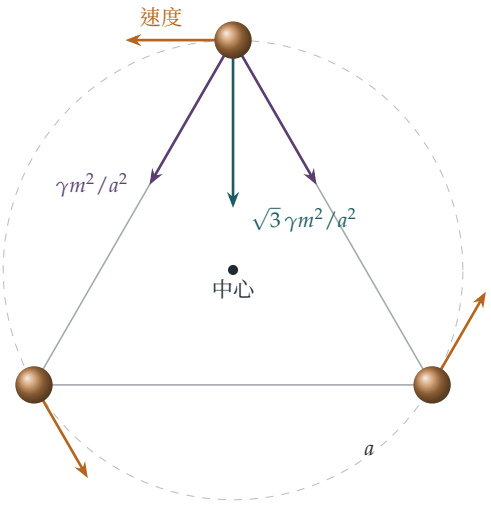


圖 10.8.1　三顆相同的星位於等邊三角形的三個頂點。頂部那顆星所受的兩個拉力（紫色）合成一個指向中心的力（藍綠色）。若每顆星以適當的速率（琥珀色）沿虛線圓運動，整個三角形便作剛性旋轉。這就是拉格朗日對三體問題的等邊三角形解。

回顧

- **猜一個對稱的解。**我們並沒有解出三體問題；我們只是猜了一種高度對稱的運動，再檢查牛頓定律是否容許它。
- **對稱性決定方向。**合力必定沿着角平分線，所以只需計算它的大小。
- **檢查每一個天體。**由對稱性可知，驗證了一顆星就等於驗證了全部三顆；中心的星則需要另作（容易的）檢查。

背後的數學

喬裝的開普勒定律

把答案寫成 $\omega^2a^3=\gamma(3m)$。對於相距 a、沿圓形軌道運行的兩個天體，開普勒（Kepler）第三定律（Section 10.6 的一道練習）指出 $\omega^2a^3=\gamma(m_1+m_2)$，右邊出現的是總質量。

三顆星遵從同一條定律，總質量為 $3m$。事實上，拉格朗日證明了等邊三角形解對任意三個質量都存在，而不限於相等的質量：三角形繞質心旋轉，並且 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1+m_2+m_3)$。歐拉（Euler）在幾年前已找到第二族解，其中三個天體位於一條旋轉的直線上。這五種位形（三種共線、兩種三角形，不計標號的差別）是三個天體能保持形狀不變的僅有情況。

拉格朗日點

取 m_1 為太陽，m_2 為一顆行星，m_3 為一顆微小的小行星。等邊三角形解告訴我們，小行星可以停留在與太陽和行星構成等邊三角形的第三個頂點上，在行星軌道上位於行星的前方或後方。這就是拉格朗日點（Lagrange points）L_4 和 L_5；歐拉的共線解則給出 L_1、L_2 和 L_3。木星有超過一萬顆已知的「特洛伊」小行星，聚集在它的 L_4 和 L_5 點附近。詹姆斯·韋伯太空望遠鏡（James Webb Space Telescope）在日地系統的 L_2 點附近運行，位於地球以外 1.5 百萬公里處，在那裏它可以把太陽、地球和月球全部擋在遮陽罩之後。

穩定性

造星者的三角形能維持下去嗎？對於相等的質量，答案是不能：最輕微的擾動也會不斷增長，幾顆星最終不是四散飛離，就是互相碰撞。Edward Routh 在 1875 年證明，拉格朗日的三角形只有在其中一個質量佔絕對優勢時才是穩定（stable）的，確切的條件是

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1+m_2+m_3)^2.$$

對於太陽和木星，這個條件綽綽有餘地成立，這就是特洛伊小行星得以長存的原因。對於三個相等的質量，$27 \times 3m^2 > 9m^2$，所以這個位形並不穩定。

龐加萊的錯誤與 8 字形軌道

1887 年，瑞典國王奧斯卡二世（Oscar II）懸賞徵求多體問題的解。龐加萊在 1889 年憑一篇關於三體問題的長篇論文獲獎，但論文付印期間，一位編輯發現了其中一處漏洞。在修正的過程中，龐加萊發現有些解的表現「複雜得驚人，我甚至無法嘗試把它畫出來」：這是人類對混沌的第一瞥。已印好的論文全數收回銷毀，費用由龐加萊承擔。新的特殊解至今仍不斷被發現：1993 年 Cristopher Moore 以數值方法發現，而 2000 年 Alain Chenciner 與 Richard Montgomery 證明，三個相等的質量可以沿一條 8 字形曲線互相追逐。此後，人們借助電腦又找到了數以千計的周期軌道。

思維技巧

猜一個對稱的解，然後驗證

當一個問題難以在一般情況下解出時，不妨尋找對稱性盡可能高的解。對稱的猜想能把許多未知量減少到一兩個，而驗證它往往很容易。

這是數學和物理中一個強而有力的策略：對稱的平衡態、穩態、行波和剛性旋轉的位形，往往是最先找到的解，也是研究其餘各種解的起點。接下來要問的，永遠是這個對稱解是否穩定。

延伸練習

1 **正方形上的四顆星。**四顆質量為 m 的星位於邊長為 a 的正方形的四個頂點。證明它們可以繞中心作剛性旋轉，其中 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$。

2 **兩顆相同的星和一顆行星。**兩顆質量為 M 的星相距 a，繞它們的質心運行。一顆質量可忽略的行星位於中心。它是否處於平衡？對於沿兩星連線方向的微小位移，它是否穩定？垂直於連線的方向又如何？

3 **不相等的質量。**質量分別為 m_1、m_2、m_3 的三顆星位於邊長為 a 的等邊三角形的三個頂點，並繞它們的質心 G 旋轉。證明 m_1 所受的引力為 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$，其中 P_1 是它的位置。（提示：把各力寫成向量，並利用質心的定義。）由此推導出拉格朗日的結果。

4 n **顆星。**n 顆相同的星位於一個正 n 邊形的各個頂點，該正多邊形內接於半徑為 R 的圓。求剛性旋轉的 ω^2，並把它表示成 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ 對 k 求和的形式。

延伸閱讀

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。講述那次懸賞以及龐加萊發現混沌的故事。
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem"**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。由 8 字形軌道的其中一位發現者親自講解；可於網上免費閱讀。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。一部關於三體問題與混沌的通俗歷史。

我們學到了甚麼

本章開首說過，有些東西永遠不變，而知道哪些東西不變，就已經掌握了半門物理學。我們提出了三個問題：守恆定律（conservation laws）單憑自身能決定甚麼、細小的步驟如何累積起來，以及怎樣馴服多個物體組成的系統。以下是本章八道題目給出的答案。

1. 守恆定律單憑自身能決定甚麼？

兩個物體沿直線作彈性碰撞（elastic collision）時，動量（momentum）和能量（energy）完全決定了碰撞的結果，而這一個結論在本章一再派上用場。物體再多一些，情況就不同了。在 Section 10.1 中，一排彈珠有許多種結果都同時符合這兩條定律，要再加上一項物理事實（彈珠不能互相穿過），才能排除其中一些。把動量的平方減去能量，得出一個由交叉項組成的和，而這個和必須等於零；這個不等式（inequality）論證證明了某些運動根本不可能發生。至於牛頓擺（Newton's cradle）那種人所熟知的表現，原來取決於守恆定律以外的細節：衝擊如何在球與球之間傳遞。

守恆定律也揭露了隱藏的假設。在 Section 10.3 中，所有炮同時發射所得的速率，比逐一發射為高，但這只是因為同時發射用了更多能量；一旦把該固定的量固定下來，結論就反過來了。

2. 細小的步驟如何累積起來？

有好幾節都是把一個簡單的步驟重複又重複。在 Section 10.2 中，一次碰撞最多只能令速率加倍，但經過一串愈來愈輕的球，增幅就變得沒有上限：這正是籃球疊網球背後的原理，也是引力彈弓（gravitational slingshot）背後的原理。在 Section 10.3 中，許多次細小的發射化成了一個積分（integral），並得出齊奧爾科夫斯基（Tsiolkovsky）的對數（logarithm），由此解釋了為何火箭的大部分都是燃料，以及為何火箭要分級。在 Section 10.4 中，分子每次從移動中的活塞反彈，速率都增加 $2u$，而一個精確的遞推關係（recurrence）顯示，速率與長度的乘積幾乎保持不變：這是一個絕熱不變量（adiabatic invariant），也是氣體受壓縮時升溫的原因。而在 Section 10.5 中，無窮多次反彈只花了有限的時間，因為各段時間構成一個收斂（convergent）的等比級數（geometric series）。

3. 怎樣馴服多個物體組成的系統？

方法是選取合適的坐標，並善用對稱性（symmetry）。在 Section 10.6 中，質心（centre of mass）作勻速運動，而兩物體的間距則表現得像一個帶有約化質量（reduced mass）的單一質點；一個隱藏的平面甚至解釋了為何間距的平方是時間的二次式。在 Section 10.7 中，對稱性加上積分，證明了球殼（spherical shell）對內部不施加引力，對外部則有如一個質點；於是一團正在坍縮的塵埃雲可以用單獨一條方程來處理，而當中的自由下落時間（free-fall time）決定了恆星形成的步伐。而在 Section 10.8 中，一個對稱的猜想解決了無法求解的三體問題（three-body problem）的一個特殊情況：拉格朗日（Lagrange）的旋轉三角形，它在特洛伊小行星（Trojan asteroids）身上得到了體現。

4. 力學工具箱

方法	你在哪裏用過
以守恆定律作為約束條件	牛頓擺（10.1）
轉換參考系（frame）	碰撞（10.2）；活塞（10.4）
反覆運用同一結果	疊球（10.2）
質量可變時的動量	火箭（10.3）
由求和到積分	火箭方程（10.3）；球殼（10.7）
遞推關係與裂項相消（telescoping）	活塞（10.4）
等比級數	楔（10.5）
質心與約化質量	二體（10.6）
能量積分 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$	二體（10.6）；坍縮（10.7）
對稱的猜想	三星（10.8）

下一步

- 第 11 章由守恆轉到振盪（oscillation）與轉動（rotation）：共振（resonance）、簡正模式（normal modes）、真實的擺，以及在加速參考系和旋轉參考系中的運動。
- Section 8.2 的能量方法和 Section 8.4 的極限環（limit cycles），是同一批思想在微分方程（differential equation）方面的體現。
- 龐加萊（Poincaré）在三體問題中發現的混沌（chaos），是 Section 8.7 的主題。

如果你想在入讀大學之前再走遠一點

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（力學導論）：經典的大學一年級教科書；要求很高，但收穫甚豐。

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（古典力學導論）：收錄數以百計的題目，當中不少與本章的題目一樣出人意表。
- **Richard Feynman, *The Character of Physical Law***（物理定律的本性）：為一般聽眾而設的講座，內容涵蓋守恆定律、對稱性和引力。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（諾特的奇妙定理）：為何有對稱性就有守恆。

費曼（Feynman）說過，能量守恆至今未見任何例外。本章嘗試展示守恆定律的威力有多大：排除不可能的結果、揭示隱藏的不變量，並把複雜得令人絕望的系統化為我們能夠理解的系統。但本章也展示了它們的局限。守恆定律能夠約束，卻不一定能夠決定；在它們止步之處，就要由力、對稱性和參考系的細節接手。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：只列出結果和關鍵步驟，方便你核對自己的做法。每道練習請先認真做過，然後才看答案。

10.1 牛頓擺

1. 所有碰撞（collision）結束後，運動中的質點後面不可能跟着一個較慢的質點。因此，若恰好只有一個質點在動，它必定是 A_n，而 $\lambda m v = mu$、$\lambda m v^2 = mu^2$ 在 $\lambda \neq 1$ 時互相矛盾。若只有 A_{n-1} 和 A_n 在動，則方程與質量為 m 和 λm 的兩個質點相碰時的方程相同，得出 A_{n-1} 的速度為 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u < 0$；但這樣它便會撞上 A_{n-2}。有三個質點在動的情況，可完全仿照第 (ii) 部分排除。在動的兩個質點是 A_0（以 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ 向後運動）和 A_n（以 $\frac{2u}{\lambda+1}$ 向前運動）。

2. 質量相等的彈珠相碰時會交換速度，所以速率 u 一直傳到 A_n。之後 A_n 撞上 A_{n+1}：A_{n+1} 以 $\frac{2u}{1+\lambda}$ 離開，而 A_n 則以 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ 反彈。這個向後的速度沿着整列彈珠傳回 A_0，使它以該速率向後離開。

3. 「兩球以 u 彈出」所帶的動量（momentum）是 $2mu$，能量是 mu^2，與碰撞前相同。另一個解（之後不再有碰撞）是：最後三個球分別以 $\frac{u}{3}$、$\frac{u}{3}$ 和 $\frac{4u}{3}$ 離開（驗算：總和為 $2u$，平方和為 $2u^2$）。真實的牛頓擺選擇第一個解，是因為各球之間並非完全貼緊，所以碰撞是一對一對地先後發生的。

4. 速率一直傳到 A_n，它再撞上較輕的 A_{n+1}：A_{n+1} 以 $\frac{2u}{1+\lambda}$ 離開，而 A_n 則以較慢的 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$ 跟在後面。其餘質點全都不動。

10.2 疊球效應

1. 球以 $U = \sqrt{2gH}$ 到達地面，再以 eU 反彈，上升 e^2H。把小球放在上面時：大球以 eU 向上運動，遇上以 U 向下運動的小球。由動量守恆和恢復係數（restitution）的關係，可得小球向上的速率為 $w = U\frac{Me(2+e)-m}{M+m}$。小球球心由 $2R + r = 0.45$ 出發，升至 4.5，所以 $\frac{w^2}{2g} = 4.05$，而 $\frac{w}{U} = \sqrt{\frac{4.05}{1.8}} = 1.5$。代入 $e = \frac{2}{3}$，得 $\frac{16}{9}M - m = 1.5(M + m)$，於是 $M = 9m$。

2. 由動量守恆和恢復係數的關係，P_1 的速率為 $\frac{1+e}{1+\lambda}u$；每次碰撞的質量比都相同，情況重複出現，所以 P_n 以 $\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u$ 運動。速率為 s 的質點撞上下一個質點後，餘下

的速率為 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}s$，而下一個質點經過自己的下一次碰撞後，速率減至 $\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}s$。當 $\lambda e<1$ 時，前者只有在 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}>\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}$ 時才會再次追上後者，即 $\lambda>e$；所以若 $e>\lambda$，每個質點只會被撞一次，也只會撞別的質點一次。若 $\lambda e=1$，每個質點撞上下一個之後便立即停下。

3. 最底的球以 U 反彈，遇上中間的球（正以 U 向下運動）：相對速率為 $2U$，所以中間的球以 $3U$ 離開。最上面的球與它相遇時相對速率為 $4U$，於是以 $7U$ 離開，上升 $49H$。一般而言 $u_{j+1}=2u_j+U$，所以 $u_j+U=2^jU$。

4. 彈性碰撞（elastic collision）中動能（kinetic energy）守恆。A 的能量是 $\frac12 m\big(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\big)^{2n}u^2$，而最初的能量是 $\frac12\lambda^n mu^2$，又因 $\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}<1$，所以 A 得到的能量永遠不會多於原有的總能量。較重的質點繼續向前運動，各自保留原來速率的 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ 倍，餘下的能量便留在它們身上。

10.3 火箭與槍炮

1. 一次過全部發射：$Mu=nm(v-u)$，所以 $u=\frac{nmv}{M+nm}$。逐個發射：第 r 次發射給出 $\big(M+(n-r+1)m\big)(u_r-u_{r-1})=mv$，所以 $u_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{mv}{M+jm}$，而除最後一項外，每一項都大於 $\frac{mv}{M+nm}$。因此 $u_n>u$。

2. 動量：$M(1+bx)v=MV$。於是 $(1+bx)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V$，所以 $x+\frac12 bx^2=Vt$，而 $x=\frac{\sqrt{1+2bVt}-1}{b}$。有外力時，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(1+bx)v\big)=Mf$ 給出 $(1+bx)v=ft+V$。若速率為常數 c，則須有 $x=ct$ 及 $(1+bct)c=ft+V$，所以 $c=V$ 且 $bV^2=f$。否則 $x+\frac12 bx^2=\frac12 ft^2+Vt$，所以 $x\sim t\sqrt{f/b}$，而 $v\to\sqrt{f/b}$。

3. 單級：$v\ln 10\approx 2.30v$。兩級：$v\ln\frac{10}{5.5}+v\ln\frac{5}{0.5}\approx 0.60v+2.30v=2.90v$。

4. 當 $0\le s\le x$ 時，$\frac{1}{1+x}\le\frac{1}{1+s}\le 1$；在 $[0,x]$ 上積分即可。

10.4 一個分子與一個活塞

1. 這個遞推關係（recurrence）逐項相消後得 $d_n=\frac{(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，所以 $v_nd_n=\frac{(v+2nu)(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，它比 $(v+u)d_1$ 大 $\frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}\to 0$。

2. 把 u 換成 $-u$：每次從後退中的活塞反彈，速率都減少 $2u$，所以 $v_n=v-2nu$（只要質點仍能追上活塞），$d_n=\frac{(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$，而 $v_nd_n=\frac{(v-2nu)(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$，同樣接近 $(v-u)d_1$。

3. 當 $v=u$ 時，$v_n=(2n+1)u$。第 n 次碰撞時動量的改變量為 $m(v_{n-1}+v_n)=4nmu$，而 $t_n=\frac{d_1}{un(n+1)}$，所以平均力為 $\frac{4mu^2n^2(n+1)}{d_1}$，量級為 n^3。每個循環所作的功約為力 $\times\, ut_n$，大約是 $4nmu^2$，這些功加起來是無窮大：要把活塞完全推到底，需要無窮多的功，正如分子的能量 $\frac12 m(2n+1)^2u^2$ 會無止境地增長一樣。

4. 不變量（invariant）是 $\oint p\,\mathrm{d}q = 2\int_0^h m\sqrt{2g(h-z)}\,\mathrm{d}z \propto h^{3/2}$，其中 h 是彈跳離地板的高度。所以當地板緩慢上升時，$h^{3/2}$（等價地說，即 v^3，或能量乘以週期）幾乎保持不變。

10.5 有限時間內的無限次反彈

1. 由正弦定理（sine rule），$M_1N_1 = \frac{OM_1\sin 30^\circ}{\sin\theta}$，而相繼各段路程按比率 $\rho = \frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta} < 1$ 縮短。總和為 $\frac{M_1N_1}{1-\rho} = \frac{OM_1}{2\left(\sin\theta - \sin(\theta-30^\circ)\right)} = \frac{OM_1}{4\sin 15^\circ\cos(\theta-15^\circ)}$。

2. 由三角形 OM_1N_1 的各角可得 $\varphi = \theta - \alpha$。時間之比為 $\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-2\alpha)}{\sin 2\theta}$，它小於 1 當且僅當 $\alpha < \theta < 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$。

3. 把楔形沿它的壁反射，可將路徑展開成一條直線。圍繞 O 剛好可放十二個楔形，而一條不通過 O 的直線最多穿過其中六個。所以質點只會反彈有限次，然後逃離，除非它正對着 O 射去。

4. 它首先下落 $t_0 = \sqrt{2/9.8} \approx 0.452\,\mathrm{s}$。每次彈跳歷時 $2e^k t_0$，所以總時間為 $t_0\left(1 + \frac{2e}{1-e}\right) = 9t_0 \approx 4.07\,\mathrm{s}$。總路程為 $1 + 2\sum_{k\geq 1} e^{2k} = 1 + \frac{2(0.64)}{0.36} \approx 4.56\,\mathrm{m}$。

10.6 二體化為一體

1. 繩子保持拉緊，相對速度與繩子垂直，大小恆為 u，所以 $\theta = \frac{ut}{r}$。由動量可得 $my + MY = mut$。利用 $A = G - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AB} = r(\cos\theta, -\sin\theta)$，得 $y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right)$。於是 $\dot{y} = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right)$，它在 $\cos\frac{ut}{r} < -\frac{m}{M}$ 時為負，而這在 $M > m$ 時才有可能。

2. 現在 $\ddot{z} = -\frac{3}{z^3}$，所以 $\dot{z}^2 = \frac{3}{z^2} - 2$（利用 $z = 1$、$\dot{z} = -1$）。設 $w = z^2$，則 $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = -4$，所以 $z^2 = 1 - 2t - 2t^2$。兩者在 $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$ 時相撞。

3. $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = |\mathbf{p} + \mathbf{q}t|^2$，其中 $\mathbf{p} = (1,0)$，$\mathbf{q} = (-1,\sqrt{3})$：這是通過 $(1,0)$、方向為 $(-1,\sqrt{3})$ 的直線，而 $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}t}{1-t}$。於是 $z^2\dot{\theta} = |\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = \sqrt{3}$。這個斥力正好就是平面上自由運動的「離心」項 $\frac{h^2}{z^3}$，其角動量（angular momentum）為 $h = \sqrt{3}$。

4. 兩顆星與質心（centre of mass）的距離分別為 $\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$ 和 $\frac{m_1 a}{m_1+m_2}$。對第一顆星，$\frac{Gm_1m_2}{a^2} = m_1\omega^2\frac{m_2 a}{m_1+m_2}$，所以 $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}$，而 $T = \frac{2\pi}{\omega}$。

10.7 球殼內的引力

1. 在球殼外（$b > a$），與第 3 階段相同的積分改為對 s 由 $b-a$ 積至 $b+a$，結果是 $\frac{GM}{b^2}$。實心球是多個同心球殼的併集，每個球殼的作用都如同其質量集中於球心。

2. 設 $r = R\cos^2\alpha$，則 $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{\tan^2\alpha}{R}$，所以速率為 $\sqrt{2GM/R}\tan\alpha$。於是 $\mathrm{d}t = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2GM/R}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$；再積分即可。

3. 根據球殼定理（shell theorem），只有半徑 b 以內的質量（即 $M\frac{b^3}{a^3}$）產生引力，結果是 $\frac{GMb}{a^3}$。這是簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$，週期為 $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 84$ 分鐘，這裏取 $a = 6.37\times10^6\,\mathrm{m}$ 及 $GM = 3.99\times10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$。在半徑 a 處運行的衛星滿足 $\omega^2 a = \frac{GM}{a^2}$：$\omega$ 相同。

4. 不會。換成 $\frac{1}{s^3}$ 後，被積函數不再化簡為常數，球殼較近的一側佔了上風：質點會被拉向球殼最近的部分。只有平方反比定律（inverse-square law）才會完全抵消（球殼上一小塊的面積按 s^2 增長，剛好抵消引力的減弱）。

10.8 排成三角形的三顆恆星

1. 每顆星與中心的距離為 $\frac{a}{\sqrt{2}}$。相鄰兩顆星的引力指向中心的分量合共為 $\frac{2\gamma m^2}{a^2}\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}\gamma m^2}{a^2}$，而對面那顆星的引力為 $\frac{\gamma m^2}{2a^2}$。令 $\frac{\gamma m^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}$，得 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$。

2. 在中心處各引力互相抵消，所以行星處於平衡（equilibrium）。沿着兩顆星的連線方向，平衡是不穩定的：向其中一顆星移動距離 x，便會受到約為 $\frac{32\gamma Mx}{a^3}$ 的向外淨力。在垂直於軌道平面的方向，平衡是穩定的，回復力約為 $\frac{16\gamma Mz}{a^3}$。（在軌道平面內垂直於連線的方向，引力有回復作用，但旋轉會把這個方向的運動與不穩定的方向耦合起來。）

3. 作用於 m_1 的力為 $\frac{\gamma m_1}{a^3}\big(m_2(P_2-P_1)+m_3(P_3-P_1)\big)$。由於 $m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3 = (m_1+m_2+m_3)G$，這個力等於 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}(G-P_1)$。每顆星都被拉向 G，引力與它跟 G 的距離成正比，而且比例常數相同，所以三顆星可以像剛體一樣一起旋轉，其中 $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{a^3}$。

4. 相隔 k 個位置的那顆星，距離為 $2R\sin\frac{k\pi}{n}$，其引力指向中心的分量佔 $\sin\frac{k\pi}{n}$。所以 $m\omega^2R = \frac{\gamma m^2}{4R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$，得 $\omega^2 = \frac{\gamma m}{4R^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$。當 $n=3$、$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ 時，結果是 $\frac{3\gamma m}{a^3}$。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 10 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。