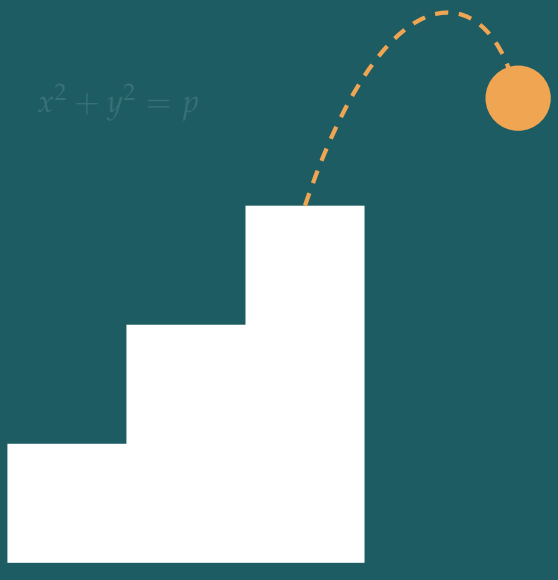
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 8 章

微分方程（Differential Equations）與動力系統（Dynamical Systems）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 8 章

微分方程（Differential Equations）與動力系統（Dynamical Systems）

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 8 章：微分方程（Differential Equations）與動力系統（Dynamical Systems）

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 8 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

8

微分方程與動力系統

絕大多數微分方程都解不出來。學問就在於：解不出來，也要讀懂它。

本章內容

8.1	當解不唯一	STEP III 1994
8.2	不求解而估界	STEP III 2013
8.3	收穫種羣	STEP II 1995
8.4	盤旋趨向圓	STEP III 2015
8.5	格力犬追逐格力犬	STEP III 1988
8.6	量子振子	STEP III 1988
8.7	可以解出的混沌	STEP I 2014
8.8	週期三蘊含混沌	STEP III 2025
A	練習答案	第 63 頁

第 8 章 · 引言

變化的法則

大自然對積分的種種困難一笑置之。

— 相傳為拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）所言

在中學，微分方程（differential equation）是拿來解的。你把變量分離，或者找一個積分因子（integrating factor），又或者猜一個形如 $e^{\lambda x}$ 的解，最後得到一條公式。課本裏的方程都是特意挑選的，所以這些方法才行得通。可惜的是，來自現實世界的微分方程（三顆行星的運動、天氣、捕食者與獵物的種羣數量、大幅度擺動的單擺），幾乎全都沒有可以用我們熟悉的函數寫出來的解。

本章要談的，就是這時候該怎麼辦。我們不再問「公式是甚麼？」，而是問一些不靠公式也能回答的問題。解到底存在嗎？是否只有一個？它會保持有界（bounded）嗎？它會趨於一個穩定狀態，還是趨於一個周而復始的循環，抑或永遠游移不定？長遠來說它會怎樣？這種由「求解」轉為「理解」的觀點，始於 1880 年代的龐加萊（Henri Poincaré），並由此開創了今天稱為*動力系統*（dynamical systems）的學科。

微分方程為何重要

微分方程是科學的語言。牛頓（Newton）第二定律是一條微分方程；麥克斯韋（Maxwell）的電磁學方程組、量子力學的薛定諤（Schrödinger）方程，以及用來預測天氣和設計飛機的流體流動方程，也都是微分方程。流行病學家用它們為疾病的傳播建立模型，生態學家用來描述魚類資源的數量，經濟學家用來描述經濟增長，工程師則用來描述各種控制系統的響應，由恆溫器到自動駕駛儀無一例外。凡是一個量的變化率取決於它當前的狀態，就有一條微分方程，而且通常是一條沒有人能精確解出的方程。

與這些連續模型並列的還有離散模型，其中時間是一步一步推進的：今年的種羣數量決定明年的種羣數量。這些*迭代映射*（iterated maps）寫起來比較簡單，但最後兩節會說明，它們的行為可以同樣狂野。1970 年代的重大發現之一，就是非常簡單的法則也能產生*混沌*（chaos）：這種行為完全是確定的，實際上卻無法預測。

你在大學會遇到甚麼

大學一年級的微分方程課程會講授標準的求解方法，但也會引入本章的這些問題。你會遇到存在性與唯一性定理（existence and uniqueness theorems），它們告訴你解在甚麼時候存在，又在甚麼時候由初始值決定。你會學習繪畫*相圖*（phase portraits），即把所

有解一次過畫出來的圖，並學習透過線性化（linearising）把平衡點（equilibria）分類為穩定或不穩定。往後的課程會走得遠得多：*非線性動力學*（nonlinear dynamics）研究極限環（limit cycles）、分歧（bifurcations）和混沌；*數學生物學*（mathematical biology）把這些概念應用於種羣和流行病；而偏微分方程（partial differential equations）、傅立葉級數（Fourier series）和正交函數（orthogonal functions）的理論（在 Section 8.6 可以略窺一二）則是量子力學和大部分應用數學的基礎。

貫穿本章的問題

三大問題

1. **現在能決定將來嗎？**一條微分方程配上一個初始值，在甚麼時候恰好只有一個解？
2. **不求解，我們能知道甚麼？**在沒有公式的情況下，怎樣為解定出上下界、找出它最終停留在哪裏，或者描述它的形狀？
3. **長遠來說會怎樣？**解會趨於穩定狀態、趨近一個循環，還是呈現混沌的行為？我們又怎樣分辨？

本章首先討論唯一性，以及唯一性不成立時會發生甚麼事（Section 8.1），然後發展一些不必求解也能理解方程的工具：不會增加的類能量的量、平衡點及其穩定性，以及配合問題對稱性的坐標。有兩節把這些想法應用於物理問題：在正方形內互相追逐的幾隻狗，以及量子諧振子（quantum harmonic oscillator）。本章最後討論離散映射：在那裏，一條公式揭示了混沌，而單單一個長度為三的循環，就迫使任何長度的循環都必然存在。

本章的概念

§	課題	概念
8.1	唯一性	包絡線（envelopes）與奇解（singular solutions）；黏合
8.2	能量方法	一個永不增加的量
8.3	種羣模型	平衡點、穩定性與臨界點（tipping point）
8.4	極限環	極坐標與伯努利代換（Bernoulli substitution）
8.5	追逐曲線（pursuit curves）	對稱性把四個物體化約為一個
8.6	正交函數	朗斯基行列式（Wronskian）與正交性
8.7	混沌	變量代換：邏輯斯諦映射（logistic map）其實是喬裝了的倍角映射
8.8	週期軌道（periodic orbits）	區間覆蓋；沙可夫斯基定理（Sharkovskii's theorem）

如何閱讀本章

在動手解任何東西之前，先畫草圖。對於微分方程 $y' = F(y)$，標出 F 在哪裏為正、為負和為零，並在 y 軸上畫上箭頭；對於映射 $x \mapsto f(x)$，把它的圖像連同直線 $y = x$ 一起畫出來，再用蛛網圖法（cobweb method）追蹤幾個數列。這些圖只需一分鐘就能畫好，而且往往在代數運算開始之前，就已經告訴你答案應該是甚麼模樣。

8.1 當解不唯一

題目

STEP III 1994，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/94-s3-q4`

引子

微分方程（differential equation）是一條告訴你某個量如何變化的規則：牛頓（Newton）定律告訴行星，在知道自己目前位置的情況下該如何運動。古典物理學的圖像是，這樣就已足夠：只要知道世界此刻的狀態，定律便決定了它的整個未來。拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）曾設想有這樣一個智者，只要知道每一個位置和速度，便能預測一切。這幅圖像建基於一個數學假設：一條微分方程加上一個初始條件（starting condition），恰好只有一個解。

這道題說明這個假設可以不成立。看似平平無奇的方程 $(y')^2 = 4y$，有些解會沿着 x 軸走，然後在自己選定的一刻離軸而去。經過某些點的解有無限多個。知道現在，並不能決定未來。找出唯一性（uniqueness）究竟在甚麼時候成立，是大學微分方程課程中最先遇到的定理之一。

動筆之前

想一想 把兩邊開平方：$y' = \pm 2\sqrt{y}$。試試 $y = (x-c)^2$。它滿足這條方程嗎？有沒有更簡單的解？

若 $y = (x-c)^2$，則 $y' = 2(x-c)$，而 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$。所以對每一個 x，每一條拋物線（parabola）$y = (x-c)^2$ 都是解。而 $y = 0$ 也是解：$(0)^2 = 4 \times 0$。請記住最後這一個解；它是整道題的關鍵。

逐步解題

階段 1　經過一點的解

想一想　哪些拋物線 $y=(x-c)^2$ 經過 (a,b^2)？

我們需要 $(a-c)^2=b^2$，所以 $a-c=\pm b$，即 $c=a-b$ 或 $c=a+b$。由於 $b\neq 0$，這兩個值並不相同，於是得出兩個解

$$y=(x-a+b)^2 \qquad 及 \qquad y=(x-a-b)^2. \qquad \blacksquare$$

（我們還應該檢查有沒有遺漏：在 $y>0$ 的區域上，$y'=\pm 2\sqrt{y}$ 而正負號固定，並且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y}=\frac{y'}{2\sqrt{y}}=\pm 1$，所以 $\sqrt{y}=\pm(x-c)$，得出的正是這些拋物線。因此在給定的點附近，只要 y 保持為正，就只有這兩個解。不過，解一旦到達 x 軸，便可以與零解黏合起來，我們將在第 3 階段看到這一點，而這樣會多出無限多個對所有 x 都有定義的解。題目所說的「兩個解」，就是這兩條拋物線。）

階段 2　兩個點與一個共同的解

經過原點的解必定是 $y=x^2$（即 $c=0$ 的那條拋物線）。它在 $x=1$ 和 $x=-1$ 處達到高度 1。所以取 $(a_1,1)=(1,1)$ 和 $(a_2,1)=(-1,1)$。

經過 $(1,1)$（即 $a=1$，$b=\pm 1$）的解是 $y=x^2$ 和 $y=(x-2)^2$。經過 $(-1,1)$ 的解是 $y=(x+2)^2$ 和 $y=x^2$。兩種情況下，經過原點的解都是同一條曲線 $y=x^2$。 $\blacksquare$

階段 3　整個曲線族與一條公切線

停一停，試一試　就不同的 c 值，畫出幾條拋物線 $y=(x-c)^2$ 的草圖。哪一條直線與它們每一條都相切？這條直線本身是不是解？

每一條拋物線 $y=(x-c)^2$ 都在其頂點 $(c,0)$ 與 x 軸相切，所以 x 軸是整個曲線族的公切線（common tangent），亦即它們的包絡線（envelope）（圖 8.1.1）。而 x 軸，即 $y=0$，本身也是這條微分方程的解。它不是那些拋物線的其中一條；它是另外一個獨立的解，稱為奇解（singular solution）。

階段 4　為何重要

想一想　從原點出發。哪些解經過原點？你能否構造一個解，先沿着 x 軸走一段，然後離開？

經過原點的有 $y=x^2$ 和 $y=0$。但事實遠不止於此。由於每條拋物線都與 x 軸相切（兩

者在該處的斜率都是 0），你可以把各段平滑地黏合起來：對任意 $c_1 \le 0 \le c_2$，

$$y = \begin{cases} (x-c_1)^2 & x < c_1, \\ 0 & c_1 \le x \le c_2, \\ (x-c_2)^2 & x > c_2 \end{cases}$$

是一個可微函數（differentiable function），處處滿足 $(y')^2 = 4y$，並且經過原點。經過 x 軸上每一點的解都有無限多個：一個解可以隨意在 $y = 0$ 上停留多久，然後才離開。這條公切線正正就是唯一性失效的地方。 ■

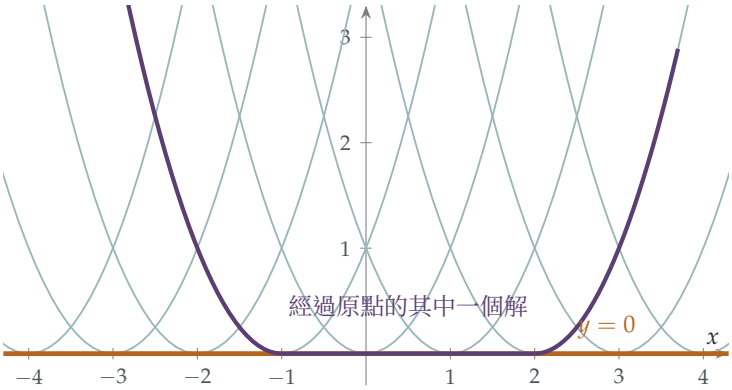


圖 8.1.1 $(y')^2 = 4y$ 的解 $y = (x-c)^2$（藍綠色）全都與 x 軸相切；這條軸是它們的包絡線，本身也是解（琥珀色）。把各段黏合起來可得出更多的解，例如紫紅色的那一個：它沿着一條拋物線落到軸上，沿軸而行，然後在自己選定的時刻再次離開。經過 x 軸上任何一點的解都有無限多個。

回顧

- **先找簡單的解。**試一試 $y = (x-c)^2$ 和 $y = 0$，便看清了整個局面。
- **包絡線給出奇解。**一族解的公切線，本身可以是一個不屬於該族的解。
- **黏合。**兩個解相切之處，可以把它們接合成一個新的可微解。非唯一性就是這樣蔓延開去的。

背後的數學

解在甚麼時候是唯一的？

皮卡—林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem，由皮卡（Émile Picard）和林德洛夫（Ernst Lindelöf）約於 1890–1894 年證明）指出，方程 $y' = F(x, y)$ 連同 $y(x_0) = y_0$ 在 x_0 附近恰好有一個解，條件是 F 對 y 滿足利普希茨（Lipschitz）條件：存在常數 L 使得 $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$。粗略地說，當 y 變化時，F 不可以變化得無限快。我們的方程是 $y' = \pm 2\sqrt{y}$，而 $\sqrt{y}$ 在 $y = 0$ 處的斜率是無限大：它在該處不滿足利普希茨條件，而那裏正是唯一性失效的地方。（皮亞諾（Giuseppe Peano）在 1886 年證明了單憑 F 的連續性（continuity）已能保證解*存在*，但不能保證解唯一。）皮卡–林德洛夫定理的證明用到一個迭代（iteration），它憑藉 Section 2.2 的壓縮映射原理（contraction mapping principle）而收斂。

漏水的水桶

以下是一個物理例子。一個底部有孔的水桶按照托里拆利定律（Torricelli's law）流乾：水的高度 h 滿足 $h' = -k\sqrt{h}$。讓時間向前走，一切都沒有問題：水桶流乾，然後一直是空的。但讓時間倒流：假如你發現一個空桶，這條方程無法告訴你它是甚麼時候流乾的。在所有時間都有 $h = 0$ 的解，以及那些直到某一刻仍然盛滿、然後才流乾的解，全都與「現在是空的」相符。這種非唯一性，正是「關於過去的資訊已經失去」這個事實在數學上的投影。

Norton 圓頂

2003 年，哲學家 John Norton 描述了一個無摩擦的圓頂，其形狀使得一個恰好放在頂端的球所遵從的牛頓定律，形式為 $r'' = \sqrt{r}$。其中一個解是球永遠停在頂端。但還有其他的解：球在頂端停留任意長的時間，然後在沒有任何原因的情況下，自發地朝任意方向滾下。這個例子至今仍有爭論：古典力學到底是否決定論（deterministic）的？從數學上看，這正是本題所見的那種非唯一性。

思維技巧

不要假設唯一性

找到一個解，並不表示它是唯一的解。要問一問是否還有其他解，尤其是當方程涉及不光滑的函數時。

在大學裏，存在性與唯一性定理（existence and uniqueness theorems）會確切地告訴你需要甚麼條件。在這裏，一個在零處斜率無限大的平方根，已足以破壞唯一性。

延伸練習

1 **兩種增長率。**試做 STEP II 2018，第 8 題（`step.maths.org/questions/18-s2-q8`）。該題用代換法（substitution）解兩條增長方程。然後想一想，為甚麼 $y = 0$ 也是具有相同初始值的解，而這對唯一性又說明了甚麼。

2 **漏水的水桶。**解 $h' = -k\sqrt{h}$，其中 $h(0) = h_0 > 0$。水桶在甚麼時候變空？寫出兩個不同的解，使得對某個 T 有 $h(T) = 0$，並且對所有 $t \geq T$ 有 $h(t) = 0$。

3 **恢復唯一性。**證明 $y' = 2y$ 連同 $y(0) = 0$ 只有 $y = 0$ 這一個解。（提示：考慮 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$。）$2y$ 具有甚麼性質，是 $2\sqrt{y}$ 所沒有的？

4 **立方。**求 $y' = 3y^{2/3}$ 經過原點的所有解。

延伸閱讀

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。講述存在性與唯一性，以及本章其餘的大部分內容。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。一本經典著作，富於歷史掌故；書中討論了奇解與包絡線。
- **John Norton, 「The dome: an unexpectedly simple failure of determinism」**，*Philosophy of Science* 75 (2008)。篇幅短小，容易閱讀。

8.2 不求解而估界

題目

STEP III 2013，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/13-s3-q7`

引子

大多數微分方程（differential equation）都是解不出來的。$y'' + y^3 = 0$ 的解無法用我們熟悉的函數寫成公式，第 (iii) 部分那頭怪物就更不用說了。然而，我們仍然可以對這些解說出很多東西：它們保持有界（bounded）、它們會振盪、它們會漸趨平穩。訣竅在於找出一個由解及其導數（derivative）構成、而且永不增加的量。這樣一來，解就被困住了。

在物理學中，這個量通常就是能量（energy）。在碗中滾動的球不可能爬到比起始高度更高的地方，因為能量守恆，而在有摩擦時能量更會減少。本題把同樣的推理用於三條方程，其中最後一條是特意挑選的，要你自己發明那個「能量」。這個方法由李雅普諾夫（Aleksandr Lyapunov）於 1892 年提出，是研究微分方程最重要的工具之一。

動筆之前

? **想一想** 在第 (i) 部分，把 y 看成質點的位置，把 x 看成時間。那麼 $y'' = -y^3$ 就是牛頓定律，其中力為 $-y^3$。動能（kinetic energy）和勢能（potential energy）分別是甚麼？

動能是 $\frac{1}{2}(y')^2$（取質量為 1），而力 $-y^3$ 來自勢函數 $V(y) = \frac{1}{4}y^4$，因為力等於 $-V'(y)$。總能量是 $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4$，即 E 的一半。能量守恆（conservation of energy）所說的，正正就是 E 為常數。

逐步解題

階段 1　守恆

由鏈式法則（chain rule），

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2y'y'' + 2y^3y' = 2y'(y'' + y^3) = 0.$$

所以 E 是常數，等於它在 $x = 0$ 時的值：$\mathrm{E} = 0 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$。由於 $(y')^2 \geq 0$，我們得到 $\tfrac{1}{2}y^4 \leq \tfrac{1}{2}$，所以 $y^4 \leq 1$，即 $|y| \leq 1$。 ■

這個解在 -1 與 1 之間振盪，在 (y, y') 平面上描出閉曲線 $(y')^2 + \tfrac{1}{2}y^4 = \tfrac{1}{2}$（圖 8.2.1）。

階段 2　耗散

> **想一想**　對 $\mathrm{E} = (v')^2 + 2\cosh v$ 求導。利用微分方程把 v'' 換掉。結果的正負號是甚麼？

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2v'v'' + 2\sinh v\, v' = 2v'(v'' + \sinh v) = 2v'(-xv') = -2x(v')^2 \leq 0 \quad \text{當} x \geq 0.$$

xv' 這一項的作用有如摩擦，會帶走能量。所以當 $x \geq 0$ 時，$\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$。在 $x = 0$ 處，$\cosh(\ln 3) = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$，所以 $\mathrm{E}(0) = \frac{10}{3}$。因此

$$2\cosh v \leq (v')^2 + 2\cosh v = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3}, \qquad \text{所以} \qquad \cosh v(x) \leq \tfrac{5}{3}.$$ ■

階段 3　發明能量

第 (iii) 部分沒有給任何提示。我們需要一個不會增加的函數 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$。

> **想一想**　若 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$，則 $\mathrm{E}' = 2w'w'' + F'(w)w'$。$F'(w)$ 應該是甚麼，才可以利用方程把 w'' 換掉，最後只剩下 $(w')^2$ 的倍數？

我們希望 $\mathrm{E}' = 2w'(w'' + w\cosh w + 2\sinh w)$，所以需要 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$。由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(w\sinh w) = \sinh w + w\cosh w$，我們可以取

$$F(w) = 2w\sinh w + 2\cosh w, \qquad \mathrm{E} = (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w.$$

於是，利用方程可得

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = -2(5\cosh x - 4\sinh x - 3)(w')^2.$$

停一停，試一試 證明對所有 x 都有 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$。（把它用 e^x 表示，然後找出一個完全平方。）然後完成整個論證。

$5\cosh x - 4\sinh x - 3 = \frac{5}{2}(e^x + e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x}) - 3 = \frac{1}{2}e^x - 3 + \frac{9}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\big(e^{x/2} - 3e^{-x/2}\big)^2 \geq 0$。所以 E 永不增加。在 $x = 0$ 處，$\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} + 0 + 2 = \frac{5}{2}$。由於對任何 w 都有 $w\sinh w \geq 0$（兩個因子同號），

$$2\cosh w \leq (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \cosh w(x) \leq \tfrac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

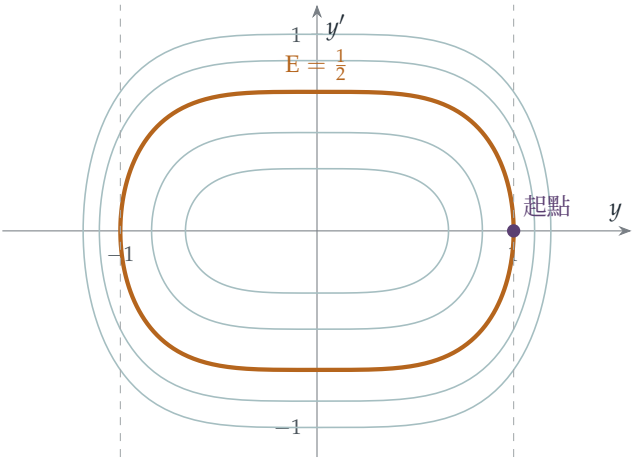


圖 8.2.1 能量 $\mathrm{E} = (y')^2 + \frac{1}{2}y^4$ 在 (y, y') 平面上的等高線。由於 E 是常數，第 (i) 部分的解從 $y = 1$、$y' = 0$ 出發，永遠留在曲線 $\mathrm{E} = \frac{1}{2}$（琥珀色）上，因而永不離開帶狀區域 $|y| \leq 1$（虛線）。我們根本不必找出 y 的公式，就已經知道這一點。

回顧

- **乘以 y'。**在每一部分，E′ 都是 $2y'$ 乘以方程的左方，再加上餘下的項。正是這個餘下的項決定了 E 是守恆還是遞減。
- **能量限制位置。**由於動能部分 $(y')^2$ 非負，E 的上界就是勢能部分的上界，從而也給出 y 的界。
- **留意隱藏的平方。**第 (iii) 部分的阻尼係數看來可能會變號，但它其實是一個經過偽裝的完全平方。

背後的數學

李雅普諾夫函數

李雅普諾夫在 1892 年的博士論文中研究運動的穩定性（stability）：如果一個系統受到輕微擾動而偏離平衡，它會回到平衡，還是愈走愈遠？他的「第二方法」是找出一個函數，它在平衡點處取最小值，而且沿着解永不增加；這種函數現在稱為李雅普諾夫函數（Lyapunov function）。這樣，從平衡點附近出發的解就會一直留在平衡點附近。這個方法的美妙之處，在於它不需要解的公式，只需要微分方程本身，而這正是本題所展示的。現今，從飛機控制系統、電網以至生態系統，各種各樣事物的穩定性都是用李雅普諾夫函數來證明的。

物理與工程中的能量

第 (i) 部分是一個非線性振子（nonlinear oscillator）：它像彈簧，但回復力與位移的立方成正比。與簡諧振子不同，它的週期取決於振幅（振盪愈大，速度愈快），但能量守恆仍然把它困住。第 (ii) 部分加入了隨時間增強的阻尼（damping），能量因而逐漸流失。在工程學中，人們用能量方法來證明結構不會把自己搖散，以及控制系統不會振盪至失控。在偏微分方程（partial differential equation）的理論中，這類「能量估計」是證明解存在而且性質良好的主要工具；有關流體流動方程的問題，包括千禧年大獎難題（Millennium Prize Problems）之一的納維－斯托克斯（Navier–Stokes）問題，歸根究底就是能否找到這樣的界。

思維技巧

找出一個不能增加的量

如果你解不出一條方程，就找一個由解構成、而且導數有確定正負號的量。它會給出解的界。

這種尋找一方面由物理引導（「能量是甚麼？」），另一方面由代數引導（「我要加上甚麼，導數才會化簡？」）。第 (iii) 部分示範了在沒有物理直覺可以依靠時，如何走代數這條路。

延伸練習

1 **簡諧運動。**對於 $y'' + y = 0$，其中 $y(0) = A$、$y'(0) = 0$，求守恆的能量，並由此推出 $|y| \le A$。用精確解核對。

2 **單擺。**單擺的角度 θ 滿足 $\theta'' + \sin\theta = 0$（採用適當的單位）。證明 $(\theta')^2 - 2\cos\theta$ 是常數。若單擺在角度 θ_0 處由靜止開始，其中 $|\theta_0| \le \pi$，證明 $|\theta|$ 永不超過 $|\theta_0|$。若 $|\theta_0| > \pi$，哪裏會出問題？

3 **阻尼。**對於 $y'' + 2ky' + y = 0$，其中 $k > 0$，證明 $(y')^2 + y^2$ 遞減。它是否必定趨向零？

4 **逃逸。**對於 $y'' - y^3 = 0$，其中 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$，求一個守恆量，並證明它不能給出 y 的界。哪裏出了問題？

延伸閱讀

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 6 章和第 7 章講述相平面、保守系統和李雅普諾夫函數。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。一本標準的大學本科教科書，載有大量能量方法的例子。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。書中有一篇關於納維－斯托克斯問題的淺白介紹。

8.3 收穫種羣

題目

STEP II 1995，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/95-s2-q8`

引子

食物供應無限的種羣會以指數增長（exponential growth）的方式擴張。現實中的種羣卻總會用盡空間：當種羣數量接近環境所能維持的上限，即其*環境承載力*（carrying capacity）時，增長便會放緩。描述這個現象的最簡單模型是*邏輯斯諦方程*（logistic equation），它出現在本題的前半部分，由培養皿中的細菌到新科技的普及，都可以用它來描述。

後半部分所問的，是一個在現實中關係重大的問題：假如我們以穩定的速率收穫（harvest）這個種羣，會發生甚麼事？在某個閾值（threshold）以下，種羣會調整到一個新的、較低的平衡點（equilibrium）。但只要收穫率越過這個閾值，哪怕只是超出少許，平衡點便會消失，種羣數量隨即崩潰至零。這就是漁業崩潰背後的數學，也是設立捕魚配額的原因。

動筆之前

想一想 在動手求解之前，先把增長率 $(2K - x)x$ 當作 x 的函數，畫出它的略圖。它在哪裏為零？在哪裏為正？這告訴你 x 會怎樣變化？

增長率在 $x = 0$ 和 $x = 2K$ 處為零，在兩者之間為正，超過 $2K$ 則為負。所以，由 0 與 $2K$ 之間出發的種羣會向 $2K$ 增長，而由 $2K$ 以上出發的種羣則會向它縮減。環境承載力是 $2K$，而增長在 $x = K$ 時最快，那時的增長率是 K^2。不必解方程，你也能預測長遠的變化。

逐步解題

階段 1　解邏輯斯諦方程

想一想　分離變量（separate the variables）：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2K-x)x} = \int \mathrm{d}t$。把左邊拆成部分分式（partial fractions）。

$\dfrac{1}{(2K-x)x} = \dfrac{1}{2K}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2K-x}\right)$，所以

$$\frac{1}{2K}\ln\frac{x}{2K-x} = t + C.$$

當 $t=0$ 時，$x=K$，所以 $\ln 1 = 0$，而 $C=0$。於是 $\frac{x}{2K-x} = e^{2Kt}$，由此得

$$x = \frac{2Ke^{2Kt}}{1+e^{2Kt}} = \frac{2K}{1+e^{-2Kt}} = K + K\frac{1-e^{-2Kt}}{1+e^{-2Kt}}. \qquad \blacksquare$$

這個分式就是 $\tanh(Kt)$，所以 $x = K + K\tanh Kt$：這是一條由 K 上升並趨向 $2K$ 的 S 形曲線。當 $t\to\infty$ 時，$e^{-2Kt}\to 0$，而 $x\to 2K$。

階段 2　收穫

以速率 L 移走細菌，便得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K-x)x - L.$$

想一想　對 $(2K-x)x - L$ 進行配方（complete the square）。它的零點在哪裏？

$(2K-x)x - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2 = \big(\alpha-(x-K)\big)\big(\alpha+(x-K)\big)$。平衡點是 $x = K \pm \alpha$。

停一停，試一試　現在作代換（substitution）$y = x - K + \alpha$。y 滿足甚麼方程？把它與原來的邏輯斯諦方程比較一下。

設 $y = x - K + \alpha$，則 $x - K = y - \alpha$，所以 $\alpha + (x-K) = y$，而 $\alpha - (x-K) = 2\alpha - y$。因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2\alpha - y)y,$$

這又是邏輯斯諦方程，只是 K 換成了 α。初始時 $y(0) = K - K + \alpha = \alpha$，正好對應第一部分的 $x(0) = K$。所以根據第 1 階段的結果（以 α 代替 K），$y(t) = \alpha + \alpha\tanh\alpha t \to 2\alpha$，因此

$$x(t) = K + \alpha\tanh\alpha t \to K + \alpha. \qquad \blacksquare$$

回顧

- **先作定性分析。**還未動手求解，增長率的正負號已經預測了長遠的變化。
- **配方揭示平衡點。**有收穫的方程的平衡點在 $K \pm \alpha$。
- **代換把新問題化為舊問題。**把變量平移之後，有收穫的方程便變成了早已解出的邏輯斯諦方程。

背後的數學

臨界點

有收穫的方程有兩個平衡點，$K+\alpha$ 和 $K-\alpha$。上面的一個是穩定（stable）的：種羣數量稍高於或稍低於它，都會回到它那裏。下面的一個是不穩定（unstable）的：種羣數量只要稍低於 $K-\alpha$，便會一直下跌，直至滅絕。隨着收穫率 L 增加，$\alpha = \sqrt{K^2 - L}$ 會縮小，兩個平衡點互相靠近；到 $L = K^2$ 時兩者合而為一，而當 $L > K^2$ 時則完全沒有平衡點，任何種羣都會崩潰（圖 8.3.1）。這是一個鞍結分岔（saddle-node bifurcation），是最簡單的一種臨界點（tipping point）。它的可怕之處，在於事前沒有任何明顯的預兆：當 L 接近 K^2 時，平衡種羣數量只是緩緩下降，然後平衡點突然不復存在。事後才減少收穫未必有用，因為種羣數量可能已經跌到不穩定的閾值以下。

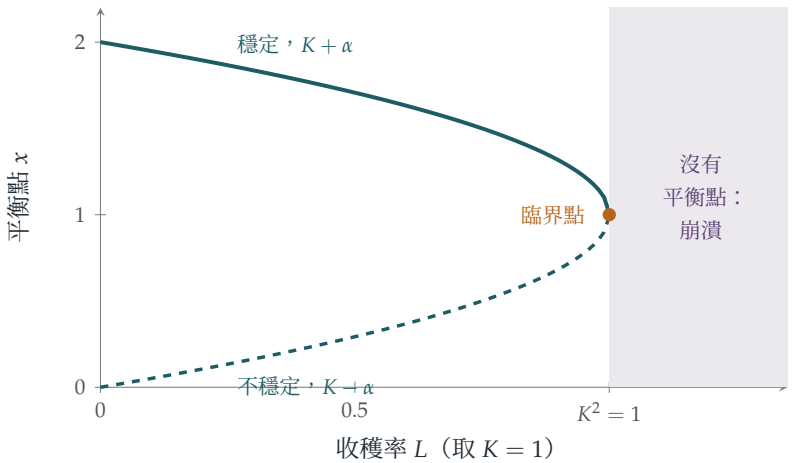


圖 8.3.1 平衡種羣數量與收穫率 L 的關係，其中 $K = 1$。隨着 L 增加，穩定平衡點（實線）與不穩定閾值（虛線）互相靠近，並在 $L = K^2$ 處相遇。越過這一點之後，平衡點不再存在，無論種羣有多大都會崩潰。

最大可持續產量

種羣所能承受的最大收穫量是多少？答案是 $L = K^2$，即增長率 $(2K - x)x$ 的峯值，在種羣數量維持於 K（環境承載力的一半）時達到。二十世紀中葉，漁業科學採納了這個「最大可持續產量」（maximum sustainable yield）作為管理目標。可是，恰好按最大值收穫，就等於把系統恰好放在臨界點上，只要稍為高估了 K，或者遇上一個壞年頭，便會引致崩潰。紐芬蘭對開的大淺灘（Grand Banks）鱈魚漁場，五百年來一直是全世界最豐饒的漁場之一，卻在 1990 年代初崩潰；1992 年，加拿大政府頒布禁捕令，令數以萬計的人失去工作。魚類資源至今仍未完全恢復。

其他地方的邏輯斯諦增長

邏輯斯諦方程由 Pierre-François Verhulst 於 1838 年提出，用來為人類人口建立模型。同一條 S 形曲線，也描述了疫症初期的傳播、新科技的普及、自催化化學反應以及腫瘤的生長。它的離散時間版本，即邏輯斯諦映射（logistic map），表現卻截然不同：它可以是混沌（chaotic）的，我們會在 Section 8.7 看到。

思維技巧

平衡點及其穩定性

對於方程 $x' = f(x)$，平衡點就是 f 的零點，而 f 在各零點之間的正負號，告訴你解會向哪個方向移動。

若 f 在某個平衡點由正變負，該平衡點是穩定的；若由負變正，則是不穩定的。畫出 f 的圖像，往往不必求解任何東西，便能回答最重要的問題。

延伸練習

1. **由低處出發。**在有收穫且 $K^2 > L$ 的情況下，證明若 $x(0) < K - \alpha$，則種羣數量會在有限時間內降至零。（提示：當 $y(0) < 0$ 時，y 會怎樣變化？）

2. **過度收穫。**若 $L > K^2$，設 $\beta = \sqrt{L - K^2}$。在 $x(0) = 2K$ 的條件下解 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$，並求種羣數量何時降至零。

3. **按比例收穫。**假設改為移走種羣中某個固定的比例：$x' = (2K - x)x - hx$。求平衡點，並證明對所有 $h < 2K$，種羣都能存活。為甚麼這個方案較為安全？

4. **半程時間。**在沒有收穫的情況下，求種羣數量達到 $\frac{3}{2}K$ 的時間。

延伸閱讀

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 3 章討論分岔，並以這個收穫模型作為習題。
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。為大學本科生而寫的種羣模型。
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。鱈魚漁業及其崩潰的歷史。

8.4 盤旋趨向圓

題目

STEP III 2015，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/15-s3-q8`

引子

自然界中有許多系統，無論起始狀態如何，最終都會進入同一種規律的節奏：心臟的跳動、蟋蟀的鳴叫、穩定拉奏的小提琴弦、捕食者與獵物的種羣數量週期。稍加擾動，它們又會回到原來的節奏。用微分方程（differential equation）的語言來說，它們的解會趨近一條閉合曲線，稱為極限環（limit cycle）。

這道題目正是要構造一個極限環。方程以 x 和 y 表示時看似無從入手，但換成極坐標（polar coordinates）後，就化簡成可以求解的形式，而且各個解原來都會從內側和外側盤旋着貼近單位圓。當中的關鍵一步，是選取與問題的對稱性（symmetry）相配的坐標，這也是本書一直沿用的手法。

動筆之前

想一想 兩條方程其實都暗藏 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 這兩個組合。它們在極坐標中是甚麼？

由於 $r^2 = x^2 + y^2$，求導後得 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$。另外 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$（這就是 Section 4.9 中的面積公式）。有了這兩條恆等式（identity），變數代換（change of variables）幾乎毫不費力：只要把方程改寫成只含這兩個組合的形式即可。

逐步解題

階段 1　以極坐標處理第 (i) 部分

把方程寫成 $(y+x)\,\mathrm{d}y-(y-x)\,\mathrm{d}x=0$，再重新整理：

$$(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)+(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=0.$$

想一想　展開算式，驗證以上的整理無誤。然後運用上面兩條恆等式。

$(y+x)\,\mathrm{d}y-(y-x)\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}x$，正是上面的算式。化成極坐標形式就是 $r\,\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\theta=0$，兩邊除以 $r^2\,\mathrm{d}\theta$（其中 $r>0$），得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+r=0. \qquad \blacksquare$$

方程的解是 $r=Ce^{-\theta}$：這些是對數螺線（logarithmic spiral），隨着 θ 增加而向原點捲入，隨着 θ 減少而向無窮遠處捲出。

階段 2　第 (ii) 部分

停一停，試一試　新方程是在舊方程之上，加入含有 $x^2+y^2=r^2$ 的額外項。用同樣的方法改寫，並求出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$。

方程是 $\big(y+x-xr^2\big)\,\mathrm{d}y-\big(y-x-yr^2\big)\,\mathrm{d}x=0$，即

$$\big[(y+x)\,\mathrm{d}y-(y-x)\,\mathrm{d}x\big]-r^2\big(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x\big)=0.$$

第一個括號和之前一樣，等於 $r\,\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\theta$，第二個括號則是 $r^2\,\mathrm{d}\theta$。因此 $r\,\mathrm{d}r+r^2(1-r^2)\,\mathrm{d}\theta=0$，由此得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r^3-r.$$

想一想　這條方程對 r 而言並非線性（linear），但換成 $u=r^{-2}$ 後就變成線性。u 滿足甚麼方程？

設 $u=r^{-2}$，則 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-2r^{-3}(r^3-r)=-2+2u$。所以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}-2u=-2$，其解為 $u=1+Ae^{2\theta}$。因此

$$r^2=\frac{1}{1+Ae^{2\theta}}. \qquad \blacksquare$$

階段 3　三類解

- $A = 0$：$r = 1$。單位圓是一個解。
- $A > 0$：恆有 $r < 1$。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 1$；當 $\theta \to +\infty$ 時，$r \to 0$。曲線在圓與原點之間盤旋。
- $A < 0$：$r > 1$，而且公式只在 $1 + Ae^{2\theta} > 0$ 時才有意義，即 $\theta < \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{A}\right)$。當 $\theta \to -\infty$ 時，$r \to 1$；當 θ 趨近該上界時，$r \to \infty$。曲線在圓與無窮遠之間盤旋。

所以當 $\theta \to -\infty$ 時，每條解曲線都會從內側或外側趨近單位圓（圖 8.4.1）。

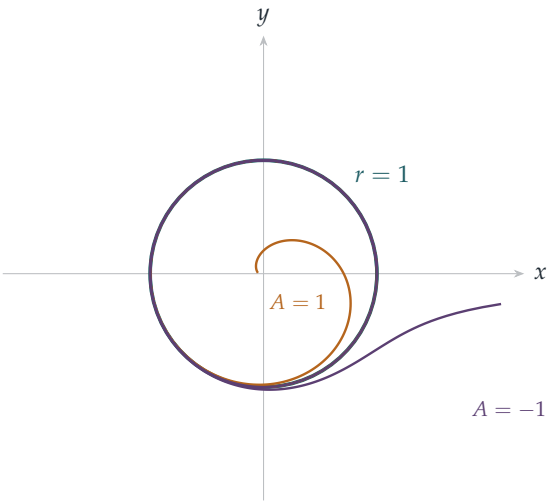


圖 8.4.1 第 (ii) 部分的解。單位圓（藍綠色）是一個解。$A = 1$ 的解（琥珀色）位於圓內，從圓出發（當 $\theta \to -\infty$ 時）盤旋着走向原點；$A = -1$ 的解（紫紅色）位於圓外，從圓出發盤旋着走向無窮遠。反方向來看（θ 遞減），每個解都會纏繞到圓上：這就是極限環。

回顧

- **善用對稱性。**這些方程對所有方向一視同仁，而極坐標令這一點顯露出來。
- **認出標準組合。**$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ 完成了大部分工作。
- **代換可使方程線性化。**非線性方程 $r' = r^3 - r$ 換成 $u = r^{-2}$ 後變成線性（這是一條*伯努利方程*（Bernoulli equation））。

背後的數學

極限環

龐加萊（Henri Poincaré）在 1880 年代研究平面上微分方程的定性行為時，引入了極限環。不妨把題目中的方程理解為描述一個點在平面上運動的路徑。單位圓是一條孤立的閉軌道（closed orbit），附近的每條軌道都會纏繞着向它靠近（或遠離它，視乎時間的方向而定）。1926 年，荷蘭工程師 Balthasar van der Pol 在一個裝有真空管的電路中發現了極限環，並提出類似的方程可以描述心臟的跳動。凡是具有自持而穩定節奏的系統，都可以用極限環作為模型：生理時鐘、神經脈衝、捕食者與獵物種羣數量的週期。

平面上沒有混沌

龐加萊—本迪克松定理（Poincaré–Bendixson theorem）指出，對於平面上的光滑系統，如果一條軌道一直留在某個有界區域內，又不趨近任何平衡點（equilibrium），它就必定趨近一條閉軌道。所以在二維的情況下，長期行為只限於平衡點和環：混沌（chaos）沒有容身之處，因為軌道不能相交。混沌至少需要三維，正如洛倫茲（Edward Lorenz）在 1963 年以他那著名的三變數對流模型（「蝴蝶」）所發現的那樣。至於離散時間的情況，我們會在 Section 8.7 看到，即使只有一維，混沌也可能出現。

一個未解決的問題

1900 年，希爾伯特（David Hilbert）在他的第十六問題中問道：當 P 和 Q 是 n 次多項式時，系統 $x' = P(x, y)$，$y' = Q(x, y)$ 最多可以有多少個極限環？即使是 $n = 2$ 的情況，答案至今仍然未知：已知有些系統具有四個極限環，但是否可能有更多，則無人知曉。在希爾伯特的問題之中，這是極少數至今仍然完全懸而未決的一個。

思維技巧

轉換坐標以配合對稱性

如果問題具有旋轉對稱性，就用極坐標；如果具有其他對稱性，就找出與之相配的坐標。

合適的坐標把一條難以處理的方程變成可分離變數（separable）的方程，並令解的幾何形狀（圓和螺線）一目了然。

延伸練習

1 **螺線。**對於第 (i) 部分的解 $r = e^{-\theta}$，證明曲線與每條由原點出發的射線都以相同的角度 45° 相交。（這就是對數螺線又稱為等角螺線（equiangular spiral）的原因。）

2 **極坐標恆等式。**證明 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$。

3 **隨時間變化的系統。**考慮系統 $\dot{r} = r(1 - r^2)$，$\dot{\theta} = 1$。證明當 $t \to \infty$ 時，每個滿足 $r(0) > 0$ 的解都趨近單位圓。把這個系統以 x 和 y 表示。

4 **兩個環。**找出一個形如 $\dot{r} = f(r)$，$\dot{\theta} = 1$ 的系統，使它有兩個極限環，分別位於 $r = 1$ 和 $r = 2$，其中一個是吸引的（attracting），另一個是排斥的（repelling）。

延伸閱讀

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 7 章講述極限環和龐加萊–本迪克松定理。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。一本講述自然界中的節奏與同步現象的科普讀物。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。講述洛倫茲與發現混沌的故事。

8.5 格力犬追逐格力犬

題目

STEP III 1988，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/88-s3-q10`

引子

四隻狗分別站在一塊正方形田地的四個角上，每隻狗都追趕牠左邊的那一隻。牠們會在哪裏相遇？要花多少時間？所走的路徑又是怎樣的？這些路徑是優美的螺線，繞着中心轉無窮多圈，然而每隻狗只跑了有限的距離，恰好等於正方形的邊長。

這是一個追逐問題（pursuit problem），這類問題最早由 Pierre Bouguer 於 1732 年研究，當時考慮的是一艘船追趕海盜船的情形。令問題得以解決的訣竅是對稱性（symmetry）：發生在一隻狗身上的事，同樣發生在其餘各隻身上，所以四隻狗始終構成一個正方形。一旦看出這一點，微分方程（differential equation）幾乎就自然而然地寫出來了。

動筆之前

? **想一想** 根據對稱性，四隻狗在每一刻構成甚麼形狀？它的中心在哪裏？

把整個情形繞正方形的中心旋轉四分之一圈（即 $A \to B \to C \to D \to A$），情形保持不變，所以四隻狗始終構成一個正方形，而且中心始終是同一點 O。這個正方形一邊旋轉一邊縮小，但始終是正方形。特別地，A 和 B 與 O 的距離始終同為 r，而 OB 始終比 OA 超前四分之一圈。

逐步解題

階段 1　運動的方向

想一想　A 朝着 B 跑。在三角形 OAB 中，AB 與 AO（指向中心的方向）所成的角是多少？

三角形 OAB 中 $OA = OB$，且在 O 處是直角，所以其餘兩個角都是 $45°$。因此 A 的速度（velocity）大小為 v，方向與向內的徑向（radial）方向成 $45°$，並且偏向 B 的一方，即 θ 增加的方向（假設我們標記角度時，令 B 位於 A 的逆時針方向）。

階段 2　微分方程

想一想　把 A 的速度分解為徑向和橫向（transverse）兩部分。在極坐標（polar coordinates）中，徑向速度是 $\dot r$，橫向速度是 $r\dot\theta$。

徑向分量（向內）是 $v\cos 45°$，橫向分量是 $v\sin 45°$，所以

$$\dot r = -\frac{v}{\sqrt2}, \qquad r\dot\theta = \frac{v}{\sqrt2}.$$

兩式相除，得 $\dfrac{\mathrm dr}{\mathrm d\theta} = \dfrac{\dot r}{\dot\theta} = -r$，所以 $r = \lambda e^{-\theta}$，其中若最初 $\theta = 0$，則 λ 是最初與中心的距離。 ■

階段 3　n 隻狗

停一停，試一試　對於正 n 邊形，三角形 OAB 中在 O 處的角是多少？AB 與 AO 所成的角是多少？重複第 2 階段的做法。

在 O 處的角是 $\frac{2\pi}{n}$，所以兩個相等的底角是 $\frac12(\pi - \frac{2\pi}{n}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$。速度與向內的半徑所成的角就是這個角，所以

$$\dot r = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot\theta = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

因此 $\dfrac{\mathrm dr}{\mathrm d\theta} = -r\tan\dfrac{\pi}{n}$，於是

$$r = \lambda e^{-\theta\tan(\pi/n)}. \qquad ■$$

當 $n = 4$ 時，$\tan\frac{\pi}{4} = 1$，這就回到正方形的情形。

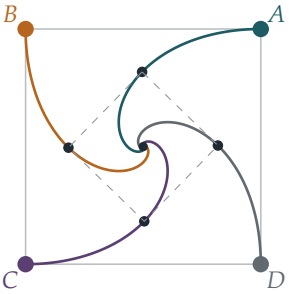


圖 8.5.1 四隻狗從正方形的四個角出發互相追逐。每隻狗都沿着一條對數螺線 $r = \lambda e^{-\theta}$（相對於牠自己的起始方向）前進，繞着中心轉無窮多圈。在每一刻，四隻狗都構成一個正方形（虛線所示為其中一個中間時刻），這個正方形一邊旋轉一邊縮小，直至牠們在中心相遇。

回顧

- **對稱性把多個物體化為一個。**四隻互相影響的狗，變成了一個遵從簡單法則的質點（particle），因為整個佈局始終是正方形。
- **繞中心的運動宜用極坐標。**速度的徑向和橫向分量 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 直接給出了方程。
- **相除以消去時間。**比值 $\dot{r}/\dot{\theta}$ 給出了路徑的形狀，而毋須知道何時到達每一點。

背後的數學

無窮多圈，有限距離

徑向速率 $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ 是常數，所以各隻狗在時間 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 之後到達中心，每隻狗跑過的距離是 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$。對於邊長為 s 的正 n 邊形，$r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$，所以每隻狗跑過的距離是

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

對於四隻狗，這恰好是 s：每隻狗跑過的距離正好是一條邊的長度。（這裏有一個巧妙的看法：B 的速度始終與 AB 垂直，所以它不會改變距離 AB；只有 A 以速率 v 沿着 AB 筆直前進的運動才會縮短兩者的距離，而這個距離最初是 s。）對於三隻狗，距離是 $\frac{2}{3}s$；對於六隻狗，距離是 $2s$。然而在每一種情形下，螺線都繞着中心轉無窮多圈，因為當 $r \to 0$ 時 $\theta \to \infty$。一條長度有限卻轉了無窮多圈的曲線並不是悖論：那些圈縮小得足夠快。

對數螺線

曲線 $r = \lambda e^{-k\theta}$ 稱為對數螺線（logarithmic spiral）或等角螺線（equiangular spiral）：它與每一條從中心出發的射線相交的角度都相同。它出現在大自然之中，例如鸚鵡螺的殼和某些星系的旋臂，因為保持形狀不變的生長就會產生這種曲線。雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli）對它極為着迷，甚至要求把它刻在自己的墓碑上，並附上格言 *Eadem mutata resurgo*（「縱然改變，我仍將依舊復起」），指的是它在任何尺度下看起來都一樣。結果石匠刻的卻是一條阿基米德螺線（Archimedean spiral）。

實際中的追逐

「純追逐」（pure pursuit），即始終筆直朝着目標前進，是導彈或捕食者最簡單的導引法則。但它並不是最好的：朝着目標將會到達的位置前進（「比例導引」，proportional navigation）更有效率，而現代導彈以及某些捕食者（例如蜻蜓和隼）實際上正是這樣做的。追逐與逃避的數學在二十世紀自成一門學科，名為微分博弈（differential games）。

思維技巧

利用對稱性簡化多體問題

如果一個系統具有對稱性，而其法則又不破壞這種對稱性，那麼對稱性就會一直保持下去，你只需追蹤其中一部分。

這個想法能解決力學和動力學中的許多問題；它是對稱與守恆（conservation）之間深刻聯繫的一個簡單例子。

延伸練習

1. **巧妙的論證。**仔細解釋為何在四隻狗的問題中，距離 AB 恰好以速率 v 減少，並由此推出四隻狗在時間 s/v 之後相遇。

2. **三隻狗。**三隻狗從邊長為 s 的等邊三角形的三個角出發。求每條路徑的方程、牠們相遇所需的時間，以及每隻狗跑過的距離。

3. **轉了多少圈？**設四隻狗出發時距離中心 100 m，牠們轉了完整一圈之後距離中心多近？轉了多少個完整的圈之後，牠們與中心的距離在 1 mm 以內？

4. **兩隻狗。**當 $n = 2$（兩隻狗面對面）時會怎樣？公式是否仍然有意義？

延伸閱讀

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。關於追逐曲線的一切，從 Bouguer 到導彈。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。內容包括對數螺線和伯努利的墓碑。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。講述大自然中的數學的經典著作，包括螺線式的生長。

8.6 量子振子

題目

STEP III 1988，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/88-s3-q7`

引子

繫在彈簧上的質點，振動的能量可以隨你喜歡：把它拉開少許也好，拉開很遠也好。但在 1900 年，普朗克（Max Planck）發現，要解釋高溫物體所發出的光的顏色，唯一的辦法是假定振動中的原子只能具有某些特定的能量，每級相差一個固定的大小。在原子的尺度上，能量是一份一份的，稱為量子（quanta）。二十五年後，量子力學（quantum mechanics）解釋了箇中原因。

這道題目正包含了這個解釋。題中的微分方程（differential equation）經過單位轉換後，就是一個量子粒子處於彈簧式勢能中的薛定諤方程（Schrödinger equation），亦即量子諧振子（quantum harmonic oscillator）。只有當能量取某些特殊的值時，它才有性質良好的解，即在無窮遠處衰減至零的解；這些能量值以 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 標記，彼此等距排列。而且不同的 n 所對應的解是正交（orthogonal）的：它們乘積的積分為零，就像傅立葉級數（Fourier series）中的 $\sin mx$ 與 $\sin nx$ 一樣。量子諧振子是研究分子、固體和光的物理學的起點。

動筆之前

想一想 為甚麼像 $e^{-\lambda x^2}$ 這樣的函數會是一個合理的猜測？當 $x \to \pm\infty$ 時，$e^{-\lambda x^2}$ 及其導數會怎樣？

當 $|x|$ 很大時，方程主要由 $y'' \approx \omega^2 x^2 y$ 支配，而高斯函數（Gaussian）$e^{-\lambda x^2}$ 在 x 很大時滿足 $y'' \approx 4\lambda^2 x^2 y$，只要 $4\lambda^2 = \omega^2$，兩者便吻合。若 $\lambda > 0$，高斯函數及其所有導數衰減至 0 的速度比 x 的任何次冪都要快。因此邊界條件（boundary conditions）會自動

成立；真正要下工夫的，是令函數符合方程。

逐步解題

階段 1　基態

想一想　把 $y_0 = e^{-\lambda x^2}$ 求導兩次，代入 $n = 0$ 時的方程，然後比較 x^2 的係數和常數項。

$y_0' = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$，而 $y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)e^{-\lambda x^2}$。$n = 0$ 時的方程要求

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda - \omega^2 x^2 = -\omega$$

對所有 x 成立。比較係數（match coefficients）：$4\lambda^2 = \omega^2$ 及 $2\lambda = \omega$。取 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ 時兩式同時成立（取 $\lambda > 0$，使得 $y_0 \to 0$）。而且當 $x \to \pm\infty$ 時，y_0、$y_0' \to 0$。 ■

階段 2　第一激發態

$y_1 = x e^{-\lambda x^2}$ 滿足 $y_1' = (1 - 2\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}$ 及 $y_1'' = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x)e^{-\lambda x^2}$。$n = 1$ 時的方程要求

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x - \omega^2 x^3 = -3\omega x,$$

而同樣取 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ 時此式成立。y_1 與 y_1' 同樣在 $\pm\infty$ 處衰減至零。 ■

階段 3　一個恆等式

想一想　用積法則（product rule）對 $y_m y_n' - y_n y_m'$ 求導。四項之中有兩項互相抵銷。然後利用微分方程代換 y_n'' 和 y_m''。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''$。由方程可得 $y_n'' = (\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega) y_n$，對 m 亦有類似的式子。所以

$$y_m y_n'' - y_n y_m'' = y_m y_n[\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega - \omega^2 x^2 + (2m+1)\omega] = 2(m-n)\omega y_m y_n.$$ ■

階段 4　正交性

停一停，試一試　把恆等式由 $-\infty$ 積分至 ∞。左方是甚麼？

左方積分後得 $\big[y_m y_n' - y_n y_m'\big]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$，因為每個 y 和 y' 在兩端都趨向 0。所以

$2(m-n)\omega\int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n\,\mathrm{d}x = 0$，而由於 $m \neq n$ 及 $\omega > 0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \blacksquare$$

對於 y_0 和 y_1，這一點很容易直接看出：$y_0 y_1 = xe^{-\omega x^2}$ 是奇函數（odd function）。但這個恆等式毋須知道函數本身是甚麼，便一舉證明了每一對解都正交。

回顧

- **比較係數。**代入猜測的形式，並要求方程對所有 x 成立，便確定了 λ。
- **朗斯基行列式（Wronskian）的技巧。**$y_m y_n' - y_n y_m'$ 這個組合求導後，其中的二階導數可以用方程代換，餘下的式子十分簡單。
- **邊界條件消去邊界項。**解在無窮遠處衰減，令左方積分後為零，從而得出正交性。

背後的數學

薛定諤方程

1926 年，薛定諤（Erwin Schrödinger）提出，量子粒子可用波函數（wave function）$\psi(x)$ 來描述；若粒子的能量為 E，並處於勢能 $V(x)$ 之中，則波函數滿足

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

對於彈簧，$V(x) = \tfrac{1}{2}m\Omega^2 x^2$，把 x 重新標度後，這正是題目中的方程，其中 $E = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\Omega$。物理上要求 ψ 在無窮遠處衰減至零（這樣粒子才確實身處某處），而只有這些能量才能滿足這個要求：這就是量子化（quantisation），是由數學自然推導出來的結果。留意最低的能量並不是零，而是 $\tfrac{1}{2}\hbar\Omega$：量子諧振子永遠不可能完全靜止。這種零點能（zero-point energy）真實存在，而且可以量度；正因如此，液態氦在常壓下即使到了絕對零度也不會凝固。

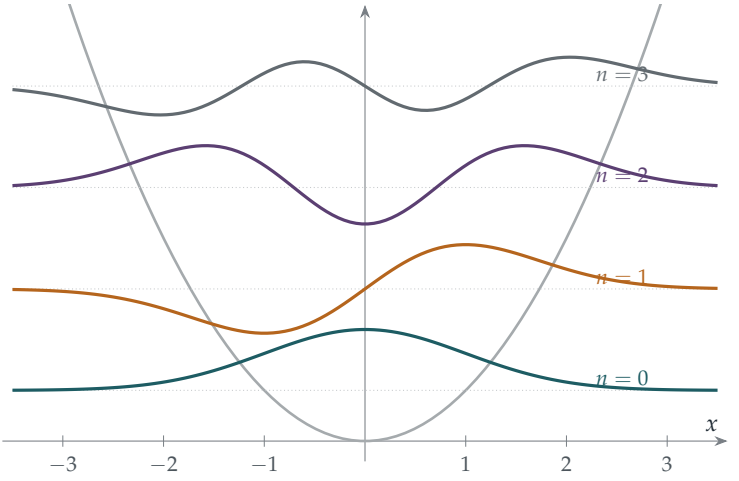


圖 8.6.1　量子諧振子（取 $\omega = 1$）。拋物線是勢能。每個波函數 y_n 都畫在其能級 $n + \frac{1}{2}$ 的高度上；各能級等距排列，而最低的能級高於零。函數 y_n 穿過零 n 次，而且其中任意兩個都正交。

埃爾米特函數與施圖姆－劉維爾理論

通解為 $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$，其中 H_n 是一個 n 次多項式，稱為埃爾米特多項式（Hermite polynomial）（圖 8.6.1）。正交性並非這條方程獨有。只要一條方程可以寫成 $(py')' + qy = -\lambda wy$ 並配上適當的邊界條件，屬於不同 λ 值的解便互相正交，所用的論證與第 4 階段完全相同。這就是施圖姆－劉維爾理論（Sturm–Liouville theory，1830 年代），它涵蓋了傅立葉級數中的正弦函數（Section 3.7）、鼓面的振動、靜電學中的勒讓德多項式（Legendre polynomials），以及氫原子的波函數。Section 4.7 的特徵值問題（eigenvalue problem）是另一個例子：在那裏求得的臨界值就是特徵值 λ，而那些正交函數就是系統固有的「模態」（modes）。

思維技巧

由恆等式得出正交性

要證明相關方程的兩個解正交，可找出一個恰當導數（*exact derivative*），使它的積分因邊界條件而爲零，而它本身又等於兩個解的乘積的某個倍數。

這比直接計算積分有力得多：它一次過適用於每一對解，即使你無法把解寫出來也行。

延伸練習

1 **下一個態。**證明 $y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$（其中 $\lambda = \frac{\omega}{2}$）滿足 $n = 2$ 時的方程。利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,dx = \sqrt{\pi/\omega}$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,dx = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$，直接驗證 $\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,dx = 0$。

2 **沒有其他能量。**把 n 換成一般的數 ν，並嘗試 $y = e^{-\lambda x^2}$。證明只有當 $\nu = 0$ 時它才是解。（事實上，只有當 ν 是非負整數時，才存在衰減的解。）

3 **正弦波。**由 $y'' = -n^2 y$ 及 $y(0) = y(\pi) = 0$ 出發，用同樣的方法證明當 $m \neq n$ 時 $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0$。

4 **階梯。**證明若 y_n 是方程的解，則 $y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$ 是把 n 換成 $n+1$ 後的方程的解。利用這個結果，由 y_0 生成 y_1 和 y_2。（這就是量子力學中的「升算符」（raising operator）。）

延伸閱讀

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics***（Cambridge University Press）。大學本科物理的標準教科書；第 2 章討論諧振子。
- **費曼（Richard Feynman）, *QED: The Strange Theory of Light and Matter***（Princeton University Press）。由量子力學的一位大師撰寫的科普讀物。
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences***（Wiley）。為數學和物理學生講解埃爾米特多項式和施圖姆－劉維爾理論。

8.7 可以解出的混沌

題目

STEP I 2014，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/14-s1-q6`

引子

規則 $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$ 稱為邏輯斯諦映射（logistic map），是描述資源有限的種羣的最簡單模型：u_n 是第 n 年的種羣數量佔環境所能承載的最大數量的比例，k 是繁殖率，而因子 $1-u_n$ 則代表過度擁擠的影響。1976 年，生物學家羅伯特·梅（Robert May）在《自然》（*Nature*）上發表了一篇短文，題為「Simple mathematical models with very complicated dynamics」（動力學行為非常複雜的簡單數學模型）。他指出，當 k 逐漸增大至 4 時，這條只有一行的規則會由趨於穩定，變為來回振盪，再變為看似完全隨機。它成為了混沌（chaos）理論的奠基例子之一。

混沌系統通常無法求解：u_n 沒有公式，要求出 u_{100}，唯一的方法就是把它之前的各項逐一算出來。本題找到的正是那個例外。在 $k = 4$ 這個最混沌的取值上，公式確實存在，而且它恰好解釋了這個數列為何無法預測。

動筆之前

想一想 你以前在哪裏見過 $4s(1-s)$ 這個式子，其中 $s = \sin^2\theta$？哪一條恆等式把 $\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 聯繫起來？

若 $s = \sin^2\theta$，則 $1-s = \cos^2\theta$，所以 $4s(1-s) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta$。映射 $s \mapsto 4s(1-s)$ 其實就是喬裝了的倍角公式（double-angle formula）。

逐步解題

階段 1　猜出規律

設 $u_0 = \sin^2\theta$，由上面的恆等式可得

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta, \qquad u_2 = 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

想一想　每一步之後，角度有甚麼變化？你對 u_n 有甚麼猜想？

角度每次都加倍，所以我們猜想（conjecture）$u_n = \sin^2(2^n\theta)$。

階段 2　證明猜想

想一想　一個數列由「從一項到下一項」的規則定義，而我們要證明的命題涉及數列的每一項。哪一種證明方法最合適？

歸納法（induction）。命題在 $n = 0$ 時成立，因為 $u_0 = \sin^2\theta = \sin^2(2^0\theta)$。假設對某個 n 有 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，則

$$u_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta)\bigl(1 - \sin^2(2^n\theta)\bigr) = \bigl(2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta)\bigr)^2 = \sin^2(2^{n+1}\theta),$$

這正是 $n+1$ 時的命題。所以對所有 $n \geq 0$，都有 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$。 ■

留意 $[0,1]$ 內的每一個初始值 u 都可以寫成 $\sin^2\theta$（取 $\theta = \arcsin\sqrt{u}$），所以對於 $[0,1]$ 內的任何初始值，這個公式都解出了 $k = 4$ 的邏輯斯諦映射。

階段 3　變數代換

想一想　把 $v_n = \alpha u_n + \beta$ 代入 v_{n+1} 的規則。你需要結果是 $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$。這會給出多少個條件？你又有多少個未知數？

代入後得

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r,$$

所以

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + q\beta + r - \beta}{\alpha}.$$

要使它等於 $4u_n - 4u_n^2$，需要滿足三個條件：

$$p\alpha = 4, \qquad q - 2p\beta = 4, \qquad -p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0.$$

頭兩個條件確定了 $\alpha = 4/p$ 和 $\beta = (q-4)/(2p)$。這時已經沒有未知數剩下，所以第三條方程是對 p、q 和 r 的一個真正的條件。代入 β 並乘以 $4p$，得

$$-(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr = 0,$$

展開後得 $-(q^2-8q+16)+(2q^2-10q+8)+4pr=0$，即 $q^2-2q-8+4pr=0$，亦即

$$4pr = 8 + 2q - q^2. \qquad \blacksquare$$

> **停一停，試一試** 三條方程，卻只有兩個未知數：這就是出現條件的原因。你能否在未計算之前，就看出為甚麼一般的二次映射不應該總是與 $(*)$ 等價？（想想線性的變數代換能改變甚麼，又不能改變甚麼。）

階段 4 例子

對於 $v_{n+1} = -v_n^2 + 2v_n + 2$，我們有 $p=1$、$q=2$、$r=2$，而 $4pr = 8 = 8+4-4$，所以條件成立。於是 $\alpha = 4$ 及 $\beta = -1$，所以 $v_n = 4u_n - 1$，其中 u_n 滿足 $(*)$。由於 $v_0 = 1$，故 $u_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$，所以

$$u_n = \sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right), \qquad v_n = 4\sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right) - 1 = 1 - 2\cos\!\left(\frac{2^n\pi}{2}\right).$$

由此得 $v_0 = 1$、$v_1 = 3$，而對所有 $n \geq 2$ 都有 $v_n = -1$。（直接驗算：$-1+2+2=3$，然後 $-9+6+2=-1$，再然後 $-1-2+2=-1$。） $\blacksquare$

這個初始值是特意選定的，好讓角度落在 π 的倍數上，數列從此不再變化。這樣一來，有趣的部分就被掩蓋了，而那正是接下來要談的。

回顧

- **識破喬裝。**一旦寫成 $s = \sin^2\theta$，映射 $s \mapsto 4s(1-s)$ 就變成了角度加倍。
- **先猜想，再用歸納法證明。**頭兩項提示了規律，歸納法則證明了它。
- **數一數方程和未知數。**線性代換有兩個自由參數，二次式有三個係數，所以必定剩下一個條件。

背後的數學

數列為何無法預測

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 看來已是故事的結局：任何一項都可以直接算出。但請細看它說了甚麼。由於 $\sin^2$ 的週期（period）是 π，所以只有 $2^n\theta$ 模（modulo）π 的值才有影響。

設 $\theta = \pi x$，其中 $0 \le x < 1$，並把 x 寫成二進制（binary）：

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots \quad (\text{底為} 2).$$

乘以 2 會把二進制小數點向右移一位，而把結果取模 1，就是丟掉越過小數點的那個數位。所以 u_n 只取決於 x 由 b_{n+1} 起的二進制數位。邏輯斯諦映射每走一步，就多讀取初始值的一個數位，同時丟掉最前面的一個。

這就是*對初始條件的敏感依賴*（sensitive dependence on initial conditions），也是混沌的決定性特徵。兩個初始值若在首 20 個二進制位上相同（約六個小數位），它們產生的數列一般會在大約 20 步之內吻合，其後便毫無關係（圖 8.7.1）。要預測 u_{100}，你需要知道 u_0 準確至 100 個二進制位。初始角度的任何誤差，無論多小，每一步都會加倍。（種羣數量 u 本身的誤差並非每次都以完全相同的倍數增長，因為這個映射對 $[0,1]$ 某些部分的拉伸比其他部分大，但平均而言，它的增長率是一樣的。）公式幫不上忙：它只是令這個機制顯現出來。

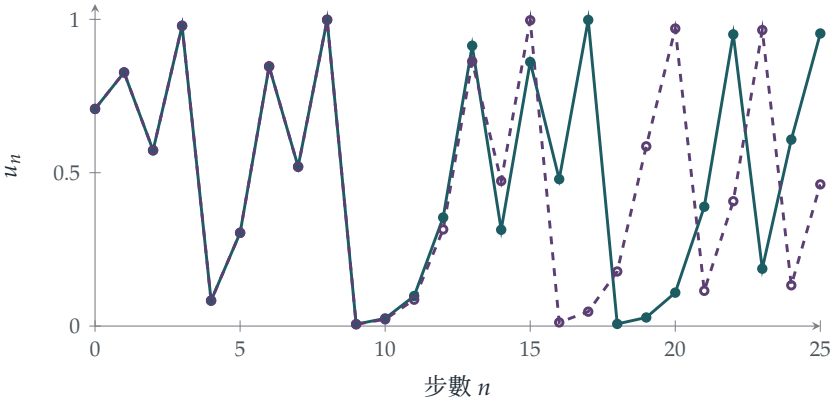


圖 8.7.1　$k = 4$ 的邏輯斯諦映射的兩個數列，分別由 $\sin^2(1)$（藍綠色）和 $\sin^2(1.00001)$（紫紅色虛線）開始。在大約頭十步內兩者無法分辨，到第 12 步已有明顯差別，其後便毫無關係：到第 12 步，角度之差 10^{-5} 已經加倍了十二次，變成約 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$。

週期點無處不在

這個公式還能找出映射的每一個循環（cycle）。數列在 N 步之後回到初始值，當且僅當 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$，即 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$。所以 $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 或 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ 給出一個週期整除 N 的點。例如 $\theta = \pi/5$ 滿足 $4\theta \equiv -\theta$，所以 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ 是一個 2-循環。每一個週期都有對應的週期點（periodic point），而且它們在 $[0,1]$ 中稠密（dense）：在每一個區間內，無論多小，都有一個初始值使數列重複出現。然而每一個週期點都是不穩定的，因為任何誤差都會加倍。稠密的週期點，卻把附近的一切都推開，這是混沌的第二個標誌。

通往混沌之路

對於較小的 k，並沒有公式可用，而數列的行為會隨 k 劇烈變化（圖 8.7.2）。當 $1 < k < 3$ 時，每一個由 $(0,1)$ 內出發的數列都會趨於不動點（fixed point）$1 - 1/k$。在 $k = 3$ 時，不動點變得不穩定，由一個 2-循環取而代之（這是 STEP II 2002 Q5 的主題；見延伸練習）。在 $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ 時，2-循環讓位予 4-循環，然後是 8-循環，週期加倍來得愈來愈快，直至 $k \approx 3.5699$ 時，循環的長度變成無限，混沌由此開始。在混沌區域之內還有一些有序的窗口：最明顯的一個在 $k = 3.83$ 附近，其中有一個 3-循環，那是 Section 8.8 的主題。

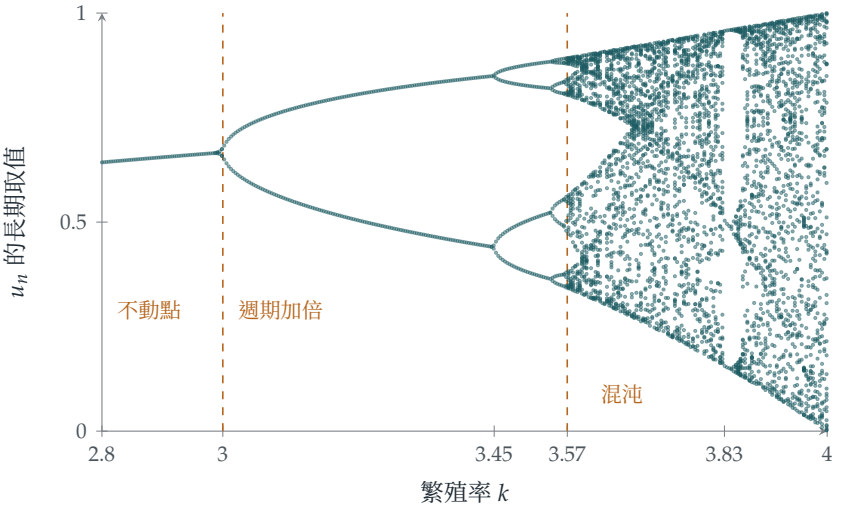


圖 8.7.2 邏輯斯諦映射的分岔圖（bifurcation diagram）。對每一個 k，由 $u_0 = 0.31416$ 開始把映射迭代 300 次，然後畫出其後的 40 個值。單一個不動點在 $k = 3$ 時分裂成一個 2-循環，然後是 4、8、...，直至在 $k = 3.57$ 附近進入混沌。$k = 3.83$ 附近那道淺色的垂直空隙，就是含有穩定 3-循環的窗口。在 $k = 4$ 時，這些值填滿了整個 $[0,1]$。

費根鮑姆常數

1975 年，費根鮑姆（Mitchell Feigenbaum）在洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）工作時，用一部可編程的袖珍計算機，量度了週期加倍時的各個 k 值：$k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、...。他留意到這些間距以一個固定的倍數縮小，

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

然後更令人驚訝地發現，同一個數 4.6692... 也出現在 $x \mapsto k\sin(\pi x)$ 之中，以及其他所有只有單一個峯、而峯頂像拋物線般圓滑（即二次極大值，quadratic maximum）的

光滑映射之中。這個常數對這一整類映射是普適（universal）的；至於峯頂較平坦的映射，例如形狀像 $-x^4$ 的那種，則各有自己的普適常數。其後，人們在滴水的水龍頭、受熱的流體和電子電路的實驗中都量度到這個常數。要解釋箇中原因，需要借用相變（phase transition）物理學的想法，而嚴格的證明要到 1982 年才由 Oscar Lanford 藉助電腦完成。

同一招，用三次

第 (ii) 部分的代換是共軛（conjugacy）的一個例子：若一個變數代換能把一個映射變成另一個，這兩個映射便稱為共軛，而它們的動力學行為完全相同。本題證明了每一個滿足該條件的二次映射，都與 $k = 4$ 的邏輯斯諦映射共軛，而後者又透過 $u = \sin^2\theta$，成為喬裝了的角度加倍。（嚴格來說，最後這一環是半共軛（semiconjugacy）：θ 和 $\pi - \theta$ 給出相同的 u，所以這個變數代換並非一對一（one-to-one）。邏輯斯諦映射真正共軛的對象是帳篷映射（tent map），即當 $t \le \frac{1}{2}$ 時 $t \mapsto 2t$、當 $t \ge \frac{1}{2}$ 時 $t \mapsto 2 - 2t$，所用的代換是 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$，它在 $[0,1]$ 上是一對一的。）在 Section 2.8 中，你遇過 $x \mapsto x^2 - 2$，它由 $x = 2\cos\theta$ 解出，角度每一步加倍；它同樣滿足該條件（不妨試試）。所以這些全都是同一個映射的不同喬裝。在 Section 8.8 中，這個家族的第三位成員將會登場：一個由直線構成的映射，即帳篷映射。

思維技巧

變數代換，看清結構

一個好的代換可以把複雜的規則變成簡單的規則。設法找出一個變數代換，把問題變成你已經明白的問題。

在這裏，$u = \sin^2\theta$ 把一個二次映射變成了角度加倍，而一個線性代換則把一整族二次式歸結為一個。在大學裏，共軛是一件核心工具：在動力系統(dynamical systems)中，在線性代數中(把矩陣對角化，就是選取一組令它變得簡單的坐標)，以及在羣論中，都是如此。

延伸練習

1 **邏輯斯諦映射的循環。**試做 STEP II 2002，第 5 題（`step.maths.org/questions/02-s2-q5`）。然後證明只有當 $k > 3$ 時才存在 2-循環。

2 **平方減二。**證明 $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ 滿足第 (ii) 部分的條件（把它寫成 $-pv_n^2 + qv_n + r$，其中 $p = -1$）。求 α 和 β，並驗證你的答案與 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$ 一致。

3 **一個 3-循環。**利用公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，求 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 的一個 3-循環。（提示：試試 $\theta = \pi/7$，或 $\theta = \pi/9$。）週期恰好為 3 的點有多少個？

4 **丟失數位。**電腦儲存數字時，大約準確至 53 個二進制位。如果你在電腦上迭代 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$，大約多少步之後，計算出來的值便與真正的數列毫無關係？到那時，計算出來的數列是否就沒有用處？

延伸閱讀

- **Robert May，「Simple mathematical models with very complicated dynamics」**，*Nature* 261 (1976)。經典之作，至今仍然十分易讀。
- **James Gleick，*Chaos: Making a New Science***（Penguin）。講述梅、費根鮑姆以及混沌被發現的故事。
- **Steven Strogatz，*Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 10 章。一維映射、邏輯斯諦映射和費根鮑姆常數，程度相當於大學一年級。
- **Ian Stewart，*Does God Play Dice?***（Penguin）。一本介紹混沌的科普讀物，其中有一章對邏輯斯諦映射講解得很好。

8.8 週期三蘊含混沌

題目

STEP III 2025，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

引子

1975 年，李天岩（Tien-Yien Li）與約克（James Yorke）在《美國數學月刊》（*American Mathematical Monthly*）發表了一篇論文，題目是數學史上最著名的標題之一：「Period three implies chaos」（週期三蘊涵混沌）。他們證明了：如果一個由區間映到自身的連續函數（continuous function）有一個週期（period）為 3 的點（即一個恰好經過三步後返回原處的起始值），那麼它就有任何週期的點：1、2、4、5、17、1000，無一例外。這篇論文亦把「混沌」（chaos）一詞帶進了數學。

這道 2025 年的題目，正是讓你親手走一遍這個定理。函數 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2|x|$ 由兩條直線組成，所以一切都可以精確計算。你會找出它的 2-循環（cycle）和 3-循環，並在過程中看到為甚麼其中一種循環存在，就迫使其餘的循環也必然存在。

動筆之前

? **想一想** $y = 7 - 2|x|$ 的圖像是甚麼樣子的？它在哪裏與直線 $y = x$ 相交？它把區間 $[-7, 7]$ 送到哪裏？

圖像是一個倒轉的 V 形，頂點在 $(0, 7)$，斜率（gradient）為 ± 2。它與 $y = x$ 相交於 $x = 7 - 2x$（其中 $x \geq 0$）之處，得 $x = \frac{7}{3}$；以及 $x = 7 + 2x$（其中 $x < 0$）之處，得 $x = -7$。這些就是*不動點*（fixed point）：從這裏出發，數列永遠不會移動。此外 $\mathrm{f}(-7) = \mathrm{f}(7) = -7$ 而 $\mathrm{f}(0) = 7$，所以 f 把 $[-7, 7]$ 映滿自身：先把它拉長至兩倍，再對摺起來。

逐步解題

階段 1　$\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ 的圖像

> **想一想**　當 x 由 -7 走到 7 時，$\mathrm{f}(x)$ 由 -7 升至 7，再降回 -7。那麼 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 會怎樣變化？

當 x 由 -7 走到 0 時，$\mathrm{f}(x)$ 走遍整個 $[-7,7]$，所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 描出一個完整的 V 形：由 -7 升至 7，然後再降下來。當 x 由 0 走到 7 時，情況相同。因此在 $[-7,7]$ 上，$\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ 的圖像是一個倒轉的 W 形：四段斜率為 ± 4 的直線段，每段都在高度 -7 與 7 之間來回，頂點在 $x=\pm\frac{7}{2}$（該處 $\mathrm{f}(x)=0$），並在 $x=0$ 處下降至 -7（圖 8.8.1）。在 $[-7,7]$ 之外，兩個圖像都急速下降。

階段 2　解 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=x$

> **想一想**　四段直線段每一段都與對角線 $y=x$ 恰好相交一次。其中兩個交點你早已知道，為甚麼？怎樣才能不必展開多重絕對值而找出另外兩個？

不動點 $\frac{7}{3}$ 和 -7 當然滿足 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=x$。任何其他的解 p 都屬於一個 2-循環 $p\to q\to p$，其中 $q=\mathrm{f}(p)\neq p$。試試各種正負號的組合。如果 p 和 q 都是正數，則 $q=7-2p$ 及 $p=7-2q$，這迫使 $p=q=\frac{7}{3}$；如果兩者都是負數，同樣的論證給出 -7。所以必定一正一負，設 $p>0>q$：

$$q=7-2p,\qquad p=7+2q.$$

於是 $p=7+14-4p$，所以 $p=\frac{21}{5}$ 及 $q=-\frac{7}{5}$，而這確實滿足 $q<0$。

在 $[-7,7]$ 之外並沒有解：當 $x>7$ 時，有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=21-4x<x$；當 $x<-7$ 時，有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=21+4x<x$。所以四個解是

$$x=-7,\quad -\tfrac{7}{5},\quad \tfrac{7}{3},\quad \tfrac{21}{5}.\qquad\blacksquare$$

數列的週期為 2，當且僅當 $a=\frac{21}{5}$ 或 $a=-\frac{7}{5}$。（在不動點處，數列是常數數列，週期為 1。）

階段 3　遲了才進入循環

取 $a=\frac{28}{5}$：$u_1=7-\frac{56}{5}=-\frac{21}{5}$，$u_2=7-\frac{42}{5}=-\frac{7}{5}$，$u_3=7-\frac{14}{5}=\frac{21}{5}$，$u_4=-\frac{7}{5}$，如此類推。由 u_2 開始，數列就是那個 2-循環，但 $u_0=\frac{28}{5}$ 和 $u_1=-\frac{21}{5}$ 並不在循環之內。$\blacksquare$

> **想一想**　你自己可以怎樣找到 $\frac{28}{5}$？試從後倒推：f 把哪些數送到 $-\frac{7}{5}$？

$f(x) = -\frac{7}{5}$ 即是 $|x| = \frac{21}{5}$，所以 $x = \pm\frac{21}{5}$。其中一個在循環之內；另一個，即 $-\frac{21}{5}$，就是一個入口。然後 $f(x) = -\frac{21}{5}$ 即是 $|x| = \frac{28}{5}$。由於 f 是二對一的，$(-7,7)$ 內每一點都有兩個原像（preimage），所以每個循環都有一整棵由起始值組成的樹，最終匯入這個循環。

階段 4 三循環

> **停一停，試一試** 計算由 $a = 1$ 和 $a = -\frac{7}{9}$ 出發的數列。

由 $a = 1$ 出發：$1 \to 5 \to -3 \to 1$。由 $a = -\frac{7}{9}$ 出發：$-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$。兩者都是 3-循環。

> **想一想** $f(f(f(x))) = x$ 可以有多少個解？像第 1 階段那樣，想想它的圖像的形狀。

重複第 1 階段的論證，每多施行一次 f，直線段的數目就增加一倍。所以在 $[-7,7]$ 上，$f \circ f \circ f$ 的圖像是由八段組成的鋸齒形，斜率為 ± 8，每段都走遍由 -7 到 7 的整個高度（圖 8.8.2）。每一段都與對角線恰好相交一次，所以在 $[-7,7]$ 內恰好有八個解，而（一如之前）區間之外則沒有解。我們已經找到八個：兩個不動點，以及兩個 3-循環的六個點。所以解是

$$x = -7,\ \tfrac{7}{3},\ 1,\ 5,\ -3,\ -\tfrac{7}{9},\ \tfrac{49}{9},\ -\tfrac{35}{9}. \qquad \blacksquare$$

階段 5 遲了才進入 3-循環

由循環 $1 \to 5 \to -3$ 從後倒推。我們想要 u_3 在循環之內，但 u_2 不在。1 的原像滿足 $|x| = 3$，所以 $x = \pm 3$；-3 在循環之內，故取 $u_2 = 3$。3 的原像滿足 $|x| = 2$；取 $u_1 = 2$。2 的原像滿足 $|x| = \frac{5}{2}$；取 $u_0 = \frac{5}{2}$。於是

$$\tfrac{5}{2} \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to -3 \to 1 \to \cdots,$$

而 $\frac{5}{2}$、2、3 全都不在循環之內。所以 $a = \frac{5}{2}$ 符合要求。 $\blacksquare$

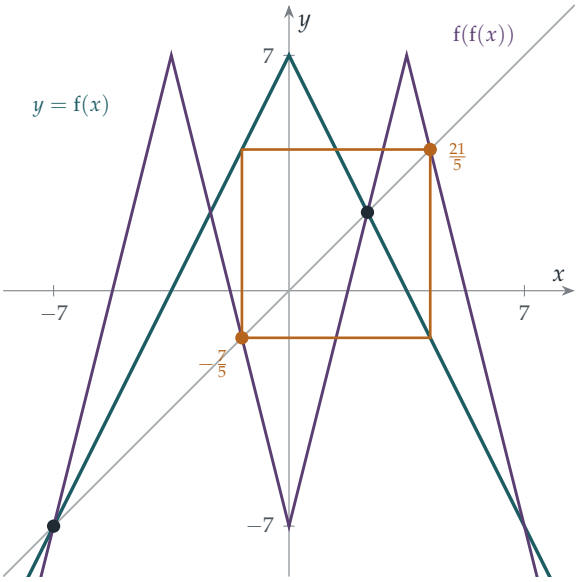


圖 8.8.1　$y = \mathrm{f}(x)$（藍綠色）、$y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$（紫紅色）和 $y = x$（灰色）的圖像。紫紅色的圖像與對角線相交四次：在不動點 -7 和 $\frac{7}{3}$（黑色），以及在 2-循環 $\frac{21}{5} \leftrightarrow -\frac{7}{5}$（琥珀色）。琥珀色的正方形是這個 2-循環的蛛網圖（cobweb）：向上走到 f 的圖像，橫向走到對角線，然後重複。

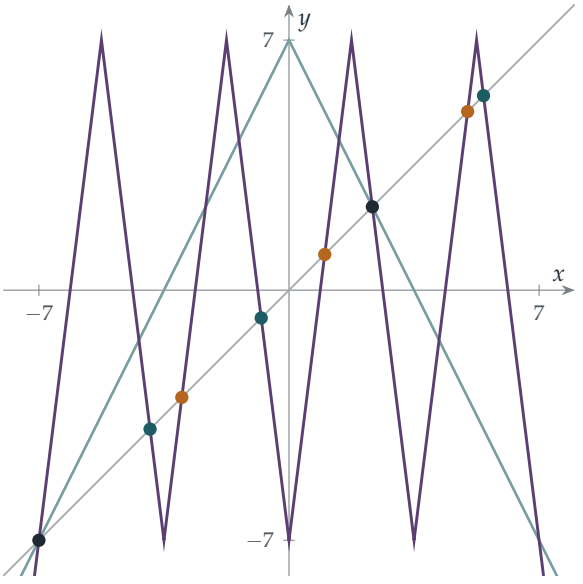


圖 8.8.2　$y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$ 的圖像（紫紅色）在 $[-7, 7]$ 上是由八段組成的鋸齒形，斜率為 ± 8，每段與對角線相交一次。八個交點分別是兩個不動點（黑色）、3-循環 $1 \to 5 \to -3$（琥珀色）和 3-循環 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9}$（藍綠色）。

回顧

- **憑形狀點算。**我們沒有展開多重絕對值，而是點算圖像中直線段的數目。這告訴我們要找多少個解，也就知道甚麼時候已經全部找齊。
- **利用循環的結構。**$f(f(x)) = x$ 的解若非不動點，就是成對出現；$f(f(f(x))) = x$ 的解若非不動點，就是三個一組出現。
- **從後倒推。**第 (i)(d) 和 (ii)(c) 部分中那些「遲來者」，都是靠原像構造出來的。

背後的數學

任何長度的循環

第 4 階段的點算方法適用於任何步數。把 f^n 記作施行 f 共 n 次。在 $[-7,7]$ 上，f^n 的圖像有 2^n 段直線段，每段都走遍整個高度，所以 $f^n(x) = x$ 恰好有 2^n 個解。其中有些解的週期較短，是某個整除 n 的 d，但對每個 d 而言，這樣的解最多只有 2^d 個，而且

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad \text{（對所有滿足 } d < n \text{ 的 } n \text{ 的因數求和）}$$

因為所有小於 n 的因數都不超過 $n/2$，而 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \leq 2^n$。所以對每個 n，都存在週期恰好為 n 的點。這個函數有任何長度的循環。

為甚麼週期三迫使一切出現

李天岩與約克的定理指出，這並非我們這個函數獨有的性質：任何由區間映到自身的連續函數 g，只要有一個 3-循環，就有任何長度的循環。證明所用的不外乎介值定理（intermediate value theorem），而我們的 3-循環正好展示了證明的思路。

> **想一想** 設 $I_1 = [-3,1]$ 及 $I_2 = [1,5]$，即循環 $1 \to 5 \to -3$ 各點之間的兩個區間。f 把它們分別送到哪裏？

在 I_2 上，f 由 $f(1) = 5$ 遞減至 $f(5) = -3$，所以 $f(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$。在 I_1 上，f 由 $f(-3) = 1$ 升至 $f(0) = 7$，再降至 $f(1) = 5$，所以 $f(I_1) = [1,7]$，它包含 I_2。留意我們只用到循環的三個點：任何具有 3-循環 $a \to b \to c$、$a < b < c$ 的連續函數，都以同樣的方式覆蓋它的區間。我們可以用一幅圖來概括哪個區間覆蓋哪個區間（圖 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理於是由以下兩個事實推出，兩者都是介值定理的推論。

- 如果 $g(I) \supseteq I$，則 g 在 I 內有一個不動點。（對 $g(x) - x$ 應用介值定理。）

▶ 如果 $g(I) \supseteq J$，則存在一個較小的閉區間 $I' \subseteq I$，使得 $g(I') = J$ 恰好成立。

要找一個週期為 n 的點，可沿着圖中的迴路 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ 走：$n-1$ 步留在 I_2 之內，另有一步走出去到 I_1 再回來。反覆運用第二個事實，我們可以把 I_2 收窄成一個由起始點組成的區間，這些起始點的軌道（orbit）都依循這條路線，而 g^n 把這個區間映滿整個 I_2。第一個事實給出一點 x，滿足 $g^n(x) = x$，並且只在第 $n-1$ 步到訪 I_1。它的週期不可能小於 n，否則對 I_1 的到訪便會在更早的時候重複出現。（這裏有一個微妙之處，因為 I_1 和 I_2 共有一點 1；驗證這不會造成問題，留作習題。）

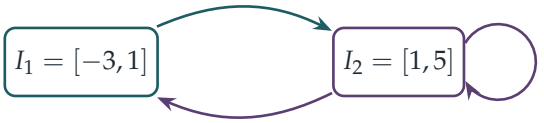


圖 8.8.3　3-循環的覆蓋圖（covering diagram）。由一個區間指向另一個區間的箭嘴，表示前者的像包含後者。圖中每一條迴路都給出函數的一個循環：迴路 $I_2 \to I_2$ 給出一個不動點，$I_1 \to I_2 \to I_1$ 給出一個 2-循環，而先繞 I_2 處的迴路 $n-1$ 次再到訪 I_1，則給出一個長度為 n 的循環。

沙可夫斯基定理

李天岩與約克並不是最先發現的人。早在 1964 年，烏克蘭數學家沙可夫斯基（Oleksandr Sharkovskii）已經證明了一個完備得多的結果，以俄文發表於《烏克蘭數學雜誌》（*Ukrainian Mathematical Journal*），其後十年間西方對此一無所知。把正整數排列成

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1:$$

先是由 3 開始的奇數，然後是奇數的兩倍，再然後是奇數的四倍，如此類推，最後以 2 的冪按遞減次序作結。沙可夫斯基定理指出：如果區間上的一個連續函數有一個長度為 m 的循環，那麼凡是在這個列表中排在 m 之後的長度，它都有相應的循環。由於 3 排在最前，週期 3 便蘊涵所有週期。而且這個定理是最佳的：對每個 m，都存在一個函數，它有長度為 m 的循環，卻沒有列表中排在更前的長度的循環。列表末端 2 的冪，正正就是 Section 8.7 中邏輯斯蒂映射（logistic map）的倍週期級聯（period-doubling cascade），而 3-循環在那裏出現於 $k = 1 + \sqrt{8}$。

帳篷映射與邏輯斯蒂映射

作代換 $x = 14y - 7$，它把 $[0,1]$ 映滿 $[-7,7]$。簡單計算可見，f 變成了帳篷映射（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

而再作代換 $u = \sin^2(\pi y/2)$，就把帳篷映射變成邏輯斯蒂映射 $u \mapsto 4u(1-u)$。所以這道題目中的函數，其實就是 Section 8.7 中那個混沌的邏輯斯蒂映射，只是被拉直了。它的 $f^3(x) = x$ 的八個解，對應於 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 內的八個解。

思維技巧

以介值定理證明存在性

要證明解存在，不一定要把它找出來。只需證明一個連續函數變號，或者一個區間被映射後蓋過自身。

在這道題目中，每一個解都可以算出來。但李天岩與約克的定理適用於我們根本無從計算的函數，而且它只用介值定理和一幅顯示哪個區間覆蓋哪個區間的圖，就證明了無窮多個循環的存在。在大學裏，這種論證方式，即不作構造而證明存在，會出現在分析（analysis）（介值定理本身）、拓撲學（topology）（不動點定理）以及動力系統（dynamical systems）的各個角落。

延伸練習

1. **一個 4-循環。**利用覆蓋圖預測 f 的一個 4-循環應該在哪裏（三步在 I_2，一步在 I_1）。然後把它精確地求出來。（提示：這個循環有三個正的點和一個負的點；寫下四條線性方程。）

2. **微妙之處。**在「週期 3 蘊涵週期 n」的證明中，解釋為甚麼當 $n \geq 4$ 時，所找到的點 x 不可能是點 1（或原來那個 3-循環的任何一點）。

3. **有週期 5 而沒有週期 3。**草繪一個在 $[1,5]$ 上的連續函數的圖像，它滿足 $g(1) = 3$、$g(3) = 4$、$g(4) = 2$、$g(2) = 5$、$g(5) = 1$，並以直線連接這些點。就區間 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ 畫出它的覆蓋圖。你能找到一條長度為 3 的迴路嗎？（沙可夫斯基定理說它沒有 3-循環。）

4. **帳篷映射。**驗證 $x = 14y - 7$ 把 f 變成帳篷映射。然後證明帳篷映射把以二進制寫成的 y 加倍，並且每當首位數字是 1 時就把所有數字反轉；再利用這一點找出它的 3-循環。

延伸閱讀

► **Tien-Yien Li & James Yorke, "Period three implies chaos"**, *American Mathematical*

Monthly 82 (1975)。篇幅短小，懂得介值定理便可讀懂。

- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press)。為大學本科生而寫；涵蓋帳篷映射、邏輯斯蒂映射和沙可夫斯基定理，並附完整證明。
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011)。一個運用覆蓋圖的現代證明。

我們學到了甚麼

本章開首我們說過，大多數微分方程（differential equation）都無法求解，而真正的功夫在於即使解不出來，也能理解它們。我們提出了三個問題：現在是否決定未來？不求解的話，我們能知道些甚麼？長遠而言會發生甚麼事？以下是本章八道題目所揭示的答案。

1. 現在是否決定未來？

通常是，但並非必然。在 Section 8.1 中，方程 $(y')^2 = 4y$ 經過 x 軸上每一點都有無窮多個解：一個解可以隨意在 $y = 0$ 停留任意長的時間，然後才離開。罪魁禍首是平方根：它在零處的斜率為無窮大，破壞了皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）中的利普希茨條件（Lipschitz condition）。同一機制也解釋了為何一個漏水的水桶無法告訴你它是何時漏空的，而它亦是諾頓圓頂（Norton's dome）背後的原理——那是古典力學中一個關於決定論（determinism）的難題。

即使未來已被決定，它也未必可以預測。Section 8.7 的邏輯斯諦映射（logistic map）有一條精確的公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，然而每走一步，起始角 θ 的任何誤差都會加倍，而起始值的誤差平均而言也增長得同樣快。原則上的決定論，並不等於實際上的可預測性。

2. 不求解的話，我們能知道些甚麼？

能知道的非常多。

- **能量。**在 Section 8.2 中，把方程乘以 y' 便得出一個不可能增加的量，從而為一條無人能解的方程的解定出了界限。這類量稱為*李雅普諾夫函數*（Lyapunov function），是證明穩定性（stability）的主要工具。
- **平衡點與穩定性。**在 Section 8.3 中，增長率的正負號預示了魚羣的命運，並顯示捕撈量一旦超過某個臨界值，魚羣便會突然崩潰。
- **合適的坐標。**在 Section 8.4 中，極坐標（polar coordinates）把一個耦合方程組化為只含 r 的單一方程，顯示每個解都盤旋着趨向一個圓。在 Section 8.5 中，對稱性把四隻互相追逐的狗簡化為一隻，再以相除消去時間，便得出牠們路徑的形狀。
- **由恆等式看出結構。**在 Section 8.6 中，朗斯基行列式（Wronskian）證明了某方程的解互相正交（orthogonal），而無須對其中任何一個解進行積分。

- **點算與覆蓋。**在 Section 8.8 中，點算圖像的段數便找出了所有循環（cycle），而介值定理（intermediate value theorem）則證明了任意長度的循環都存在。

3. 長遠而言會發生甚麼事？

本章遇到了各種各樣的長期行為。解或會趨於穩定的平衡點（Section 8.3）、趨近一個不斷重複的循環（Section 8.4）、在有限時間內盤旋收於一點（Section 8.5），又或者表現出混沌（chaos）行為（Section 8.7）。就邏輯斯諦映射而言，單單一個參數便可令系統經歷以上各種情況：先是一個不動點（fixed point），然後是一連串由費根鮑姆（Feigenbaum）普適常數支配的倍週期（period doubling），最後是混沌，其間夾雜着一些有序的窗口，例如 3-循環。而 Section 8.8 則證明了，一旦出現 3-循環，任意長度的循環都必定存在——這是沙可夫斯基（Sharkovskii）整數排序的第一步。

4. 微分方程與動力學的工具箱

方法	你在哪裏用過
尋找奇解（singular solution）	非唯一性（8.1）
一個不可能增加的量	定界（8.2）
增長率的正負號	捕撈（8.3）
配合對稱性的坐標	極限環（limit cycle）（8.4）；追逐（8.5）
以代換法線性化	伯努利方程（Bernoulli equation）（8.4）
朗斯基行列式	正交性（8.6）
共軛（conjugacy）	邏輯斯諦映射（8.7）
歸納法（induction）	$u_n = \sin^2(2^n\theta)$（8.7）
點算圖像的段數	f^n 的循環（8.8）
介值定理	週期三（8.8）

下一步

- 能量與守恆定律會在力學中再次出現，由 Section 10.1 開始。
- 含多個未知函數的線性微分方程可用特徵向量（eigenvector）求解，它們支配着 Section 11.2 中的振動系統；至於無法以初等函數求解的非線性單擺，則見於 Section 11.3。
- 在 Section 12.15 中，反覆迭代一個映射以找出其不動點，可判定一個姓氏會否消亡；而隨機數列的長期行為則是 Section 12.16 的主題。

如果你想在上大學之前再進一步

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***：動力系統（dynamical systems）最好的入門書，應用和圖解十分豐富。Strogatz 根據此書講授的課堂錄影可在網上免費觀看。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***：講述混沌是如何被發現的故事。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***：經典的入門課本，歷史材料豐富。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems***：迭代映射，附有證明，程度相當於大學一年級。

拉普拉斯（Laplace）曾經設想，只要準確知道現在，便可以算出整個未來。本章顯示了這個夢想在何處止步。唯一性可以失效；而即使唯一性成立，混沌也可以把最微小的不確定性不斷放大，直至無法預測。但本章同時顯示，沒有公式也能理解很多東西：界限、平衡點、循環及其穩定性，以至混沌本身的結構。由「解方程」轉為「理解方程的解」，是大學數學課程要求你作出的最重要的思維轉變之一。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：只列出結果和關鍵步驟，方便你核對自己的做法。請先認真做過每道練習，然後才翻看。

8.1 當解不唯一

1. 設 $y = v^2$：$2vv' = \alpha v - \beta v^2$，所以 $v' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta v)$，而 $y_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/2}\right)^2$。設 $y = v^3$：$v' = \frac{1}{3}(\alpha - \beta v)$，而 $y_1 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/3}\right)^3$。常數函數 $y = 0$ 令等式兩邊都等於零；推導時除以 v，就把這個解丟掉了。

2. $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - kt$，所以 $h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}kt\right)^2$，水桶在 $T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$ 時流乾。$h \equiv 0$，以及當 $t \le T$ 時 $h = \frac{k^2}{4}(T - t)^2$、當 $t \ge T$ 時 $h = 0$ 的函數，兩者都滿足方程，而且由 T 起都等於零：看着一個空桶，你無法知道它是何時流乾的。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-2x}) = (y' - 2y)\mathrm{e}^{-2x} = 0$，所以 $y = C\mathrm{e}^{2x}$，而 $y(0) = 0$ 迫使 $C = 0$。函數 $2y$ 滿足利普希茨（Lipschitz）條件（它的變化至多為 $2|y_1 - y_2|$），而 $2\sqrt{y}$ 在 0 處的斜率為無窮大。

4. 對任意 $b \le 0 \le a$（容許 $b = -\infty$ 或 $a = \infty$）：當 $x < b$ 時 $y = (x - b)^3$，當 $b \le x \le a$ 時 $y = 0$，當 $x > a$ 時 $y = (x - a)^3$。$a = b = 0$ 的情況就是 $y = x^3$。

8.2 不求解而估界

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = 0$，所以 $(y')^2 + y^2 = A^2$，因而 $|y| \le A$。精確解是 $A\cos x$。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\theta')^2 - 2\cos\theta\right) = 2\theta'(\theta'' + \sin\theta) = 0$。由靜止開始，$(\theta')^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) \ge 0$，所以 $\cos\theta \ge \cos\theta_0$；當 $|\theta_0| < \pi$ 時，連續性（continuity）令 θ 留在 $[-|\theta_0|, |\theta_0|]$ 之內，而當 $|\theta_0| = \pi$ 時，擺倒立平衡，並一直停在那裏。若 $|\theta_0| > \pi$，例如 $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$，則 $\theta''(0) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$，所以 θ 起初遞增：擺其實位於角度 $\theta_0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$，並在由該處量起的 $\pm\frac{\pi}{2}$ 之間擺動。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = -4k(y')^2 \le 0$。它確實趨向零，但單憑單調性（monotonicity）並不足以證明這一點：你還需要其他工具，例如顯式解，其指數 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ 的實部為負。

4. $(y')^2 - \frac{1}{2}y^4$ 是常數，等於 $-\frac{1}{2}$。由此得 $(y')^2 = \frac{1}{2}(y^4 - 1)$，但這給不出任何界：「位

能」$-\frac{1}{2}y^4$ 沒有可以困住 y 的位阱，而事實上 y 會在有限時間內趨向無窮（blow up）。

8.3 收穫種羣

1. 方程是 $x' = \alpha^2 - (x-K)^2$，可化為 $y' = y(2\alpha - y)$。設 $w = \frac{1}{y}$，則 $w' = 1 - 2\alpha w$，所以 $w = \frac{1}{2\alpha} + Ce^{-2\alpha t}$。若 $y(0) < 0$，則 $w(0) < 0 < \frac{1}{2\alpha}$，所以 w 在有限時間內經過 0，而 $y \to -\infty$；x 在此之前已到達 0。

2. 設 $z = x - K$，則 $z' = -(z^2 + \beta^2)$，所以 $\tan^{-1}\frac{z}{\beta} = \tan^{-1}\frac{K}{\beta} - \beta t$。種羣數量在 $t = \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{K}{\beta}$ 時降至零（$z = -K$）。

3. $x' = x(2K - h - x)$ 的平衡點（equilibria）是 0 和 $2K - h$。當 $h < 2K$ 時，這是一條環境承載量（carrying capacity）為正的邏輯斯諦方程（logistic equation），每個正數解都趨向 $2K - h$。捕獲量隨種羣數量下降而減少，所以永遠不會把種羣數量逼至零。

4. $x = K + K\tanh Kt$，而 $\tanh Kt = \frac{1}{2}$ 給出 $t = \frac{1}{K}\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2K}$。

8.4 盤旋趨向圓

1. 曲線與半徑之間的夾角 ψ 滿足 $\tan\psi = \frac{r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta} = -1$，在每一點都相同：曲線與每條射線都以 45° 相交。

2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2) = r\,\mathrm{d}r$。另外 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = r^2\,\mathrm{d}\theta$。

3. 設 $s = r^2$，則 $\dot{s} = 2s(1-s)$，是一條邏輯斯諦方程，所以對任意 $s(0) > 0$ 都有 $s \to 1$。寫成笛卡兒（Cartesian）形式：$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$，$\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$。

4. $\dot{r} = r(r-1)(r-2)$，$\dot{\theta} = 1$。在 0 與 1 之間，$\dot{r} > 0$；在 1 與 2 之間，$\dot{r} < 0$；超過 2 之後，$\dot{r} > 0$。所以 $r = 1$ 是吸引的，而 $r = 2$ 是排斥的。

8.5 格力犬追逐格力犬

1. 由對稱性可知，幾隻狗始終構成一個正方形。A 沿 AB 以速率 v 奔跑，令距離以速率 v 縮短；B 沿 BC 奔跑，而這個方向垂直於 AB，所以在一階近似下不會改變距離。因此 AB 恰好以速率 v 縮短，由 s 減至 0，需時 $\frac{s}{v}$。

2. $r = \lambda e^{-\sqrt{3}\theta}$。距離以速率 $v - v\cos 120° = \frac{3}{2}v$ 縮短，所以牠們在時間 $\frac{2s}{3v}$ 後相遇，每隻各跑了 $\frac{2s}{3}$（這與 $\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}$ 在 $n = 3$ 時的值吻合）。

3. 每轉一圈，r 就乘以 $e^{-2\pi} \approx \frac{1}{535}$：轉一圈後約為 19 cm。轉兩圈後約為 0.35 mm，所以轉足兩圈便已足夠。

4. 兩隻狗筆直地向對方奔跑，在時間 $\frac{s}{2v}$ 後於中點相遇。公式在此失效：$\tan\frac{\pi}{2}$ 為無窮大，正好對應完全沒有轉彎這個事實。

8.6 量子振子

1. 這只需直接求導（雖然頗為繁瑣）；另一個做法是由第 4 題推出。取 $2\lambda=\omega$，則 $\int y_0y_2=\int(2\omega x^2-1)\mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x=2\omega\cdot\frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}-\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}=0$。

2. $y''=(4\lambda^2x^2-2\lambda)y$，所以方程要求 $4\lambda^2=\omega^2$ 及 $2\lambda=(2\nu+1)\omega$。取 $\lambda=\frac{\omega}{2}>0$（使解衰減），得 $\nu=0$。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_my_n'-y_ny_m')=y_my_n''-y_ny_m''=(m^2-n^2)y_my_n$。由 0 積分至 π：因為 y_m 和 y_n 在兩端都等於零，左邊得 0，而 $m^2\neq n^2$。

4. 記 $c=(2n+1)\omega$，於是 $y_n''=(\omega^2x^2-c)y_n$。把 $z=\omega xy_n-y_n'$ 求導兩次，並運用上式（及其導數），得 $z''-\omega^2x^2z=-(c+2\omega)z$，而 $c+2\omega=(2n+3)\omega$。由 $y_0=\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$ 出發：先得 $2\omega x\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$，再得 $2\omega(2\omega x^2-1)\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$，它們分別是 y_1 和 y_2 的倍數。

8.7 可以解出的混沌

1. (i) 用歸納法（induction）：若 $0<x<1$，則 $0<x(1-x)\le\frac{1}{4}$，所以 $0<kx(1-x)<1$。(ii) $a=ka(1-a)$ 給出 $k=\frac{1}{1-a}$。(iii) 由於 $x_1=ka(1-a)=ab$，條件 $x_2=a$ 即 $kab(1-ab)=a$；代入 $k=\frac{b}{1-a}$ 後，化為 $ab^3-b^2+1-a=0$。根 $b=1$ 對應不動點（fixed point）（$x_1=a$），所以把它提出來：$ab^2+(a-1)b+(a-1)=0$；解出 b，便得 $k=\frac{b}{1-a}$。等價的說法是：2-循環（cycle）的兩點是 $k^2x^2-k(k+1)x+(k+1)=0$ 的兩個根，其判別式（discriminant）$k^2(k+1)(k-3)$ 只在 $k>3$ 時為正。

2. $p=-1$，$q=0$，$r=-2$：$4pr=8=8+2q-q^2$。比較係數得 $\alpha=\frac{4}{p}=-4$ 及 $\beta=\frac{q-4}{2p}=2$，所以 $v_n=2-4\sin^2(2^n\theta)=2\cos(2^{n+1}\theta)$，即 $2\cos(2^n\phi)$，其中 $\phi=2\theta$。

3. $u_3=u_0$ 要求 $\sin^2 8\theta=\sin^2\theta$，所以 $8\theta=\pm\theta+k\pi$。取 $\theta=\frac{\pi}{7}$：得循環 $\sin^2\frac{\pi}{7}\to\sin^2\frac{2\pi}{7}\to\sin^2\frac{4\pi}{7}\to\sin^2\frac{8\pi}{7}=\sin^2\frac{\pi}{7}$。取 $\theta=\frac{\pi}{9}$：$\sin^2\frac{\pi}{9}$，$\sin^2\frac{2\pi}{9}$，$\sin^2\frac{4\pi}{9}$。映射（map）$u\mapsto u_3$ 有 $2^3=8$ 個不動點；其中兩個（0 和 $\frac{3}{4}$）是原映射本身的不動點，餘下 6 個點的週期恰好是 3：即兩個 3-循環。

4. 每一步都把 θ 加倍，因而損失一個二進制數位的準確度，所以大約 50 步之後，計算所得的數值與真實數值已毫無關係。但這些數值並非沒有用處：計算所得的數列始終貼近一條由稍為不同的起點出發的真實軌道（orbit）（這就是影隨（shadowing）性質），所以它的統計特性仍然正確。

8.8 週期三蘊含混沌

1. 設 $a、b、c > 0$ 而 $d < 0$：$b = 7 - 2a$，$c = 7 - 2b$，$d = 7 - 2c$，$a = 7 + 2d$。解得 $17a = 49$，所以循環是 $\frac{49}{17} \to \frac{21}{17} \to \frac{77}{17} \to -\frac{35}{17} \to \frac{49}{17}$，其中三點在 $I_2 = [1,5]$ 內，一點在 $I_1 = [-3,1]$ 內。

2. 所找到的點的行程（itinerary）是 $I_2, I_2, \ldots, I_2, I_1$（其中有 $n - 1 \geq 3$ 步在 I_2 內）。循環 $1 \to 5 \to -3$ 不可能依循這個行程：-3 不在 I_2 內，所以 1（它的第二個像是 -3）、5（它的第一個像是 -3）以及 -3 本身，都不可能是該點。

3. 覆蓋圖（covering diagram）是 $[1,2] \to [3,4],[4,5]$；$[2,3] \to [4,5]$；$[3,4] \to [2,3],[3,4]$；$[4,5] \to [1,2]$。長度為 3 的迴路只有 $[3,4] \to [3,4] \to [3,4]$，它給出的是不動點，而不是 3-循環。

4. 設 $x = 14y - 7$，則 $\frac{f(x)+7}{14} = 1 - |2y - 1|$，即帳篷映射（tent map）。加倍會把二進制數位向左移一位；若移出的數位是 1，結果便是 $2 - 2y$，即把餘下的數位逐一反轉。3-循環有 $\frac{2}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{6}{7}$ 和 $\frac{2}{9} \to \frac{4}{9} \to \frac{8}{9}$（即 $x = -3, 1, 5$ 和 $x = -\frac{35}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}$）；以二進制表示，$\frac{2}{7} = 0.\overline{010}$ 而 $\frac{2}{9} = 0.\overline{001110}$。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 8 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。