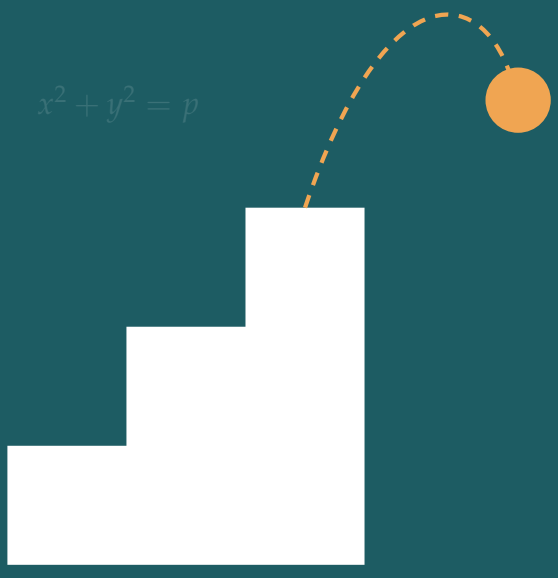
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 5 章

複數（Complex Numbers）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 5 章

複數（Complex Numbers）

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 5 章：複數（Complex Numbers）

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 5 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

5

複數

實數域中兩個眞理之間的最短路徑，要取道複數域。

本章內容

5.1	梅欽公式	STEP III 1987
5.2	單位根篩選法	STEP I 1990
5.3	因式分解 $z^{2n}+1$	STEP III 2013
5.4	正多邊形中的距離	STEP III 2016
5.5	名不副實的有理角	STEP III 2022
5.6	費馬點	STEP III 2000
5.7	作為映射的複指數函數	STEP II 1997
5.8	圓盤中隱藏的距離	STEP III 2013
A	練習答案	第 59 頁

虛數，實在的答案

實數域中兩個眞理之間的最短路徑，要取道複數域。

— 阿達馬（Jacques Hadamard）

1545 年，卡爾達諾（Gerolamo Cardano）發表了一條解三次方程（cubic equation）的公式，卻發現了一件令人不安的事。有些三次方程明明有三個不折不扣的實根，公式在計算途中卻要求取負數的平方根。這些平方根到最後會互相抵消，留下實數答案，但在計算的中途，卻出現了一些按當時任何標準都不存在的量。卡爾達諾形容這種運算「既精妙，又無用」。其後兩個世紀，數學家用起這些「虛」數（imaginary number）時總是惴惴不安，只當它是一種碰巧行得通的竅門。

要到十九世紀初，Caspar Wessel、Jean-Robert Argand 和高斯（Gauss）把複數（complex number）看成平面上的點，複數才得到認可。自此之後，人們發現複數並非竅門，而是一種啟示。複數解釋了實數世界的現象為何如此表現，而且不斷為有關實數的結果提供最短的路徑，正如阿達馬所言。

複數為何重要

每一條多項式方程在複數中都有解：這就是代數基本定理（fundamental theorem of algebra）。因此，在一個確切的意義下，代數到了複數才算完備。複數也是描述旋轉和振盪的天然語言。乘以一個模（modulus）為 1 的複數，就是把平面旋轉，所以凡是涉及角度、波動或週期現象的問題，用複數處理都會較為簡單。電機工程師用複數分析交流電；物理學家沒有複數就寫不出量子力學；由手提電話到磁力共振（MRI）掃描器，訊號處理全靠複數傅立葉變換（Fourier transform）運作。而在純數學中，複變函數原來有着驚人的剛性和美感：只要知道一個複函數在一小片區域上的取值，它在各處的取值就全部確定了。

你在大學會遇到甚麼

你從第一個星期起就會用到複數，但真正的一大步是複分析（complex analysis），通常在二年級修讀。它的核心對象是全純（holomorphic）函數，即可以求導的複函數，而這套理論處處是驚喜。每個全純函數都自動地無限次可導，並且等於它的泰勒級數（Taylor series）。沿閉曲線的積分，只需察看函數趨向無窮的那些點便可求出（柯西留數定理，Cauchy's residue theorem），讓你能夠計算其他方法都束手無策的實積分。這套理論再

往前走，就通往保角映射（conformal map）（Section 5.7）、黎曼曲面（Riemann surface），以及支配質數的黎曼 zeta 函數（Riemann zeta function）（Section 1.2）。與此同時，單位根（roots of unity）的代數（Section 5.2、Section 5.3）通往伽羅瓦理論（Galois theory），而複幾何則通往 Section 5.8 的非歐幾何（non-Euclidean geometry）。

貫穿本章的問題

三個大問題

1. **複數怎樣幫助解決實數問題？**為甚麼繞道複平面（complex plane），竟能得出關於 π、二項式係數（binomial coefficient）或餘弦的事實？
2. **單位根有甚麼特別之處？**為甚麼 $z^n = 1$ 的解不斷在求和、乘積、多邊形和角度之中出現？
3. **複函數是甚麼模樣的？**輸入和輸出都是平面上的點的函數，我們怎樣把它畫出來？它們又揭示了怎樣的幾何？

本章由輻角（argument）與乘法出發（梅欽公式），經過單位根的代數（篩選、因式分解、多邊形的距離和無理角），走到用複數處理的幾何（費馬點），最後到達作為映射的複函數（指數函數，以及單位圓盤中一個隱藏的距離）。

本章的主要想法

§	課題	想法
5.1	梅欽（Machin）公式	複數相乘時，輻角相加
5.2	每隔三項的二項式係數	對單位根取平均，可按餘數（residue）篩選
5.3	餘弦的乘積	按各根分解因式，然後代入
5.4	正多邊形的弦	距離就是模；$z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$
5.5	$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 是無理的	棣美弗（De Moivre）定理、奇偶性（parity）與最小反例（minimal counterexample）
5.6	費馬點（Fermat point）	旋轉就是乘法；選取好的坐標
5.7	把 e^w 看成映射	把複函數畫出來；多對一映射（many-to-one map）
5.8	一個隱藏的距離	把不等式看成雙曲幾何（hyperbolic geometry）中的三角不等式（triangle inequality）

怎樣閱讀本章

動手畫圖。本章幾乎每一個結果都有幾何意義，隨手畫一幅複平面的草圖（單位根在哪裏、某個乘法把平面轉向哪一邊、網格線落在何處），往往在動用任何代數之前，就已

經告訴你該怎樣做。然後要小心地做代數運算，因為在正負號和 2π 的倍數上，圖形可能會誤導你。

5.1 梅欽公式

題目

STEP III 1987，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/87-s3-q3`

引子

1706 年，倫敦數學家梅欽（John Machin）徒手把 π 計算到小數點後 100 位，在此之前從未有人接近過這個紀錄。他的祕訣就是第 (ii) 部分的公式：這條公式把 $\frac{\pi}{4}$ 用幾個角表示出來，而這些角的正切都是很小的分數。分數愈小，級數（series）$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 收斂（converge）得愈快。梅欽公式及其各種變體，在其後兩個半世紀一直是計算 π 的標準方法，直到電腦和 Section 2.6 的方法出現才被取代。

這條公式看起來像是三角恆等式（identity）變出來的奇蹟。這道題目卻說明，它其實是關於複數（complex number）乘法的一個事實：複數相乘時，它們的輻角（argument）相加。只要把幾個實部、虛部都是整數的複數乘一次，整條公式就得證。

動筆之前

想一想 $5 - \mathrm{i}$ 的輻角是甚麼？$1 + \mathrm{i}$ 的呢？複數相乘時，輻角會怎樣變化？

$\arg(5 - \mathrm{i}) = -\tan^{-1}\frac{1}{5}$，是一個很小的負角，而 $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$。複數相乘時，模（modulus）相乘，輻角相加（可相差 2π 的倍數）。因此

$$\arg\left((5 - \mathrm{i})^4(1 + \mathrm{i})\right) = \frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} \quad \text{（可能再加上若干個}2\pi\text{）}.$$

如果我們能算出這個乘積，再用另一個方法求出它的輻角，就得到一條恆等式。

逐步解題

階段 1　模的上下界

想一想　求上界（upper bound）時，把兩邊平方。求下界（lower bound）時，把 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 看成兩個向量的點積（dot product）。

上界：$(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 = |z|^2$，而且兩邊都非負，所以 $|z| \leq |x|+|y|$。

下界：$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 是長度為 $|z|$ 的向量 $(|x|,|y|)$ 與單位向量（unit vector）$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的點積。點積不會超過兩個向量長度之積，所以它不超過 $|z|$。（代數證法：$|z|^2 - (|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha)^2 = (|x|\sin\alpha - |y|\cos\alpha)^2 \geq 0$。） ■

階段 2　關鍵的乘法

想一想　先計算 $(5-\mathrm{i})^2$，再把結果平方，然後乘以 $1+\mathrm{i}$。

$(5-\mathrm{i})^2 = 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i}$。於是 $(24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i}$。最後

$$(476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i}.$$

停一停，試一試　現在比較輻角。$956-4\mathrm{i}$ 的輻角是甚麼？你憑甚麼肯定沒有多出 2π 的倍數？

$956 - 4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i})$，其輻角為 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。因此

$$\frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi$$

其中 k 是某個整數。但 $0 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$，所以左邊介乎 $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5}$ 與 $\frac{\pi}{4}$ 之間，即大約介乎 -0.02 與 0.79 之間；而右邊除去 $2k\pi$ 後介乎 -0.005 與 0 之間。由於 2π 遠大於兩者的差距，故 $k = 0$。移項後得

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \qquad ■$$

圖 5.1.1 顯示了整個過程：由 $45°$ 出發，每乘一次 $5-\mathrm{i}$ 就順時針旋轉約 $11.3°$，乘了四次之後，剛好越過實軸，只過了 $0.24°$。

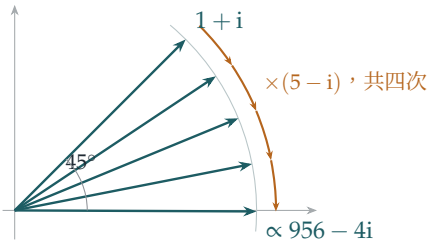


圖 5.1.1 把 $1+\mathrm{i}$ 乘以 $5-\mathrm{i}$ 四次。每乘一次就順時針旋轉 $\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 11.31°$（同時也會拉長，這裏略去不計）。四次旋轉把 $45°$ 帶到 $-0.24°$，即 $956-4\mathrm{i}$ 的輻角，也就是 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。

階段 3 第二條公式

想一想 依樣畫葫蘆，這次應該計算哪一個乘積？

考慮 $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$，它的輻角是 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$。現在 $(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$，所以 $(4+\mathrm{i})^3=(15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=52+47\mathrm{i}$。於是 $(52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i})=1040+52\mathrm{i}+940\mathrm{i}-47=993+992\mathrm{i}$，而

$$(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})=(1971105-992)+(993+1969120)\mathrm{i}=1970113+1970113\mathrm{i}.$$

實部（real part）等於虛部（imaginary part），所以輻角是 $\frac{\pi}{4}$。三個角都是很小的正角（它們的和小於 $3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1985}<1<2\pi$），所以毋須擔心 2π 的倍數，公式由此得證。
■

回顧

- **相乘時輻角相加。**單憑這一個事實，高斯整數（Gaussian integers）的乘積就變成了角與角之間的恆等式。
- **留意 2π 的倍數。**輻角只能確定到相差 2π 的倍數，所以每條恆等式都要靠估計大小來確定那個倍數。
- **整數包辦一切。**所有運算都只涉及整數；關於 π 的恆等式是精確地得出的，沒有用到任何近似。

背後的數學

徒手計算 π

為甚麼梅欽公式這樣適合用來計算？級數 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 在 $|x| \le 1$ 時收斂，但在 $x = 1$ 時慢得令人難受：要用 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ 求得 $\frac{\pi}{4}$ 的三位小數，大約需要一千項。取 $x = \frac{1}{5}$ 時，每一項約為前一項的 25 分之一，即每項大約帶來 1.4 位小數；取 $x = \frac{1}{239}$ 時，每項約 4.8 位。梅欽的 100 位小數，只需要第一個級數約 70 項和第二個級數約 20 項。1873 年，William Shanks 用一條梅欽型公式算出 707 位，單是運算就花了多年時間；到了 1944 年，人們發現他在第 528 位出了錯，其後的數字全部不對。

再談高斯整數

形如 $a + b\mathrm{i}$ 而 a、b 為整數的數，就是 Section 1.6 的高斯整數。$5 - \mathrm{i}$ 之所以這樣好用，原因在於一個因數分解（factorisation）：$239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$，在高斯整數中寫成 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4 (3 - 2\mathrm{i})^4$，而 $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$ 正是由同一批高斯質數（Gaussian primes）組成的。尋找梅欽型公式，其實就是把形如 $n^2 + 1$ 的數作因數分解的問題。1899 年，Carl Størmer 正是用這個想法證明了：形如 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 而 a、b、m、n 為整數的公式只有四條，即梅欽的一條，以及歐拉（Euler）、Hermann 和 Hutton 分別發現的三條。

旋轉

乘以一個模為 1 的複數，就是把平面旋轉（rotation）。正因如此，凡是涉及旋轉和角的事情，複數都是最自然的語言：由本章稍後的幾何，到電機工程中的交流電，以至量子力學中的波函數，莫不如此。在 Section 4.2 中，$\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）來自一個巧妙的代換（substitution）；在這裏，它來自複數的乘法。兩者其實是同一個事實，只是從不同的角度去看。

思維技巧

> **把角轉化為複數乘法**
>
> 角的和之間的恆等式，就是乘積的輻角之間的恆等式。把乘積精確地算出來，再讀出它的輻角。

複數的運算機械而精確，而處理反三角函數（inverse trigonometric functions）則容易出錯。把後者轉化為前者，往往是最快捷的證明途徑。

延伸練習

1 **一個近親。**試做 STEP II 2000，第 4 題（`step.maths.org/questions/00-s2-q4`）。這道題用與本節相同的方法，證明另一條關於 $\frac{\pi}{4}$ 的反正切公式：把複數相乘，然後讀出輻角。

2 **歐拉公式。**考慮 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$，證明 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$。

3 **Hutton 公式。**證明 $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$。

4 **要多少項？**估計一下，要把 π 計算到小數點後 20 位，梅欽公式中的兩個級數各需要多少項。然後用計算機實際算出最初幾位。

延伸閱讀

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。書中載有梅欽型公式的歷史。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。生動地介紹古今各種計算 π 的方法。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。要從幾何角度理解複數，這是最好的一本書。第 1 章講的就是乘法即旋轉加縮放。

5.2 單位根篩選法

題目

STEP I 1990，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/90-s1-q2`

引子

帕斯卡三角形（Pascal's triangle）同一行的二項式係數（binomial coefficients）加起來等於 2^n：只要在 $(1+x)^n$ 中代入 $x=1$ 即可。若改為代入 $x=-1$，便得到交錯和，其值為 0；把兩式相加，可知位於偶數位置的係數之和為 2^{n-1}，剛好是一半。所以偶數位置和奇數位置的項把總和平分。

那麼每隔兩項取一個、即每第三個係數又如何？沒有任何實數 x 能夠挑出位置 $0,3,6,\ldots$。但有一個複數可以。三次單位根（cube roots of unity）就像一個濾波器：對 1、ω 和 ω^2 取平均，冪 ω^k 在 k 是 3 的倍數時給出 1，否則給出 0。這個想法稱為單位根濾波器（roots-of-unity filter），是離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）的小型版本，而後者是有史以來最重要的算法之一。

動筆之前

? **想一想** ω 是 $z^3-1=0$ 的一個根。試把 z^3-1 因式分解。為甚麼由此可得 $1+\omega+\omega^2=0$？

$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$。由於 $\omega^3=1$ 但 $\omega\neq 1$，ω 必定是第二個因式的根：$\omega^2+\omega+1=0$。從幾何上看，1、ω 和 ω^2 是一個以原點為中心的等邊三角形的頂點，它們的和就是該三角形的質心，即 0。

逐步解題

階段 1　模與輻角

由 $1+\omega+\omega^2=0$，得 $1+\omega^2=-\omega$。因為 $\omega=e^{2\pi\mathrm{i}/3}$，所以 $-\omega=e^{\mathrm{i}\pi}e^{2\pi\mathrm{i}/3}=e^{5\pi\mathrm{i}/3}=e^{-\pi\mathrm{i}/3}$。故 $1+\omega^2$ 的模（modulus）為 1，輻角（argument）為 $-\frac{\pi}{3}$。同理，$1+\omega=-\omega^2=e^{\pi\mathrm{i}/3}$，其模為 1，輻角為 $\frac{\pi}{3}$。

階段 2　濾波器

> **想一想**　當 k 是 3 的倍數時，$1+\omega^k+\omega^{2k}$ 等於甚麼？不是倍數時又如何？

若 $3\mid k$，則 $\omega^k=1$，和為 3。若否，ω^k 是 ω 或 ω^2，而無論哪一種情況，都有 $1+\omega^k+\omega^{2k}=1+\omega+\omega^2=0$。因此，表達式 $\frac{1}{3}(1+\omega^k+\omega^{2k})$ 在 $3\mid k$ 時等於 1，否則等於 0：它是一個偵測 3 的倍數的探測器。

> **停一停，試一試**　把 $(1+\omega^r)^n$ 對 $r=1,2,3$ 相加，每一項都用二項式定理（binomial theorem）展開。你得到甚麼？

由於 $\omega^3=1$，

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)=3\sum_{3\mid k}\binom{n}{k}.$$

另一方面，由階段 1，

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+2^n=e^{n\pi\mathrm{i}/3}+e^{-n\pi\mathrm{i}/3}+2^n=2\cos\frac{n\pi}{3}+2^n.$$

兩邊除以 3 便得到所求公式。 ■

階段 3　兩個計算

對於 $n=25$：$\frac{25\pi}{3}=8\pi+\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos\frac{25\pi}{3}=\frac{1}{2}$，於是

$$\binom{25}{0}+\binom{25}{3}+\cdots+\binom{25}{24}=\frac{33554432+1}{3}=11184811.$$

> **想一想**　第二個和需要的是滿足 $k\equiv 2\pmod 3$ 的位置。怎樣修改濾波器，使它偵測的是 $k\equiv 2$ 而不是 $k\equiv 0$？

把探測器平移：$\frac{1}{3}(1+\omega^{k-2}+\omega^{2(k-2)})$ 恰好在 $k\equiv 2\pmod 3$ 時等於 1。由於 $\omega^{-2}=\omega$

及 $\omega^{-4}=\omega^2$，由此可得

$$\sum_{k\equiv 2}\binom{n}{k}=\frac{1}{3}\Big(2^n+\omega(1+\omega)^n+\omega^2(1+\omega^2)^n\Big).$$

取 $n=24$，則 $(1+\omega)^{24}=e^{8\pi i}=1$，同樣 $(1+\omega^2)^{24}=1$，所以括號內的值為 $2^{24}+\omega+\omega^2=2^{24}-1$。由 $2^{24}=16777216$，

$$\binom{24}{2}+\binom{24}{5}+\cdots+\binom{24}{23}=\frac{16777215}{3}=5592405.\qquad\blacksquare$$

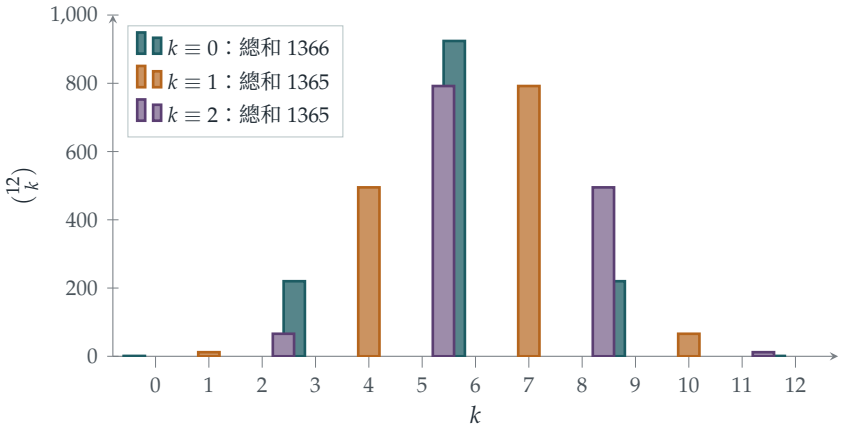


圖 5.2.1　帕斯卡三角形的第 12 行，按 k 除以 3 的餘數着色。三個類別的總和分別是 1366、1365 和 1365：各自幾乎剛好是 $2^{12}=4096$ 的三分之一。單位根濾波器準確地預測了它們與 $\frac{4096}{3}$ 之間的微小差異：$+\frac{2}{3}$、$-\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$。

回顧

- **對單位根取平均，可按餘數篩選。**$\frac{1}{3}\sum_r \omega^{rk}$ 等於 1 還是 0，視乎 3 是否整除 k。把多項式在各單位根處的值相加，便能挑出每第三個係數。
- **平移濾波器。**取平均之前先乘以 ω^{-rj}，便能挑出滿足 $k\equiv j$ 的係數。
- **用複數求實數答案。**答案是整數，題目問的也是整數，但解題的路徑卻穿過了複平面。

背後的數學

離散傅立葉變換

把 3 換成任意的 N，並把 ω 換成 $e^{2\pi i/N}$。對於一列數 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$，以下各數

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

構成它的離散傅立葉變換，而正是濾波恆等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 或 0，讓你可以從 $\hat{a}_r$ 還原出 a_k。這個變換把一個訊號分解成它的各個頻率成分。1965 年，James Cooley 和 John Tukey 發表了一種方法，只需大約 $N \log_2 N$ 步而非 N^2 步便能把它算出，這就是快速傅立葉變換（fast Fourier transform，簡稱 FFT）；高斯（Gauss）早在 1805 年已發現本質上相同的想法，但從未發表。FFT 應用於音訊和圖像壓縮（MP3 和 JPEG）、流動電話訊號、醫學掃描儀，以及極大數字的乘法，並且經常獲列為二十世紀最重要的算法之一。

生成函數

這個濾波器只是一個更宏大想法的其中一例：數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 可以包裝成一個多項式或冪級數（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$，稱為它的生成函數（generating function），而對數列進行的運算就變成對函數進行的運算。在 1 處求值，就是把數列求和；在單位根處求值，就是挑出各個剩餘類（residue classes）；求導則是把各項以 k 加權。這樣一來，許多計數問題都化為代數問題，而這正是第 9 章的核心技巧。同一個濾波器，配合五次單位根應用於 $(1+x)^n$，便會與正五邊形和黃金比（golden ratio）扯上關係；我們會在 Section 6.1 繼續探討單位根的代數。

思維技巧

利用對稱性來篩選

要從一個和之中挑出滿足某個條件的項，可找一個函數，使它在你想要的項上取值 1、在其餘的項上取值 0，而這個函數是由對稱平均構造出來的。

對單位根取平均就是經典的例子。同一個原理——「對一個對稱羣取平均，以分離出你想要的部分」——在代數中隨處可見，由單位根濾波器以至羣表示論（representation theory of groups）皆然。

延伸練習

1 **偶數位置。**利用二次單位根（1 和 -1）的濾波器，證明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$。

2 **另一個餘數。**求 $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots$ 的公式，並驗證三條公式加起來等於 2^n。

3 **每第四個。**利用 i，證明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots=\frac{1}{4}\left(2^n+2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$。

4 **整除性。**$\{1,2,\ldots,12\}$ 有多少個子集的元素個數可被 3 整除？有多少個子集的元素之和可被 3 整除？（第二問的提示：考慮 $\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$ 在三次單位根處的值。）

延伸閱讀

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；可於網上免費閱覽）。一本引人入勝的生成函數入門書；單位根濾波器在書中很早便出現。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。以計數方法證明二項式恆等式。
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。內容包括離散傅立葉變換和 FFT。

5.3 因式分解 $z^{2n}+1$

題目

STEP III 2013，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/13-s3-q4`

引子

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$ 等於多少？每個因子都是涉及多重根號的難看數字，但它們的乘積卻恰好是 $\frac{1}{8}$。等間隔角度的餘弦之積，總是這樣化簡成簡潔的數，而這道題正好解釋了箇中原因。竅門在於看出這些角度是某個多項式（polynomial）的根（roots）的輻角（argument），把該多項式因式分解（factorise），然後代入（substitute）一個巧妙選取的值。

在複數（complex numbers）範圍內，每個多項式都可以完全分解成線性因式（linear factors）。在實數範圍內，非實根以共軛對（conjugate pairs）的形式出現，每一對合併成一個實二次因式（real quadratic factor）。這兩項事實在本題中都展現出來，而 $z^{2n}+1$ 明明完全沒有實根，卻可以寫成實二次式之積，靠的正是第二項事實。

動筆之前

想一想 $z^{2n}=-1$ 的解在複數平面（complex plane）上的甚麼位置？試就 $n=2$ 和 $n=4$ 把它們畫出來。

它們的模（modulus）全都是 1，而輻角 θ 滿足 $2n\theta=\pi+2m\pi$，所以 θ 是 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇數倍。它們在單位圓（unit circle）上構成一個正 $2n$ 邊形，並且旋轉到沒有任何頂點落在實軸上（圖 5.3.1）。它們兩兩配成共軛對 $e^{\pm i\theta}$，即關於實軸互為鏡像。

逐步解題

階段 1　共軛對給出實二次式

$$(z-e^{\mathrm{i}\theta})(z-e^{-\mathrm{i}\theta}) = z^2-(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})z+1 = z^2-2z\cos\theta+1. \qquad \blacksquare$$

階段 2　因式分解

滿足 $-\pi<\theta\le\pi$ 的 -1 的 $2n$ 次方根是 $e^{\pm\mathrm{i}\theta_k}$，其中

$$\theta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2n},\qquad k=1,2,\dots,n.$$

這是 $2n$ 個互不相同的數，全都是 $2n$ 次多項式 $z^{2n}+1$ 的根，所以它們就是該多項式的全部根，於是

$$z^{2n}+1=\prod_{k=1}^{n}(z-e^{\mathrm{i}\theta_k})(z-e^{-\mathrm{i}\theta_k})=\prod_{k=1}^{n}(z^2-2z\cos\theta_k+1). \qquad \blacksquare$$

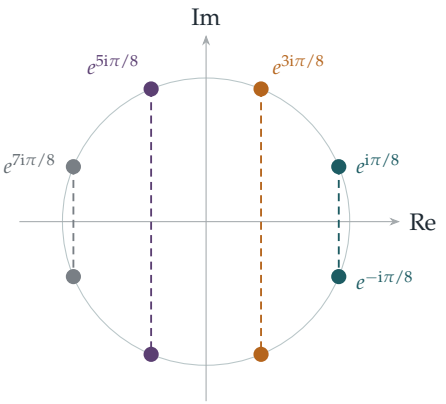


圖 5.3.1　$z^8=-1$ 的八個解（即 $n=4$ 的情況）。它們配成四個共軛對，以虛線相連；每一對給出 z^8+1 的一個實二次因式 $z^2-2z\cos\theta_k+1$。

階段 3　代入 $z=\mathrm{i}$

想一想　$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta+1$ 等於甚麼？當 n 是偶數時，$\mathrm{i}^{2n}+1$ 又等於甚麼？

每個因式變成

$$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta_k+1=-2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

所以右邊是 $(-2\mathrm{i})^n\prod_k\cos\theta_k$。左邊是 $\mathrm{i}^{2n}+1=(-1)^n+1$，當 n 是偶數時等於 2。而對於偶數 n，

$$(-2\mathrm{i})^n=2^n(-\mathrm{i})^n=2^n\big((-\mathrm{i})^2\big)^{n/2}=2^n(-1)^{n/2}.$$

因此

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k=\frac{2}{2^n(-1)^{n/2}}=(-1)^{\frac12 n}2^{1-n}.\qquad\blacksquare$$

當 $n=4$ 時，這正是引子中的乘積：$(-1)^2 2^{-3}=\frac18$。

階段 4　當 n 是奇數時

> **想一想**　對於奇數 n，其中一個角 θ_k 等於 $\frac{\pi}{2}$。是哪一個？為甚麼這會令代入 $z=\mathrm{i}$ 這一步在現有形式下毫無用處？

當 $k=\frac{n+1}{2}$ 時，$\theta_k=\frac{n\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$，所以該因式是 z^2+1，它在 $z=\mathrm{i}$ 時等於零；兩邊都是 0，我們甚麼也得不到。解決辦法是先把這個因式除去，而題目給出的恆等式正是這樣做的。

> **停一停，試一試**　把因式分解式的兩邊除以 $1+z^2$，代入 $z=\mathrm{i}$，然後化簡。你需要把餘下的餘弦兩兩配對。

除以因式 z^2+1（即 $k=\frac{n+1}{2}$ 的那一項），得

$$1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}=\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right).$$

當 $z=\mathrm{i}$ 時，左邊每一項都是 $(-z^2)^j=1^j=1$，而共有 n 項，所以左邊等於 n。右邊是 $(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\cos\theta_k$。由於 $n-1$ 是偶數，$(-2\mathrm{i})^{n-1}=2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$。

現在把各角配對：$\theta_{n+1-k}=\pi-\theta_k$，所以 $\cos\theta_{n+1-k}=-\cos\theta_k$。餘下的 $n-1$ 個因子組成 $\frac{n-1}{2}$ 個這樣的對，其中 $k=1,\dots,\frac{n-1}{2}$，而每一對貢獻 $-\cos^2\theta_k$。因此

$$n=2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k=2^{n-1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k,$$

從而得到 $\prod\cos^2\theta_k=n2^{1-n}$。最後一個因子，即 $k=\frac{n-1}{2}$ 的那個，是 $\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$，與題目所寫的一致。$\blacksquare$

以 $n=3$ 驗算：$\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac34=3\cdot2^{-2}$。

回顧

- **知道根，就知道多項式。**一個多項式由它的根決定（只差一個常數倍），所以列出 $z^{2n}+1$ 的根，就得到它的因式分解。
- **代入一個巧妙的值。**取 $z=\mathrm{i}$，每個二次因式都變成餘弦的倍數。

- **當代入後得到 $0 = 0$，就先做除法。**對於奇數 n，有一個因式在 $z = \mathrm{i}$ 時等於零，所以我們在代入之前先把它除去。

背後的數學

代數基本定理

$z^{2n} + 1$ 可以在 $\mathbb{C}$ 上完全分解成線性因式，這是代數基本定理（fundamental theorem of algebra）的一個特殊情況：每個複係數的非常數多項式都有一個複根，因而可以完全分解成線性因式。高斯（Gauss）在 1799 年的博士論文中給出了第一個獲廣泛接受的證明，其後又多次重新探討這條定理，提出新的證明。由此可推出，每個實多項式都可以分解成實線性因式和實二次因式，因為非實根以共軛對的形式出現，正如第 1 步所見。這條定理名為「代數」，實質卻屬於分析：每個證明都要用到實數的某種性質，例如連續性（continuity），而你會在複分析（complex analysis）的入門課程中見到其中一個最巧妙的證明。

正弦與餘弦之積

這個方法可以給出一整族恆等式。以 $z^n - 1$ 取代 $z^{2n} + 1$，就得到

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

它的幾何形式在 Section 5.4 中有證明。這類恆等式會在振動系統的分析中出現（以彈簧相連的 n 個質點的頻率涉及 $\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$），也會在計數問題中出現（某些圖的生成樹（spanning trees）數目，以及長方形的多米諾骨牌鋪砌（domino tilings）數目，都可以用餘弦之積表示）。Kasteleyn 在 1961 年提出的 $m \times n$ 長方形多米諾骨牌鋪砌公式，是一個雙重乘積，其中各項是含 $\cos^2\frac{j\pi}{m+1}$ 和 $\cos^2\frac{k\pi}{n+1}$ 的式子。

思維技巧

從根到乘積

要計算等間隔角度的三角函數值之積，先看出它們來自某個簡單多項式的根，再作因式分解，然後代入一個方便的值。

選取甚麼值，是一門藝術：本題中 $z = \mathrm{i}$ 把每個二次因式變成一個餘弦。其他選擇（例如 $z = 1$ 或 $z = -1$）會給出其他恆等式。

延伸練習

1 **一個七邊形的乘積。**利用第 (ii) 部分，取 $n=7$，證明 $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$。然後證明 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$。（提示：利用 $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ 把各角聯繫起來，或者反覆使用恆等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$。）

2 **另一個代入。**在因式分解式中代入 $z=1$，證明

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

3 **分解 z^6+1。**把 z^6+1 寫成三個實二次式之積，並把它們乘開以驗算答案。

4 **正弦。**以類似方法分解 $z^{2n}-1$，再除以 z^2-1，證明

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

延伸閱讀

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章講述單位根（roots of unity）與多項式，配有精美的圖畫。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。收錄這條定理的多個證明，分別來自分析、代數和拓撲，為大學本科生而寫。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。一部關於 $\sqrt{-1}$ 的歷史，包括單位根及其應用。

5.4 正多邊形中的距離

題目

STEP III 2016，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/16-s3-q7`

引子

在半徑為 1 的圓內畫一個正七邊形（regular heptagon）。從其中一個頂點出發，畫出連往其餘各頂點的六條弦（chord），量度它們的長度，再把這六個長度乘起來。答案恰好是 7。若換成正 100 邊形，從一個頂點出發的 99 條弦，長度之積恰好是 100。

這麼簡潔的結果，為甚麼會成立？各條弦的長度本身並不整齊（$2\sin\frac{\pi}{7}$、$2\sin\frac{2\pi}{7}$ 等等）。這道題目說明，這個結果其實是一個簡單代數恆等式在幾何上的投影，這個恆等式就是 $z^n - 1$ 按單位根（roots of unity）所作的因式分解（factorisation）；題目同時說明，平面上的距離就是複數（complex number）的模（modulus）。

動筆之前

想一想 把多邊形的頂點放在 n 次單位根上，即 $X_k = \omega^k$。若 P 是點 z，$|PX_k|$ 用 z 表示是甚麼？那麼所有距離之積又是甚麼？

$|PX_k| = |z - \omega^k|$，而所有距離之積是 $|(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})|$，按題目第一部分，這等於 $|z^n - 1|$。n 個距離之積變成了單獨一個模。餘下的工夫，全在於巧妙地選取 z。

逐步解題

階段 1　因式分解

每個 ω^k 都滿足 $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$，所以 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ 都是 $z^n - 1$ 的根。它們互不相同（它們的輻角（argument）$\frac{2\pi k}{n}$ 各不相同，且都在 0 與 2π 之間），所以它們就是這個首項係數（leading coefficient）為 1 的 n 次多項式的全部 n 個根，於是 $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$。
■

階段 2　垂直平分線上的一點

把圖形旋轉，使得 $X_k = \omega^k$。與 $X_0 = 1$ 和 $X_1 = \omega$ 等距的點，組成 X_0X_1 的垂直平分線（perpendicular bisector），即通過 O 而傾角為 $\frac{\pi}{n}$ 的直線。

想一想　所以 P 就是 $z = te^{\mathrm{i}\pi/n}$，其中 t 是某個實數（可正可負），而 $|OP| = |t|$。z^n 是甚麼？

$z^n = t^n e^{\mathrm{i}\pi} = -t^n$。所以

$$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |z^n - 1| = |-t^n - 1| = |t^n + 1|.$$

若 n 是偶數，$t^n = |t|^n \geq 0$，所以上式等於 $|OP|^n + 1$。 ■

停一停，試一試　n 是奇數時又如何？分開考慮 $t > 0$ 和 $t < 0$ 兩種情況，並說明每種情況在幾何上代表甚麼。

若 n 是奇數，t^n 與 t 同號。

- 若 $t \geq 0$，即 P 與 X_0X_1 的中點位於 O 的同一側，則所求之積是 $|OP|^n + 1$。
- 若 $t < 0$，即 P 位於 O 的另一側（朝向與邊 X_0X_1 相對的頂點），則 $t^n = -|OP|^n$，所求之積是 $\left|1 - |OP|^n\right|$。

當 n 是奇數時，通過 O 而垂直於 X_0X_1 的直線會穿過另一側的一個頂點；在第二種情況下，當 P 就是該頂點（$|OP| = 1$）時，所求之積等於零，這是理所當然的，因為此時其中一個距離是零。

階段 3　從一個頂點出發的弦

想一想　現在 $P = X_0$，其中一個距離 $|X_0X_0|$ 是零，所以 $|z^n - 1| = 0$ 派不上用場。哪一個多項式以 $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ 為根，卻不以 1 為根？

把 $z^n - 1$ 除以 $z - 1$，

$$(z - \omega)(z - \omega^2)\cdots(z - \omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

右邊是一個多項式，所以這個等式對所有 z 都成立，包括 $z = 1$，此時它的值是 n。在

$z = 1$ 處取模，

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = |1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n. \qquad \blacksquare$$

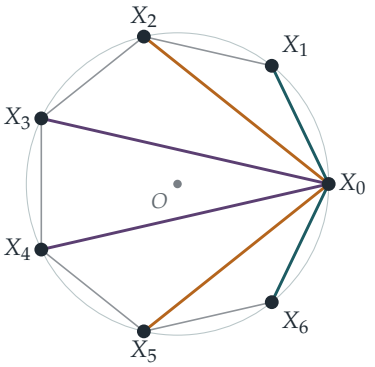


圖 5.4.1　內接於半徑為 1 的圓的正七邊形。從 X_0 出發的六條弦，長度為 $2\sin\frac{k\pi}{7}$，約為 0.868（藍綠色）、1.564（琥珀色）和 1.950（紫紅色），每個長度各出現兩次。它們的積恰好是 7。

回顧

- **距離就是模。**$|PX_k| = |z-\omega^k|$，所以距離之積就是積的模，而這個積有閉合形式（closed form）。
- **利用對稱性選取坐標。**把圖形旋轉，使頂點成為單位根，再利用通過 O 的對稱軸，z^n 便容易計算。
- **先消去零因子，再代入。**一如 Section 5.3，先除去在所關注的點上等於零的因子，代入才行得通。

背後的數學

科茨定理

第 (i) 部分是科茨（Roger Cotes）的一條定理。科茨是劍橋一位才華橫溢的年輕數學家，曾編訂牛頓（Newton）《自然哲學的數學原理》（*Principia*）的第二版，1716 年去世，年僅三十三歲（牛頓曾說：「假如他還在世，我們或許已經學到一點東西了。」）。科茨發現，若 P 位於由 O 出發、通過正 n 邊形一個頂點的射線上，則 P 到各頂點的距離之積是 $\big||OP|^n - 1\big|$；若 P 位於通過某條邊中點的射線上，則這個積是 $|OP|^n + 1$。他沒有用到複數，就憑這個結果把 $x^n \pm 1$ 分解成實二次因式，而這正是他計算有理函數

（rational function）積分時所需要的。這條定理在他去世後，於 1722 年才發表。

正弦之積

由於 $|1-\omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$，第 (ii) 部分說的就是

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

這與 Section 5.3 中的餘弦之積互相配對。另一個相關的積給出 z^n-1 的判別式（discriminant）：所有成對的相異 n 次單位根之間距離的平方，乘起來等於 n^n。判別式量度一個多項式的根彼此相隔多遠，在多項式和數域（number field）的代數理論中佔有核心地位，我們會在第 6 章討論。

靜電學與等距分佈

這個結果還有一個物理上的解讀。把 n 個相等的電荷放在一個圓上；令勢能（potential energy）最小的排列（採用二維靜電學的對數勢）就是正多邊形，而能量所涉及的正是 $\sum \ln|X_jX_k|$，即距離之積的對數。「分佈得盡量疏散」的點，在數值分析（numerical analysis）中十分重要（見 Section 3.6，當中最佳的插值點是由正多邊形經 $x=\cos\theta$ 得來的），在隨機矩陣（random matrix）理論中亦然。

思維技巧

用複數把幾何化為代數

平面上的點是複數，距離是模，正多邊形是單位根。距離之積就變成多項式的模。

經過這樣的轉換，像 z^n-1 的因式分解這類代數恆等式，便可以用來證明一些很難直接看出的幾何事實。

延伸練習

1. **檢查小的情況。**就正方形（$n=4$）和等邊三角形（$n=3$）直接驗證第 (ii) 部分。
2. **通過頂點。**證明：若 P 位於由 O 出發、通過 X_0 的射線上，則 $|PX_0|\times\cdots\times|PX_{n-1}| = \big||OP|^n - 1\big|$。

3 **平均距離。**利用第 (ii) 部分和 Section 3.2 的算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality），證明從 X_0 出發的 $n-1$ 條弦，平均長度至少是 $n^{1/(n-1)}$。就 $n=6$ 求出實際的平均值 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$，並加以比較。

4 **所有的弦。**較難證明：內接於單位圓的正 n 邊形，全部 $\binom{n}{2}$ 條弦的長度之積是 $n^{n/2}$。

延伸閱讀

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。用複數處理幾何，插圖精美。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems***（Mathematical Association of America）。收錄了好幾道關於正多邊形的精巧問題。
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher***（Cambridge University Press）。科茨的傳記，並介紹他的數學工作。

5.5 名不副實的有理角

題目

STEP III 2022，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

引子

中學幾何裏遇到的角，度數通常是整數：30°、45°、60°。它們的餘弦是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\frac{1}{2}$ 這類數。反過來又如何？如果餘弦是個簡單的分數，例如 $\frac{1}{3}$，那麼這個角的度數會不會也是個漂亮的數？

$\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.528779\ldots^\circ$ 這個角在科學中隨處可見。它是正四面體（regular tetrahedron）兩個面之間的夾角，而它的補角 109.47° 則是甲烷分子中兩條化學鍵之間的夾角。本題要證明這個角的度數不是有理數（rational number）：不是 $70\frac{1}{2}$，不是 $\frac{1411}{20}$，也不是任何分數。它的小數展開永不循環。這個看似冷僻的事實，解決了大衛·希爾伯特（David Hilbert）在 1900 年提出的著名問題之一。

動筆之前

想一想 假設 θ 是有理數，設 $\theta = \frac{p}{q}$ 度。試找出一個正整數 k，使得 $\sin(k\theta) = 0$。

取 $k = 180q$：這時 $k\theta = 180p$ 度，是半圈的整數倍，所以 $\sin(k\theta) = 0$。因此，度數為有理數的角，總有某個倍數會落在 180° 的倍數上。要證明 θ 是無理數（irrational number），只需證明沒有任何倍數 $k\theta$ 的正弦為零。第 (ii) 部分的做法是：假如這樣的 k 存在，就取其中最小的一個，然後推出矛盾（contradiction）。這又是 Section 1.3 的良序原理（well-ordering principle）。

逐步解題

階段 1　倍角公式

想一想　寫出 $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$，並提出因子 $\cos^k\theta$。括號內剩下甚麼？

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k = \cos^k\theta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^j \tan^j\theta$。虛部（imaginary part）來自奇數 $j = 2m+1$ 的各項，這時 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}(-1)^m$：

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m+1}\theta \\ &= \sin\theta\cos^{k-1}\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m}\theta.\end{aligned}$$

由於 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$，這就是所求的公式。■實部（real part）來自偶數 $j = 2m$ 的各項，由此得

$$\cos k\theta = \cos^k\theta \left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

階段 2　奇偶性

現在 $\sec\theta = a$ 是奇整數，所以 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$ 是偶整數。而且 θ 嚴格介乎 0° 與 90° 之間，所以 $\sin\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。

想一想　如果 $\sin(k\theta) = 0$，括號 $k - \binom{k}{3}(a^2-1) + \cdots$ 必須等於零。第一項之後的每一項都是 $a^2 - 1$ 的倍數。由此可知 k 有甚麼性質？

括號等於 k 加上若干個偶數 $a^2 - 1$ 的倍數之和。假如 k 是奇數，括號就是奇數，而奇整數不可能等於 0。所以 k 必定是偶數。

於是 $\sin(k\theta) = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\theta)\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$。但 $\tfrac{1}{2}k$ 是比 k 小的正整數，根據 k 的最小性，$\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) \neq 0$。因此 $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$。 ■

階段 3　矛盾

停一停，試一試　取 $m = \tfrac{1}{2}k$，套用餘弦公式。為甚麼 $\cos(m\theta)$ 永遠不可能是零？

根據第 1 步，$\cos(m\theta) = a^{-m}\left(1 - \binom{m}{2}(a^2-1) + \binom{m}{4}(a^2-1)^2 - \cdots\right)$。括號等於 1 加上若干個偶數 $a^2 - 1$ 的倍數，所以它是奇數，自然不等於零。因此 $\cos(m\theta) \neq 0$，與第 2

步矛盾。

所以不存在使 $\sin(k\theta) = 0$ 的正整數 k。（假如有這樣的正整數，其中必有最小的一個，而我們剛剛證明了這個最小的不可能存在。）根據動筆之前的觀察，θ 的度數不可能是有理數。 ■

階段 4 餘切版本

? **想一想** 如果 $\cot\phi = \frac{1}{b}$，$\sec^2\phi - 1$ 是多少？它是偶數嗎？

$\tan\phi = b$，所以 $\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$；由於 b 是偶數，這個數是偶數（其實更是 4 的倍數）。此外 $0° < \phi < 90°$，所以 $\sin\phi$ 和 $\cos\phi$ 都不等於零。完全相同的論證現在同樣適用：如果 k 是使 $\sin(k\phi) = 0$ 的最小正整數，括號 $k - \binom{k}{3}b^2 + \cdots$ 必須等於零，於是 k 必為偶數；然後 $\cos(\frac{1}{2}k\phi) = 0$；但餘弦的括號 $1 - \binom{m}{2}b^2 + \cdots$ 是奇數。這就產生矛盾，所以 ϕ 是無理數。 ■

例如，$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}2 \approx 63.43°$ 是無理數。

回顧

- **有理角的倍數具週期性。**這樣重新表述之後，無理性就變成一個關於所有 k 的 $\sin(k\theta)$ 的命題。
- **奇偶性論證。**以模 2 計算，可知某些整數是奇數，因而不等於零。方法簡單，卻一錘定音。
- **最小反例。**假設有最小的 k，再證明必定有更小的一個（這裏是 $\frac{1}{2}k$），正是第 1 章的良序論證。

背後的數學

無理旋轉

如果 θ 的度數是有理數，不斷重複旋轉 θ，最終會回到起點。如果 θ 是無理數，就永遠不會回到起點，而且會出現奇妙的現象：各點 $k\theta$（以模 360° 計算）會均勻地散佈在整個圓周上，與每一個角都可以任意接近。這就是等分佈定理（equidistribution theorem），由赫爾曼．外爾（Hermann Weyl）、瓦茨瓦夫．謝爾賓斯基（Wacław Sierpiński）和 Piers Bohl 在 1910 年前後各自獨立證明。圖 5.5.1 顯示 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 的首 40 個倍數：它們已經逐漸佈滿圓周，而且永遠不會重複。

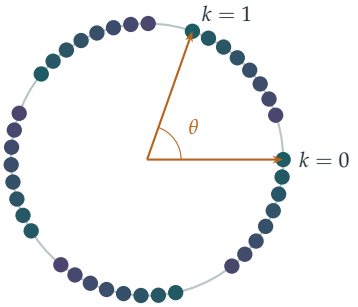


圖 5.5.1　位於角 $k\theta$ 的各點，其中 $k = 0, 1, \ldots, 39$，而 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$（顏色隨 k 增加由藍綠色漸變為紫紅色）。由於 θ 是無理數，沒有任何一點會重複出現，而各點均勻地散佈在整個圓周上。

希爾伯特第三問題

1900 年，大衛．希爾伯特為新世紀列出了二十三個問題。第三個問題是：如果兩個多面體（polyhedron）體積相同，是否總可以把其中一個切成有限多塊多面體，再重新拼合成另一個？（對平面上的多邊形而言，答案是肯定的：這就是 Wallace–Bolyai–Gerwien 定理。）不出一年，希爾伯特的學生馬克斯．德恩（Max Dehn）證明了答案是否定的：正四面體不能切開再重新拼合成體積相同的立方體。德恩的證明為每個多面體賦予一個由其棱長和二面角（dihedral angle）構成的量，現稱為德恩不變量（Dehn invariant），它在切割和重新拼合之下保持不變；立方體的德恩不變量是零，而正四面體的德恩不變量不等於零，原因正是二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 不是 $180°$ 的有理數倍。這恰恰就是本題所證明的事實。

尼雲定理

這個結論可以推到多遠？1956 年，伊凡．尼雲（Ivan Niven）證明：如果 θ 的度數是有理數，而且 $\cos\theta$ 是有理數，那麼 $\cos\theta$ 只能是 0、$\pm\frac{1}{2}$、± 1 其中之一。所以餘弦為有理數的「漂亮」角，就只有 $0°$、$60°$、$90°$、$120°$、$180°$ 以及與它們相關的角。證明用到這個事實：$2\cos\theta$ 是某個整數係數首一多項式（monic polynomial）的根，即代數整數（algebraic integer），也就是 Section 1.3 末尾提到的概念。

思維技巧

以奇偶性證明不等於零

要證明一個整數算式永不爲零，可證明它恆爲奇數：把它以模 2 化簡。

這個簡單的想法與最小反例（minimal counterexample）結合，就證明了一個深刻的事實。以一個小的數為模作化簡，從而排除某個方程成立的可能，是數論中最常用的手法之一，Section 1.5 便是一例。

延伸練習

1 **正四面體。**證明正四面體兩個面之間的夾角是 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$，並證明甲烷分子中兩條化學鍵（由正四面體的中心連到兩個頂點）之間的夾角是 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$。

2 **3–4–5 三角形。**證明 3–4–5 三角形最小的角的度數是無理數。（提示：這個角是 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$；可改寫上述論證，或考慮高斯整數（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ 的各次冪，並證明它們全都不是實數。）

3 **為甚麼 a 要是奇數？**當 $a=2$ 時，論證在哪裏出了問題？$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 是有理數嗎？

4 **尼雲定理的簡單情況。**找出介乎 0° 與 90° 之間、度數為整數而 $\cos\theta$ 為有理數的所有角 θ，並驗證你所列的結果與尼雲定理吻合。

延伸閱讀

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。書中載有關於三角函數有理數值的尼雲定理。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，論希爾伯特第三問題的一章。對德恩的解法有精彩的闡述。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。講述全部二十三個問題背後的故事。

5.6 費馬點

題目

STEP III 2000，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/00-s3-q3`

引子

三條村莊想興建一個把它們全部連接起來的道路網絡，而且路程愈短愈好。交匯處應該設在哪裏？大約在 1640 年，費馬（Pierre de Fermat）提出了這樣一個問題：在三角形內找出使 $PA + PB + PC$ 最小的點 P。托里拆利（Evangelista Torricelli）解決了這個問題：從這一點望向三條邊，所見的角都是 120°。

本題利用複數（complex numbers）來證明這一點的一個漂亮作圖法。在三角形的每條邊上向外作一個等邊三角形（equilateral triangle），再把每個新頂點與原三角形中相對的頂點連起來。這三條直線相交於同一點，即費馬點（Fermat point），而且三條線段的長度都相同，這個長度正是道路總長的最小值。有了複數，再加上一條關於 $e^{\mathrm{i}\pi/3}$ 的恆等式，整件事只需幾行代數運算。

動筆之前

想一想 A、B 和 C 在哪裏？它們的輻角（argument）是多少？OA、OB 和 OC 彼此之間的夾角是多少？

$A = p$ 位於正實軸上（輻角為 0°）。$B = q\alpha^2 = qe^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 的輻角是 120°。$C = -r\alpha = re^{\mathrm{i}\pi}e^{\mathrm{i}\pi/3}$ 的輻角是 240°。因此原點是三角形內的一點，從這一點望向三個頂點，方向兩兩相隔 120°，距離分別是 p、q 和 r。按照這個設定，原點就是費馬點；本題要證明的，是等邊三角形作圖法確實能找到它。

逐步解題

階段 1　關鍵恆等式

$\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$，所以 α 是 $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$ 的一個根。由於 $\alpha \neq -1$，故 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$，即 $1+\alpha^2 = \alpha$。 ■

有兩個推論稍後會用得着：$1-\alpha = -\alpha^2$，以及 $\alpha - \alpha^2 = 1$。此外，$1-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{-\mathrm{i}\pi/3}$，即 α 的共軛複數（complex conjugate）。

階段 2　把等邊三角形看成旋轉

> **想一想**　三角形 CAN 是等邊三角形，頂點按順時針方向標記。假如你站在 C，怎樣從 A 走到 N？試以 $A-C$ 表示 $N-C$。

按順時針方向依次經過 C、A、N，可知點 N 是把 A 繞 C 順時針旋轉（rotation）60° 而得。乘以 $e^{-\mathrm{i}\pi/3} = 1-\alpha$ 相當於順時針旋轉 60°，所以

$$\begin{aligned} N &= C + (1-\alpha)(A-C) = -r\alpha + (1-\alpha)(p+r\alpha) \\ &= (1-\alpha)p + r(\alpha - \alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)p - \alpha^2 r. \end{aligned}$$ ■

（順時針而非逆時針旋轉，會使 N 落在 CA 的另一側，與原點分處兩邊，即在三角形之外。）

> **停一停，試一試**　用同樣的方法求出 L 和 M，並利用第 1 階段的恆等式化簡。

同理，$L = A + (1-\alpha)(B-A)$ 及 $M = B + (1-\alpha)(C-B)$：

$$\begin{aligned} L &= p + (1-\alpha)(q\alpha^2 - p) = \alpha p + (\alpha^2 - \alpha^3)q = \alpha p + (\alpha^2+1)q = \alpha(p+q), \\ M &= q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha - q\alpha^2) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r. \end{aligned}$$

再利用 $1-\alpha = -\alpha^2$，可得 $N = -\alpha^2 p - \alpha^2 r = -\alpha^2(p+r)$。

階段 3　三條通過原點的直線

> **想一想**　比較 $L = \alpha(p+q)$ 與 $C = -r\alpha$。你留意到甚麼？對 M 與 A，以及 N 與 B，也作同樣的比較。

L 是 α 的正數倍，而 C 是 α 的負數倍。所以 L 和 C 分別位於 O 的兩側，並且在同一條通過 O 的直線上；線段 LC 因而通過原點，長度為 $|L-C| = |\alpha|(p+q+r) = p+q+r$。

同樣地，$M = -(q+r)$ 和 $A = p$ 都在實軸上，分別位於 O 的兩側，所以 MA 通過 O，

長度為 $p+q+r$。而 $N=-\alpha^2(p+r)$ 和 $B=q\alpha^2$ 都在通過 O、方向為 α^2 的直線上，並且分處兩側，所以 NB 通過 O，長度為 $p+q+r$。 ■

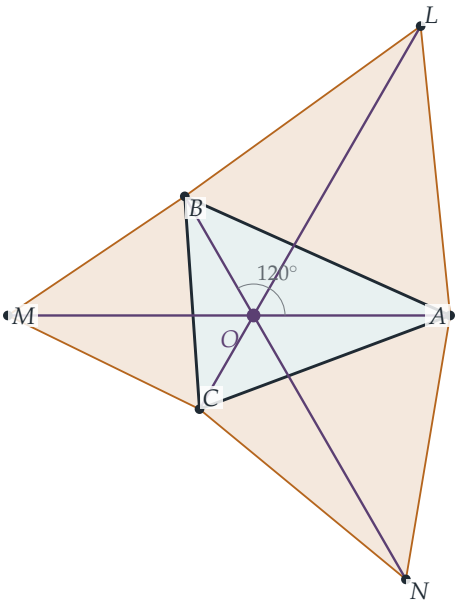


圖 5.6.1　費馬點，其中 $p=2$，$q=1.4$，$r=1.1$。在 ABC 的各邊上向外作等邊三角形（琥珀色）。直線 LC、MA 和 NB（紫紅色）全部通過原點 O，而 ABC 的各邊在該點所對的角均為 120°；每條線段的長度都是 $p+q+r=4.5$。

回顧

- **旋轉即乘法。**作等邊三角形，就是把一個頂點繞另一個頂點旋轉 60°，也就是乘以 $e^{\pm i\pi/3}$。
- **巧選坐標。**把費馬點放在原點，並讓各頂點沿 1、α^2、$-\alpha$ 這三個方向排列，每條算式都隨即大幅簡化。
- **一條恆等式，反覆使用。**每一步化簡都來自 $\alpha^2-\alpha+1=0$ 和 $\alpha^3=-1$。

背後的數學

為甚麼費馬點使距離最小

為甚麼 $PA + PB + PC$ 會在各邊所對的角均為 120° 的那一點取得最小值？以下是一個精彩的論證。把整幅圖繞 B 旋轉 60°，把 A 送到 L'（即 AB 上等邊三角形的頂點），把 P 送到 P'。三角形 BPP' 是等邊三角形，所以 $PB = PP'$，而且 $PA = P'L'$。於是 $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$，這是一條由 L' 到 C 的路徑的長度。它至少等於 $|L'C|$，而等號恰好在路徑成一直線時成立，這種情況出現於 P 處的各個角均為 120° 之時。所以總長度的最小值是 $|LC| = p + q + r$，與題目所得的結果一致。（這個論證成立的前提是三角形的每個角都小於 120°；否則最小值會在鈍角的頂點取得。）

肥皂膜與斯坦納樹

把一個裝有三根小釘（代表 A、B、C）的框架浸入肥皂水中：肥皂膜會令其表面張力能量減至最小，形成三面薄壁，在費馬點以 120° 相交。若有更多的點，最短的連接網絡是一棵斯坦納樹（Steiner tree），其中有額外的交匯點，每個交匯點都有三條邊以 120° 相交。一般而言，求斯坦納樹在計算上十分困難（這是一個 NP 困難（NP-hard）問題），但它們在實際應用中相當重要，例如設計道路網絡、管道網絡以及電腦晶片上的線路。

拿破崙定理

同一個圖形中還藏着另一件瑰寶：在任意三角形的三邊上所作的三個等邊三角形，它們的中心構成一個等邊三角形。傳統上這個結果歸功於拿破崙（Napoleon Bonaparte）（他是一位熱衷數學的業餘愛好者），不過並無證據顯示這是他發現的。這個定理同樣可以用複數簡短地證明，用到的正是 $1 + \alpha^2 = \alpha$。

思維技巧

選擇切合問題的坐標

把最重要的點放在原點，並按照問題的對稱性來安排各個方向。選得好，代數運算幾乎可以變得輕而易舉。

在這裏，原點就是費馬點，而三個頂點分別位於 -1 的三個立方根的方向上（或相差一個正負號）。若改用其他坐標，同樣的計算會繁複得多。

延伸練習

1 **檢查字母次序。**證明若各等邊三角形的頂點按逆時針方向標記（即向內作），則三條直線一般不會通過 O。

2 **拿破崙定理。**證明等邊三角形 ABL 的中心是 $\frac{1}{3}(A+B+L)$。利用上文的表達式，證明三個中心構成一個等邊三角形。

3 **最小值。**取 $p=2$，$q=1.4$，$r=1.1$，分別就 P 位於每個頂點以及位於形心（centroid）$\frac{1}{3}(A+B+C)$ 的情況計算 $PA+PB+PC$，並驗證所得的值全部大於 4.5。

4 **等邊三角形的判別法。**證明 z_1、z_2、z_3 構成等邊三角形（不論方向），當且僅當 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$。

延伸閱讀

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 7 章討論費馬點、斯坦納樹和肥皂膜。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。以複數證明多個幾何定理，程度正好與本節相若。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 1 章包括拿破崙定理及其他幾何結果。

5.7 作為映射的複指數函數

題目

STEP II 1997，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/97-s2-q5`

引子

你所認識的指數函數（exponential function）是一條曲線 $y = e^x$。但複變數的函數卻無法畫成曲線：它的輸入是平面上的一點，輸出也是平面上的一點。要想像這樣的函數，應把它看成一個映射（map），也就是一個變換（transformation）：它把一個平面上的每一點搬到另一個平面上的某一點，沿途把圖形拉伸、彎曲。

題目中的公式是 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = e^{u+\mathrm{i}v} = e^w$。作為映射來看，複指數函數（complex exponential）做了一件奇妙的事：它把平面上的一條水平帶狀區域捲成整個平面（除去原點），把鉛垂線繞成圓，把水平線鋪成射線。又因為它是繞圈捲起來的，所以它不是一對一（one-to-one）的：每一點都有無窮多個點映到它那裏。這正是複對數（complex logarithm）「多值」（multi-valued）的原因，也是複分析（complex analysis）最早帶來的驚奇之一。

動筆之前

想一想 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ 的模（modulus）和輻角（argument）用 u 和 v 表示是甚麼？

$|z| = e^u$，而 $\arg z = v$（可相差 2π 的倍數）。所以 w 的實部 u 以指數方式控制與原點的距離，而虛部 v 則控制方向。單憑這一點觀察，題目幾乎每一部分都能解答。

逐步解題

階段 1　解 $e^w = \mathrm{i}e$

想一想　$\mathrm{i}e$ 的模和輻角是甚麼？

$|\mathrm{i}e| = e$，而 $\arg(\mathrm{i}e) = \frac{\pi}{2}$。所以我們需要 $e^u = e$，得 $u = 1$，並且 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$，其中 k 為任意整數。方程的解為

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

解有無窮多個，沿鉛垂方向每隔 2π 有一個。

階段 2　格線的像

在鉛垂線 $u = c$ 上，$|z| = e^c$ 固定不變，而 v 則在變動：它的像（image）是以原點為圓心、半徑為 e^c 的圓，當 v 取遍所有實數時，這個圓被繞了無窮多圈。

在水平線 $v = d$ 上，$\arg z = d$ 固定不變，而 $|z| = e^u$ 取遍所有正值：它的像是由原點出發、方向角為 d 的開射線（半直線），不包括原點本身。直線 $v = d$ 與 $v = d + 2\pi$ 給出同一條射線。

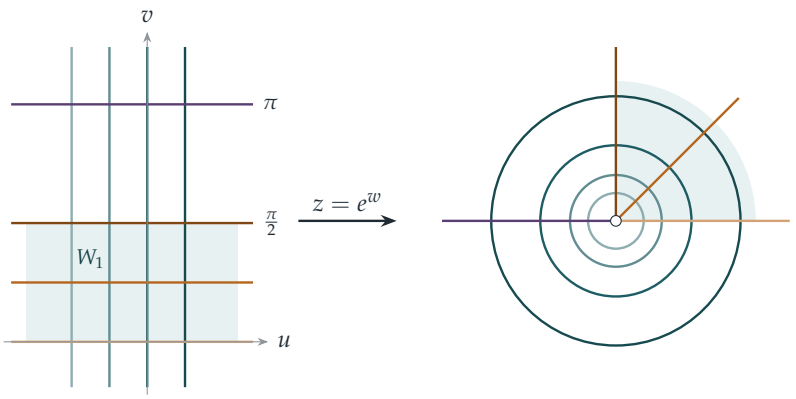


圖 5.7.1　把複指數函數看成映射。w 平面上的鉛垂線 $u = c$（藍綠色）映到半徑為 e^c 的圓；水平線 $v = d$（琥珀色、紫紅色）映到方向角為 d 的射線。陰影帶狀區域 $W_1 = \{0 < v < \frac{\pi}{2}\}$ 恰好映滿第一象限。留意兩幅圖中的格線都相交成直角：這個映射保持角度不變。原點（空心圓圈）永遠不會被映到。

階段 3　一對一的部分

想一想 哪些點 w 會映入第一象限 $x>0$、$y>0$？為甚麼這個集合太大，不能與該象限構成一一對應（one-to-one correspondence）？

z 位於開的第一象限，當且僅當 $\arg z$ 嚴格介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間（模 2π），而模可取任意值。所以 w 必須滿足 $0<v<\frac{\pi}{2}$ 或 $2\pi<v<\frac{5\pi}{2}$ 或 ...：共有無窮多條水平帶狀區域，每一條都映滿整個象限。任取其中一條，它都與該象限一一對應，因為在一條帶狀區域之內，u 和 v 由 $|z|$ 和 $\arg z$ 唯一確定。所以我們可以取

$$W_1=\{u+\mathrm{i}v:0<v<\tfrac{\pi}{2}\},\qquad W_2=\{u+\mathrm{i}v:2\pi<v<\tfrac{5\pi}{2}\}.$$

停一停，試一試 現在試在 w 平面上找出兩個集合，使它們各自與去心圓盤（punctured disc）$0<|z|<1$ 一一對應。

$|z|<1$ 即 $e^u<1$，亦即 $u<0$；而每一個輻角都必須恰好被覆蓋一次，所以 v 的取值範圍應是一個長度恰為 2π 的區間，包括其中一個端點而不包括另一個。例如

$$W_3=\{u+\mathrm{i}v:u<0,\ 0\le v<2\pi\},\qquad W_4=\{u+\mathrm{i}v:u<0,\ -\pi<v\le\pi\}.$$

這些都是半帶狀區域，一條邊包括在內，另一條邊不包括在內。（若兩條邊都包括在內，正實軸上的點便會被映到兩次；若兩條邊都不包括，這些點便會被遺漏。）■

回顧

- **模和輻角把變數分開。**$|e^w|=e^{\operatorname{Re}w}$，而 $\arg e^w=\operatorname{Im}w$，所以 w 的實部和虛部分別獨立地控制距離和方向。
- **把複函數想像成映射。**追蹤格線被映到哪裏，便能清楚看見一個無法畫成圖像的函數的面貌。
- **周期性破壞單射性（injectivity）。**$e^{w+2\pi\mathrm{i}}=e^w$，所以這個映射是多對一的，必須限制在一條高度為 2π 的帶狀區域上，才有反函數。

背後的數學

複對數

在實數線上，ln 是 exp 的反函數。在複平面上，對每一個 $z\neq 0$，方程 $e^w=z$ 都有無窮多個解 w，彼此相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的倍數，所以「$\log z$」並不是單獨一個數。要得到一個真正的函數，就必須選定一個分支（branch），也就是選定一條像 W_3 或 W_4 那樣的帶狀

區域：*主分支*（principal branch）取 $-\pi < \arg z \le \pi$。每一個分支都必然在某處有跳躍，跳躍發生在由原點出發的一條射線上，這條射線稱為*分支割線*（branch cut）。黎曼（Bernhard Riemann）在 1851 年的博士論文中提出了解決辦法：不再堅持對數函數要定義在一個平面上。它其實定義在一道無窮的螺旋樓梯上，即一個*黎曼曲面*（Riemann surface）；在這個曲面上，對數函數是單值而且光滑的。時至今日，黎曼曲面在幾何、數論和弦論中都佔有核心地位。

角度保持不變

再看一次圖 5.7.1。鉛垂和水平的格線相交成直角，它們變成的圓和射線也是如此。這並非巧合：凡是複函數的導數不為零之處，該函數都會保持曲線之間的夾角不變。這樣的映射稱為*保角*（conformal）映射。在局部範圍內，保角映射不過是一次旋轉加上一次縮放，而這正是乘以複數 $f'(z)$ 所起的作用。保角映射可用來解決流體流動、靜電學和熱傳導的問題，方法是把一個複雜的區域變換成一個答案已知的簡單區域。

麥卡托地圖

這裏有一個意想不到的發現，把本節與 Section 4.8 連繫起來。麥卡托（Gerardus Mercator）在 1569 年繪製的地圖，設計的目的是令羅盤方位恆定的航線成為一條直線，這就要求地圖保持角度不變。如果你先把地球以球極投影（stereographic projection）的方式（從北極出發）投影到一個平面上，然後取複對數，所得的結果恰好就是麥卡托投影：經線變成鉛垂線，緯線變成水平線，正如射線和圓在 log 之下變成水平線和鉛垂線一樣。把本節的指數映射倒過來運行，就是航海圖背後的數學。

思維技巧

把函數想像成變換

當一個函數無法畫成圖像時，就把它所做的事畫出來：取一組由簡單曲線組成的格網，看看它們被映到哪裏。

對於複函數，水平線和鉛垂線的像，或者圓和射線的像，往往已能說明一切。這種着眼於映射如何改變圖形的思考方式，貫穿整個幾何與分析。

延伸練習

1 **解方程。**求所有滿足 $e^w = -1$ 的複數 w，以及所有滿足 $e^w = 1 + \mathrm{i}$ 的 w。

2 **正方形的像。**求頂點為 0、1、$1+\mathrm{i}$ 和 i 的正方形在 $z = e^w$ 之下的像，並畫出草圖。

3 **直角。**直接證明圓 $|z| = e^c$ 與射線 $\arg z = d$ 相交成直角，並解釋為甚麼這與直線 $u = c$ 和 $v = d$ 互相垂直是一致的。

4 **平方。**設 c 和 d 為非零實數。求直線 $x = c$ 和 $y = d$ 在映射 $z \mapsto z^2$ 之下的像。證明它們都是拋物線，並且凡相交之處都相交成直角。（若 $c = 0$ 或 $d = 0$，情況會怎樣？）

延伸閱讀

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章和第 4 章以精彩的插圖講解指數函數、對數函數和保角映射。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（Oxford University Press）。一本清晰易懂的大學本科入門教材。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis***（Cambridge University Press）。另一本出色的本科入門書，着重幾何觀點。

5.8 圓盤中隱藏的距離

題目

STEP III 2013，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/13-s3-q6`

引子

乍看之下，這只是一道運算模（modulus）和共軛（conjugate）的練習，最後得出一條模樣古怪的不等式。為甚麼會有人關心 $\frac{|z-w|}{|1-zw^*|}$ 呢？

因為它是一個距離。它不是 z 與 w 之間的普通距離，而是另一種幾何中的距離：在這種幾何裏，單位圓盤（unit disc）本身就是一個無限大的完整宇宙，直線是圓弧，三角形的內角和小於 180°。這就是*雙曲幾何*（*hyperbolic geometry*）。兩千年來，人們一直試圖證明歐幾里得（Euclid）的平行公設（parallel postulate），到了十九世紀才發現這種幾何；而本題的不等式，原來正是它的三角不等式（triangle inequality），只是喬裝了一番。更令人意外的是，不等式的右邊正是狹義相對論（special relativity）中的速度相加公式，我們在 Section 3.8 已經見過。

動筆之前

? **想一想** 怎樣從圖形看出 $|z-w| \le |z|+|w|$？（把 z 和 $-w$ 想成向量。）

$z-w = z+(-w)$。先把 z 畫成由原點出發的箭嘴，再把 $-w$ 畫成由 z 的尖端出發的箭嘴。由原點指向終點的箭嘴就是 $z-w$，三支箭嘴組成一個三角形，邊長分別為 $|z|$、$|w|$ 和 $|z-w|$。三角形任何一邊的長度都不超過另外兩邊之和。

另外要記得，對任何複數 a 都有 $|a|^2 = aa^*$。這樣就可以把題目中每一個模都化為代數運算。

逐步解題

階段 1　展開各個模

想一想　展開 $|z-w|^2=(z-w)(z^*-w^*)$，再與 $(|z|+|w|)^2$ 比較。

$|z-w|^2=zz^*-zw^*-z^*w+ww^*=|z|^2+|w|^2-zw^*-z^*w$。另一方面，$(|z|+|w|)^2-E=|z|^2+2|z||w|+|w|^2-zw^*-z^*w-2|zw|$，而由於 $|z||w|=|zw|$，兩者相等。 ■

$E=(zw^*)+(zw^*)^*+2|zw|=2\,\mathrm{Re}(zw^*)+2|zw|$，這是實數。而且根據三角不等式，$E=(|z|+|w|)^2-|z-w|^2\geq 0$。 ■

階段 2　第二條恆等式

$|1-zw^*|^2=(1-zw^*)(1-z^*w)=1-zw^*-z^*w+|z|^2|w|^2$，而 $(1+|zw|)^2-E=1+2|zw|+|zw|^2-zw^*-z^*w-2|zw|$，兩者相等。 ■

階段 3　不等式

想一想　設 $A=(|z|+|w|)^2$ 和 $B=(1+|zw|)^2$。把不等式兩邊平方後，它就是 $\frac{A-E}{B-E}\leq\frac{A}{B}$。這在甚麼時候成立？

所求不等式的兩邊都是非負的，所以它等價於平方後的不等式 $\frac{A-E}{B-E}\leq\frac{A}{B}$。假設 $B-E=|1-zw^*|^2>0$，兩邊乘開：

$$(A-E)B\leq A(B-E)\iff -EB\leq -EA\iff E(B-A)\geq 0.$$

由於 $E\geq 0$，只要 $B\geq A$，即 $1+|zw|\geq|z|+|w|$，上式便成立。

停一停，試一試　證明 $1+|z||w|-|z|-|w|$ 可以因式分解。它在甚麼時候非負？

$1+|z||w|-|z|-|w|=(1-|z|)(1-|w|)$。若 $|z|>1$ 且 $|w|>1$，兩個因式都是負數，乘積為正。所以 $B\geq A$，不等式成立。 ■

若改為 $|z|<1$ 且 $|w|<1$，兩個因式都是正數，乘積同樣為正，同一個論證依然適用：**是的**，不等式在這個情況下也成立。（在這兩個情況下都有 $|zw^*|\neq 1$，所以 $1-zw^*\neq 0$，左邊有定義。）不等式可能不成立的，是混合的情況：一點在單位圓內，另一點在單位圓外。

回顧

- $|a|^2 = aa^*$。每一條恆等式都是由展開共軛的乘積而來。這是用代數方法處理模的標準做法。
- **歸結為一個量的正負。**平方並交叉相乘之後，整條不等式只取決於 $(1-|z|)(1-|w|)$ 的正負。
- **檢查其他情況。**最後一問考慮 $|z|, |w| < 1$；同一個因式分解立即給出答案。

背後的數學

非歐幾里得幾何

兩千年來，數學家一直試圖由歐幾里得的其他公理，證明他的第五公設（過直線外一點，恰好有一條直線與該直線平行）。在 1820 和 1830 年代，羅巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）、鮑耶（János Bolyai）和（私下研究的）高斯（Gauss）意識到這是辦不到的：存在一種完全相容的幾何，其中有無限多條平行線。1882 年，龐加萊（Henri Poincaré）在單位圓盤內找到了這種幾何的一個優美模型。點就是開圓盤內的點；「直線」是直徑，以及與邊界圓成直角相交的圓弧；而 z 與 w 之間的距離是

$$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\rho(z,w), \qquad \text{其中} \qquad \rho(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-zw^*|}.$$

當一點趨近邊界圓時，它與圓心的距離趨向無限大：這個圓盤是一整個無限的平面，只是透過一塊令影像變形的透鏡來觀看。

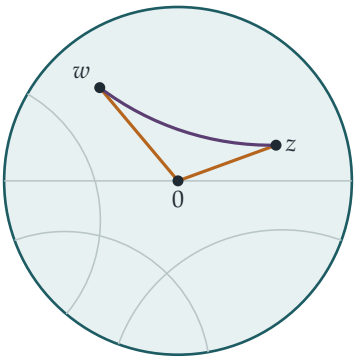


圖 5.8.1 龐加萊圓盤（Poincaré disc）。雙曲「直線」是直徑，或與邊界成直角相交的圓弧（灰色）。以 0、z 和 w 為頂點的雙曲三角形，有兩條邊沿着直徑（琥珀色），一條邊沿着圓弧（紫紅色）。題目中的不等式說明，以雙曲距離計算，紫紅色的邊不會比另外兩條邊加起來更長。

喬裝了的三角不等式

對於 $|z|, |w| < 1$，題目所證明的其實是以下結果。設 $|z| = \tanh a$ 和 $|w| = \tanh b$，則由 0 到 z 和 w 的雙曲距離分別是 $2a$ 和 $2b$。根據 Section 3.8 中 tanh 的加法公式，

$$\frac{|z| + |w|}{1 + |zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b).$$

所以該不等式就是 $\tanh\big(\frac{1}{2}d(z,w)\big) \le \tanh(a+b)$，即

$$d(z,w) \le 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

這就是雙曲距離的三角不等式（圖 5.8.1）。相對論的速度相加公式與雙曲幾何，骨子裏是同一回事：狹義相對論中所有可能速度組成的集合，配上適當的距離概念，就是一個雙曲空間。我們會在 Section 7.6 再談這一點。

圓盤的對稱

為甚麼 ρ 是合適的量？對於 $|a| < 1$，映射 $z \mapsto \dfrac{z - a}{1 - a^* z}$ 把單位圓盤映到自身，保持雙曲距離不變，並把 a 移到圓心。它們是平移在雙曲幾何中的對應物，而 $\rho(z,w)$ 正是把 w 移到圓心時的 $|$映射後的$z|$。這些莫比烏斯變換（*Möbius transformation*）是複分析（complex analysis）的核心課題。艾雪（M. C. Escher）的木刻版畫《圓極限》（*Circle Limit*），靈感來自數學家考克斯特（H. S. M. Coxeter）的一幅圖；畫中以全等的魚和天使鑲嵌（tiling）龐加萊圓盤，它們愈近邊緣便愈小，因為雙曲距離在那裏會無限增大。

思維技巧

問一問算式有甚麼意義

當某個代數式不斷出現時，問一問它是否有某種意義：一個距離、一個角、一個概率、一種對稱。

在這裏，一個古怪的模之比原來是另一種幾何中的距離，而一條古怪的不等式原來是它的三角不等式。認出當中的意義，就能解釋結果為何成立，以及它通往何處。

延伸練習

1 **數值驗算。**取 $z = \frac{1}{2}$ 和 $w = -\frac{1}{2}$。計算不等式的兩邊。然後計算雙曲距離 $d(z,0)$、$d(0,w)$ 和 $d(z,w)$，並驗證三角不等式在這裏取等號。為甚麼？

2 **混合的情況。**求滿足 $|z| < 1 < |w|$ 的 z、w，使不等式不成立。

3 **等距映射（isometry）。**設 $f(z) = \dfrac{z - a}{1 - a^{*}z}$，其中 $|a| < 1$。證明當 $|z| = 1$ 時必有 $|f(z)| = 1$，並且 $f(a) = 0$。證明 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$。

4 **無限近在咫尺。**證明由 0 到 r（其中 $0 < r < 1$）的雙曲距離是 $\ln \frac{1+r}{1-r}$，並且當 $r \to 1$ 時它趨向無限大。一點要多接近邊界，才會與圓心相距雙曲距離 10？

延伸閱讀

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” lecture notes**（華威大學 University of Warwick，可免費取得）。一份清晰的入門課程講義，由龐加萊圓盤講起。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（牛津大學出版社 Oxford University Press）。由歐幾里得到愛因斯坦（Einstein）的非歐幾里得幾何史。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（牛津大學出版社 Oxford University Press）。第 6 章講述非歐幾里得幾何和莫比烏斯變換，並配有精美的插圖。

我們學到了甚麼

本章開首，我們談到卡爾達諾（Cardano）那個令人不安的發現：要得到實數答案，中途可能非用虛數不可。我們也提出了三個問題：複數（complex number）怎樣幫助我們解決實數問題？單位根（roots of unity）有何特別之處？複函數（complex function）是甚麼模樣？以下是本章八道題目所揭示的答案。

1. 複數怎樣幫助我們解決實數問題？

一次又一次，關於實數的事實，取道複平面（complex plane）便有簡短的證明。

- **角變成乘積。**梅欽（Machin）的 π 公式，說的其實是 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$ 是 $239-\mathrm{i}$ 的實數倍，只需整數運算便可驗證（Section 5.1）。
- **計數變成取平均。**每隔三項取一個二項式係數（binomial coefficient）所得的和，來自在三次單位根處計算 $(1+x)^n$ 的值（Section 5.2）。
- **三角函數的乘積變成多項式的值。**等間隔角的餘弦之積，來自把 $z^{2n}+1$ 因式分解，再代入 $z=\mathrm{i}$（Section 5.3）。
- **幾何變成代數。**距離變成模（modulus），所以由正 n 邊形的一個頂點引出的各條弦，其長度之積是 $|1+1+\cdots+1|=n$（Section 5.4）；旋轉變成乘法，所以費馬點（Fermat point）的作圖化簡為恆等式 $1+\alpha^2=\alpha$（Section 5.6）。
- **由棣美弗定理推出無理性。**展開 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k$，再從奇偶性（parity）着手論證，便知 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 的度數不是有理數；這正是德恩（Dehn）解決希爾伯特（Hilbert）第三問題的關鍵事實（Section 5.5）。

2. 單位根有何特別之處？

n 次單位根是正 n 邊形的頂點，是最簡單的多項式 z^n-1 的根，並且在乘法之下構成一個羣（group）。這三個事實合起來，解釋了它們為何無處不在。由於它們均勻地分佈在一個圓上，所以總和為零；Section 5.2 的篩選法由此而來，推而廣之就是離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）。由於它們是 z^n-1 的根，所以遍取它們的乘積，就是簡單多項式的值（Section 5.3、Section 5.4）。又由於它們對乘法封閉，單位根的冪會循環往復，而像 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 這樣的角，欠缺的正是這一點（Section 5.5）。到了第 6 章，單位根會成為代數的核心，並通往伽羅瓦理論（Galois theory）。

3. 複函數是甚麼模樣？

在 Section 5.7 中，我們把 e^w 想像成一個把帶狀區域捲成整個平面的映射：它把鉛垂線變成圓，把水平線變成射線，並且無窮無盡地一圈圈繞下去，所以對數是多值的。我們看到它保持角度不變，是共形（conformal）映射的第一個例子，也是麥卡托（Mercator）海圖背後的原理。在 Section 5.8 中，一個古怪的不等式原來就是雙曲幾何（hyperbolic geometry）的三角不等式（triangle inequality）；在雙曲幾何裏，單位圓盤是一個無限的平面，直線是圓弧，而距離則按相對論的速度相加公式合成。

4. 複數工具箱

方法	用於何處
相乘時輻角（argument）相加	梅欽公式（5.1）
檢查 2π 的倍數	梅欽公式（5.1）
對單位根取平均	每隔三項的係數（5.2）
按根因式分解，然後代入	餘弦乘積（5.3）；弦（5.4）
約去一個等於零的因式	5.3；5.4
棣美弗定理（De Moivre's theorem）	倍角公式（5.5）
奇偶性與最小反例（minimal counterexample）	無理角（5.5）
以乘法表示旋轉	等邊三角形（5.6）
映射網格	指數映射（5.7）
$\lvert a\rvert^2 = aa^*$	龐加萊（Poincaré）圓盤不等式（5.8）

下一步

- 單位根是第 6 章的主角，當中包括 Section 6.1 的分圓多項式（cyclotomic polynomial），以及 Section 6.2 中高斯（Gauss）的正 17 邊形作圖。
- 雙曲幾何、tanh 與相對論之間的聯繫，在 Section 7.6 中有進一步的探討。
- 在梅欽公式中出現過的高斯整數（Gaussian integer），是 Section 1.6 的主題。

如果你想在入讀大學之前再進一步

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（《複分析：可視化方法》）：有史以來最優美的複數著作，圖畫豐富。由第 1 章讀起。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（《虛數的故事》）：$\sqrt{-1}$ 的歷史，由卡爾達諾講到現代物理。

- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（《複數與幾何》）：用複數處理歐幾里得幾何，程度與本章完全相同。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（《複分析導論》）：讓你初步認識大學的複分析課程。

卡爾達諾認為他的虛數量既精微又無用。五個世紀之後，在數學或物理之中，已經很難找到一個沒有它們蹤影的角落。本章的啟示，正是阿達馬（Hadamard）的那句話：當一個關於實數的問題很難時，不妨試試走出實數線。複平面更加廣闊，許多看似複雜的事情，在那裏原來都很簡單。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：只列出結果和關鍵步驟，方便你核對自己的做法。請先認真做過每道練習，然後才看答案。

5.1 梅欽公式

1. $(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 34+14\mathrm{i}$，其輻角（argument）為 $\tan^{-1}\frac{7}{17}$。它的輻角同時也是 $-2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}$。

2. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$，輻角為 $\frac{\pi}{4}$。

3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i}) = (8+6\mathrm{i})(7+\mathrm{i}) = 50+50\mathrm{i}$。

4. 這些級數（series）都是交錯級數，所以誤差小於第一個被略去的項。對於 $16\tan^{-1}\frac{1}{5}$，需要被略去的項 $\frac{16}{(2N+1)5^{2N+1}}$ 小於 5×10^{-21}，即要取 $N=14$ 項；對於 $4\tan^{-1}\frac{1}{239}$，取 4 項便足夠。用計算機可得 $16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right)-\frac{4}{239}\approx3.14162$。

5.2 單位根篩選法

1. $(1+1)^n+(1-1)^n = 2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots\right)$，所以當 $n\ge1$ 時，該和為 2^{n-1}。

2. 先分別乘以 ω^{-1} 和 ω^{-2}，然後取平均：$\frac{1}{3}\left(2^n+\omega^{-1}(1+\omega)^n+\omega^{-2}(1+\omega^2)^n\right)$。由於 $1+\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，上式等於 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$。第三個剩餘類（residue）給出 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$，而三個餘弦 $\cos x+\cos(x-\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ 之和為 0。

3. 對 $j=0,1,2,3$ 取 $(1+\mathrm{i}^j)^n$ 的平均：該和為 $\frac{1}{4}\left(2^n+(1+\mathrm{i})^n+0+(1-\mathrm{i})^n\right)$，而 $(1\pm\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\pi/4}$。

4. 按元素個數計：$\frac{1}{3}(2^{12}+2\cos4\pi) = 1366$。按元素之和計：$\prod(1+\omega^j)$ 中，2、$1+\omega$ 和 $1+\omega^2$ 這三種因子各出現四次，而 $(1+\omega)(1+\omega^2)=1$，所以該乘積等於 16（在 ω^2 處的乘積亦然）。所求的數目為 $\frac{1}{3}(4096+16+16)=1376$。

5.3 因式分解 $z^{2n}+1$

1. 在第 (ii) 部分取 $n=7$，得 $\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14} = \frac{7}{64}$，而三個餘弦均為正數。至於第二個結果，設 $c=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$。則 $8c\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$，所以 $c=-\frac{1}{8}$；另外 $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$。

2. 在 $z=1$ 處，$2=\prod\bigl(2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\bigr)=\prod 4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}$，所以各正弦（全為正數）的乘積為 $\sqrt{2/4^n}=2^{\frac12-n}$。

3. $z^6+1=(z^2-\sqrt3 z+1)(z^2+1)(z^2+\sqrt3 z+1)$；首尾兩個因式相乘得 z^4-z^2+1。

4. $z^{2n}=1$ 的根是 ±1 以及共軛（conjugate）對 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\pi/n}$，其中 $1\le k\le n-1$，所以 $\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\bigr)$。令 $z\to1$：左邊趨向 n，右邊則為 $\prod 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$。

5.4 正多邊形中的距離

1. 正方形：$\sqrt2\times2\times\sqrt2=4$。三角形：$\sqrt3\times\sqrt3=3$。

2. 設 $X_k=\omega^k$，並把 $P=r$ 放在正實軸上。則 $\prod|r-\omega^k|=|r^n-1|$。

3. 由算術幾何平均不等式（AM–GM），平均值不小於幾何平均（geometric mean）$n^{1/(n-1)}$。當 $n=6$ 時，各弦（chord）的長度為 1、$\sqrt3$、2、$\sqrt3$、1，平均值為 $\frac{4+2\sqrt3}{5}\approx1.493$，而 $6^{1/5}\approx1.431$。

4. 由第 (ii) 部分，從每個頂點出發的 $n-1$ 條弦的乘積為 n。對全部 n 個頂點相乘得 n^n，其中每條弦都計算了兩次，所以 $\binom{n}{2}$ 條弦的乘積為 $n^{n/2}$。

5.5 名不副實的有理角

1. 取頂點 $(1,1,1)$、$(1,-1,-1)$、$(-1,1,-1)$、$(-1,-1,1)$，中心為 O。兩個鍵向量的點積（dot product）為 -1，長度均為 $\sqrt3$，所以鍵角（bond angle）為 $\cos^{-1}(-\frac13)$。一個面的向外法向量（outward normal），是指向對面頂點的向量的負向量，所以兩個向外法向量之間的夾角同樣是 $\cos^{-1}(-\frac13)$，而兩個面之間的夾角是它的補角（supplement），即 $\cos^{-1}\frac13$。

2. 設 $(4+3\mathrm{i})^k=a_k+\mathrm{i}b_k$。由於 $4+3\mathrm{i}$ 及其共軛是 $t^2-8t+25$ 的根，故 $b_{k+1}=8b_k-25b_{k-1}\equiv3b_k\pmod5$，而 $b_1=3$，所以 $b_k\equiv3^k\not\equiv0\pmod5$。因此沒有任何一個冪是實數。假如該角的度數是有理數（rational number），它的某個倍數便會是 180° 的倍數，相應的冪就會是實數。

3. 當 $a=2$ 時，$a^2-1=3$ 是奇數，所以奇偶性（parity）論證不成立。事實上 $\cos^{-1}\frac12=60^\circ$ 的確是有理數；取 $k=3$ 時，正弦的括號部分為 $3-\binom33\cdot3=0$。

4. 0°、60° 和 90°，餘弦值分別為 1、$\frac12$ 和 0。尼雲定理（Niven's theorem）指出：在 180° 的有理數倍處，cos 的有理數值只有 0、$\pm\frac12$ 和 ±1。

5.6 費馬點

1. 向內作時，各頂點為 $A+(1-\bar\alpha)(B-A)$，餘此類推。在 $p=2$、$q=1.4$、$r=1.1$ 的例子中，通過 C 和新的 L 的直線並不經過 O（檢驗條件 $\operatorname{Im}(\bar CL')=0$ 不成立），

另外兩條直線也是如此。

2. 等邊三角形（equilateral triangle）的中心就是它的形心（centroid）。設 $L = \alpha(p+q)$、$M = -(q+r)$ 和 $N = -\alpha^2(p+r)$，則 ABL、BCM、CAN 的中心 G_1、G_2、G_3 滿足 $G_3 - G_1 = \alpha(G_2 - G_1)$（利用 $\alpha^2 = \alpha - 1$ 展開），這說明 $G_1G_2G_3$ 是等邊三角形。在該例子中，它的邊長為 $\frac{p+q+r}{\sqrt{3}} \approx 2.598$。

3. $PA + PB + PC$ 在 A 處約為 5.68，在 B 處約為 5.13，在 C 處約為 4.89，在形心處約為 4.54；全部都大於 4.5。

4. 等邊（兩種定向（orientation）之一）即是 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ 或 $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$，其中 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$。利用 $\omega + \omega^2 = -1$，兩式左邊的乘積為 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1$。

5.7 作為映射的複指數函數

1. 當 $w = (2k+1)\pi\mathrm{i}$ 時 $\mathrm{e}^w = -1$；當 $w = \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ 時 $\mathrm{e}^w = 1 + \mathrm{i}$，其中 k 為整數。

2. 區域 $1 \le |z| \le \mathrm{e}$、$0 \le \arg z \le 1$（一弧度）：圓環（annulus）的一部分。底邊映到實軸上的 $[1, \mathrm{e}]$，右邊映到半徑為 e 的一段圓弧，頂邊映到角度為 1 的一段徑向線段，左邊映到單位圓的一段圓弧。

3. 射線沿半徑方向；圓的切線則與半徑垂直。這與直線 $u = c$ 和 $v = d$ 的情況吻合，因為 e^w 保持角度不變（它的導數永不為 0）。

4. $(x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$。直線 $x = c$ 映到 $u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}$，而 $y = d$ 映到 $u = \frac{v^2}{4d^2} - d^2$：分別是開口向左和向右的拋物線（parabola），兩者的焦點（focus）都在 0。令兩式相等，得 $v^2 = 4c^2d^2$，所以它們相交兩次，交點為 $u = c^2 - d^2$、$v = \pm 2cd$。在 $v = 2cd$ 處（即兩直線交點 $c + \mathrm{i}d$ 的像），斜率 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ 分別為 $-\frac{d}{c}$ 和 $\frac{c}{d}$；在 $v = -2cd$ 處則為 $\frac{d}{c}$ 和 $-\frac{c}{d}$。兩種情況下乘積都是 -1。（第二個交點既是第一條直線上 $c - \mathrm{i}d$ 的像，也是第二條直線上 $-c + \mathrm{i}d$ 的像：平方把 z 和 $-z$ 映到同一點。）若 $c = 0$，$x = 0$ 的像是射線 $u \le 0$、$v = 0$；若 $d = 0$，$y = 0$ 的像是射線 $u \ge 0$、$v = 0$：這些都不是拋物線。只要兩直線的交點不在 0，射線仍會與另一個像成直角相交；但若 $c = d = 0$，兩個像都落在實軸上：在 0 處這個映射把角度加倍（它的導數 $2z$ 在該處為零），所以兩軸之間的直角變成了平角。

5.8 圓盤中隱藏的距離

1. 兩邊都等於 $\frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$。於是 $d(z,0) = d(0,w) = 2\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \ln 3$，而 $d(z,w) = 2\tanh^{-1}\frac{4}{5} = \ln 9$，所以等號成立：0 位於由 z 到 w 的雙曲線段（hyperbolic line segment，這裏是一條直徑）上。

2. 由第 (i) 和第 (ii) 部分，當 $E > 0$ 時，該不等式等價於 $|z| + |w| \le 1 + |zw|$，即 $(1 - |z|)(1 - |w|) \ge 0$。在混合的情況下這並不成立，例如取 $z = \tfrac{1}{2}$、$w = 3$：左邊是 $\tfrac{5/2}{1/2} = 5$，右邊是 $\tfrac{7/2}{5/2} = \tfrac{7}{5}$。

3. 若 $|z| = 1$，則 $|1 - a^* z| = |\bar{z} - a^*| = |z - a|$。直接計算，$f(z) - f(w) = \tfrac{(1-|a|^2)(z-w)}{(1-a^*z)(1-a^*w)}$ 及 $1 - f(z)f(w)^* = \tfrac{(1-|a|^2)(1-zw^*)}{(1-a^*z)(1-aw^*)}$；兩式相除再取模（modulus），得 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$。

4. $d(0, r) = 2\tanh^{-1} r = \ln \tfrac{1+r}{1-r}$，當 $r \to 1$ 時趨向 ∞。距離為 10 需要 $r = \tanh 5 \approx 0.99991$：離邊界只有約 9×10^{-5}。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 5 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。