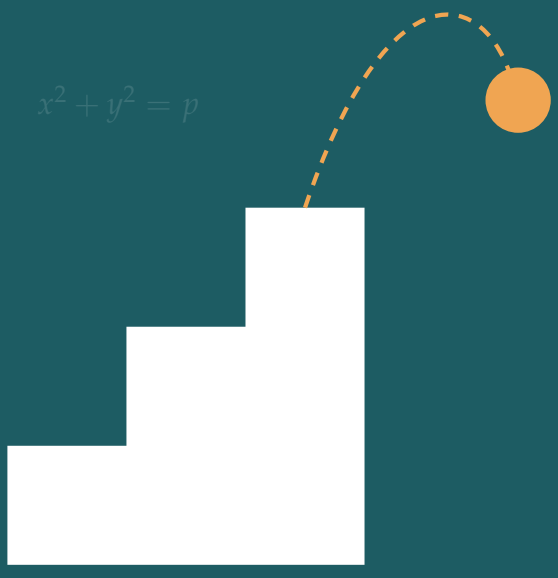
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 7 章

線性代數與幾何



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 7 章

線性代數與幾何

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 7 章：線性代數與幾何

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 7 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 beyondstep.keithmcnulty.org 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

章

7

線性代數與幾何

矩陣不是一張數字表。它是空間的一種變換，而且自有其生命。

本章內容

7.1	對矩陣不成立的法則	STEP II 1993
7.2	只伸縮，不轉向	STEP III 1990
7.3	甚麼才算行列式	STEP II 2019
7.4	回到起點的矩陣	STEP II 2020
7.5	三維空間中的旋轉	STEP III 2022
7.6	雙曲旋轉與相對論	STEP III 1991
7.7	永恆不變的量	STEP III 2024
7.8	四個平方數	STEP III 1994
7.9	只有五種柏拉圖立體	STEP III 1999
A	練習答案	第 65 頁

空間的變換

> 我們思考時不依賴基底，寫作時也不依賴基底，但到了緊要關頭，我們就關上辦公室的門，拼命地用矩陣計算。
>
> — Irving Kaplansky，談他與 Paul Halmos 處理線性代數的方式

在中學，矩陣（matrix）通常以解聯立方程的工具出現，或者是變換點的一套步驟：把矩陣乘以一個列向量（column vector），然後讀出新的坐標。兩者都有用，但它們掩蓋了矩陣之所以成為數學中最重要概念之一的原因。矩陣是一個線性變換（linear transformation）：一種把空間拉伸、旋轉、反射和錯切的方式，而且矩陣可以相加、相乘、取冪和求導，就像數一樣。只不過它們又不像數。矩陣的乘法取決於次序，兩個矩陣可以相乘得零，而且它們有隱藏的不變量（invariant）——跡（trace）、行列式（determinant）、特徵值（eigenvalue）——無論矩陣寫成甚麼樣子，這些量都能刻劃它的本質。

線性代數為何重要

線性代數（linear algebra）大概是應用最廣的數學分支。每一個電腦圖像引擎，由電子遊戲到電影動畫，都是一部做矩陣乘法的機器：角色的每一次旋轉、每一個鏡頭角度、每一個透視投影，都是一個矩陣。互聯網上的搜尋引擎和推薦系統建基於特徵向量（eigenvector）。工程師利用特徵值求出橋樑和建築物的振動頻率；統計學家利用它們找出數據中的主要規律；量子力學完全以線性代數的語言寫成。而現代的機器學習，核心就是數量極其龐大的矩陣乘法。

線性代數無處不在，是有原因的。線性問題是我們能夠徹底解決的問題，而幾乎每一個非線性問題，只要放大到足夠近，看起來都是線性的。這正是微積分的想法，也意味着幾乎所有事物的局部性態，都是用線性代數這種語言來描述的。

你在大學會遇到甚麼

線性代數與分析（analysis）並列為大學一年級的兩大支柱。你會遇到向量空間（vector space，即可以做加法和純量乘法的集合，平面和三維空間只是最初的例子）以及它們之間的線性映射（linear map），並且學到矩陣其實就是用坐標寫出來的線性映射。你會學習行列式、特徵值和特徵向量，以及譜定理（spectral theorem），它指出對稱矩陣（symmetric matrix）可以藉一個旋轉來對角化（diagonalise）。往後的課程處處用到這些內容：在微分方程（第 8 章）中，在幾何中（旋轉和反射在那裏構成羣），在描述連續對

稱的李羣（Lie group）理論中，以及在泛函分析（functional analysis）中，也就是無限多維的線性代數。

貫穿本章的問題

三大問題

1. **矩陣在哪些方面像數，又在哪些方面不同？**哪些算術法則仍然成立，哪些不再成立？
2. **矩陣究竟做了甚麼？**我們怎樣才能看出一個變換的幾何，又有哪些數能夠不依賴坐標而刻劃它？
3. **甚麼保持不變？**哪些量在變換之下，或在運動之下保持不變，它們又告訴我們甚麼？

本章由矩陣代數的法則開始（Section 7.1），然後轉到變換的幾何：特徵向量、行列式、有限階矩陣、三維空間中的旋轉，以及狹義相對論中的雙曲旋轉（hyperbolic rotation）。接着是隨時間演化的矩陣的守恆量（conserved quantity）、由行列式得出的四平方恆等式（four-square identity），最後以一個計數論證作結，即歐拉（Euler）公式，它把柏拉圖立體（Platonic solids）分類。

本章的概念

§	主題	概念
7.1	不成立的法則	非交換性（non-commutativity）；零因子（zero divisor）
7.2	特徵向量	變換不會轉動的方向
7.3	行列式	由可乘性刻劃；有向面積
7.4	有限階矩陣	跡、行列式與凱萊–哈密頓（Cayley–Hamilton）定理
7.5	三維旋轉	由叉積（cross product）得出羅德里格斯（Rodrigues）公式
7.6	洛倫茲推進（Lorentz boosts）	雙曲角可以相加
7.7	守恆量	交換子（commutator）的跡為零
7.8	四平方	行列式的可乘性
7.9	柏拉圖立體	算兩次（double counting）與歐拉公式

如何閱讀本章

對本章的每一個矩陣，都把它所做的事畫出來。取單位正方形，或單位圓，或幾個向量，然後畫出它們的像的草圖。花兩分鐘畫一幅草圖，往往在你動手計算之前就讓你看到答案（一個特徵向量、一個反例、一條不變直線），事後也有助你檢查計算。

7.1 對矩陣不成立的法則

題目

STEP II 1993，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/93-s2-q6`

引子

矩陣（matrix）可以相加，也可以相乘，所以我們很容易把它們當作數來看待。這道題正是要考驗這種想法：它列出四條對數成立的「法則」，問哪些對矩陣仍然成立。結果大部分都不成立，而它們不成立的方式很有啟發性。矩陣乘法不滿足交換律（not commutative）；有些非零矩陣的乘積是零；而一個矩陣的二次方程可以有無窮多個解。

這些「失效」並不是缺陷，反而正是矩陣有用的原因：矩陣描述的是空間的變換（transformation），而以不同的次序進行兩個變換，確實會得到不同的結果。1925 年，海森堡（Werner Heisenberg）發現量子力學中的物理量的表現像矩陣而不像數，而 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 不成立，正是不確定性原理（uncertainty principle）的數學形式。

動筆之前

想一想 對實數而言，為甚麼 $ab = 0$ 可推出 $a = 0$ 或 $b = 0$？這個論證用到了數的哪一項性質？這項性質對矩陣成立嗎？

若 $ab = 0$ 而 $a \neq 0$，兩邊除以 a 便得 $b = 0$。這個論證需要每個非零的數都有逆（inverse）。非零矩陣卻不一定有逆（行列式（determinant）為零的矩陣就沒有），所以這個論證行不通。同時也要記住幾何上的圖像：矩陣是平面的一個變換，而乘積 $\mathbf{AB}$ 的意思是「先做 $\mathbf{B}$，再做 $\mathbf{A}$」。

逐步解題

階段 1　能否有 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 但 $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$？

想一想　從幾何角度去想。你希望 $\mathbf{B}$ 把所有東西送到一條直線上，然後 $\mathbf{A}$ 把這條直線壓成零。但次序調轉時，$\mathbf{A}$ 不應把所有東西都壓到會被 $\mathbf{B}$ 消去的地方。

設 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，它是到 x 軸上的投影（projection），把 y 軸消去；又設 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，它把 (x, y) 送到 $(0, x)$，即送到 y 軸上。於是

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

這個斷言是**錯**的（圖 7.1.1）。 ■

階段 2　平方差

小心展開，保持每個乘積的次序：

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2.$$

這個式子等於 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$，當且僅當 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$。取第 1 階段的矩陣，$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$，所以這個斷言是**錯**的。 ■

階段 3　$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的非零解

想一想　若 $\det \mathbf{A} \neq 0$，你可以對 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 做甚麼？若 $\det \mathbf{A} = 0$，你能否找到一個非零的列向量（column vector）$\mathbf{v}$，使得 $\mathbf{Av} = \mathbf{0}$？

若 $\det \mathbf{A} \neq 0$，則 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，而 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{0}$：沒有非零解。

若 $\det \mathbf{A} = 0$，寫 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中 $ad = bc$。向量 $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ 滿足 $\mathbf{A}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ cb - da \end{pmatrix} = \mathbf{0}$，另一個向量亦同理。由於 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$，兩者之中至少有一個非零；把它記作 $\mathbf{v}$。那麼，兩列都是 $\mathbf{v}$ 的矩陣 $\mathbf{X}$ 是非零的，並且 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$。所以這個斷言是**對**的。 ■

階段 4　有多少個平方根？

停一停，試一試 找出非零的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{X}^2 + \mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 有無窮多個解。（提示：把左邊變成完全平方 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$，再想想平方為零的矩陣。）

取 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$，兩者都非零。方程變成 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$。任何滿足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩陣 $\mathbf{N}$ 都給出一個解 $\mathbf{X} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$，而這樣的 $\mathbf{N}$ 有無窮多個：

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{N}^2 = \mathbf{0} \text{ 對任意實數} t.$$

所以對每一個 t，$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都是解，這個斷言是**錯**的。 ■

回顧

- **次序很重要。**每次展開都必須保持乘積的次序；$\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$ 通常並不相同。
- **零因子（zero divisors）。**非零矩陣相乘可以得零，這就破壞了「二次方程最多有兩個根」背後的論證。
- **從變換的角度去想。**只要想像矩陣對平面做了甚麼，每個反例都很容易找到。

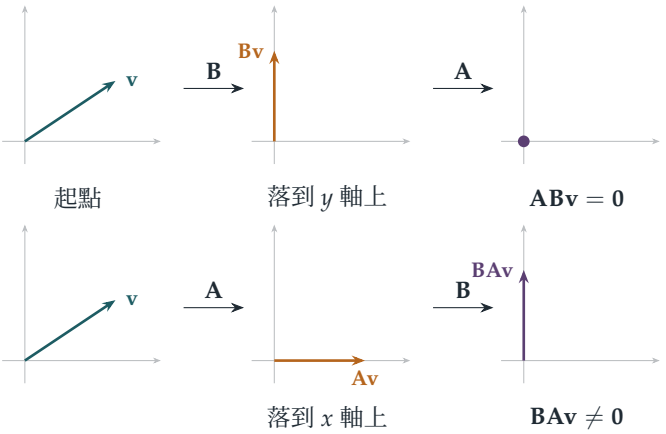


圖 7.1.1 為甚麼 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 但 $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$。上：$\mathbf{B}$ 把每個向量送到 y 軸上，然後 $\mathbf{A}$（到 x 軸上的投影）把它壓成零。下：次序調轉時，$\mathbf{A}$ 保留 x 分量，$\mathbf{B}$ 再把它移到 y 軸上，它在那裏得以保存下來。

背後的數學

矩陣作為一種代數

凱萊（Arthur Cayley）在 1858 年引入矩陣代數，把矩陣看成可以相加和相乘的單一對象，而不僅僅是係數表。他立刻注意到乘法不滿足交換律，並證明了凱萊—哈密頓定理（*Cayley–Hamilton theorem*）：每個方陣都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation）。對於跡（trace）為 t、行列式為 d 的 2×2 矩陣，這就是說 $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$，本章會反覆用到這個事實（Section 7.4）。2×2 實矩陣構成一個環（*ring*）：可以加、減、乘，但乘法不滿足交換律，而且存在零因子，即乘積為零的非零元素。

無窮多個平方根

第 4 階段的結論還可以變得更加驚人。方程 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ 有明顯的解 $\pm\mathbf{I}$，但平面上對任何一條通過原點的直線的反射（reflection）$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 也都是解，因為反射兩次等於甚麼也沒做。這就是 $\mathbf{I}$ 的一整個圓那麼多的平方根。係數為數的 n 次多項式最多有 n 個根，是因為數沒有零因子；矩陣卻有，於是這個根的數目上限便不再成立。

物理學中的非交換性

在經典力學中，位置 x 和動量 p 都是數，並且 $xp = px$。在量子力學中，它們變成算子（operator，即無窮矩陣），滿足 $xp - px = \mathrm{i}\hbar$，其中 $\hbar$ 是普朗克（Planck）常數除以 2π。單憑這一條非交換關係，就可推出海森堡的不確定性原理：位置和動量不可能同時被準確得知。海森堡在 1925 年發現量子力學的法則時，並不知道矩陣是甚麼；是玻恩（Max Born）認出海森堡所發明的那條奇怪的乘法法則就是矩陣乘法。

思維技巧

在新的情境中檢驗熟悉的法則

遇到一種新的對象時，要檢查哪些熟悉的法則仍然成立，並弄清楚每條法則究竟依賴哪一項性質。

法則「$ab = 0$ 可推出 $a = 0$ 或 $b = 0$」依賴除法；「$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$」依賴交換律。知道每條法則建基於甚麼，你就知道甚麼時候仍然可以使用它。

延伸練習

1 **甚麼時候可交換？**求所有與 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 可交換的 2×2 矩陣。

2 **零的平方根。**求所有滿足 $\mathbf{N}^2=\mathbf{0}$ 的 2×2 實矩陣 $\mathbf{N}$。（提示：利用凱萊–哈密頓定理證明 $\operatorname{tr}\mathbf{N}=\det\mathbf{N}=0$。）

3 **反射。**證明每個反射矩陣 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ 的平方都是 $\mathbf{I}$，並求出它所對應的反射軸。

4 **凱萊–哈密頓定理。**以直接計算證明每個 2×2 矩陣都滿足 $\mathbf{M}^2-(\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M}+(\det\mathbf{M})\mathbf{I}=\mathbf{0}$。

延伸閱讀

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。最受歡迎的線性代數入門教科書，着重理解。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer；可在網上免費閱讀）。取向較為抽象，以線性映射而非矩陣為中心。
- **Jim Baggott, *The Quantum Story***（Oxford University Press）。量子力學的歷史，包括海森堡的矩陣力學。

7.2 只伸縮，不轉向

題目

STEP III 1990，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/90-s3-q6`

引子

矩陣變換（matrix transformation）通常會把每個向量轉到新的方向。不過，許多矩陣都有幾個特別的方向，它完全不會轉動這些方向，只會沿着它們拉伸或壓縮。這些方向上的向量就是矩陣的*特徵向量*（eigenvector，源自德文 *eigen*，意思是「自身的」或「特有的」），而拉伸的倍數就是它的*特徵值*（eigenvalue）。當特徵向量的數目足夠時（像本題這類對稱矩陣就必定足夠），這個變換便一目了然：在合適的坐標下，它只不過是沿兩條軸的拉伸。

本題要找出某個矩陣的特徵向量，再用它們來理解這個矩陣對一個圓有甚麼作用。特徵向量是整個應用數學中最有用的概念之一。它們描述橋樑的固有振動、旋轉物體的主軸、原子的能級、一團數據中最重要的方向，以及 Google 最初的 PageRank 演算法怎樣為網頁排名。

動筆之前

想一想 T 使一個向量「方向不變，只乘以一個純量」，這是甚麼意思？試把它寫成一條等式。

意思是存在某個數 λ 使得 $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$：$\mathbf{v}$ 是特徵值為 λ 的特徵向量。留意題目中的兩個向量 $(1, 2)$ 和 $(2, -1)$ 互相垂直。這並非巧合：這個矩陣是*對稱*（symmetric）的，而對稱矩陣總有互相垂直的特徵向量。

逐步解題

階段 1　特徵向量

$$T\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

所以 $(1,2)$ 被拉伸至 2 倍，而 $(2,-1)$ 被拉伸至 4 倍。 ■

階段 2　圓的像

> **想一想**　要求出 E 的方程，可先用 X 和 Y 表示 x 和 y（即求矩陣的逆），再代入 $x^2+y^2=1$。

矩陣 $\frac{2}{5}\begin{pmatrix}9&-2\\-2&6\end{pmatrix}$ 的行列式（determinant）是 $\frac{4}{25}(54-4)=8$，它的逆矩陣（inverse）是 $\frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}$。所以 $x=\frac{6X+2Y}{20}$ 及 $y=\frac{2X+9Y}{20}$，而 $x^2+y^2=1$ 變成

$$(6X+2Y)^2+(2X+9Y)^2=400\quad\Longrightarrow\quad 40X^2+60XY+85Y^2=400,$$

兩邊除以 5，便得 $8X^2+12XY+17Y^2=80$。 ■

> **想一想**　E 是甚麼形狀？它的面積是多少？試利用特徵向量作答。

單位圓在每個方向上的半徑都是 1。在 $(2,-1)$ 的方向上，它被拉伸至 4 倍；在與之垂直的 $(1,2)$ 方向上，則被拉伸至 2 倍。所以 E 是一個橢圓（ellipse），半軸長為 4 和 2，分別沿着兩個特徵向量的方向（圖 7.2.1），其面積為 $\pi\times4\times2=8\pi$。（換個說法：任何線性映射（linear map）都會把面積乘以 $|\det T|=8$，而圓的面積是 π。）

階段 3　X 的最大值

> **想一想**　在 C 上，$X=\frac{2}{5}(9x-2y)$。當 $x^2+y^2=1$ 時，$9x-2y$ 最大可以是多少？

$9x-2y$ 是 $(9,-2)$ 與單位向量 (x,y) 的點積（dot product），所以它的最大值是 $|(9,-2)|=\sqrt{85}$，在 (x,y) 指向 $(9,-2)$ 的方向時取得。因此 X 的最大值是 $\frac{2}{5}\sqrt{85}=2\sqrt{\frac{85}{25}}=2\sqrt{\frac{17}{5}}$。 ■

階段 4　切線

停一停，試一試 C 上的點 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的切線（tangent）是 $3x+4y=5$。線性映射會把切線變成切線。試利用這一點求出 E 的切線。

把 $x=\frac{6X+2Y}{20}$、$y=\frac{2X+9Y}{20}$ 代入 $3x+4y=5$：

$$\frac{3(6X+2Y)+4(2X+9Y)}{20}=5 \quad\Longrightarrow\quad 26X+42Y=100,$$

即 $13X+21Y=50$。 ■

（驗算：該點本身的像是 $T(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(\frac{38}{25},\frac{36}{25})$，而 $13\cdot\frac{38}{25}+21\cdot\frac{36}{25}=\frac{494+756}{25}=50$。）

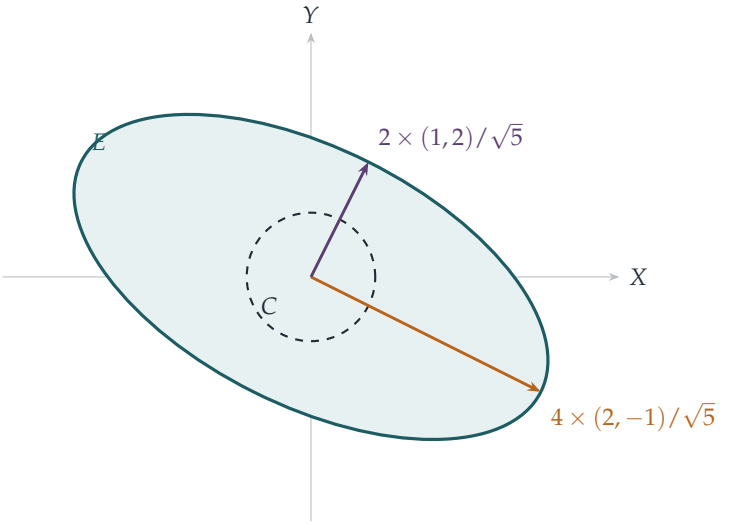


圖 7.2.1 單位圓 C（虛線）及它在 T 之下的像 E。沿着特徵向量 $(2,-1)$，圓被拉伸至 4 倍；沿着與之垂直的特徵向量 $(1,2)$，則被拉伸至 2 倍。所以 E 是一個橢圓，半軸長為 4 和 2，分別沿着這兩個方向，面積為 8π。

回顧

- **特徵向量是天然的坐標軸。**在特徵向量所給出的坐標下，T 只是分別拉伸至 4 倍和 2 倍，它對圓的作用顯而易見。
- **行列式量度面積。**E 的面積是 C 的面積的 $|\det T|$ 倍。
- **線性映射保持相切關係。**把圓的切線加以變換，幾乎不用計算便得到橢圓的切線。

背後的數學

譜定理

每個實對稱矩陣都有一整組互相垂直的特徵向量，而且特徵值都是實數。這就是譜定理（spectral theorem），是大學第一門線性代數（linear algebra）課程的核心結果之一。它告訴我們，每個對稱的線性映射，在合適的垂直坐標下，都只是沿各條軸的拉伸。換個說法，每個像 $8X^2 + 12XY + 17Y^2$ 這樣的二次型（quadratic form），都可以經旋轉化成 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ 的形式，所以每條有心圓錐曲線（central conic）都是軸互相垂直的橢圓或雙曲線（主軸定理，principal axis theorem）。這個想法可追溯至 1820 年代的柯西（Cauchy），他用它來求二次曲面的主軸，以及固體內應力的主軸。

這一切之所以成立，全靠對稱性。不對稱的矩陣就未必這樣合作：旋轉 90° 會轉動每一個方向，所以它完全沒有實特徵向量；而錯切（shear）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 只有一個特徵向量方向，所以它不是沿任何一對軸的拉伸。

無處不在的特徵向量

以下是特徵向量出現的其中幾個地方。

- **振動。**由質點和彈簧組成的系統會以簡正模態（normal mode）振動，即各部分以同一頻率同步運動的模式。這些模態是某個矩陣的特徵向量，而頻率則來自特徵值（Section 11.2）。
- **數據。**一團數據點分佈得最散的方向，就是其協方差矩陣（covariance matrix）的特徵向量。找出這些方向的方法稱為主成分分析（principal component analysis），是統計學和機器學習的基本工具之一（Section 13.7）。
- **量子力學。**量度一個物理量可能得到的結果，是某個矩陣（或算子）的特徵值，而原子的能級也是特徵值。
- **網上搜尋。**Google 的 PageRank 是這個搜尋引擎背後的原始構想：有一個描述網頁之間連結的巨型矩陣，PageRank 就按它那個特徵值為 1 的特徵向量的各個分量來為網頁排名。

思維技巧

選擇配合變換的坐標

要理解一個線性變換，就找出它不會轉動的方向。在這些坐標下，它會變得簡單。

這與 Section 5.6 中選費馬點（Fermat point）作原點，或 Section 2.8 中以變數代換來簡化映射，是同一個想法：選對了坐標，結構便一目了然。

延伸練習

1 **求特徵值。**證明 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的特徵值是 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ 的根，並驗證題目中的矩陣給出 $\lambda = 2$ 和 4。

2 **互相垂直的特徵向量。**證明若 $\mathbf{M}$ 是對稱矩陣，且 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$、$\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$，其中 $\lambda \neq \mu$，則 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$。（提示：用兩種方法計算 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{Mu}$。）

3 **旋轉。**證明除非 θ 是 π 的倍數，否則旋轉矩陣 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 沒有實特徵向量。它的複特徵值是甚麼？

4 **冪。**利用特徵向量，求 $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。（提示：把 $(1,0)$ 寫成 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$ 的組合。）

延伸閱讀

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 6 章是特徵值及其應用的出色入門。
- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**，*SIAM Review* 48 (2006)。淺白易讀，可免費取閱。
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（影片系列，可在網上免費觀看）。以精美的動畫呈現的，正是本節的幾何概念。

7.3 甚麼才算行列式

題目

STEP II 2019，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

引子

2×2 矩陣（matrix）的行列式（determinant）是 $ad - bc$。這條公式從何而來？它為甚麼如此重要？一個答案是：它是矩陣把面積放大或縮小的倍數。另一個答案，也就是本題要探討的，是行列式基本上是矩陣上唯一能把矩陣乘法變成普通乘法的函數：$\det(\mathbf{MN}) = \det \mathbf{M} \det \mathbf{N}$。

題目給你一個未知函數 f，它具有這一個性質（另加兩個用來排除平凡情況的寬鬆條件），然後要求你一步一步推導出它必然有怎樣的表現。與 Section 6.5 的導子一樣，這是一道單憑性質來確定一個對象的練習。到最後，f 被迫在兩行對調時變號、在奇異矩陣（singular matrix）上取值為零、在錯切（shear）上等於 1：這正是行列式的表現。

動筆之前

想一想 題目中每個特殊矩陣各有甚麼作用？對一般的 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，計算 **JM**、**MJ**、**KM** 和 **PM**。

JM 把 **M** 的兩行對調；**MJ** 把它的兩列對調。**KM** 把第二行乘以 k。**PM** 把第二行加到第一行上。這些就是高斯消元法（Gaussian elimination）中的*初等行運算*（elementary row operations）。由於 f 把乘積變成乘積，只要知道 f 在這些特殊矩陣上的值，就知道 f 對每種行運算有何反應。

逐步解題

階段 1　單位矩陣

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I})$。由於 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$，兩邊相除即得 $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$。 ■

階段 2　對調

$\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$，由此得 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$。由於 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$，故 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$。

現在 $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{JM}$，所以它的值是 $\mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{M}) = -\mathrm{f}(\mathbf{M})$。而 $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \mathbf{JMJ}$（先對調兩行，再對調兩列），所以它的值是 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})$。 ■

階段 3　線性相關的兩行

想一想　先考慮一個兩行相等的矩陣 $\mathbf{B}$。$\mathbf{JB}$ 是甚麼？這對 $\mathrm{f}(\mathbf{B})$ 說明了甚麼？

若 $\mathbf{B}$ 的兩行都是 (a, b)，把它們對調不會帶來任何改變：$\mathbf{JB} = \mathbf{B}$。所以 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = \mathrm{f}(\mathbf{J})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B})$，這就迫使 $\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。

現在若 $\mathbf{A}$ 的兩行是 (a, b) 和 $k(a, b)$，則 $\mathbf{A} = \mathbf{KB}$，其中 $\mathbf{B}$ 的兩行都等於 (a, b)。所以 $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$。 ■（這包括 $k = 0$ 的情況，此時第二行為零。）

階段 4　錯切

停一停，試一試　計算 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK}$。選取 k 使兩者相等。由此可得 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ 是甚麼？

$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，而當 $k \neq 0$ 時，

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

取 $k = 2$，則 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{PK} = \mathbf{P}^2$。對兩邊取 f，並利用 $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$，得

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

所以 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ 或 1。但 $\mathbf{P}$ 是可逆的（invertible），而 $\mathrm{f}(\mathbf{P})\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$。因此 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$。 ■

回顧

- **特殊元素揭示函數的面貌。**把乘法性質應用於 $\mathbf{I}$、$\mathbf{J}$、$\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{P}$，便得出 f 在每個矩陣上的值，以及它對每種行運算的影響。
- **與自身的變換相等的元素。**兩行相等的矩陣經行對調後保持不變，而行對調會改變 f 的符號；所以 f 在該處必為零。
- **共軛（conjugation）保持 f 不變。**$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$，這個事實在代數中一再用到。

背後的數學

每個乘性函數都是行列式的函數

題目在 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ 處便停下，但這個論證是可以完成的。每個可逆矩陣都是初等矩陣（elementary matrices，即行對調、行縮放和錯切）的乘積，而題目已說明 f 在每一種上的表現。由此可知 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$，其中 ϕ 是某個單一實數變量的函數，並滿足 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$。行列式本身就是 $\phi(x) = x$ 的情況，但 $\phi(x) = x^3$ 或 $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$ 同樣可行。換言之，*行列式是矩陣上唯一眞正嶄新的乘性函數*。用羣論（group theory）的語言來說，可逆矩陣所成的羣之中，凡是交換羣（commutative group）所能看見的一切，行列式都已盡數捕捉。

行列式作為面積

從幾何上看，2×2 矩陣把單位正方形變成一個平行四邊形，而 $\det \mathbf{M}$ 就是它的*有向面積*（signed area）：若定向（orientation）保持不變則為正，若定向反轉則為負（圖 7.3.1）。這樣，乘法性質的意義便一目了然：相繼進行兩個變換，面積的比例因子便會相乘。行對調會反轉定向，所以 $\det \mathbf{J} = -1$；錯切把正方形推斜成面積相同的平行四邊形，所以 $\det \mathbf{P} = 1$；而兩行線性相關的矩陣會把正方形壓扁，所以它的行列式為零。題目的每一步都有對應的圖像。



圖 7.3.1　行列式作為有向面積。兩個基向量（basis vectors）的像（琥珀色、梅紫色）張成一個平行四邊形。錯切保持面積不變；對調基向量會反轉定向；線性相關的兩行（或兩列）把正方形壓縮到一條直線上。相繼進行兩個變換，有向面積便會相乘，這正是性質 $\mathrm{f}(\mathbf{M}\mathbf{N}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$。

高維的行列式

對於 $n \times n$ 矩陣，行列式是有向體積的比例因子，並由三個性質所刻劃：它對每一行都是線性的，兩行對調時它會變號，而且它在單位矩陣上等於 1。單憑這三點，你就能推導出熟悉的展開公式，而高斯消元法則提供了一個高效的計算方法。行列式出現在多重積分的換元公式（雅可比行列式，Jacobian）之中，出現在逆矩陣的公式之中，並且如我們在 Section 5.4 所見，也出現在多項式的判別式（discriminant）之中。

思維技巧

> **用特殊輸入探測未知函數**
>
> 當一個函數只能透過某個性質來認識時，把這個性質應用於你能想到的最簡單的特殊輸入，看看它會迫使甚麼結果成立。
>
> 在這裏，單位矩陣、一個對調、一個縮放和一個錯切，已足以確定幾乎一切。選取那些等於自身的平方、逆或共軛的輸入，尤其有效。

延伸練習

1. **其他例子。**證明 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$ 滿足題目的所有條件，並證明 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$ 滿足乘法性質，但不滿足 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$。

2. **列運算。**證明對於任何第二列是第一列的倍數的矩陣，f 的值同樣為零。

3. **縮放。**設 $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$。證明 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$，並證明 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$。

4. **歸結為行列式。**較難 證明每個可逆的 2×2 矩陣都可以寫成形如 $\mathbf{J}$、$\mathbf{K}_k$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩陣的乘積。由此推導出 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$ 只取決於 $\det \mathbf{M}$。

延伸閱讀

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer；網上免費閱覽）。從行列式的性質出發來定義行列式，與本題的精神一脈相承。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 5 章從三條規則出發建立行列式的理論。

- **3Blue1Brown,「The determinant」**（影片，網上免費觀看）。以精美的動畫呈現行列式的面積詮釋。

7.4 回到起點的矩陣

題目

STEP II 2020，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip`

引子

有些變換（transformation）只要重複足夠多次，就會令一切回到原位。旋轉 90° 要四步，反射則只要兩步。哪些 2×2 矩陣（matrix）具有這種性質，即對某個 n 有 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$？又怎樣判斷？

這道題令人意外之處，在於只需兩個數就足以判定：跡（trace）和行列式（determinant）。你不必知道那四個元素，只需知道 $a + d$ 和 $ad - bc$。而且答案對現實世界有一個驚人的推論：它解釋了為甚麼晶體可以有 2 重、3 重、4 重和 6 重對稱，卻永遠沒有 5 重對稱。這條晶體學「定律」屹立了兩個世紀，直至 1982 年的一項發現才被打破，而該發現更贏得了諾貝爾獎。

動筆之前

想一想 每個 2×2 矩陣都滿足 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$（這是凱萊—哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）；把它乘開來驗證一下）。這對處理有關 $\mathbf{M}^2$ 的問題有甚麼幫助？

它把 $\mathbf{M}^2$ 用 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{I}$ 表示出來：$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，其中 $t = \operatorname{tr}\mathbf{M}$，$d = \det\mathbf{M}$。於是，關於 $\mathbf{M}^2$ 的條件就變成一個把 $\mathbf{M}$、t 和 d 聯繫起來的條件。這就是整道題的關鍵。

逐步解題

階段 1　平方的跡

$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$，所以 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = a^2 + 2bc + d^2 = (a+d)^2 - 2(ad-bc)$。 ■

階段 2　$\pm\mathbf{I}$ 的平方根

> **想一想**　假設 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$。把它代入 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$。若 $t \neq 0$，這說明 $\mathbf{M}$ 是怎樣的矩陣？

若 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$，則 $\mathbf{I} = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，所以 $t\mathbf{M} = (1+d)\mathbf{I}$。若 $t \neq 0$，則 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{I}$ 的倍數，設為 $c\mathbf{I}$，而 $c^2 = 1$，所以 $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$，但這已被排除。因此 $t = 0$，於是 $(1+d)\mathbf{I} = \mathbf{0}$，所以 $d = -1$。

反過來，若 $t = 0$ 且 $d = -1$，則 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I} = \mathbf{I}$，而且 $\mathbf{M} \neq \pm\mathbf{I}$，因為 $\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I}) = \pm 2 \neq 0$。 ■

至於 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$：代入後得 $t\mathbf{M} = (d-1)\mathbf{I}$。若 $t \neq 0$，則 $\mathbf{M} = c\mathbf{I}$，其中 $c^2 = -1$，這對實數 c 是不可能的。所以 $t = 0$ 且 $d = 1$。反過來，由 $t = 0$ 和 $d = 1$ 可得 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$。 ■

階段 3　四次方根

> **停一停，試一試**　設 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$，則 $\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$ 即是 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$。根據第 (ii) 部分，要麼 $\mathbf{N} = \pm\mathbf{I}$，要麼 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = 0$ 且 $\det\mathbf{N} = -1$。為甚麼第二種情況不可能發生？

$\det\mathbf{N} = \det(\mathbf{M}^2) = (\det\mathbf{M})^2 \geq 0$，所以 $\det\mathbf{N} \neq -1$。因此 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$。逆命題顯然成立。 ■

至於 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$：把第 (ii) 部分應用於 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$，可知它成立當且僅當 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = 0$ 且 $\det(\mathbf{M}^2) = 1$，即 $t^2 - 2d = 0$ 且 $d^2 = 1$。由於 $t^2 = 2d \geq 0$，必須有 $d = 1$，於是 $t^2 = 2$。所以

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det\mathbf{M} = 1 \text{ 且 } \operatorname{tr}\mathbf{M} = \pm\sqrt{2}. \qquad \blacksquare$$

階段 4　一個不是旋轉的 I 的八次方根

任何滿足 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 的矩陣都有 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$。旋轉 45° 的矩陣的跡是 $\sqrt{2}$，行列式是 1；我們想找另一個跡和行列式都相同、但不是旋轉的矩陣。取

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathbf{M} = \sqrt{2}, \quad \det\mathbf{M} = 1.$$

根據第 3 步，$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$，所以 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$。但 $\mathbf{M}$ 既不是旋轉也不是反射，因為旋轉和反射都保持長度不變，而 $\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ 的長度是 $\sqrt{3} \neq 1$。 ■

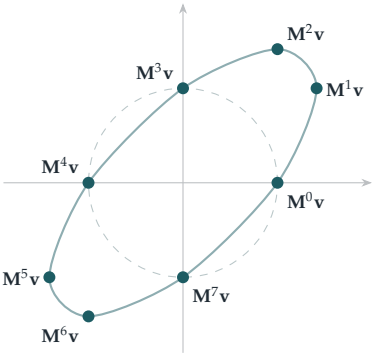


圖 7.4.1 $\mathbf{v} = (1,0)$ 在 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ 作用下的軌道（orbit）。八步之後它回到起點。這些點並不在同一個圓（虛線）上，所以 $\mathbf{M}$ 不是旋轉，但它們確實位於一個橢圓上：$\mathbf{M}$ 是在斜坐標下看到的 45° 旋轉。

回顧

- **凱萊－哈密頓定理把冪化為線性組合（linear combination）。**2×2 矩陣的每一個冪都是 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{I}$ 的組合，其係數只取決於跡和行列式。
- **平方的行列式是非負的。**這個簡單的事實在第 (iii) 部分排除了一整種情況。
- **跡和行列式是不變量（invariant）。**兩個跡和行列式都相同的矩陣（且都不是 $\mathbf{I}$ 的倍數），不論外表是否相似，取冪時的表現都一樣。

背後的數學

相似矩陣

為甚麼說第 4 步的 $\mathbf{M}$ 是「偽裝了的旋轉」？若存在可逆（invertible）矩陣 $\mathbf{S}$ 使得 $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$，則稱兩個矩陣 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{R}$ *相似*（similar）：它們在不同的坐標下表示同一個變換。相似矩陣有相同的跡和行列式，而且（對於不是 $\mathbf{I}$ 的倍數的 2×2 矩陣）逆命題也成立。所以任何跡為 $\sqrt{2}$、行列式為 1 的實矩陣都與 45° 的旋轉相似，而在 $\mathbf{S}$ 所給出的斜坐標下，它就只是在旋轉（圖 7.4.1）。一般而言，滿足 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ 的 2×2 實矩陣必定與某個旋轉或反射相似。

為甚麼晶體沒有五重對稱

晶體是原子有規律、重複的排列。晶體的旋轉對稱把原子所成的格（lattice）映射到它自身，所以在以這個格為基礎的坐標下，它由一個元素全是整數的矩陣給出。因此它的跡是整數。但是旋轉角為 θ 的旋轉，在任何坐標下的跡都是 $2\cos\theta$，而 $2\cos\theta$ 只有在等於 $-2, -1, 0, 1$ 或 2 時才是整數，也就是對應階（order）為 2、3、4 和 6（以及 1）的旋轉。五重對稱需要 $2\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，而這不是整數。這就是*晶體學限制定理*（crystallographic restriction theorem）。1982 年，Dan Shechtman 觀察到一種看似具有五重對稱的合金，起初還遭人嘲笑；後來才知道那是一種*準晶體*（quasicrystal），有序但沒有周期性，就像彭羅斯鋪磚（Penrose tilings）一樣，因此不在該定理的涵蓋範圍之內。他於 2011 年獲頒諾貝爾化學獎。

思維技巧

> **尋找能刻劃本質行為的不變量**
>
> *當題目涉及一個有很多參數的對象時，問問自己：是否只需這些參數的幾個組合，即那些轉換觀點後仍然不變的組合，就已經足夠？*
>
> 在這裏，四個元素化約為兩個不變量，即跡和行列式，因為這個問題（「$\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ 是否成立？」）並不取決於坐標。找到合適的不變量，往往是解決分類問題的關鍵。

延伸練習

1. **三階的旋轉。**試做 STEP II 2021，第 7 題（載於 OCR 提供下載的 2021 年試卷，`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`）。它從一個具有不尋常性質的旋轉矩陣出發，最後得出一個結論，適用於所有立方為單位矩陣（identity matrix）的 2×2 實矩陣。

2. **六階。**求跡和行列式須滿足的條件，使得 $\mathbf{M}^6 = \mathbf{I}$，但 $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{M}^3 \neq \mathbf{I}$。

3. **晶體學限制。**證明：若 $\mathbf{M}$ 的元素全是整數，$\det \mathbf{M} = 1$，且對某個 n 有 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$，則 $\operatorname{tr} \mathbf{M} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$。找出一個階為 6 的整數矩陣。

4. **以凱萊－哈密頓定理求冪。**利用 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，把 $\mathbf{M}^3$ 和 $\mathbf{M}^4$ 表示成 $p\mathbf{M} + q\mathbf{I}$ 的形式，並藉此重新推導 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 的條件。

延伸閱讀

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。內容包括晶體學限制和牆紙圖案的分類。
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry***（Cambridge University Press）。準晶體與非周期有序結構的數學。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。相似矩陣與凱萊－哈密頓定理。

7.5 三維空間中的旋轉

題目

STEP III 2022，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

引子

在二維空間中，旋轉（rotation）一個點很容易：乘以 $e^{i\theta}$ 便可。到了三維空間，事情就困難得多。沒有一個複數可以讓我們直接相乘，繞不同軸的旋轉不可交換（commute），而要寫出「繞通過 $(1,2,2)$ 的軸旋轉 $37°$」的矩陣，看來更是令人卻步。

本題利用叉積（cross product），為任意的軸和任意的角構造出這個矩陣。所得的結果就是*羅德里格旋轉公式*（Rodrigues' rotation formula），由羅德里格（Olinde Rodrigues）於 1840 年發表。機械人技術、電腦圖像和太空船導航每天都用到它，而它亦揭示了一個優美的事實：與 $\mathbf{n}$ 作叉積，就是「繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 $90°$」，而每一個繞 $\mathbf{n}$ 的旋轉都由它構成，正如 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 是由乘以 i 構成一樣。

動筆之前

想一想 當 $\mathbf{r}$ 垂直於 $\mathbf{n}$ 時，$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 在幾何上是甚麼樣子？當 $\mathbf{r}$ 平行於 $\mathbf{n}$ 時又如何？

若 $\mathbf{r}\parallel\mathbf{n}$，則 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$。若 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$，則 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 的長度與 $\mathbf{r}$ 相同（因為 $|\mathbf{n}|=1$，而夾角是 $90°$），與兩者皆垂直，而且根據右手定則（right-hand rule），它就是 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 逆時針旋轉 $90°$ 的結果（沿 $\mathbf{n}$ 向下看）。因此 f 消去 $\mathbf{r}$ 沿 $\mathbf{n}$ 方向的分量（component），並把垂直的分量旋轉 $90°$。這幅圖像足以解釋整條題目。

逐步解題

階段 1　作兩次叉積

$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n}\times\mathbf{r} = (bz-cy,\ cx-az,\ ay-bx)$。再與 $\mathbf{n}=(a,b,c)$ 作一次叉積，$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ 的 x 分量是

$$b(ay-bx)-c(cx-az) = -x(b^2+c^2)+aby+acz. \qquad \blacksquare$$

由於 $a^2+b^2+c^2=1$，上式等於 $-x(1-a^2)+aby+acz = a(ax+by+cz)-x$，這正是 $(\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 的 x 分量。其餘分量可由對稱性得出，所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$。 $\blacksquare$

> **想一想**　設 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$，其中 $\mathbf{r}_{\parallel}=(\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n}$ 是沿 $\mathbf{n}$ 方向的分量。用這兩部分表示，$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ 是甚麼？

$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{r}_{\parallel}-\mathbf{r} = -\mathbf{r}_{\perp}$。施行 f 兩次，會消去平行的部分，並把垂直的部分繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 $180°$，亦即把它反向（圖 7.5.1）。這就是 $\mathrm{i}^2=-1$ 的類比。

階段 2　旋轉

> **想一想**　計算 $\mathrm{g}(\mathbf{n})$。然後對於 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 的情況計算 $\mathrm{g}(\mathbf{r})$，並利用 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$ 對這樣的 $\mathbf{r}$ 成立這一點。

$\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\times\mathbf{n} = \mathbf{0}$，所以 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$：軸保持不動。若 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$，則 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$，於是

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})-(1-\cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).$$

由於 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 轉過 $90°$ 的結果，長度不變，所以上式就是 $\mathbf{r}$ 繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 θ 的結果，與平面上的 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$ 如出一轍。由於 g 是線性（linear）的，而每個向量都可寫成 $\mathbf{n}$ 的倍數與一個垂直於 $\mathbf{n}$ 的向量之和，所以 g 就是**繞通過原點、方向為 $\mathbf{n}$ 的軸旋轉角 θ 的旋轉**（從 $\mathbf{n}$ 的尖端望去為逆時針方向）。 $\blacksquare$

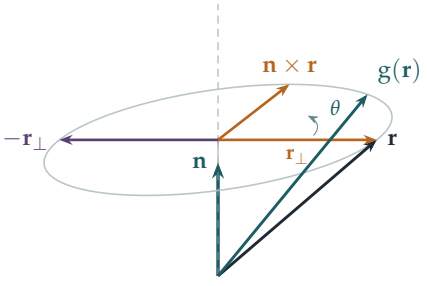


圖 7.5.1　羅德里格公式。向量 $\mathbf{r}$ 分解為沿軸 $\mathbf{n}$ 的部分和與軸垂直的部分 $\mathbf{r}_{\perp}$，後者掃出一個圓。與 $\mathbf{n}$ 作叉積，會把 $\mathbf{r}_{\perp}$ 轉過 $90°$（琥珀色）；作兩次叉積則得 $-\mathbf{r}_{\perp}$（紫紅色）。旋轉後的向量 $\mathrm{g}(\mathbf{r})$ 是 $\mathbf{r}_{\parallel}+\cos\theta\,\mathbf{r}_{\perp}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$。

階段 3 反射

> **停一停，試一試** 利用第 (i) 部分化簡 $\mathrm{h}(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{s}))$。它對沿 $\mathbf{n}$ 方向的向量有甚麼作用？對垂直於 $\mathbf{n}$ 的向量又有甚麼作用？

$\mathrm{h}(\mathbf{s}) = -\mathbf{s} - 2\big((\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n} - \mathbf{s}\big) = \mathbf{s} - 2(\mathbf{n}.\mathbf{s})\mathbf{n}$。垂直於 $\mathbf{n}$ 的向量保持不變，而 $\mathrm{h}(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$。所以 h 是**對通過原點且垂直於 n 的平面的反射（reflection）**。 ■

回顧

- **分解為平行和垂直的部分。**一旦把 $\mathbf{r}$ 分解為沿 $\mathbf{n}$ 方向和與之垂直的分量，每一步都變得清晰。
- **線性減省工夫。**要辨認一個線性映射（linear map），只需知道它對幾個精心挑選的向量有甚麼作用便足夠。
- **複數的類比。**在垂直於 $\mathbf{n}$ 的向量上，f 的表現就像乘以 i：$\mathrm{f}^2 = -1$，而 $\mathrm{g} = \cos\theta + \sin\theta\,\mathrm{f}$。

背後的數學

歐拉旋轉定理

三維空間中每一個固定原點的旋轉，都是繞某條通過原點的軸的旋轉。歐拉（Euler）於 1775 年證明了這一點。用矩陣的語言來說，每個 3×3 旋轉矩陣都有一個特徵值（eigenvalue）為 1 的特徵向量（eigenvector），也就是旋轉軸。羅德里格公式給出其逆命題：對每一條軸 $\mathbf{n}$ 和每一個角 θ，旋轉矩陣是

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 的矩陣。由於 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$，指數級數（exponential series）$e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$ 恰好化簡成這條公式，它就是 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 的三維版本。旋轉與「無窮小旋轉」$\mathbf{K}$ 的指數之間的這種聯繫，正是李羣（Lie groups）理論的起點。

旋轉不可交換

把一本書平放，先繞垂直軸旋轉 90°，再繞水平軸旋轉 90°；然後從頭再來，以相反的次序做這兩個旋轉。書最終的位置並不相同。三維空間中旋轉的複合（composition）不符合交換律，與二維的情況不同。這正是 Section 6.7 的四元數（quaternion）有用的原因之一：繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 θ 對應於四元數 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$，而複合旋轉就是把四元數相乘，不可交換性已包含在其中。羅德里格本人在 1840 年的論文中，已找到旋轉的複合公式，比哈密頓（Hamilton）發明四元數還早三年。

思維技巧

> **分解為不變的部分**
>
> 要理解一個變換，可把空間分成變換處理得簡單的幾塊：在這裏，就是軸（保持不動）和與軸垂直的平面（被旋轉）。
>
> 這與 Section 7.2 中特徵向量的想法相同：找出變換所保持的子空間（subspace），然後在每一塊上分別研究它。

延伸練習

1. **平面上的旋轉。**試做 STEP III 2017，第 2 題（`step.maths.org/questions/17-s3-q2`）。該題利用複數，證明平面上的兩個旋轉複合起來仍是一個旋轉，只有一種例外。找出這個例外，以及此時複合的結果是甚麼。

2. **一個具體的旋轉。**求繞方向為 $(1,1,1)$ 的軸旋轉 120° 的矩陣。證明它把各坐標軸循環置換。

3. **K 的冪。**證明 $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ 及 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$，並由指數級數推導出羅德里格公式。

4. **兩次反射構成一個旋轉。**證明先後對兩個通過原點、互成 α 角的平面作反射，結果是繞兩平面的交線旋轉 2α。

延伸閱讀

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups***（Dover）。關於三維旋轉的權威論著，當中包括羅德里格的貢獻。
- **Simon Altmann, "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal"**, *Mathematics Maga-*

zine 62 (1989)。一篇簡短而生動的歷史敘述。

- **John Stillwell, *Naive Lie Theory***（Springer）。為大學本科生而寫的旋轉、四元數與李羣入門。

7.6 雙曲旋轉與相對論

題目

STEP III 1991，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/91-s3-q6`

引子

旋轉矩陣（rotation matrix）$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$ 把點沿着圓 $x^2 + y^2 = 1$ 移動，而先旋轉 u 再旋轉 w，就等於旋轉 $u + w$。把 cos 和 sin 換成 cosh 和 sinh，再調整一個正負號，便得到本題的矩陣。它改為把點沿着雙曲線（hyperbola）$x^2 - y^2 = 1$ 移動，而且它的「角」同樣可以相加。這就是*雙曲旋轉*（hyperbolic rotation）。

這並非只是一件趣聞。若以 x 代表時間、y 代表距離（採用光速為 1 的單位），這個矩陣就是*勞侖茲推進*（Lorentz boost）：它是愛因斯坦（Einstein）狹義相對論（special relativity）中發現的變換，聯繫着兩個以恆定相對速度運動的觀察者各自的量度結果。「雙曲角」u 稱為*快度*（rapidity），而快度可以相加這一事實，正好解釋了我們在 Section 3.8 遇過的那條奇怪的速度相加定律。

動筆之前

想一想 $\cosh u$ 和 $\sinh u$ 滿足哪一條恆等式，與 $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ 相對應？$\cosh(u+v)$ 和 $\sinh(u+v)$ 的加法公式又是甚麼？

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$，以及

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v,$$
$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v.$$

你可以由定義 $\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ 和 $\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ 驗證這些公式。點

$(\cosh v, \sinh v)$ 位於雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上，正如 $(\cos v, \sin v)$ 位於圓上一樣。

逐步解題

階段 1　雙曲線保持不變

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (x\cosh u + y\sinh u)^2 - (x\sinh u + y\cosh u)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(\cosh^2 u - \sinh^2 u) = x^2 - y^2, \end{aligned}$$

因為交叉項 $2xy\cosh u \sinh u$ 互相抵消。所以 T 保持 $x^2 - y^2$ 不變，特別是把雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 映射到它自身。 ■

> **想一想**　哪些通過原點的直線會被映射到自身？（試找特徵向量（eigenvector）。）

$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (\cosh u + \sinh u)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = e^u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，而 $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = e^{-u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。所以直線 $y = x$ 和 $y = -x$ 各自被映射到自身：一條被拉長 e^u 倍，另一條被縮短至 e^{-u} 倍。這兩條直線正是雙曲線的漸近線（asymptote）。 ■

階段 2　雙曲角相加

斜率（gradient）為 $\tanh v$ 的直線，其方向向量為 $(\cosh v, \sinh v)$。它的像的方向為

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\ \sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh u\cosh v + \sinh u\sinh v\\ \sinh u\cosh v + \cosh u\sinh v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\ \sinh(u+v)\end{pmatrix},$$

其斜率為 $\tanh(u+v)$。線性映射（linear map）把平行線變成平行線，所以無論直線是否通過原點，這個結論都成立。因此 $v' = v + u$。 ■

階段 3　夾角何時保持不變？

> **想一想**　斜率分別為 m_1、m_2 的兩條直線，其夾角 ψ 滿足 $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$。當 $m_i = \tanh v_i$ 時，化簡這個式子。（提示：把所有項通分，以 $\cosh v_1 \cosh v_2$ 為分母。）

利用 $\tanh v_1 - \tanh v_2 = \dfrac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$ 和 $1 + \tanh v_1 \tanh v_2 = \dfrac{\cosh(v_1 + v_2)}{\cosh v_1 \cosh v_2}$，得

$$\tan\psi = \left|\frac{\sinh(v_1 - v_2)}{\cosh(v_1 + v_2)}\right|.$$

變換之後，$v_1 - v_2$ 不變，而 $v_1 + v_2$ 則變成 $v_1 + v_2 + 2u$。

> **停一停，試一試** 甚麼時候 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$？

假設兩條直線不平行（$v_1 \neq v_2$），則兩個夾角相等，當且僅當 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$。由於 cosh 是偶函數，並且在 $[0, \infty)$ 上嚴格遞增，這表示 $v_1 + v_2 = \pm(v_1 + v_2 + 2u)$。取正號得 $u = 0$，而這已被排除，所以

$$v_1 + v_2 = -u. \qquad \blacksquare$$

階段 4 圖像

當 $v_1 + v_2 = -u$ 時，變換後的角為 $v_1' = v_1 + u = -v_2$ 和 $v_2' = v_2 + u = -v_1$。所以 ℓ_1 的像的斜率為 $-\tanh v_2$：它是 ℓ_2 對 x 軸的反射，而 ℓ_2 的像則是 ℓ_1 的反射。對於通過原點的直線，這個變換把兩條直線對調並加以反射，這就解釋了為何它們之間的夾角不變（圖 7.6.1）。

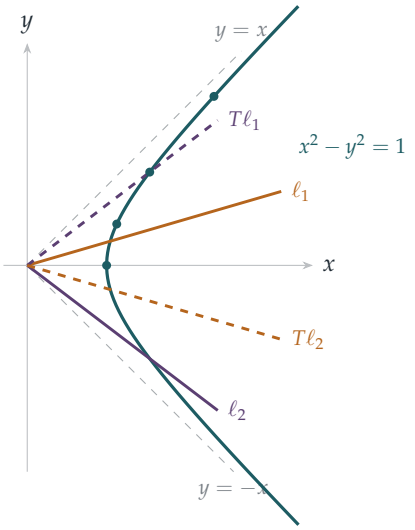


圖 7.6.1 把 $u = 0.7$ 的雙曲旋轉施於通過原點的直線 ℓ_1、ℓ_2，其中 $v_1 = 0.3$，$v_2 = -1.0$，因此 $v_1 + v_2 = -u$。ℓ_1 的像（紫紅色虛線）是 ℓ_2 的鏡像，而 ℓ_2 的像（琥珀色虛線）是 ℓ_1 的鏡像，所以兩線之間的夾角保持不變。雙曲線上的藍綠色點按雙曲角等距分佈（$v = 0, 0.5, 1, 1.5$）；T 把每一點沿曲線再移前 0.7，到達新的位置。

回顧

- **不變的二次型（quadratic form）。**T 保持 $x^2 - y^2$ 不變，正如旋轉保持 $x^2 + y^2$ 不變。

- **特徵向量就是漸近線。**保持不變的直線是 $y = \pm x$，分別按 $e^{\pm u}$ 的倍數拉長和縮短。
- **雙曲角可以相加。**以 $\tanh v$ 把方向參數化之後，T 的作用便化為簡單的加法 $v \mapsto v + u$。

背後的數學

狹義相對論

在愛因斯坦的狹義相對論（1905 年）中，以恆定相對速度運動的不同觀察者，對時間和距離的量度並不一致，但他們對 $t^2 - x^2$ 這個量（取光速 $c = 1$）卻意見一致，這個量稱為時空間隔（spacetime interval）。保持它不變的變換就是勞侖茲變換（Lorentz transformation），而在一個空間維度的情況下，它們恰好就是本題的矩陣，其中 x 為時間、y 為距離。一個以速度 $v = \tanh u$ 運動的觀察者，所用的坐標與我們的坐標就是由這個矩陣聯繫起來，其中 $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$，即時間膨脹（time dilation）中著名的因子 γ。閔可夫斯基（Hermann Minkowski）在 1908 年看出，這使時空成為一種四維幾何，其「距離」之中帶有一個負號：「從今以後，空間本身和時間本身，都注定要消退成為影子。」

題目的物理意義

- **不變直線** $y = \pm x$ 是光線的路徑。它們對每個觀察者都相同：光速對所有人都一樣，這正是相對論的奠基原理。
- **雙曲線** $x^2 - y^2 = 1$ 是與原點相距一個單位「原時」（proper time）的所有事件所成的集合，而原時是由以各種可能的恆定速度運動的觀察者所量度的。
- **快度相加。**通過原點而斜率為 $\tanh v$ 的直線，是一個以速度 $\tanh v$ 運動的物體的路徑。快度為 u 的推進把它的速度變為 $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$，這就是 Section 3.8 中愛因斯坦的速度相加公式。速度不能直接相加，快度卻可以。

而在 Section 5.8 中，我們見過同一條加法公式，它是龐加萊圓盤（Poincaré disc）中的距離法則：相對論中所有可能的速度所成的集合，以快度來量度，就是一個雙曲空間（hyperbolic space）。

思維技巧

找出合適的參數化

選用一個參數來描述你的對象，使變換在這個參數之下變得簡單。

若以斜率描述方向，T 的作用是一條繁複的公式；若以 v 描述方向，其中斜率為 $\tanh v$，它就只是加上 u。同樣的想法，曾令旋轉在使用角度時變得簡單，也曾在 Section 2.8 中令映射 $x \mapsto x^2 - 2$ 變得簡單。

延伸練習

1 **推進的複合。**證明 $T(u)T(w) = T(u+w)$，其中 $T(u)$ 是題目中的矩陣。$T(u)^{-1}$ 是甚麼？

2 **時間膨脹。**一艘太空船以光速的 0.8 倍航行。求它的快度 u 和 $\cosh u$。若地球上過了 10 年，船上過了多少時間？（利用 $t_{\text{船}} = t_{\text{地球}} / \cosh u$。）

3 **雙曲面積。**證明由雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$、x 軸，以及由原點至 $(\cosh v, \sinh v)$ 的線段所圍成的面積為 $\frac{v}{2}$，正如圓的相應面積為 $\frac{\theta}{2}$。為甚麼 T 必定保持這類面積不變？

4 **擠壓。**把坐標轉換為 $p = x + y$，$q = x - y$。證明 T 變成 $p \mapsto e^{u}p$，$q \mapsto e^{-u}q$，而雙曲線則變成 $pq = 1$。試在這組坐標下，以幾何方式描述這個變換。

延伸閱讀

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics***（W. H. Freeman）。以快度和時空圖講解狹義相對論，適合具備高級程度（A-level）數學基礎的學生。
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity***（CRC Press）。把相對論看成雙曲三角學，與本節的精神完全一致。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（多種版本）。愛因斯坦親自撰寫的通俗讀物，至今仍然十分易讀。

7.7 永恆不變的量

題目

STEP III 2024，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

引子

物理學中一些最深刻的事實是*守恆定律*（conservation laws）：無論運動多麼複雜，能量、動量和角動量始終保持不變。當一個系統有足夠多的守恆量時，它的運動可以精確地解出；守恆量太少時，運動則可能是混沌的。

這道題展示了一種製造守恆量的絕妙方法。若一個矩陣按照 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 隨時間變化，那麼無論它的元素變化得多麼劇烈，它的跡（trace）和行列式（determinant），以至它的特徵值（eigenvalues），都永遠不變。這樣的一對 $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ 稱為*拉克斯對*（Lax pair），以彼得·拉克斯（Peter Lax）命名。他在 1968 年提出這個想法，用來解釋*孤立子*（solitons）的驚人表現：孤立子是一種孤立波，彼此穿過之後絲毫不變。

動筆之前

想一想 表達式 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 稱為 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{N}$ 的*交換子*（commutator）。它在甚麼時候等於零？根據第 (i) 部分，它的跡是多少？

它等於零，當且僅當 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{N}$ 可交換。而根據第 (i) 部分，它的跡是 $\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) - \mathrm{tr}(\mathbf{NM}) = 0$，恆常如此。這一個事實，就是題目中每一條守恆定律的起點。

逐步解題

階段 1　跡

設 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，則 $\mathbf{MN}$ 的對角線元素是 $ap + br$ 和 $cq + ds$，所以 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds$。把 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{N}$ 的角色對調，得 $pa + qc + rb + sd$，結果相同。顯然 $\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}\mathbf{M} + \operatorname{tr}\mathbf{N}$。 ■

階段 2　行列式的導數

想一想　用積法則求 $\det\mathbf{M} = ad - bc$ 的導數。然後利用 $\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，計算 $\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ 及其跡。

以字母上的一點表示導數，則 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \dot{a}d + a\dot{d} - \dot{b}c - b\dot{c}$。而

$$\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix}$$

的對角線元素是 $\frac{d\dot{a} - b\dot{c}}{\det\mathbf{M}}$ 和 $\frac{-c\dot{b} + a\dot{d}}{\det\mathbf{M}}$。兩者之和是 $\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M}$。 ■

階段 3　三個守恆量

想一想　對 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 取跡。至於行列式，則用第 (ii) 部分：$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})$ 是甚麼？

跡：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}\mathbf{M} = \operatorname{tr}\dot{\mathbf{M}} = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$。

行列式：根據第 (ii) 部分，

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}) = \operatorname{tr}\mathbf{N} - \operatorname{tr}\mathbf{N} = 0,$$

當中用到第 (i) 部分的以下形式：$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{NM})) = \operatorname{tr}((\mathbf{NM})\mathbf{M}^{-1}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$。

平方的跡：$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2) = (\operatorname{tr}\mathbf{M})^2 - 2\det\mathbf{M}$（見 Section 7.4），由於兩項都是常數，所以它也是常數。 ■

階段 4　一個顯式解

停一停，試一試　設 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{E}$，其中 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，計算 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$，並寫出 a、b、c、d 所滿足的微分方程。按以下次序求解：先解 c，然後 a 和 d，最後 b。

$t\mathbf{I}$ 這部分與任何矩陣都可交換，所以 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}=t(\mathbf{ME}-\mathbf{EM})$。現在 $\mathbf{ME}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}$ 而 $\mathbf{EM}=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，所以

$$\dot a=-tc,\qquad \dot b=t(a-d),\qquad \dot c=0,\qquad \dot d=tc.$$

因此 $c=C$ 是常數；於是 $a=A-\frac12Ct^2$ 及 $d=D+\frac12Ct^2$；繼而 $\dot b=t(A-D-Ct^2)$，所以 $b=B+\frac12(A-D)t^2-\frac14Ct^4$。故此

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}A-\frac12Ct^2 & B+\frac12(A-D)t^2-\frac14Ct^4\\ C & D+\frac12Ct^2\end{pmatrix}.\qquad\blacksquare$$

驗算：跡是 $A+D$，而行列式是 $(A-\frac12Ct^2)(D+\frac12Ct^2)-C\big(B+\frac12(A-D)t^2-\frac14Ct^4\big)=AD-BC$，一如所料是常數（圖 7.7.1）。

階段 5 另一條方程

想一想 若 $\dot{\mathbf{M}}=\mathbf{MN}$，則 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$，而根據第 (ii) 部分，$\operatorname{tr}\mathbf{N}$ 就是 $\det\mathbf{M}$ 的對數導數（logarithmic derivative）。$\mathbf{M}$ 的跡能否保持不變，而它的行列式卻在改變？

當然可以。取 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1\end{pmatrix}$，其中 $|t|<1$（此時 $\det\mathbf{M}=1-t^2\neq0$）。它的跡恆等於 2。定義 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}$，使得 $\dot{\mathbf{M}}=\mathbf{MN}$：

$$\mathbf{N}=\frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ -t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{1-t^2}\begin{pmatrix}-t & 1\\ 1 & -t\end{pmatrix},$$

這是一個非奇異（non-singular）矩陣，而且當 $t\neq0$ 時，$\operatorname{tr}\mathbf{N}=\frac{-2t}{1-t^2}\neq0$。所以答案是**否定的**，$\operatorname{tr}\mathbf{N}$ 不一定等於零。$\blacksquare$

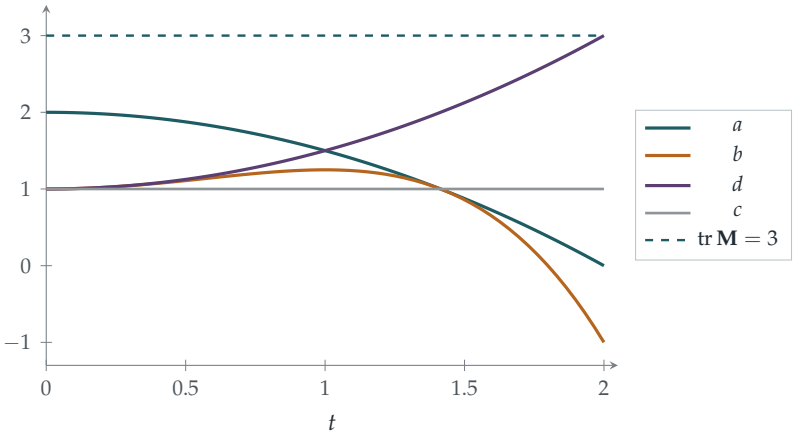


圖 7.7.1　第 4 階段中 $\mathbf{M}(t)$ 的各個元素，其中 $A = 2$、$B = 1$、$C = 1$、$D = 1$。四個元素之中除了 c 以外全都在變，但跡始終是 3，行列式始終是 1。所以特徵值 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 永遠不變：這個流是等譜（isospectral）的。

回顧

- **交換子的跡等於零。**由 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathbf{NM})$ 出發，每一條守恆定律都隨之而來。
- **對數導數。**第 (ii) 部分把行列式的導數化為一個跡，而跡是線性的，容易處理。
- **在顯式解中檢查守恆。**我們確認了 $\mathbf{M}(t)$ 的跡和行列式都是常數，藉此驗算它的公式。

背後的數學

孤立子與拉克斯對

1834 年，蘇格蘭工程師 John Scott Russell 策馬追蹤一個沿愛丁堡附近的聯合運河（Union Canal）前進的孤立波，追了超過一英里，波形始終沒有改變。這類波由科特韋赫－德弗里斯（*Korteweg–de Vries*，簡稱 *KdV*）方程描述。到了 1960 年代，Norman Zabusky 與 Martin Kruskal 的電腦實驗顯示，兩個這樣的「孤立子」可以相撞，然後原封不動地離開，彷彿它們是粒子一樣。要解釋這個現象，需要無窮多個守恆量。彼得．拉克斯在 1968 年證明，KdV 方程可以寫成 $\dot{L} = LP - PL$，其中 L 和 P 是一對微分算子（differential operators）；於是，與這道題完全一樣，L 的特徵值是守恆的，而它們正好提供了那無窮多條守恆定律。擁有拉克斯對的系統稱為可積（integrable）系統，它們屬於少數可以精確求解的非線性系統。

等譜流

由於 $\mathbf{M}$ 的跡和行列式決定了它的特徵多項式（characteristic polynomial）$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$，$\mathbf{M}$ 的特徵值不隨時間改變。流 $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$ 使 $\mathbf{M}$ 在特徵值固定的矩陣所組成的集合之內移動。事實上，解總是具有 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$ 的形式，其中 $\mathbf{S}(t)$ 是某個可逆矩陣：這個矩陣始終與它的初始值相似（similar）。同一個想法貫穿整個物理學：在量子力學中，可觀測量（observable）$\mathbf{A}$ 按 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$ 演化，其中 $\mathbf{H}$ 是能量，所以凡是與能量可交換的量都是守恆的。

雅可比公式

第 (ii) 部分對任何大小的可逆矩陣都成立，稱為雅可比公式（Jacobi's formula）。最穩妥的寫法是不用對數，寫成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$，因為 $\det\mathbf{M}$ 可能是負數；對數形式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ 需要 $\det\mathbf{M} > 0$（一般情況下則用 $\ln|\det\mathbf{M}|$）。由此可得一個推論：若 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$，其中 $\mathbf{A}$ 是常數矩陣，則 $\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$。在微分方程的研究中，這個結果告訴你相空間（phase space）中的體積如何增長或縮小；對於經典力學的方程，這個跡等於零，體積保持不變，這個結果稱為劉維爾定理（Liouville's theorem）。

思維技巧

> **找出不變的東西**
>
> 當某樣東西在演化時，試找出由它構成而又保持不變的量。這些量限制了運動，並往往揭示出它的結構。
>
> 在這裏，跡和行列式之所以守恆，是因為變化率是一個交換子。在力學中，守恆量來自對稱性（諾特定理，Noether's theorem），而找出守恆量往往是解題的第一步。

延伸練習

1. **驗算解。**透過求導，驗證第 4 階段的矩陣 $\mathbf{M}(t)$ 滿足 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$。

2. **相似性。**證明：若 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$，其中 $\mathbf{M}_0$ 是常數矩陣，而 $\mathbf{S}(t)$ 滿足 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$，則 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$。（提示：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$。）

3 **體積增長。**設 $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$。求滿足 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ 的 $\mathbf{N}$，並驗證 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \det \mathbf{M} = \operatorname{tr} \mathbf{N}$。

4 **更高次冪。**直接證明：當 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ 時，對每個正整數 k 都有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$。

延伸閱讀

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction***（Cambridge University Press）。大學本科程度的標準入門書，內容包括拉克斯對。
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons***（Cambridge University Press）。書中講述了 Scott Russell 那個孤立波的故事。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。講解對稱性如何帶來守恆定律。

7.8 四個平方數

題目

STEP III 1994，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/94-s3-q8`

引子

7 不是兩個平方數之和，也不是三個平方數之和，卻是四個平方數之和：$7 = 4 + 1 + 1 + 1$。1770 年，拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）證明了每一個正整數都是四個平方數之和（容許使用 0^2）。這條定理早在 1621 年已由 Bachet 提出猜想，費馬（Fermat）亦聲稱自己證得，但一如以往沒有留下證明；歐拉（Euler）為此鑽研了四十年，始終差一步未能完成。

關鍵的工具由歐拉於 1748 年發現，正正就在這道題目之中：兩個四平方和的積，本身也是一個四平方和。這表示只需對質數（prime number）證明拉格朗日定理，其餘情況靠相乘便可得出。題目利用複矩陣（complex matrix）的行列式（determinant），寥寥數行便推導出這條恆等式（identity），而這些矩陣其實就是 Section 6.7 中的四元數（quaternion），只是換了個面貌。

動筆之前

想一想 回想兩平方的版本：$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2)$ 是兩個平方數之和，因為對複數 $z = a + b\mathrm{i}$、$w = p + q\mathrm{i}$ 有 $|z|^2|w|^2 = |zw|^2$。矩陣可以怎樣把這個結果推廣到四個平方？

想法是找出一種由四個實數構成的「數」，它的「大小的平方」是 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$，而且具有可乘性（multiplicative）。矩陣的行列式正有可乘性：$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$。因此我們要找一個由 a, b, c, d 構成的矩陣，其行列式為 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$，並且這類矩陣相乘後仍然是同一形式。

逐步解題

階段 1　行列式是四個平方數之和

想一想　$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ 的行列式是甚麼？若 $z_1 = a + b\mathrm{i}$ 及 $z_2 = c + d\mathrm{i}$，以 a, b, c, d 表示又是甚麼？

$\det = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* = |z_1|^2 + |z_2|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$。同樣地，取 $z_3 = p + q\mathrm{i}$ 及 $z_4 = r + s\mathrm{i}$，第二個矩陣的行列式為 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$。

階段 2　乘積具有相同形式

相乘得

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -z_4^* & z_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 z_4^* & z_1 z_4 + z_2 z_3^* \\ -z_2^* z_3 - z_1^* z_4^* & -z_2^* z_4 + z_1^* z_3^* \end{pmatrix}.$$

設 $w_1 = z_1 z_3 - z_2 z_4^*$ 及 $w_2 = z_1 z_4 + z_2 z_3^*$，則下面一行是 $(-w_2^*, w_1^*)$，所以乘積是 $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2^* & w_1^* \end{pmatrix}$，形式相同。它的行列式是 $|w_1|^2 + |w_2|^2$，而由於行列式可以相乘，

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

階段 3　讀出四個平方

停一停，試一試　把 $w_1 = (a + b\mathrm{i})(p + q\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})$ 及 $w_2 = (a + b\mathrm{i})(r + s\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})(p - q\mathrm{i})$ 展開，寫成實部（real part）和虛部（imaginary part）。

$$w_1 = (ap - bq - cr - ds) + \mathrm{i}(aq + bp + cs - dr),$$
$$w_2 = (ar - bs + cp + dq) + \mathrm{i}(as + br - cq + dp).$$

所以

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

每一個對 a, b, c, d 及對 p, q, r, s 都是線性（linear）的，並且 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$。 ■

例如，$7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ 而 $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$。取 $(a, b, c, d) = (2, 1, 1, 1)$ 及 $(p, q, r, s) = (1, 1, 1, 0)$，由公式得 $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (0, 2, 4, 1)$，而果然 $0^2 + 2^2 + 4^2 + 1^2 = 21 = 7 \times 3$。

回顧

- **可乘性是關鍵。**這條恆等式來自 $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$，正如兩平方恆等式來自 $|zw| = |z||w|$ 一樣。
- **對乘法封閉（closure）。**$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ 這個特殊形式在相乘之下保持不變，結果才會是另一個四平方和。
- **細心記賬十分重要。**最後一步雖屬例行運算，卻容易出錯；正負號和共軛（conjugate）都必須小心處理。

背後的數學

拉格朗日四平方和定理

拉格朗日的證明大致如下。根據歐拉恆等式，只需證明每個質數 p 都是四個平方數之和。先用一個計數論證，證明存在某個倍數 mp（其中 $m < p$）是四個平方數之和。然後用一個巧妙的「遞降法」(descent) 證明：若 mp 是四個平方數之和而 $1 < m < p$，則對某個更小的 m'，$m'p$ 也是四個平方數之和；如此重複下去，便會到達 $m = 1$。(可與 Section 1.5 中費馬的遞降法比較。) 1834 年，雅可比（Jacobi）更進一步，求出把 n 寫成四個平方數之和的方法的確切數目：n 的所有非 4 的倍數的因數之和的 8 倍。例如，1 有 8 種寫法（± 1 可放在四個位置中的任何一個）。

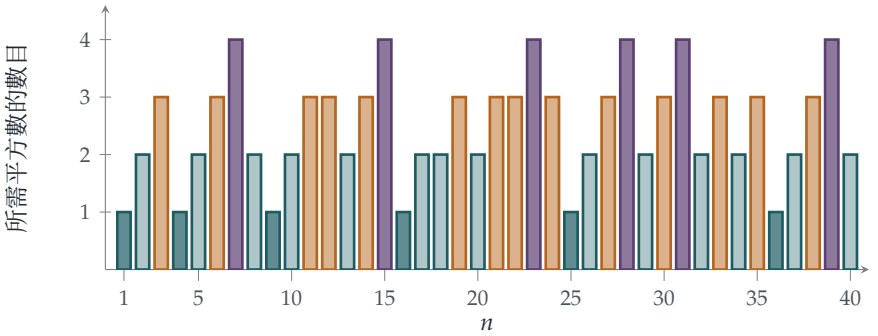


圖 7.8.1　由 1 至 40 的每個 n 最少需要多少個平方數才能組成。根據拉格朗日定理，每個數最多只需四個。需要四個的數（紫紅色）是 $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$：根據勒讓德（Legendre）和高斯（Gauss）的一條定理，它們正好是形如 $4^k(8m+7)$ 的數。

二、三、四

不同維數之間的規律相當微妙。兩平方和來自複數，而一個數是兩個平方數之和，當且僅當它的質因數中形如 $4k+3$ 的都以偶數次冪出現（Section 1.6）。四平方和來自四元數，而每個數都是四平方和。但三平方和卻完全沒有乘法恆等式（並不存在一個「大小」具可乘性的三維數系；這正是哈密頓（Hamilton）研究三元組時失敗的原因，見 Section 6.7），相應的定理也較難：勒讓德和高斯證明了，除非 $n = 4^k(8m+7)$，否則 n 是三個平方數之和（圖 7.8.1）。四以上，八維的八元數（octonion）給出一條八平方恆等式，由 Degen 和 Graves 發現；而胡爾維茲（Hurwitz）於 1898 年證明，這類恆等式只在 1、2、4 和 8 個平方的情況下存在。

華林問題

拉格朗日定理是華林（Edward Waring）於 1770 年提出的一個問題的第一個情況：對每個 k，是否存在一個數 $g(k)$，使得每個正整數都是最多 $g(k)$ 個 k 次冪之和？希爾伯特（David Hilbert）於 1909 年證明了確實存在。現在我們知道 $g(2) = 4$、$g(3) = 9$（例如 $23 = 2\cdot 2^3 + 7\cdot 1^3$ 需要九個立方數）以及 $g(4) = 19$。

思維技巧

尋找具可乘性的結構

要證明某個性質在乘法之下得以保持，可尋找一個代數結構（複數、四元數、矩陣），使該性質就是其中某個對象的「大小」，而大小具有可乘性。

一旦找到這樣的結構，乘積恆等式便唾手可得，而一個關於所有數的問題，也就化為一個關於質數的問題。

延伸練習

1. **一個實例。**利用 $L_1, \dots, L_4$ 的公式，取 $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$，把 $49 = 7\times 7$ 寫成四個平方數之和，並驗算你的答案。它與顯而易見的 $49 = 7^2+0^2+0^2+0^2$ 是否相同？

2. **四平方中的兩平方。**證明若 $c = d = r = s = 0$，這條恆等式便簡化為 Section 1.6 的兩平方恆等式。

3 **需要四個平方的數。**考慮平方數模 8 的餘數，證明形如 $8m+7$ 的數都不是三個平方數之和。

4 **雅可比公式。**數一數把 2 表示成四個平方數之和的方法有多少種（次序和正負號不同均視為不同），並驗證答案是 $8\times(1+2)=24$。

延伸閱讀

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。第 V 章證明了拉格朗日四平方和定理。
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。講述四元數的算術，包括利用四元數整數證明四平方和定理。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，「Representing numbers as sums of two squares」（把數表示成兩個平方數之和）一章。與本節相配的兩平方版本。

7.9 只有五種柏拉圖立體

題目

STEP III 1999，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/99-s3-q4`

引子

正多邊形（regular polygon）有無窮多種：三角形、正方形、五邊形，如此類推，任何邊數都有。你或會以為正多面體（regular polyhedron）也有無窮多種。其實恰好只有五種：正四面體（tetrahedron）、正方體（cube）、正八面體（octahedron）、正十二面體（dodecahedron）和正二十面體（icosahedron）。柏拉圖（Plato）把其中四種與四大元素（火、土、氣、水）對應，第五種則對應宇宙；歐幾里得（Euclid）的《幾何原本》（*Elements*）是有史以來影響最深遠的數學著作，全書最後就是證明再沒有其他正多面體；開普勒（Kepler）更用它們建構了一個太陽系模型。

本題只用寥寥數行就證明了這個分類，所依據的只是歐拉（Euler）在 1750 年發現的一條非凡公式：對任何凸多面體（convex polyhedron），$V - E + F = 2$。一條關於點算的公式，化成了一個關於形狀的定理，而 2 這個數原來正是球面的「指紋」。

動筆之前

想一想 用正方體驗證歐拉公式：它有多少個頂點（vertex）、多少條棱（edge）、多少個面（face）？以正方形為底的棱錐體（pyramid）又如何？

正方體有 $V = 8$，$E = 12$，$F = 6$，而 $8 - 12 + 6 = 2$。以正方形為底的棱錐體有 5 個頂點、8 條棱和 5 個面，而 $5 - 8 + 5 = 2$。任何沒有洞的多面體，不論多麼不規則，這條公式都成立。

想一想　在正多面體中，每個面有 m 條棱，而每條棱是兩個面的公共邊。由此可得 E 與 F 之間的甚麼方程？同樣地，E 與 V 之間又有甚麼方程？

用兩種方法點算棱與面的關聯：F 個面各有 m 條棱，而每條棱被數了兩次（它所屬的兩個面各數一次），所以 $mF = 2E$。同樣地，每個頂點連着 n 條棱，而每條棱有兩個端點，所以 $nV = 2E$。這種「用兩種方法點算同一樣東西」的技巧稱為**雙重計數**（double counting）。

逐步解題

階段 1　F 的公式

由 $mF = 2E$ 和 $nV = 2E$，可得 $E = \frac{mF}{2}$ 和 $V = \frac{mF}{n}$。代入歐拉公式，

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2 \quad\Longrightarrow\quad F\,\frac{2m - mn + 2n}{2n} = 2 \quad\Longrightarrow\quad F = \frac{4n}{2m + 2n - mn}.$$

而 $4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn = h$。所以 $F = \frac{4n}{h}$。 ■

階段 2　m 和 n 可以取哪些值？

想一想　m（每個面的邊數）和 n（每個頂點處的面數）最小可以是多少？又既然 $F > 0$，h 必須是正還是負？

多邊形最少要有 3 條邊，所以 $m \geq 3$；立體的每個頂點處最少要有 3 個面相交，所以 $n \geq 3$。由於 $F > 0$，我們需要 $h > 0$，即 $(n-2)(m-2) < 4$。兩個因子都至少是 1，所以 $(m-2, n-2)$ 只可能是 $(1,1)$、$(1,2)$、$(2,1)$、$(1,3)$ 和 $(3,1)$。

停一停，試一試　就這五種可能逐一計算 h，然後求 F，再求 $E = \frac{mF}{2}$ 和 $V = \frac{mF}{n}$。指出每種情況是哪一個立體。

m	n	h	F	E	V	立體
3	3	3	4	6	4	正四面體
3	4	2	8	12	6	正八面體
4	3	2	6	12	8	正方體
3	5	1	20	30	12	正二十面體
5	3	1	12	30	20	正十二面體

可能的情況只有這些，所以正多面體最多只有五種；而這五種全部存在（歐幾里得說明

了如何逐一構作）。 ■

回顧

- **雙重計數。**用兩種方法點算棱與面、棱與頂點的關聯，得出 $mF = 2E$ 和 $nV = 2E$。
- **由正值得出不等式。**$F > 0$ 這個簡單的要求，把無窮多個候選者篩剩五個。
- **存在性要另行處理。**這個論證只說明最多有五種；每一種是否真的存在，還須實際構作出來才能確定。

背後的數學

歐拉公式與拓撲學

歐拉在 1750 年提出 $V - E + F = 2$，但他的證明有漏洞；這條公式其後經歷了一段引人入勝的歷史，當中有一次又一次的嘗試證明、反例（counterexample）和修補。一個「畫框」形的多面體，中間穿了一個正方形的洞，有 $V - E + F = 0$；由兩個正方體在一個頂點處相連而成的多面體，則有 $V - E + F = 3$。拉卡托斯（Imre Lakatos）把這段歷史寫成一本名著 *Proofs and Refutations*（《證明與反駁》），探討數學概念如何在反例的磨礪下變得精確。最終的答案是：$V - E + F$ 只取決於曲面在拓撲學（topology）那種寬鬆意義下的形狀：凡是可以變形成球面的曲面，它等於 2；環面（torus，即冬甩形）是 0；有 g 個洞的曲面則是 $2 - 2g$。這個數稱為**歐拉示性數**（Euler characteristic），是拓撲學最早的概念之一；拓撲學研究的，就是經拉伸和彎曲後仍然不變的性質。

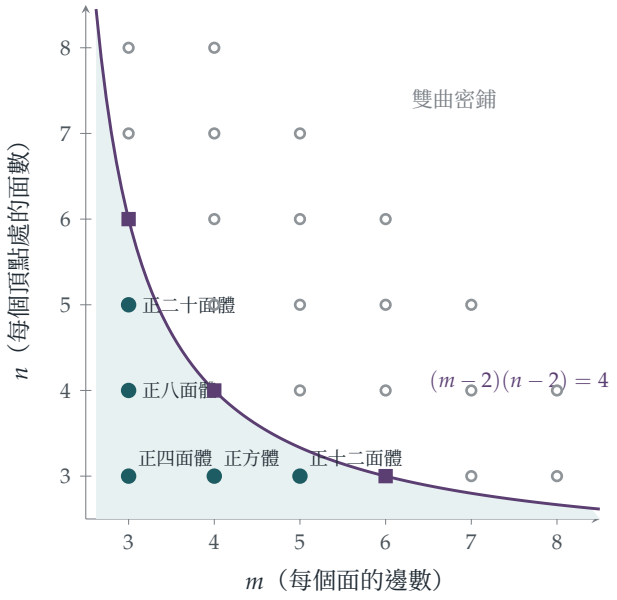


圖 7.9.1　滿足 $m, n \geq 3$ 的所有可能數對 (m, n)。在曲線 $(m-2)(n-2) = 4$ 下方（陰影部分）的是五種柏拉圖立體（藍綠色）。在曲線上的是平面的三種密鋪（紫紅色方點）：分別用三角形（$m = 3$，$n = 6$）、正方形（4, 4）和六邊形（6, 3）。曲線上方的每一點（空心圓圈）都對應雙曲平面的一種正則密鋪。

球面以外

當 $h = 0$ 或 $h < 0$ 時又會怎樣？當 $(m-2)(n-2) = 4$ 時，有三組解：$(3, 6)$、$(4, 4)$ 和 $(6, 3)$，即六個三角形、四個正方形或三個六邊形在一點相接，各角之和恰好是 360°。這就是平面的三種正則密鋪（regular tiling），也就是浴室地磚和蜂巢的圖案。而當 $(m-2)(n-2) > 4$ 時，一個頂點處各角之和大於 360°，這在平面上不可能出現，但在 Section 5.8 的雙曲平面（hyperbolic plane）上卻完全可行。雙曲平面有無窮多種正則密鋪，圖 7.9.1 中曲線上方的每一點各對應一種；艾雪（Escher）的木刻版畫 *Circle Limit*（《圓極限》）系列，畫的就是其中幾種。所以，柏拉圖立體的分類其實是一個三分法（trichotomy）的第一種情況，這個三分法（球面、平面、雙曲平面）貫穿整個幾何學。

對稱羣

柏拉圖立體的對稱構成羣（group）：正四面體有 12 個旋轉，正方體和正八面體有 24 個（兩者互為對偶（dual）：把面與頂點互換，$m \leftrightarrow n$），正十二面體和正二十面體則有 60 個。這個階（order）為 60 的正二十面體羣是一個「單」羣（simple group）；正如我們在 Section 6.4 提過，正是它令五次方程（quintic）不能用根式（radicals）求解。克萊因（Felix Klein）寫了一整本書 *Lectures on the Icosahedron*（《正二十面體講義》，1884），把

正二十面體與五次方程的解法聯繫起來。

思維技巧

雙重計數

用兩種不同的方法點算同一組東西，然後令兩個結果相等。

這裏所點算的，是所有（棱，面）配對所成的集合，其中棱在該面上。雙重計數是組合數學（combinatorics）中最強大的工具之一，在第 9 章會一再出現。

延伸練習

1 **對偶性。**證明把 m 和 n 互換，會令 V 和 F 互換，而 E 保持不變。哪幾對柏拉圖立體互為對偶？哪一個是自對偶的？

2 **足球。**傳統的足球由 12 個五邊形和 20 個六邊形組成，每個頂點處有三個面相接。利用雙重計數和歐拉公式，驗證 $V - E + F = 2$。再證明更一般的結果：任何這樣由五邊形和六邊形組成、每個頂點處有三個面相接的多面體，都恰好有 12 個五邊形。

3 **環面。**造一個「畫框」形的多面體（一個正方形方塊，中間有一個正方形的洞），數出 V、E 和 F。驗證 $V - E + F = 0$。

4 **頂點處的角。**正 m 邊形的內角（interior angle）是 $180°(1 - \frac{2}{m})$。證明 n 個這樣的角能圍着凸立體的一個頂點拼合（總和小於 360°），當且僅當 $(m-2)(n-2) < 4$，從而得出這個分類的第二個證明。

延伸閱讀

- **David Richeson, *Euler's Gem***（Princeton University Press）。講述 $V - E + F = 2$ 的歷史，以及它如何引出拓撲學。非常適合高中第六學級（sixth form）的學生閱讀。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。一場關於歐拉公式和證明本質的對話。
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes***（Dover）。論述正多面體及其高維同類的經典著作。

我們學到了甚麼

本章開首我們說過，矩陣（matrix）是空間的一種變換（transformation），自有其生命；我們還提出了三個問題：矩陣與數有何相似、有何不同，矩陣究竟做了甚麼，以及甚麼保持不變。以下是本章九道題目所揭示的答案。

1. 矩陣與數有何相似，又有何不同？

矩陣可以相加和相乘，但 Section 7.1 指出了哪些熟悉的法則不再成立。乘法不符合交換律（commutative law），所以 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ 未必等於 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$；矩陣中存在零因子（zero divisor），所以 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ 並不保證 $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$；而一條二次矩陣方程可以有無限多個根。每一項法則的失效都有幾何解釋，可以從這些矩陣對平面的作用來理解。至關重要的是，有一項性質保留了下來：行列式（determinant）可乘，即 $\det(\mathbf{AB})=\det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$。Section 7.3 說明這項性質基本上刻劃了行列式，而 Section 7.8 則用它證明了歐拉（Euler）的四平方恆等式（four-square identity），這正是拉格朗日（Lagrange）定理的關鍵一步；該定理指出每個正整數都是四個平方數之和。

2. 矩陣究竟做了甚麼？

有幾節透過找出合適的觀點來回答這個問題。

- **特徵向量（eigenvector）**（Section 7.2）是矩陣不會轉動的方向。在以特徵向量為軸的坐標下，對稱矩陣（symmetric matrix）只不過是一個伸縮，而圓的像是一個橢圓，其軸和面積都可以直接讀出。
- **行列式**（Section 7.3）是帶正負號的面積比例因子：錯切（shear）保持面積不變，對換會把定向（orientation）反轉，奇異矩陣（singular matrix）則把平面壓扁。
- **跡（trace）與行列式**（Section 7.4）透過凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem），決定一個矩陣會否在若干步之後回到單位矩陣（identity matrix）。滿足 $\mathbf{M}^8=\mathbf{I}$ 的矩陣未必是旋轉；它是在歪斜坐標下看到的旋轉。又由於整數矩陣的跡是整數，晶體不可能有五重對稱。
- **三維空間中的旋轉**（Section 7.5）可由向量積（cross product）透過羅德里格斯公式（Rodrigues′ formula）構造出來，這是 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 在三維的對應版本。

- **雙曲旋轉（hyperbolic rotation）**（Section 7.6）使點沿雙曲線移動，並把它們的雙曲角相加。它們就是狹義相對論中的洛倫茲變換（Lorentz boost），而它們的不變直線（invariant line）就是光的路徑。

3. 甚麼保持不變？

不變量（invariant）無處不在。旋轉保持 $x^2 + y^2$ 不變，洛倫茲變換保持 $x^2 - y^2$ 不變，而相似矩陣（similar matrices）有相同的跡和行列式。在 Section 7.7 中，一個按 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 演化的矩陣，不論其元素如何變化，它的跡和行列式都保持不變，因而它的特徵值（eigenvalue）也保持不變：這就是孤立子（soliton）各條守恆定律背後的機制。而在 Section 7.9 中，不變量是一個數，$V - E + F = 2$，它對每個凸多面體（convex polyhedron）都成立，並把正多面體限定為僅有五種。這個數稱為歐拉示性數（Euler characteristic），是拓撲學（topology）中最早出現的不變量之一。

4. 線性代數工具箱

方法	你在哪裏用過
幾何反例	失效的法則（7.1）
以特徵向量為自然坐標軸	橢圓（7.2）；洛倫茲變換（7.6）
用特殊矩陣作試探	行列式（7.3）
凱萊–哈密頓定理	有限階（7.4）
分解為平行和垂直部分	羅德里格斯公式（7.5）
選擇合適的參數	快度（rapidity）（7.6）
$\mathrm{tr}(\mathbf{MN}) = \mathrm{tr}(\mathbf{NM})$	守恆量（7.7）
行列式的可乘性	四平方和（7.8）
重複計數（double counting）	柏拉圖立體（Platonic solids）（7.9）

下一步

- 在 Section 11.2 中，特徵值和特徵向量支配着彈簧與質點系統的振動。
- 在 Section 13.7 中，協方差矩陣（covariance matrix）的特徵向量會在統計學中出現。
- 微分方程（differential equation）和動力系統（dynamical system）是第 8 章的主題。

如果你想在入讀大學之前再走遠一點

- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（線性代數的本質）：一套免費的影片系列，展示矩陣究竟做了甚麼。請先看這個。

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（線性代數導論）：經典的入門課程，十分着重理解和應用。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（線性代數應該這樣學）：較為抽象的處理手法，以線性映射（linear map）為中心；可在網上免費閱讀。
- **David Richeson, *Euler's Gem***（歐拉的瑰寶）：歐拉公式與拓撲學的誕生。

Kaplansky 曾打趣說，他和 Halmos 思考時不用坐標，但關起門來卻「拼命地」用矩陣計算。這句話正好道出本章想說明的事：矩陣既具體又可以計算，但每一項計算背後都有幾何（一個伸縮、一個旋轉、一個投影、一個洛倫茲變換），還有一個不變量，它不取決於你怎樣把它寫下來。學會在這兩種觀點之間來回轉換，是數學家所能擁有的最寶貴技能之一。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：這裏給出結果和關鍵步驟，讓你核對自己的做法。請先認真做過每道練習，然後才看答案。

7.1 對矩陣不成立的法則

1. 設 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，比較 $\mathbf{XP}$ 與 $\mathbf{PX}$，必有 $c = 0$ 及 $a = d$：所求的矩陣（matrix）為 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$。

2. 由凱萊—哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）得 $\mathbf{N}^2 = t\mathbf{N} - d\mathbf{I}$，所以 $t\mathbf{N} = d\mathbf{I}$。若 $t \neq 0$，則 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{I}$ 的倍數，而 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 迫使 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$，與 $t \neq 0$ 矛盾。所以 $t = 0$，從而 $d = 0$。答案是：$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$，其中 $a^2 + bc = 0$。

3. 平方後的對角線元素為 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，非對角線元素為 0。保持不變的向量（vector）是 $(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$，所以它是對通過原點、傾角為 $\frac{\theta}{2}$ 的直線的反射（reflection）。

4. 設 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，則 $\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$；減去 $(a+d)\mathbf{M}$ 再加上 $(ad - bc)\mathbf{I}$，便得 $\mathbf{0}$。

7.2 只伸縮，不轉向

1. $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$ 且 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，必須有 $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$，這就是該二次方程。這裏跡（trace）為 6，行列式（determinant）為 $\frac{4}{25}(54 - 4) = 8$，所以 $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$：$\lambda = 2$（對應 $(1, 2)$）和 4（對應 $(2, -1)$）。

2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \lambda\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$，又因為 $\mathbf{M}$ 是對稱矩陣（symmetric matrix），$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu} = \mathbf{Mv} \cdot \mathbf{u} = \mu\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$。所以 $(\lambda - \mu)\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$。

3. 特徵方程（characteristic equation）$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$ 的判別式（discriminant）為 $-4\sin^2\theta$，除非 θ 是 π 的倍數，否則必為負數。特徵值（eigenvalue）是 $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$。

4. $(1, 0) = \frac{1}{5}(1, 2) + \frac{2}{5}(2, -1)$，所以 $T^n(1, 0) = \frac{2^n}{5}(1, 2) + \frac{2 \cdot 4^n}{5}(2, -1) = \frac{1}{5}(2^n +$

$4^{n+1},\ 2^{n+1} - 2\cdot 4^n)$。當 $n = 1$ 時，結果是 $(\frac{18}{5}, -\frac{4}{5})$，正如所料。

7.3 甚麼才算行列式

1. $(\det \mathbf{MN})^3 = (\det \mathbf{M})^3 (\det \mathbf{N})^3$，而 $(\det \mathbf{J})^3 = -1 \neq 1$。函數 $|\det \mathbf{M}|$ 具有可乘性（multiplicative），但 $|\det \mathbf{J}| = 1$。
2. $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，而第二個因子的第二行是第一行的 0 倍，所以它的 f 值為 0。
3. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$，所以它的值是 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2\mathrm{f}(\mathbf{K}_k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$。另外 $\mathbf{K}_k\mathbf{K}_l = \mathbf{K}_{kl}$。
4. 行簡化（row reduction）可把任何可逆矩陣（invertible matrix）寫成初等矩陣（elementary matrix）的乘積：行對換（$\mathbf{J}$）、行倍乘（$\mathbf{K}_k$ 或 $\mathbf{J}\mathbf{K}_k\mathbf{J}$），以及錯切（shear）（$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 或它經 $\mathbf{J}$ 共軛（conjugate）後所得的矩陣）。錯切的 $\mathrm{f} = 1$（做法如第 (iv) 部分，利用 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$）。此外，$\mathbf{J}$ 是若干錯切與 $\mathbf{K}_{-1}$ 的乘積，所以 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$。因此 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{g}(\det \mathbf{M})$，其中 $\mathrm{g}(k) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$；若 $\mathbf{M}$ 是奇異矩陣（singular matrix），則由第 (iii) 部分得 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = 0$。

7.4 回到起點的矩陣

1. 由 $|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|^2 = 2 + 2\cos\varphi = 1$ 得 $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$，所以 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$。至於 $\mathbf{S}$：它的特徵值是 1 的立方根。假如兩個特徵值都是 1，則由於 $x^3 - 1$ 的根各不相同，$\mathbf{S}$ 可對角化（diagonalisable），因而等於 $\mathbf{I}$。實矩陣的非實數特徵值必以共軛對的形式出現，所以特徵值是 $\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}/3}$：$\det \mathbf{S} = 1$ 及 $\operatorname{tr} \mathbf{S} = -1$。
2. 特徵值必定是六次本原單位根（primitive sixth roots of unity）$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$（若選取其他六次單位根並與其共軛配對，都會得出 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 或 $\mathbf{M}^3 = \mathbf{I}$）。所以 $\operatorname{tr} \mathbf{M} = 1$ 及 $\det \mathbf{M} = 1$。
3. 特徵值是乘積為 1 的單位根，所以它們是 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$（或同為 ± 1），而跡 $2\cos\theta$ 是 $[-2, 2]$ 內的整數。階（order）為 6 的例子：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。
4. $\mathbf{M}^3 = (t^2 - d)\mathbf{M} - td\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{M}^4 = (t^3 - 2td)\mathbf{M} - d(t^2 - d)\mathbf{I}$。要使 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$（$\mathbf{M}$ 不可能是 $\mathbf{I}$ 的倍數），須有 $t(t^2 - 2d) = 0$ 及 $d(t^2 - d) = 1$。$t = 0$ 給出 $-d^2 = 1$，不可能成立；所以 $t^2 = 2d$，$d^2 = 1$，於是 $d = 1$，$t^2 = 2$。

7.5 三維空間中的旋轉

1. $z \mapsto a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)$。複合變換是 $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}z + k$，其中 $k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})$；若 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)} \neq 1$，它有不動點（fixed point）$c = \frac{k}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)}}$。若 $\theta+\phi = 2\pi$，它就是位移為 $(b-a)(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$ 的平移（translation）。

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$：它保持 $(1,1,1)$ 不變，跡為 $0 = 1 + 2\cos 120°$，並把 $\mathbf{i} \to \mathbf{j} \to \mathbf{k} \to \mathbf{i}$。

3. $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$，於是 $\mathbf{K}^3\mathbf{r} = \mathbf{n} \times \big((\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = -\mathbf{K}\mathbf{r}$。在級數（series）中，奇數次冪給出 $(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)\mathbf{K} = \sin\theta\,\mathbf{K}$，偶數次冪（由 $\mathbf{K}^2$ 起）給出 $(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots)\mathbf{K}^2 = (1-\cos\theta)\mathbf{K}^2$。

4. 複合變換保持交線上的每一點不變，而且行列式為 $(-1)^2 = 1$。在每個垂直於該交線的平面上，它是對兩條夾角為 α 的直線先後作反射的乘積，即轉角為 2α 的旋轉（rotation）。

7.6 雙曲旋轉與相對論

1. $T(u)T(w)$ 的元素是 $\cosh u\cosh w + \sinh u\sinh w = \cosh(u+w)$ 和 $\sinh u\cosh w + \cosh u\sinh w = \sinh(u+w)$。所以 $T(u)^{-1} = T(-u)$。

2. 由 $\tanh u = 0.8$ 得 $u = \frac{1}{2}\ln\frac{1.8}{0.2} = \ln 3 \approx 1.099$ 及 $\cosh u = \frac{1}{2}(3+\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$。在飛船上，過去的時間是 $10 \times \frac{3}{5} = 6$ 年。

3. 面積是 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$。兩條直邊沒有貢獻；沿着雙曲線（hyperbola），取 $x = \cosh s$，$y = \sinh s$，被積函數（integrand）是 $(\cosh^2 s - \sinh^2 s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}s$，得出 $\frac{v}{2}$。T 的行列式為 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$，所以它保持面積不變；它把雙曲線映射到自身，並把參數為 v 的點移到參數為 $v+u$ 的點。

4. $x' + y' = (\cosh u + \sinh u)(x+y) = \mathrm{e}^u p$ 及 $x' - y' = \mathrm{e}^{-u}q$；另外 $x^2 - y^2 = pq$。在這組坐標下，T 是一個擠壓映射（squeeze）：沿漸近線（asymptote）$y = x$ 拉伸 e^u 倍，沿 $y = -x$ 壓縮至 e^{-u} 倍，使各點沿着每條雙曲線 $pq =$ 常數滑動。

7.7 永恆不變的量

1. $\dot{a} = -Ct = -tc$，$\dot{d} = Ct = tc$，$\dot{c} = 0$，以及 $\dot{b} = (A-D)t - Ct^3 = t(a-d)$，與 $\mathbf{M}\dot{\mathbf{N}} - \dot{\mathbf{N}}\mathbf{M} = t\begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 吻合。

2. $\dot{\mathbf{M}} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{S}} = -\mathbf{N}\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{N}$，當中用到 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$。

3. $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，而 $\ln\det\mathbf{M} = 2t - t = t$，其導數（derivative）為 $1 = \operatorname{tr}\mathbf{N}$。

4. 利用跡的循環性質（cyclic property），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = \sum_j \operatorname{tr}(\mathbf{M}^j\dot{\mathbf{M}}\mathbf{M}^{k-1-j}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\dot{\mathbf{M}})$；再用一次循環性質，$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}^k\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{k-1}\mathbf{NM}) = 0$。

7.8 四個平方數

1. $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (1, 4, 4, 4)$，而 $1 + 16 + 16 + 16 = 49$。這個表示法與 $7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ 不同。

2. 取 $c = d = r = s = 0$：$L_1 = ap - bq$，$L_2 = aq + bp$，$L_3 = L_4 = 0$，即 $(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$。

3. 平方數模（modulo）8 只可能是 0、1 或 4。三個這樣的數之和模 8 可得 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$，但永遠不會是 7。

4. $2 = (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + 0^2 + 0^2$：選出兩個非零的位置（6 種方法）及它們的正負號（4 種方法），共 24 種。由於 2 不能被 4 整除，雅可比（Jacobi）公式給出 $8\sigma(2) = 8 \times 3 = 24$。

7.9 只有五種柏拉圖立體

1. 設 $h = 2m + 2n - mn$，則 $V = \frac{4m}{h}$，$E = \frac{2mn}{h}$ 及 $F = \frac{4n}{h}$；把 m 和 n 對調，V 和 F 也隨之對調。正方體與正八面體（octahedron）互為對偶（dual），正十二面體（dodecahedron）與正二十面體（icosahedron）亦然；正四面體（tetrahedron）則是自對偶（self-dual）的。

2. $F = 32$，$E = \frac{1}{2}(12 \cdot 5 + 20 \cdot 6) = 90$ 及 $V = \frac{1}{3}(180) = 60$，而 $60 - 90 + 32 = 2$。一般而言，若有 P 個五邊形和 H 個六邊形，則 $E = \frac{1}{2}(5P + 6H)$ 及 $V = \frac{1}{3}(5P + 6H)$，所以 $V - E + F = -\frac{1}{6}(5P + 6H) + P + H = \frac{P}{6}$。這個值等於 2，所以 $P = 12$。

3. 把頂面和底面（兩者都有洞）各分成四個梯形（trapezium）。於是 $V = 16$，$F = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$ 及 $E = 12 + 12 + 8 = 32$，所以 $V - E + F = 0$。

4. $180^\circ n(1 - \frac{2}{m}) < 360^\circ$ 即 $n(m - 2) < 2m$，也就是 $mn - 2m - 2n < 0$，或 $(m - 2)(n - 2) < 4$。當 $m, n \geq 3$ 時，解為 $(3, 3)$、$(3, 4)$、$(4, 3)$、$(3, 5)$ 和 $(5, 3)$。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 7 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。