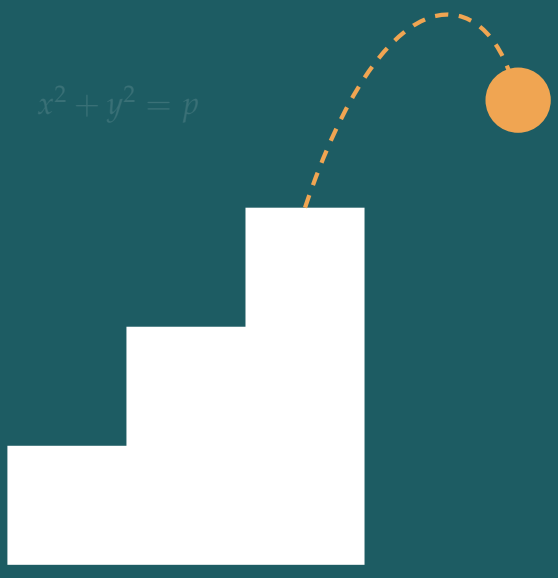
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 4 章

嚴謹地學微積分



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 4 章

嚴謹地學微積分

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 4 章：嚴謹地學微積分

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 4 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

4

嚴謹的微積分

積分是分析、幾何與數論交匯之處，數學中一些最優美的公式亦在此誕生。

本章內容

4.1	甚麼是積分？	STEP III 1989
4.2	由一個積分建立三角學	STEP III 2017
4.3	22/7 大於 π	STEP I 1997
4.4	沃利斯、Beta 與二分之一的階乘	STEP II 1995
4.5	大二學生之夢	STEP III 2009
4.6	沒有公式的積分	STEP III 2016
4.7	變分法	STEP III 2014
4.8	切球形麵包	STEP I 2001
4.9	Holditch 定理	STEP III 2011
A	練習答案	第 65 頁

不只是原函數

> 那些沒有導數的函數，實在是可悲的禍害，我懷着驚恐與厭惡避之則吉。
>
> — 埃爾米特（Charles Hermite），1893 年的一封信

問一位中學生積分（integration）是甚麼，你多半會聽到「微分的逆運算」。這是個了不起的事實，稱為*微積分基本定理*（fundamental theorem of calculus），它令你在中學遇到的大部分積分都變成例行公事。但它是一條關於積分的定理，而不是積分的定義，而且它把積分之所以有趣的大部分原因都遮蓋了。

積分比微分（differentiation）早出現約二千年。阿基米德（Archimedes）把圖形切成薄片再求和，求出了拋物線弓形的面積和球的表面積，那時還遠遠未有人想到導數（derivative）。而且積分能到達微分無法到達的地方。每個合理的函數都可以按機械式的法則求導，但大多數函數卻*無法*用公式積分出來，這就引出一個自然的問題：甚麼時候可以？不可以的時候又該怎麼辦？積分可以定義新的函數，證明數與數之間的不等式，計算無法用其他方式描述的面積和體積，還能給出無窮和與無窮乘積的精確值。本章談的就是這一切。

積分究竟是甚麼

本章從頭說起，由定義開始（Section 4.1）。積分是許多幼長矩形之和的極限（limit）；單憑這個定義、不用原函數（antiderivative）去計算 $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x$，已是相當費工夫的事，而這會令你懂得珍惜基本定理。有了精確的定義，隨之而來的是一個精確的問題：哪些函數是可積（integrable）的？這個問題的答案，以及它所引發的種種難題，在二十世紀初催生了勒貝格（Lebesgue）的積分理論，那正是現代概率論的基礎。

用來證明的積分

本章一些最出人意表的結果，是用積分去證明一些看來與面積毫無關係的事實。某個正值函數的積分恰好等於 $\frac{22}{7}-\pi$，於是一行就證明了 $\pi<\frac{22}{7}$（Section 4.3）。$\sin t$ 的冪引出沃利斯（Wallis）關於 π 的無窮乘積（infinite product），以及 $\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 這個值（Section 4.4）。x^x 的積分化成了和式 $\sum(-1)^{n+1}n^{-n}$（Section 4.5）。而僅僅一個積分 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，就足以從零開始建立整套三角學（Section 4.2）。

你在大學會遇到甚麼

大學一年級的*分析*（Analysis）課程會從積分的定義出發，嚴格證明微積分基本定理。其後的課程向多個方向發展。*測度論*（measure theory）和*勒貝格積分*（Lebesgue integral）令積分與極限配合得順暢無礙，並且是概率論的根基。*向量微積分*（vector calculus）在曲線、曲面和立體上積分，而格林(Green)定理和斯托克斯(Stokes)定理則把它們聯繫起來(Section 4.9 可讓你淺嘗一下)。*複分析*（complex analysis）取道複平面來計算實積分。*變分法*（calculus of variations）問的是哪個函數令某個積分盡可能小(Section 4.7)，並由此通向物理學中的最小作用量原理（principle of least action）。而*微分代數*（differential algebra）則解釋了哪些積分根本有公式可言（Section 4.6）。

貫穿本章的問題

三大問題

1. **積分是甚麼？哪些函數有積分？**以和的極限作出的定義，與原函數有何關連？
2. **積分能證明甚麼？**一塊面積怎能告訴我們有關 π、階乘和無窮和的事？
3. **沒有公式的時候，我們可以做甚麼？**我們怎樣知道某個積分沒有公式？即使如此，我們還能算出甚麼？

本章的思想

§	課題	思想
4.1	積分的定義	下和與上和（lower and upper sums）；裂項相消（telescoping）
4.2	由 $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 建立三角學	保持積分不變的代換（substitution）
4.3	$\frac{22}{7} > \pi$	把不等式寫成某個正值量的積分
4.4	沃利斯與 $\left(\frac{1}{2}\right)!$	遞降公式（reduction formulae）、不變量（invariant）、夾逼（squeeze）
4.5	$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$	級數展開與逐項積分（term-by-term integration）
4.6	沒有公式的積分	藉多項式代數證明不可能
4.7	變分法	在積分之內配方（completing the square）
4.8	阿基米德的帽盒定理（hat-box theorem）	化簡被積函數（integrand），幾何意義隨之顯現
4.9	霍爾迪奇（Holditch）定理	由邊界積分求面積；消元（elimination）

如何閱讀本章

有好幾節涉及繁重但例行的計算：多項式除法、分部積分法（integration by parts）、展開乘積。請先拿起紙筆親自做一遍，然後才閱讀正文。接着找出令計算得以成功的那個思想：一個不變量、一種對稱、一次相消。計算是考官要檢查的東西；思想才是你會記住並再次運用的東西。

4.1 甚麼是積分？

題目

STEP III 1989，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/89-s3-q10`

引子

你做積分已經很多年了。你知道 $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}a^6$，因為「積分是微分的逆運算」。但那是一條定理，不是定義。積分究竟是甚麼？

老實的答案是：積分是面積，定義為許多細長矩形面積之和的極限（limit）。這道題要你單憑這個定義計算一個積分：不用原函數（antiderivative），不用微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），只靠把矩形加起來再取極限。這比你想像的要難，而這正好說明，令這件事變得輕而易舉的微積分基本定理，是何等了不起的成果。

動筆之前

想一想 第 (iii) 部分的兩個和，都是闊度為 $\frac{a}{n}$ 的矩形的面積之和。對於遞增函數（increasing function）f，哪一個和低估了曲線下的面積，哪一個高估了？

第一個和取每一條長條*左*端的高度，即 $x = \frac{ra}{n}$，其中 $r = 0, \ldots, n-1$。對遞增函數來說，那是長條上的最低點，所以這些矩形全在曲線之下：這是*下和*（lower sum）。第二個和取右端，即 $r = 1, \ldots, n$，所得的矩形會突出於曲線之上：這是*上和*（upper sum）（圖 4.1.1）。定義說明：當長條愈來愈窄時，若兩個和趨向同一個極限，積分便存在。

對於 $\mathrm{f}(x) = x^5$，兩個和都涉及 $\sum r^5$。第 (i) 和第 (ii) 部分分別給出這個和的上界和下界。

逐步解題

階段 1　可以裂項相消的和

想一想　設 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$，即六個連續整數之積。$P(r) - P(r-1)$ 是甚麼？

$P(r)$ 與 $P(r-1) = (r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$ 有五個共同因子 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$，所以

$$\begin{aligned} P(r) - P(r-1) &= r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)[(r+5) - (r-1)] \\ &= 6\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4). \end{aligned}$$

由 $r = 1$ 加到 n，右方各項裂項相消（telescoping），只餘下 $P(n) - P(0) = P(n)$。所以

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = \tfrac{1}{6}P(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5).$$

■

由於對所有 $r \geq 1$ 都有 $r^5 < r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$，不等式隨即成立。 ■

階段 2　下界

停一停，試一試　把第 1 階段的做法改用於五個向下數的連續整數之積：$r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)$。求它由 $r = 0$ 到 $n-1$ 的和，並與 r^5 比較。

設 $Q(r) = (r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$。則 $Q(r+1) - Q(r) = (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r[(r+1) - (r-5)] = 6\,(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$。由 $r = 0$ 加到 $n-1$，裂項相消後得 $Q(n) - Q(0) = Q(n)$，所以

$$\sum_{r=0}^{n-1} (r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r = \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n.$$

現在逐項比較。當 $r = 0$ 時，兩邊都是 0。當 $1 \leq r \leq 4$ 時，乘積含有一個零因子，而 $r^5 > 0$。當 $r \geq 5$ 時，每個因子都是正數，且不大於 r，其中有些更嚴格小於它，所以乘積小於 r^5。由於 $n > 1$，和式包含 $r = 1$ 一項，該處不等式嚴格成立，所以

$$\sum_{r=0}^{n-1} r^5 > \tfrac{1}{6}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n. \qquad ■$$

階段 3　積分

想一想 把 $\mathrm{f}(x) = x^5$ 的下和與上和用 $\sum r^5$ 表示。分母中出現 n 的幾次方？

取 $\mathrm{f}(x) = x^5$，

$$L_n = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{a}{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^5 = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=0}^{n-1} r^5, \qquad U_n = \frac{a^6}{n^6}\sum_{r=1}^{n} r^5.$$

由第 (i) 和第 (ii) 部分，並因為 $L_n < U_n$，

$$\frac{a^6}{6}\cdot\frac{(n-5)(n-4)\cdots n}{n^6} < L_n < U_n < \frac{a^6}{6}\cdot\frac{n(n+1)\cdots(n+5)}{n^6}.$$

兩個分數各自是六個因子之積，這些因子形如 $\frac{n-3}{n} = 1 - \frac{3}{n}$ 或 $\frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n}$，每一個都趨向 1。所以外側兩個界都趨向 $\frac{a^6}{6}$，根據夾逼定理（squeeze），L_n 和 U_n 亦然。兩個極限都存在而且相等，所以按定義

$$\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{6}a^6. \qquad \blacksquare$$

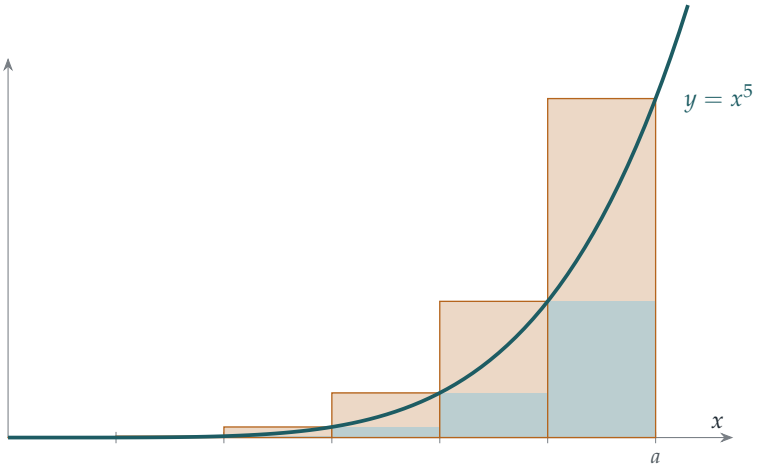


圖 4.1.1 x^5 在 $[0, a]$ 上的下和與上和，分成 $n = 6$ 條長條。下和是藍綠色的面積（曲線下的矩形）；上和則再加上琥珀色的部分。兩者之差正好是最後、最高的那個矩形的面積 $\frac{a}{n}\,\mathrm{f}(a)$，當 n 增大時它趨向 0。

回顧

- **又是裂項相消。**連續整數之積的和一下子收攏起來，與第 2 章的和與積如出一轍。
- **先定界，再夾逼。**我們從沒有求出 $\sum r^5$ 的準確值（它是 $\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$）；有兩邊的界已經足夠。
- **定義擔起全部工作。**原函數由始至終沒有出現過。一切都來自積分作為和的極限這個定義。

背後的數學

黎曼的定義

把細長條加起來求面積的想法，可追溯至阿基米德（Archimedes）：他在公元前 250 年左右，正是用這個論證的一個版本求出拋物線下的面積。牛頓（Newton）和萊布尼茲（Leibniz）把積分變成微分的逆運算，其後一個半世紀，大多數人都是這樣理解積分的。1854 年，黎曼（Bernhard Riemann）提出了大學課程至今仍用作起點的定義：把 $[a, b]$ 分成許多小段，構作（闊度）$\times$（f 在該小段內某處的高度）之和；若小段不斷縮小時，所有這樣的和都趨向同一個極限，便說 f 可積（integrable）。本題的版本採用等闊長條和左右端點，是一個適用於遞增函數的特殊情況；達布（Jean-Gaston Darboux）的「上和與下和」則把一般情況處理得乾淨利落。

並非每個函數都有積分

有了精確的定義，便可以問哪些函數可積。閉區間上的每個連續函數都可積，每個遞增函數也可積。但試考慮狄利克雷（Dirichlet）函數：若 x 是有理數，$\mathrm{f}(x) = 1$；若是無理數，則為 0。每一條長條無論多窄，都同時包含有理數和無理數，所以每個上和都是 1，每個下和都是 0。兩者永不一致，因此 $\int_0^1 \mathrm{f}$ 在黎曼的意義下並不存在。1902 年，勒貝格（Henri Lebesgue）發明了一種更強大的積分，能夠處理這個函數（它的勒貝格積分（Lebesgue integral）是 0），而且在取極限時表現好得多。勒貝格積分是現代概率論的基礎，你會在大學二年級或三年級遇上它。

離散微積分

第 1 階段的裂項相消，其實是喬裝了的微積分。「上升階乘」（rising factorial）$r(r+1)\cdots(r+k-1)$ 在求和之下的表現，與 x^k 在積分之下的表現完全一樣：求和令因子的數目增加一個，並除以新的因子數目，正如 $\int x^k \,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$。和與積分、差分與導數之間的這種對應，稱為*有限差分演算*（calculus of finite differences），是計算和式的有力工具。

思維技巧

從定義出發

題目要求你「用定義」證明某事時，就只用定義：不用任何依賴於待證結果的定理，也不用熟悉的捷徑。

這樣做出奇地難，卻讓你確切看到那些捷徑的價值。在大學，每一科的頭幾個星期都是這樣進行的：先有定義，然後才有定理，讓你不必再從定義出發。

延伸練習

1 **把極限化為積分。**試做 STEP III 1999，第 3 題（`step.maths.org/questions/99-s3-q3`）。這道題把和的極限化為積分：在每個和式中，找出曲線下的矩形。

2 **阿基米德的拋物線。**利用 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 和第 (iii) 部分的定義，證明 $\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$。

3 **上升階乘。**證明對每個正整數 k，都有 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$。

4 **準確的和。**利用恆等式 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5+10r^4+35r^3+50r^2+24r$，以及 $\sum r^k$ 在 $k \le 4$ 時的已知公式，求出 $\sum_{r=1}^{n} r^5$ 的準確值。

延伸閱讀

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration***（Cambridge University Press）。由黎曼積分走到勒貝格積分的故事，以逼出每一步發展的問題為線索娓娓道來。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 13 章以上和與下和定義積分，與本節完全一樣。
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）。第 2 章建立有限差分演算，並討論上升階乘和下降階乘。

4.2 由一個積分建立三角學

題目

STEP III 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/17-s3-q6`

引子

π 究竟是甚麼？在中學，它是圓周與直徑之比，而 sin 和 cos 則用三角形來定義。這對幾何來說已經足夠，卻留下了一些棘手的問題。沿着曲線的「長度」到底是甚麼？為甚麼 $\sin x$ 的麥克勞林級數（Maclaurin series）偏偏是那個樣子？我們又怎樣知道加法公式（addition formulas）對所有角都成立，而不只限於畫得出來的角？

這道題展示了一條截然不同的入門途徑。忘掉三角形和圓吧。只從一個積分 $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 出發，它所需要的不過是 Section 4.1 中積分的定義。把 π 定義為 $2\mathrm{T}_\infty$。然後只用代換法（substitution），證明 $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ 和 $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$，也就是你所熟悉的 $\arctan\sqrt{3} = 60^\circ$ 和 $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}-1$。三角學就這樣從無到有地重建起來。

動筆之前

你心裏其實知道 $\mathrm{T}(x) = \arctan x$ 和 $\mathrm{T}_\infty = \frac{\pi}{2}$。題目不准你使用這些事實，而這正是用意所在：一切都必須由積分推導出來。不過，這點心照不宣的知識是很有用的嚮導。

想一想 第 (i) 和第 (ii) 部分分別對應哪些三角恆等式（trigonometric identities）？（想想 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x}$，以及 $\tan(A+B)$ 的公式。）

第 (i) 部分就是 $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$。第 (ii) 部分則是喬裝了的加法公式 $\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$：設 $u = \tan A$ 和 $a = \tan B$，則 $v = \tan(A+B)$。這道題不靠任何幾何，單憑積分就證明了這些恆等式。

逐步解題

階段 1　反射 $u \mapsto 1/u$

在 $\mathrm{T}(x)$ 中代入 $u = 1/w$。於是 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}w/w^2$，而 $\dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{w^2}{w^2+1}$，所以

$$\mathrm{T}(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{w^2}{w^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{w^2}\right) \mathrm{d}w = \int_{1/x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \mathrm{T}_\infty - \mathrm{T}(x^{-1}). \qquad \blacksquare$$

換句話說，$\frac{1}{1+u^2}$ 之下由 0 到 x 的面積，等於由 $\frac{1}{x}$ 到 ∞ 的面積（圖 4.2.1）。

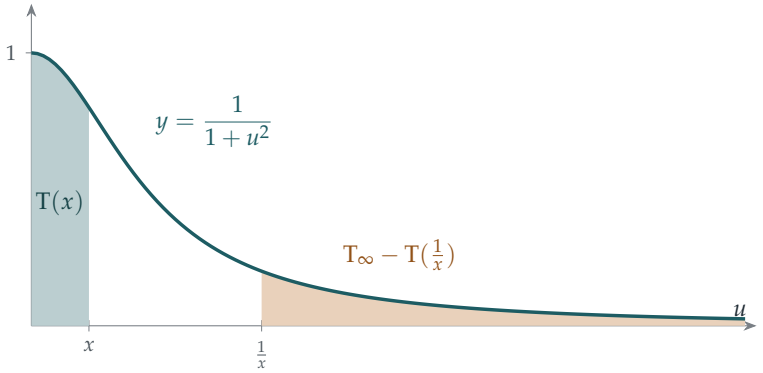


圖 4.2.1　代換 $u = 1/w$ 顯示 $\frac{1}{1+u^2}$ 之下的兩塊陰影面積相等：由 0 到 x 的面積（藍綠色），以及由 $\frac{1}{x}$ 起無限伸延的面積（琥珀色）。圖中 $x = \frac{1}{2}$。

階段 2　加法代換

想一想　用商法則（quotient rule）對 $v = \dfrac{u+a}{1-au}$ 求導。然後把 $1+v^2$ 化成單一分式，再作比較。

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2}{(1-au)^2},$$
$$1+v^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

兩式相除，得 $\dfrac{1+v^2}{1+u^2} = \dfrac{1+a^2}{(1-au)^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$。 $\blacksquare$

想一想　這表示 $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \dfrac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$。所以代換 $u \mapsto v$ 完全沒有改變被積函數（integrand）。那麼它對 $\mathrm{T}(x)$ 的積分上下限有甚麼影響？

當 u 由 0 變到 x 時（其中 $x < \frac{1}{a}$，故 $1-au>0$ 始終成立，而 v 連續且遞增），v 由 a 變到 $\frac{x+a}{1-ax}$。所以

$$\mathrm{T}(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_a^{(x+a)/(1-ax)} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=\mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)-\mathrm{T}(a). \qquad \blacksquare$$

階段 3 再多兩個恆等式

結合第 (i) 部分，並使用兩次：

$$\mathrm{T}(x^{-1})=\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}(x)=\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)+\mathrm{T}(a)=2\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)-\mathrm{T}(a^{-1}). \qquad \blacksquare$$

現在更換變數名稱：設 $y=1/x$ 和 $b=1/a$。條件 $x<1/a$ 變成 $1/y<b$，即 $y>1/b$，而

$$\frac{x+a}{1-ax}=\frac{1/y+1/b}{1-1/(by)}=\frac{b+y}{by-1}.$$

所以 $\mathrm{T}(y)=2\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}\left(\frac{y+b}{by-1}\right)-\mathrm{T}(b)$。 $\blacksquare$

階段 4 特殊值

> **停一停，試一試** 在最後一個恆等式中選取 y 和 b，使自變量 $\frac{y+b}{by-1}$ 剛好等於 y 本身。你會得到甚麼？

取 $y=b=\sqrt{3}$：這時 $y>\frac{1}{b}$，而 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3-1}=\sqrt{3}$。恆等式變成 $\mathrm{T}(\sqrt{3})=2\mathrm{T}_\infty-2\mathrm{T}(\sqrt{3})$，所以

$$\mathrm{T}(\sqrt{3})=\tfrac{2}{3}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

> **想一想** 至於 $\sqrt{2}-1$，試在加法恆等式中取 $x=a=\sqrt{2}-1$。$\frac{2x}{1-x^2}$ 是多少？$\mathrm{T}(1)$ 又是多少？

取 $x=a=\sqrt{2}-1$（由於 $x^2=3-2\sqrt{2}<1$，故 $x<\frac{1}{a}$），加法恆等式給出 $2\mathrm{T}(x)=\mathrm{T}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$。而 $1-x^2=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)=2x$，所以 $\frac{2x}{1-x^2}=1$，於是 $2\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)=\mathrm{T}(1)$。最後，在第 (i) 部分取 $x=1$，得 $\mathrm{T}(1)=\mathrm{T}_\infty-\mathrm{T}(1)$，所以 $\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$。因此

$$\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)=\tfrac{1}{4}\mathrm{T}_\infty. \qquad \blacksquare$$

回顧

- **保持被積函數不變的代換。**兩個關鍵步驟所用的代換，都令 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 保持不變，只有積分上下限移動了。積分的這類「對稱性」（symmetry）威力強大。

- **不動點（fixed point）。**$\mathrm{T}(\sqrt{3})$ 的值，來自選取適當的數，使某個表達式等於它本身，於是恆等式變成了方程。
- **定義可以來自分析。**我們從沒有用過三角形，卻重新得到了 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{8}$（其中 π 定義為 $2\mathrm{T}_\infty$）。

背後的數學

建構初等函數

在嚴格的分析課程中，函數 exp、sin、cos 和 ln 不能隨便假設存在；它們必須被建構出來，其性質也必須加以證明。標準的做法有三種。你可以用冪級數（power series）來定義它們（$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$）。你可以把它們定義為微分方程（differential equation）的解，就如練習中那道 1986 年樣本試卷的題目（$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$、$\mathrm{f}(0) = 1$ 定義了 exp）。你也可以像這裏一樣，用積分來定義反函數（inverse function）：$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}$ 和 $\arctan x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，然後定義 $\pi = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$。每種做法各有所長，而證明它們全都給出相同的函數，是一道令人滿足的練習。試與 Section 3.8 的函數方程（functional equation）做法比較。

圓以外：橢圓積分

積分的做法可以推廣，而三角形的做法卻做不到。1718 年，Giulio Fagnano 研究雙紐線（lemniscate）這條 8 字形曲線的弧長（arc length），由此引出 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$，並找到一個能把弧長加倍的代換，正如我們的代換把 T 加倍一樣。歐拉（Euler）在 1751 年讀到 Fagnano 的著作，找出了完整的加法公式；這最終經由阿貝爾（Abel）和雅可比（Jacobi），發展成*橢圓函數*（elliptic functions）的理論：橢圓函數就是這類積分的反函數，它們之於雙紐線，正如 sin 和 cos 之於圓。我們在高斯（Gauss）關於算術幾何平均（AGM）的工作中（Section 2.6）遇過同一個積分。橢圓函數如今是數論的核心；Section 1.9 的橢圓曲線（elliptic curves）就是它們在幾何上的投影。

計算 π

加法恆等式也是計算 π 的那些最著名公式的基礎。舉例說，反覆運用它可以證明 $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$，這就是 1706 年的梅欽公式（Machin's formula）；配合級數 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$，它算出了 π 的 100 位數字，並在其後兩個半世紀一直是首選的方法。這是 Section 5.1 的主題。

思維技巧

積分的對稱性

尋找令被積函數保持不變的代換。它們會化爲該積分所定義的函數的恆等式。

這裏 $u \mapsto 1/u$ 和 $u \mapsto \frac{u+a}{1-au}$ 都保持 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 不變，並分別給出反射公式和加法公式。同一個想法用於其他積分，正是特殊函數（special functions）理論的基礎。

延伸練習

1 **指數函數與餘弦。**試做 STEP II Specimen paper，第 6 題（`step.maths.org/questions/spec-s2-q6`）。這道題只憑指數函數和餘弦各自的微分方程，推導出它們的加法公式。（提示：對於餘弦，找出兩個理應為零的組合，並證明它們的平方和是常數。）

2 **反正弦。**試做 STEP III 2007，第 7 題（`step.maths.org/questions/07-s3-q7`）。這道題用處理本節積分的同一手法來處理反正弦（inverse sine），並以一個代換把兩者聯繫起來。

3 **一條早期的梅欽型公式。**利用加法恆等式證明 $\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$。

4 T_∞ **是有限的。**證明對所有 $x \geq 1$ 都有 $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2} < 2$，解釋為甚麼當 $0 < x < 1$ 時同樣有 $\mathrm{T}(x) < 2$，並由單調收斂定理（monotone convergence theorem）（Section 2.2）推斷 T_∞ 存在。

延伸閱讀

- **Tom Körner,** ***Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。嚴格地建構初等函數，並討論各種不同的做法。
- **Walter Rudin,** ***Principles of Mathematical Analysis***（McGraw-Hill）。即著名的「baby Rudin」；第 8 章的引言只用寥寥數頁，便優雅地由冪級數建構出 exp、sin 和 cos。程度較深。
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev,** ***Elliptic Functions and Elliptic Integrals***（American Mathematical Society）。想知道雙紐線通往何處，可讀此書。程度較深。

4.3 22/7 大於 π

題目

STEP I 1997，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/97-s1-q6`

引子

一代又一代的學生都聽過 π「大約是 $\frac{22}{7}$」這個說法。這是一個非常好的近似值（approximation）：$\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$，而 $\pi = 3.141592\ldots$。但 $\frac{22}{7}$ 究竟是偏大還是偏小？你又能否證明這一點，而不是單靠查閱 π 的各位數字？那些數字畢竟是要別人先計算出來的。

這道題給出了整個數學之中最優雅的證明之一。只需一個正函數的積分（integral），其值因而必定為正，而它竟然恰好等於 $\frac{22}{7} - \pi$。被積函數（integrand）為正，積分便為正，所以 $\frac{22}{7} > \pi$。整個證明只需寥寥數行，而且精巧得被人當作謎題印在數學 T 恤上。

動筆之前

想一想 為甚麼 $\int_0^1 \frac{\text{多項式}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 會算出 π 來？這種形式的積分之中，哪一個簡單的積分本身就給出 π？

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$。把一個多項式（polynomial）除以 $1+x^2$，會得到一個多項式商式（quotient）（其積分是一個有理數），再加上一個常數餘式（remainder）除以 $1+x^2$（其積分是 π 的有理數倍）。題目的第一部分正是要你做這個除法。

逐步解題

階段 1　多項式除法

先展開：$(1-x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4$，所以

$$x^4(1-x)^4 = x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4.$$

想一想 把它除以 x^2+1，可以用長除法（long division），也可以用比較係數（comparing coefficients）的方法。餘式是甚麼？

在 $(a_6x^6 + \cdots + a_0)(x^2+1) + b$ 中由最高次項開始比較係數：$a_6 = 1$；$a_5 = -4$；$a_4 + a_6 = 6$，所以 $a_4 = 5$；$a_3 + a_5 = -4$，所以 $a_3 = 0$；$a_2 + a_4 = 1$，所以 $a_2 = -4$；$a_1 + a_3 = 0$，所以 $a_1 = 0$；$a_0 + a_2 = 0$，所以 $a_0 = 4$；最後 $a_1 = 0$（x 的係數）及 $a_0 + b = 0$，所以 $b = -4$。即是說，

$$x^4(1-x)^4 = (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)(x^2+1) - 4.$$

階段 2　計算積分

除以 $1+x^2$，得

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{4}{6} + \frac{5}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi.$$

由於 $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$，有理數部分是 $\frac{1}{7} + 3 = \frac{22}{7}$，因此積分等於 $\frac{22}{7} - \pi$。 ■

階段 3　估計積分的界

想一想 被積函數在 $(0,1)$ 上為正，所以立即得到 $\frac{22}{7} > \pi$。要得到 π 的下界（lower bound），我們需要這個積分的上界（upper bound）。$\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上最大可以有多大？

在 $[0,1]$ 上，$1 \le 1+x^2 \le 2$，所以

$$\tfrac{1}{2}x^4(1-x)^4 \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4,$$

而且除了在端點之外，不等式（inequality）都是嚴格成立的。

停一停，試一試 計算 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$，然後完成證明。

把展開式逐項積分，

$$\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9} - \frac{4}{8} + \frac{6}{7} - \frac{4}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{630}.$$

（以 2520 為公分母：$280 - 1260 + 2160 - 1680 + 504 = 4$，而 $\frac{4}{2520} = \frac{1}{630}$。）所以

$$0 < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630},$$

亦即 $\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$。 ■

以數值計算，$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} = 3.14127\ldots$，所以我們已證明 $3.1412 < \pi < 3.1429$。若同時用上左邊的不等式，便有 $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi$，這把上界改進為 $\pi < 3.14207$。

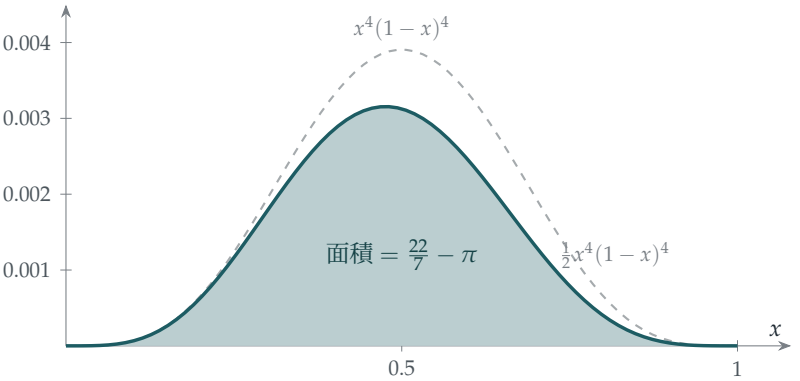


圖 4.3.1　被積函數 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$（藍綠色）為正，但數值極小：它的最大值約為 0.003。陰影部分的面積恰好是 $\frac{22}{7} - \pi \approx 0.00126$。被積函數介乎 $\frac{1}{2}x^4(1-x)^4$（點線）與 $x^4(1-x)^4$（虛線）之間，這兩條曲線下的面積分別是 $\frac{1}{1260}$ 和 $\frac{1}{630}$。

回顧

- **以正值證明不等式。**正函數的積分為正。一旦認出積分等於 $\frac{22}{7} - \pi$，不等式便立即成立。
- **被積函數愈小，界愈精確。**因子 $x^4(1-x)^4$ 在 $[0,1]$ 上極小（最多只有 $\frac{1}{256}$），這使積分很小，所得的界也就很精確。
- **有理數加上 π 的倍數。**正如 Section 2.9 所見，一個形如「有理數 + 某常數的有理數倍」的積分，若其值很小，便給出該常數的一個良好有理近似值。

背後的數學

一個有來歷的證明

阿基米德（Archimedes）約於公元前 250 年證明了 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$，方法是計算圓內接和圓外切正 96 邊形的周界（可與 Section 2.5 中的多邊形比較）。積分證明則晚近得多。它由 D. P. Dalzell 於 1944 年發表，其後在 1968 年被選為美國大學本科生普特南數學競賽（Putnam competition）的題目，因而廣為人知。它的迷人之處在於完全不需要任何數值計算：不等式 $\frac{22}{7} > \pi$ 直接來自「正函數的積分為正」這個事實。

用同一思路得出更佳的近似值

這個方法可以推廣。以 $x^8(1-x)^8$ 取代 $x^4(1-x)^4$，同樣的除法給出

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

由此證明 $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$，準確至六位有效數字（significant figures）。2009 年，Stephen Lucas 找到了多族這類被積函數非負的積分，它們能證明關於其他著名近似值的不等式，其中包括準確至七位有效數字的 $\frac{355}{113}$。

近似值與無理性

為甚麼 π 會有 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 這樣好的分數近似值？每個無理數（irrational number）都有無窮多個分數 $\frac{p}{q}$ 與它相距不超過 $\frac{1}{q^2}$，而 π 碰巧在很早的階段就有幾個特別好的，因為它的連分數（continued fraction）$[3;7,15,1,292,\ldots]$ 含有 292 這個很大的項（見 Section 2.2）。像本題這樣的積分，若令其愈來愈小，便是另一類證明的起點：這類證明指出某些數不可能被分數逼近得太好，因而是無理數。Ivan Niven 那個著名的、只有一頁的 π 是無理數的證明（1947 年），用的就是 $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$ 的積分，它們是 Section 2.9 中那些積分的三角函數近親。

思維技巧

把不等式寫成某個正值函數的積分

要證明 $A > B$，可找一個積分等於 $A - B$ 的正函數。

這樣便把一個不等式化為一個恆等式（identity）再加上一個顯然的事實。這是分析學（analysis）中最有用的技巧之一；同一思路，以平方和取代積分，就在

Section 3.2 中證明了算術平均—幾何平均不等式（AM–GM）。

延伸練習

1 **核對數字。**計算 $\frac{22}{7} - \pi$ 至四位有效數字，並確認它介乎 $\frac{1}{1260}$ 與 $\frac{1}{630}$ 之間。

2 **一個 Beta 積分。**利用公式 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$（在 Section 4.4 中證明）驗證 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$。

3 **一個偏小的近似值。**證明

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{及} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

並由此推出 $\pi > 3$ 及 $\pi > \frac{47}{15}$。為甚麼這些近似值不及 $\frac{22}{7}$ 準確？

4 **更進一步。**較難驗證上文給出的 $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 的恆等式。（除法可以交給電腦代數系統去做；重點是看出餘式是 16，從而得出 4π。）

延伸閱讀

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。詳細講述阿基米德的多邊形方法，另有許多其他內容。
- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009)。篇幅短小，容易閱讀。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。收錄了 Niven 對 π 是無理數的證明。

4.4 沃利斯、Beta 與二分之一的階乘

題目

STEP II 1995，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/95-s2-q4`

引子

$\left(\frac{1}{2}\right)!$ 是甚麼？這個問題聽來毫無道理：$n!$ 的意思是 $1 \times 2 \times \cdots \times n$，而你不可能把「半個數那麼多」的項相乘。然而它確有一個自然的答案，就是

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

π 從何而來？來自 $\sin t$ 的冪的積分（integral），這正是本題研究的對象。過程中，本題證明了關於 π 的其中一條最古老、最奇特的公式，即沃利斯（John Wallis）在 1655 年提出的無窮乘積（infinite product）

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots,$$

並且找出 $n!$ 的斯特靈公式（Stirling's formula）中隱藏的常數，這條公式是每一位概率學家和統計學家都會用到的。

動筆之前

想一想 u_0 和 u_1 是甚麼？當 n 很大時，$\sin^n t$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的圖像大致是甚麼樣子？

$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$，而 $u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = 1$。當 n 很大時，$\sin^n t$ 極小，只有在 $t = \frac{\pi}{2}$ 附近例外，因為那裏 $\sin t$ 接近 1：圖像變成緊貼右邊界的一個狹窄尖峯（圖 4.4.1）。所以 u_n 隨 n 增大而縮小。本題準確地找出它縮小得有多快：與 $\sqrt{\pi/(2n)}$ 相若。

逐步解題

階段 1　一條遞推公式

想一想　用分部積分法（integration by parts）計算 $\int \sin t \cdot \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$：對 $\sin t$ 積分，對 $\sin^{n-1} t$ 求導。新的被積函數（integrand）含有 $\cos^2 t$；怎樣才能變回 $\sin t$ 的冪？

取 $\mathrm{d}v = \sin t \, \mathrm{d}t$（故 $v = -\cos t$）及 $w = \sin^{n-1} t$（故 $w' = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t$），

$$u_n = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, \mathrm{d}t.$$

當 $n \geq 2$ 時，邊界項為零。寫成 $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$，該積分便是 $u_{n-2} - u_n$，所以 $u_n = (n-1)(u_{n-2} - u_n)$，即

$$n u_n = (n-1) u_{n-2}. \qquad \blacksquare$$

兩邊同乘以 u_{n-1}，得 $n u_n u_{n-1} = (n-1) u_{n-1} u_{n-2}$。 $\blacksquare$

階段 2　一個不變量

想一想　這個關係式說明，當 n 減一時，$n u_n u_{n-1}$ 這個量保持不變。它在 $n = 1$ 時等於甚麼？

反覆運用，$n u_n u_{n-1} = (n-1) u_{n-1} u_{n-2} = \cdots = 1 \cdot u_1 u_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2}$。所以對所有 $n \geq 1$，$n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$。 $\blacksquare$

階段 3　夾逼

對於 $0 < t < \frac{\pi}{2}$，我們有 $0 < \sin t < 1$，所以 $\sin^n t < \sin^{n-1} t$：除端點外，$\sin^n t$ 的圖像位於 $\sin^{n-1} t$ 的圖像之下。積分後得 $0 < u_n < u_{n-1}$。

停一停，試一試　利用 $u_n < u_{n-1}$ 和 $n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ 把 $n u_n^2$ 夾住。

把 u_{n-1} 換成較小的 u_n，得 $n u_n^2 < n u_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$。把 u_n 換成較大的 u_{n-1}，得 $\frac{1}{2}\pi = n u_n u_{n-1} < n u_{n-1}^2$。所以 $n u_n^2 < \frac{1}{2}\pi < n u_{n-1}^2$。 $\blacksquare$

在右邊的不等式中以 $n+1$ 代替 n：$\frac{1}{2}\pi < (n+1) u_n^2$，所以 $n u_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}\pi$。合起來，

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{2}\pi < n u_n^2 < \frac{1}{2}\pi. \qquad \blacksquare$$

由於 $\frac{n}{n+1} \to 1$，由夾逼可得 $n u_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$。 $\blacksquare$

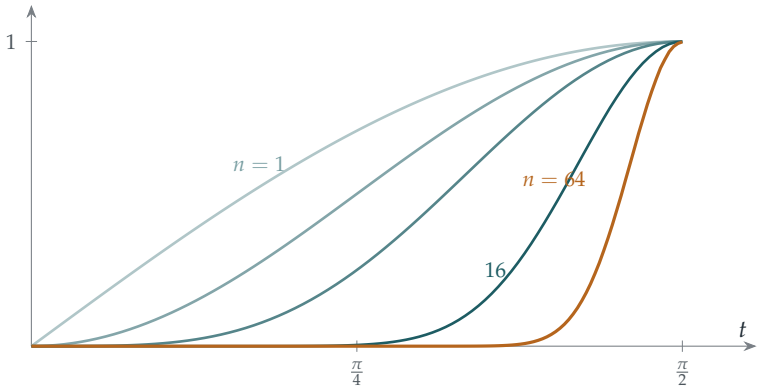


圖 4.4.1　$n = 1, 2, 4, 16, 64$ 時 $\sin^n t$ 的圖像。隨着 n 增大，曲線下的面積 u_n 不斷縮小，並集中在 $t = \frac{\pi}{2}$ 附近。本題證明 $u_n \approx \sqrt{\pi/(2n)}$；當 $n = 64$ 時，這個值約為 0.157。

回顧

- **遞推公式（reduction formulae）。**分部積分法把 u_n 化為 u_{n-2}，所以所有 u_n 都由 u_0 和 u_1 決定。
- **尋找不變量（invariant）。**乘積 nu_nu_{n-1} 保持不變，正如 Section 2.6 中的積分在 AGM 步驟下保持不變一樣。
- **單調性（monotonicity）加上不變量，便得出夾逼（squeeze）。**知道 $u_n < u_{n-1}$ 以及 nu_nu_{n-1} 的準確值，便把 nu_n^2 夾在兩個極限相同的量之間。

背後的數學

沃利斯乘積

把遞推公式一直用到 u_0 或 u_1，便得到明確的值：

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

由夾逼可知 $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$。把這個比寫出來再整理，便得到沃利斯乘積

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

沃利斯在 1655 年以一種大膽的插值（interpolation）方法發現了它：他把 $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$ 放進一個指數為整數的積分表中，從而猜出它「應該」是甚麼。這是數學史

上最早的無窮乘積之一，僅次於韋達（Viète）的乘積（Section 2.5），也是第一個只用有理數的無窮乘積。

二分之一的階乘

沃利斯的插值想法，在 1729 年由歐拉（Euler）賦予了嚴格的意義。他找到一個函數，現稱為*伽瑪函數*（Gamma function），

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

它滿足 $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$（用分部積分法），而且對整數 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$。它把階乘（factorial）平滑地延拓至所有正實數。與它密切相關的*貝塔函數*（Beta function）

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

包含了 Section 4.3 和 Section 2.9 中的積分，而且經代換 $x = \sin^2 t$ 之後，也包含我們的 u_n。特別地，$\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$（練習 2），由此得 $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。等價地，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，這與著名的高斯積分（Gaussian integral）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ 是同一個事實，也正是 π 出現在正態分佈（normal distribution）公式中的原因。

斯特靈公式

斯特靈公式說 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$。其中 $(n/e)^n$ 的部分相對容易得到，但常數 $\sqrt{2\pi}$ 則較難，而求出它的標準方法正是本題：u_{2m} 的明確值涉及 $(2m)!/(m!)^2$，而極限 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ 則把這個常數確定下來。另有一條截然不同的途徑，通過概率得到同一個常數，見 Section 12.23。

思維技巧

由積分得出遞推關係

分部積分法往往把帶有參數 n 的積分，與參數較小的同一類積分聯繫起來。這個遞推關係（*recurrence*）隨後可以解出，或用來分析 $n \to \infty$ 時的表現。

留意遞推關係下保持不變的量，以及對 n 的單調性；兩者結合，往往不需要任何明確公式便能求出極限。

延伸練習

1 **沃利斯乘積。**利用 u_{2m} 和 u_{2m+1} 的明確值，以及 $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$，證明沃利斯乘積。

2 **一個貝塔積分。**試做 STEP II 2013，第 2 題（`step.maths.org/questions/13-s2-q2`）。這題用遞推公式計算 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x$，然後問當 $n=\frac{1}{2}$ 時答案有何啟示：這是對二分之一的階乘的初次一瞥。

3 **貝塔函數。**試做 STEP III 2025，第 1 題（載於 OCR 提供下載的 2025 年試卷，`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`）。這題建立一般的貝塔積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$、它的對稱性和一個遞推關係，並用它們計算一個在 $[0,\infty)$ 上的積分。

4 **中心二項式係數（central binomial coefficients）。**較難證明 $u_{2m}=\binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$，並利用 $nu_n^2\to\frac{\pi}{2}$ 推導出當 m 很大時 $\binom{2m}{m}\approx\dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$。就 $m=10$ 驗證這個結果。

延伸閱讀

- **Julian Havil, *Gamma***（Princeton University Press）。內容包括伽瑪函數及其歷史。
- **Philip J. Davis, “Leonhard Euler’s integral: a historical profile of the Gamma function”,** *American Mathematical Monthly* 66 (1959)。一篇獲獎的經典文章，讀過本節之後便能看懂。
- **Emil Artin, *The Gamma Function***（Dover）。一本簡短而優美的專著，適合學過一些分析之後閱讀。

4.5 大二學生之夢

題目

STEP III 2009，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/09-s3-q8`

引子

每個學生遲早都會學到 $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$。那條錯誤的等式有個戲稱，叫做「大一新生之夢」（freshman's dream）。本題要證明的結果，看起來同樣像初學者會犯的錯：

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots,$$

以及與它配對的 $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$。$x^x$ 的積分（integral）竟然變成 n^{-n} 的和：這似乎好得令人難以置信，所以它被稱為**大二學生之夢**（sophomore's dream）。但它確實成立，由約翰·伯努利（Johann Bernoulli）於 1697 年發現。

證明用到三個你在大學會不斷遇到的想法：比較指數函數與冪的極限（limit）、歸約公式（reduction formula），以及把函數展開成冪級數（power series）再逐項積分（integrating term by term）。

動筆之前

? **想一想** 函數 x^x 在 $x=0$ 處無法用你所知的任何公式定義（0^0 的意義並不明確）。當 x 從上方趨近 0 時，它的表現如何？試用計算機計算 $x=0.1$、0.01、0.001 的情況。

$0.1^{0.1} \approx 0.794$，$0.01^{0.01} \approx 0.955$，$0.001^{0.001} \approx 0.993$。看來它趨近 1。第 (i) 部分正是證明這一點，由此可知被積函數（integrand）在 0 附近表現良好，這個積分是有意義的。x^x 在 $(0,1]$ 上的圖像由接近 1 的地方出發，下降至極小值，再在 $x=1$ 處回到 1（圖 4.5.1）。

逐步解題

階段 1　冪勝過對數

想一想　當 $x \to 0^+$ 時，$\ln x \to -\infty$。哪一個代換（substitution）可以把 $x \to 0^+$ 變成 $t \to \infty$，並把 $x^m (\ln x)^n$ 變成類似 $e^{-mt} t^n$ 的式子？

設 $x = e^{-t}$。當 $x \to 0^+$ 時，$t \to \infty$，而 $\ln x = -t$，所以

$$x^m (\ln x)^n = e^{-mt} (-t)^n = (-1)^n e^{-mt} t^n \to 0.$$

用文字來說：當 $x \to 0$ 時，x 的任何正數次冪趨向零的速度，都快過 $\ln x$ 的任何次冪趨向無窮的速度。 ■

取 $m = n = 1$，得 $x \ln x \to 0$；由於指數函數是連續（continuous）的，所以 $x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1$。 ■

階段 2　歸約公式

想一想　用分部積分法（integration by parts）計算 $I_{n+1} = \int_0^1 x^m (\ln x)^{n+1} \, dx$。應該對哪一個因子積分？邊界項（boundary term）在 $x = 0$ 處會怎樣？

對 x^m 積分，對 $(\ln x)^{n+1}$ 求導：

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} (\ln x)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x} \, dx.$$

在 $x = 1$ 處，因為 $\ln 1 = 0$，邊界項等於 0；當 $x \to 0$ 時，根據第 (i) 部分（取 $m+1$ 和 $n+1$），它趨向 0。餘下的積分是 $\frac{n+1}{m+1} I_n$，所以

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{m+1} I_n. \qquad ■$$

由 $I_0 = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$ 出發，應用這條公式 n 次，得

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{1}{m+1} = \frac{(-1)^n \, n!}{(m+1)^{n+1}}. \qquad ■$$

階段 3　級數

想一想　利用 e^y 的級數展開 $x^x = e^{x \ln x}$。每一項是甚麼樣子？m 取甚麼值，才會出現第 (ii) 部分的積分？

由於對任何 y 都有 $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$，

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}.$$

停一停，試一試 由 0 至 1 逐項積分，並使用第 (ii) 部分中 $m = n$ 的情況（$n = 0$ 另行處理）。你得到甚麼？

$n = 0$ 的一項是 1，積分後得 1。當 $n \geq 1$ 時，在第 (ii) 部分取 $m = n$，得 $\int_0^1 x^n (\ln x)^n \, dx = \frac{(-1)^n \, n!}{(n+1)^{n+1}}$，所以第 n 項的貢獻是 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$。把各項相加，

$$\int_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \cdots . \qquad \blacksquare$$

（$n = 0$ 的一項也符合同一規律，即 $\frac{1}{1^1}$。）各項縮小得極快：取七項，便得到準確至小數點後六位的數值 0.783430…。

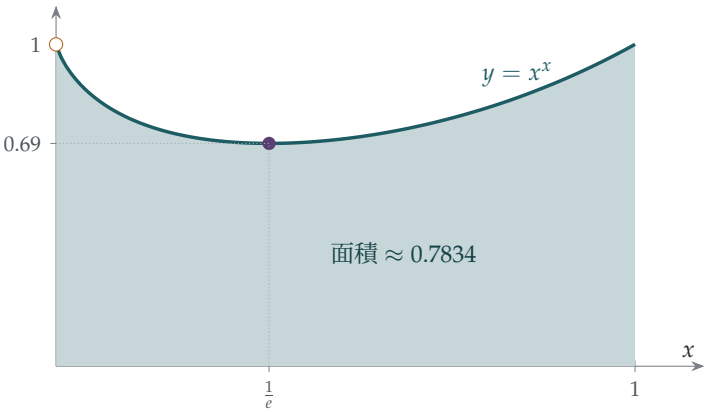


圖 4.5.1 x^x 在 $(0, 1]$ 上的圖像。當 $x \to 0$ 時它趨向 1（空心圓點），在 $x = \frac{1}{e}$ 處下降至極小值 $e^{-1/e} \approx 0.692$，再在 $x = 1$ 處回到 1。陰影部分的面積是 $\sum (-1)^{n+1} n^{-n} \approx 0.7834$。

回顧

- **用代換比較增長速度。**設 $x = e^{-t}$，便把在 0 處的極限變成在 ∞ 處一個熟悉的極限。
- **邊界項必須檢查。**歸約公式有賴邊界項在 $x = 0$ 處消失，這正是用到第 (i) 部分的地方。
- **先展開成級數，再積分。**把被積函數展開成冪級數並逐項積分，便把一個沒有初等原函數（elementary antiderivative）的積分，變成一個收斂得很快的和。

背後的數學

交換求和與積分

第 3 階段不動聲色地把無窮和與積分交換了次序：$\int \sum = \sum \int$。這樣做並非總是容許的。在大學裏，你會遇到交換後不成立的例子，也會學到一些定理，說明甚麼時候可以放心交換。最簡單的一個定理指出，當級數一致收斂(converges uniformly)時，交換是安全的：即級數的尾部可以同時在每一個 x 處都變得很小。在這裏，$|x \ln x| \le \frac{1}{e}$ 在 $(0,1]$ 上成立，所以無論 x 是甚麼，第 n 項的大小最多是 $\frac{e^{-n}}{n!}$。這些上界之和收斂，因此尾部一致地小，交換也就有了根據。這個論證稱為魏爾斯特拉斯 M 判別法(Weierstrass M-test)，是分析學（analysis）中最常用的工具之一。

為何這個「夢」會成真

這條恆等式很特別。它有賴 $\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ 中的冪與積分 $\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ 完全吻合，當中的 $n!$ 恰好全部約去。追根究柢，這個積分其實是喬裝了的伽瑪函數（Gamma function）：代換 $x = e^{-t/(n+1)}$ 把它變成 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$，與 Section 4.4 連繫起來。

名字的由來

「大二學生之夢」這個名字，是 Jonathan Borwein 與合著者在 2004 年出版的 *Experimentation in Mathematics* 一書中所創，用來與「大一新生之夢」$(a+b)^n = a^n + b^n$ 配對（有趣的是，後者在某些數系中是成立的：在模質數 p 的算術中，$(a+b)^p = a^p + b^p$，因為中間所有的二項式係數（binomial coefficient）都可被 p 整除）。Borwein 是實驗數學（experimental mathematics）的先驅，這門學問利用電腦去發現像本題這樣的恆等式，然後再以人手證明。

思維技巧

展開後逐項積分

如果被積函數有冪級數展開，而你又能對其中各項積分，便對每一項積分，再把結果加起來。

對於沒有初等原函數的積分，這是一個很有效的求值方法。緊記要問：交換求和與積分是否有根據？通常是有的，但你應該知道原因。

延伸練習

1 **配對的等式。**證明 $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \approx 1.2913$。

2 **極小值。**證明 x^x 在 $(0,\infty)$ 上的極小值出現於 $x = \frac{1}{e}$，其值為 $e^{-1/e}$。

3 **需要多少項？**對於各項遞減的交錯級數（alternating series），截斷後的誤差小於第一個被略去的項。要準確至小數點後六位，需要取 $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ 的級數的多少項？

4 **一個近親。**用同樣的方法證明 $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$，以及 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$。（根據 Section 2.4，這等於 $-\frac{\pi^2}{6}$。）

延伸閱讀

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics***（A. K. Peters）。這個名字的出處，書中還有許多由電腦發現的恆等式。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***（Princeton University Press）。由牛頓（Newton）到勒貝格（Lebesgue）的分析學傑作，包括伯努利的工作。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。清楚講解一致收斂，以及何時可以交換求和與積分。

4.6 沒有公式的積分

題目

STEP III 2016，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/16-s3-q3`

引子

求導（differentiation）是機械式的工作：有一套法則可循，任何由常見部件砌成的函數，只要套用這些法則就能求導。積分（integration）卻不然。每個學生都遇過各種技巧都攻不破的積分，並懷疑是否只是自己不夠聰明。有時答案是：誰也不夠聰明，因為根本沒有公式。

本題就在一個特殊情況下證明這樣的事。積分 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 作為面積當然存在，但它不能寫成（有理函數）$\times\, e^x$ 的形式，而這正是用分部積分法（integration by parts）時預期會得到的形式。證明某件事不可能做到，而不是把某樣東西找出來，是另一種數學，也極具數學的特色。

動筆之前

想一想 若 $\int \mathrm{f}(x)e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x + C$，P 和 Q 必須滿足甚麼方程？（對右邊求導。）

求導得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x\right) = \dfrac{\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}}{\mathrm{Q}^2}\,e^x$，而這必須等於 $\mathrm{f}(x)e^x$。所以整道題目其實圍繞着以下的多項式恆等式（polynomial identity）：

$$\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q} = \mathrm{f}\,\mathrm{Q}^2.$$

關於積分的問題，就此變成關於多項式的問題：它們的因式和次數。

逐步解題

階段 1　因式 $x+1$

取 $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^3-2}{(x+1)^2}$，把恆等式兩邊同乘 $(x+1)^2$：

$$(x+1)^2(\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q})=(x^3-2)\,\mathrm{Q}^2. \tag{†}$$

> **想一想**　在 (†) 中代入 $x=-1$。必然會出現甚麼情況？

當 $x=-1$ 時，左邊等於 0，右邊則是 $(-1-2)\,\mathrm{Q}(-1)^2=-3\,\mathrm{Q}(-1)^2$。所以 $\mathrm{Q}(-1)=0$，而根據因式定理（factor theorem），$x+1$ 是 Q 的因式。 ■

階段 2　次數

設 P 的次數（degree）為 p，Q 的次數為 q。

> **想一想**　在 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q}$ 中，哪一項的次數最高？它會被其餘各項抵消嗎？

PQ 的次數是 $p+q$，而 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}$ 和 $\mathrm{P}\mathrm{Q}'$ 的次數最多是 $p+q-1$。所以 (†) 左邊的次數恰好是 $2+p+q$，右邊的次數是 $3+2q$。令兩者相等，得 $p=q+1$。 ■

階段 3　求 P

取 $\mathrm{Q}=x+1$，則 $\mathrm{Q}'=1$，而 P 的次數為 2。把 (†) 除以 $(x+1)^2$：

$$\mathrm{P}'(x+1)-\mathrm{P}+\mathrm{P}(x+1)=x^3-2, \qquad \text{即} \qquad (x+1)\mathrm{P}'+x\mathrm{P}=x^3-2.$$

試設 $\mathrm{P}=\alpha x^2+\beta x+\gamma$。左邊是

$$(x+1)(2\alpha x+\beta)+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x=\alpha x^3+(2\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+\beta+\gamma)x+\beta.$$

與 x^3-2 比較係數：$\alpha=1$；$2\alpha+\beta=0$，故 $\beta=-2$；於是 $\gamma=0$；常數項 $\beta=-2$ 亦吻合。所以

$$\mathrm{P}(x)=x^2-2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,e^x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2-2x}{x+1}\,e^x+C. \qquad ■$$

（有興趣的話可以求導驗算，這是練習商法則（quotient rule）的好題目。）

階段 4　一件不可能的事

現在假設 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x+C$，其中 P 和 Q 沒有公因式（common factor）。恆等式變成

$$(x+1)\big(\mathrm{P}'\mathrm{Q}-\mathrm{P}\mathrm{Q}'+\mathrm{P}\mathrm{Q}\big)=\mathrm{Q}^2.$$

一如第 1 階段，代入 $x=-1$ 可知 $Q(-1)=0$。寫成 $Q=(x+1)^k R$，其中 $k\geq 1$ 且 $R(-1)\neq 0$（即盡量抽出 $x+1$ 這個因式）。

> **停一停，試一試** 代入 $Q=(x+1)^k R$，盡量約去 $(x+1)$ 的因式，然後代入 $x=-1$。你能得知 $P(-1)$ 的甚麼性質？

這時 $Q'=k(x+1)^{k-1}R+(x+1)^k R'$，而

$$P'Q-PQ'+PQ=(x+1)^{k-1}\Big[(x+1)\big(P'R-PR'+PR\big)-kPR\Big].$$

所以恆等式變成 $(x+1)^k\big[(x+1)(P'R-PR'+PR)-kPR\big]=(x+1)^{2k}R^2$。除以 $(x+1)^k$：

$$(x+1)\big(P'R-PR'+PR\big)-kPR=(x+1)^k R^2.$$

當 $x=-1$ 時，由於 $k\geq 1$，上式給出 $-kP(-1)R(-1)=0$。因為 $k\neq 0$ 且 $R(-1)\neq 0$，必有 $P(-1)=0$。但這樣 $x+1$ 就同時整除 P 和 Q，與兩者沒有公因式的假設矛盾。所以這樣的 P 和 Q 並不存在。 ■

回顧

- **轉化為代數。**「這個積分能否寫成這種形式？」變成了「這個多項式恆等式有沒有解？」
- **在特殊點取值。**代入 $x=-1$ 就得到關於因式的資訊，前後共用了三次。
- **利用最簡分數的反證法（proof by contradiction）。**正如 Section 1.3 中處理 $\sqrt{2}$ 的做法，先假設分數已約至最簡，再找出一個公因式，便得到矛盾。

背後的數學

極點與對數

第 (ii) 部分背後有一幅簡單的圖像。被積函數（integrand）$\frac{e^x}{x+1}$ 在 $x=-1$ 處有一個單極點（simple pole）：在該點附近，它的表現像 $\frac{e^{-1}}{x+1}$。對 $\frac{1}{x+1}$ 積分得 $\ln|x+1|$，所以原函數（antiderivative）在 -1 附近的表現應該像 $e^{-1}\ln|x+1|$，以對數的速度趨向 $-\infty$（圖 4.6.1）。但有理函數乘以 e^x 只能以冪 $(x+1)^{-k}$ 的方式趨向無窮，其導數因而有一個階數為 $k+1\geq 2$ 的極點，絕不會是單極點。有理函數無法產生對數式的表現；第 4 階段的代數運算，正是這個觀察的嚴格版本。相反，在第 (i) 部分，被積函數有一個二階極點，而這正是帶有單極點的函數求導後的模樣，所以答案才有可能是有理的。

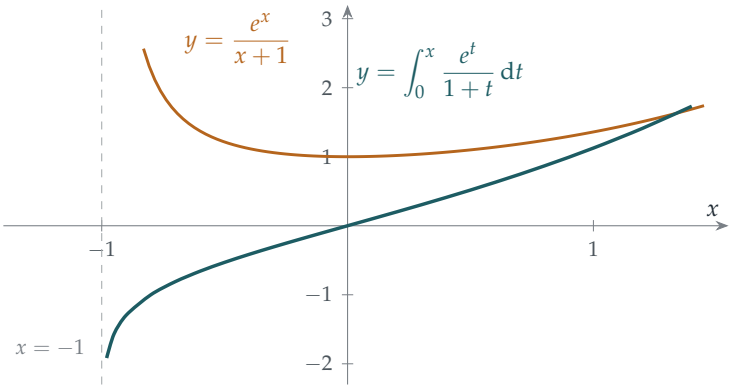


圖 4.6.1　被積函數 $\frac{e^x}{x+1}$（琥珀色）在 $x = -1$ 處有一個單極點。它的原函數（藍綠色，以數值方法計算）完全存在，但當 $x \to -1^+$ 時，它以對數的速度趨向 $-\infty$，表現像 $e^{-1}\ln(x+1)$。沒有任何有理函數乘以 e^x 能有這樣的表現。

劉維爾與 Risch 算法

在 1830 年代，劉維爾（Joseph Liouville）建立了一套理論，研究哪些積分可以用*初等函數*（elementary functions）表示（即由多項式、指數函數、對數函數、根式和三角函數經通常的運算構成的函數）。他的其中一個結果指出：若 f 和 g 是有理函數而 g 不是常數，則 $\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,dx$ 只有在等於 $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$（另加一個常數）時才是初等的，其中 R 是某個有理函數。（對 g 的條件不可或缺：當 $\mathrm{g} = 0$ 而 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}$ 時，積分是 $\ln|x|$，它是初等函數，卻不是有理函數。）所以本題排除了有理形式，其實就證明了 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$ 根本不是初等函數。同一定理的其他版本可證明 $\int e^{-x^2}\,dx$ 和 $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ 都不是初等的。1969 年，Robert Risch 把劉維爾的想法發展成一套算法（algorithm），可就一大類函數判定初等積分是否存在，並在存在時把它求出來。電腦代數系統（computer algebra system）內部所用的，就是這套算法的不同版本。

特殊函數

當一個積分沒有初等形式時，數學家會給它起個名字，把它當作新的函數來研究，正如我們在 Section 3.9 中處理朗伯 W 函數（Lambert W function）那樣。這裏的積分本質上就是*指數積分*（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x)$，它出現於熱傳導問題，也出現於*對數積分*（logarithmic integral）$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$ 之中，後者是不超過 x 的質數（prime）個數的最佳簡單近似（Section 1.2）。當 $x < 0$ 時，它是 $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$。當 $x > 0$ 時，這個積分會穿過 $t = 0$ 處的無窮尖峯，所以 $\mathrm{Ei}(x)$ 的定義是先挖去尖峯周圍的一個小區間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0$：這就是*柯西主值*（Cauchy principal value）。

思維技巧

證明不可能

要證明某件事做不到，先假設它做得到，把這個假設轉化爲精確的代數式，然後推出矛盾。

困難在於轉化：要為「做得到」的意思找出一個精確的陳述。在這裏，它的意思是「存在沒有公因式的多項式 P、Q 滿足這個恆等式」。數學中許多最深刻的結果，都是這類不可能性證明。

延伸練習

1 **兩個可行的例子。**證明 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{x+1} + C$ 及 $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$。

2 **高斯函數。**證明不存在多項式 P 使得 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$。（提示：求導後比較次數。）

3 **另一個極點。**仿照第 (ii) 部分的論證，證明 $\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不能寫成 $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ 的形式。

4 **何時可行？**假設 f 是多項式，且對某個多項式 P 有 $\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}e^x + C$。證明 $(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$，並透過計算此式及其導數在 $x = -1$ 的值，證明 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$。驗證這個條件對 $\mathrm{f}(x) = x^3 - 2$ 以及練習 1 的例子都成立。較難你能證明這個條件也是充分的嗎？

延伸閱讀

- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**（初等積分的不可能性定理）。可免費取得的講義，配合例子講解劉維爾定理。
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, “An invitation to integration in finite terms”**（有限形式積分導引），*The College Mathematics Journal* 25 (1994)。劉維爾理論的淺白入門。
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I***（Springer）。講述電腦代數系統實際上如何求積分。程度較深。

4.7 變分法

題目

STEP III 2014，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/14-s3-q4`

引子

中學裏的最優化（optimisation）問題，大多是求最佳的數：例如求令面積最大的 x 值。*變分法*（calculus of variations）要求的卻是最佳的*函數*。連接兩點的曲線之中，珠子沿哪一條滑下最快？懸掛的鏈條會呈甚麼形狀？光線穿過透鏡時走哪一條路徑？在這些例子中，要優化的量都是一個積分，而未知的是一整個函數。

本題研究的是最簡單而又有趣的例子。積分 $J = \int_0^1 ((y')^2 - a^2 y^2)\,\mathrm{d}x$ 在兩個互相競爭的項之間取得平衡：函數愈陡，積分愈大；函數值愈大，積分愈小。當 a 較小時，陡峭程度總是佔上風，所以對每個函數都有 $J \geq 0$。但 a 有一個臨界值，平衡會在那裏逆轉，而本題正好把它準確求出：$a = \frac{\pi}{2}$。π 從何而來，就是本節要講的故事。

動筆之前

想一想 為甚麼 $I \geq 0$ 並非顯而易見？試用 $y = 1 - x$，它滿足 $y(1) = 0$。

I 是兩個正數量之差，所以它可正可負。對於 $y = 1 - x$：$\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ 而 $\int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，所以 $I = \frac{2}{3} > 0$。但若函數選得更巧妙，或許可以令 $\int y^2$ 相對於 $\int (y')^2$ 變得更大。題目的竅門，是把 I 寫成一個*平方*的積分，而這顯然是非負的。這就是積分版本的「配方法」（completing the square）。

逐步解題

階段 1　配方

把 I_1 中的平方展開：

$$I_1 = \int_0^1 ((y')^2 + 2yy' \tan x + y^2 \tan^2 x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$I - I_1 = -\int_0^1 (y^2 + y^2 \tan^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x)\,\mathrm{d}x.$$

> **想一想**　被積函數 $y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$ 恰好是某個函數的導數（exact derivative）。是哪個函數？

根據乘積法則（product rule），$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 \tan x) = 2yy' \tan x + y^2 \sec^2 x$。所以

$$I - I_1 = -\Big[y^2 \tan x\Big]_0^1 = -(y(1)^2 \tan 1 - y(0)^2 \tan 0) = 0,$$

因為 $y(1) = 0$ 而 $\tan 0 = 0$。所以 $I = I_1 \geq 0$，因為它是一個平方的積分。 ■

階段 2　何時 $I = 0$？

> **想一想**　如果一個連續的非負函數的積分是零，你對這個函數能下甚麼結論？那麼若 $I = 0$，y 必須滿足甚麼方程？

積分為零的連續非負函數必定恆等於零（假如它在某一點取正值，它在該點附近的一個小區間上也會取正值，從而貢獻一個正的量）。所以 $I = 0$ 迫使 $y' + y \tan x = 0$ 在 $[0, 1]$ 上成立。乘以 $\sec x$ 後，這就是說 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{y' \cos x + y \sin x}{\cos^2 x} = 0$，所以 $y = C \cos x$。於是 $y(1) = C \cos 1 = 0$，而由於 $\cos 1 \neq 0$，得 $C = 0$。所以只有當 $y \equiv 0$ 時才有 $I = 0$。 ■

階段 3　一般情況

> **想一想**　用 $\int_0^1 (y' + ay \tan bx)^2\,\mathrm{d}x$ 重複第 1 步。b 必須是甚麼，餘下的項才能恰好組成一個導數？

把這個積分記作 K。那麼

$$\begin{aligned} J - K &= -\int_0^1 (a^2y^2 + a^2y^2\tan^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 (a^2y^2\sec^2 bx + 2ayy'\tan bx)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

另一方面，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ay^2\tan bx) = 2ayy'\tan bx + ab\,y^2\sec^2 bx$。兩者恰好在 $ab = a^2$ 時吻合，即 $b = a$。於是

$$J - K = -\Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1 = -a\,y(1)^2\tan a = 0,$$

所以 $J = K \geq 0$。

> **停一停，試一試** 這個論證在哪裏可能失效？（留意 $\tan ax$ 在區間 $0 \leq x \leq 1$ 上的情況。）

這個論證需要 $\tan ax$ 對 $[0,1]$ 內所有 x 都有定義而且連續；否則 K 未必存在，微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）亦不能應用。當 x 取遍 $[0,1]$ 時，ax 取遍 $[0,a]$，而 tan 在該處連續的充要條件正是 $a < \frac{\pi}{2}$。所以這個證明在以下情況成立：

$$a < k = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$

階段 4 臨界情況

> **想一想** 當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，證明失效。在第 2 步，令 $I = 0$ 的函數須滿足 $y' + y\tan x = 0$。現在對應的方程是甚麼？它的解又是甚麼？

對應的方程是 $y' + ay\tan ax = 0$，它的解是 $y = C\cos ax$。當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，$y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 滿足 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$。直接驗證：

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\frac{\pi x}{2} - \cos^2\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

所以在臨界值處，有一個非零函數令 J 恰好等於零。

回顧

- **在積分中配方。**加上再減去一個恰好是導數的式子，便把 J 化成一個平方的積分，再加上一個等於零的邊界項（boundary term）。

- **查看工具在哪裏失效。**這個方法只在 $\tan ax$ 在區間上保持有限時才行得通。它失效之處 $a = \frac{\pi}{2}$，正正就是臨界值。
- **極端情況是某個微分方程的解。**令 $J = 0$ 的函數來自一階微分方程（differential equation）$y' + ay\tan ax = 0$，而它同時滿足 $y'' + a^2 y = 0$。

背後的數學

最速降線與一門學科的誕生

1696 年，約翰·伯努利（Johann Bernoulli）向歐洲的數學家發出挑戰：求一條曲線，使珠子沿着它從一點滑到另一點所需的時間最短。這就是最速降線（brachistochrone）問題。提交解答的有牛頓（Newton）（他匿名投稿，一夜之間解出；伯努利說他「從爪子認出了獅子」）、萊布尼茲（Leibniz）、洛必達（l'Hôpital）和雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）。答案是一條擺線（cycloid）。到了 1750 年代，歐拉（Euler）和年輕的拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）把這些個別的技巧變成一套通用的方法：如果 y 令 $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ 取平穩值，那麼 y 滿足*歐拉－拉格朗日方程*（Euler–Lagrange equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

對於我們的 J，$F = (y')^2 - a^2y^2$，而歐拉－拉格朗日方程就是 $y'' + a^2y = 0$：簡諧運動（simple harmonic motion）。

為何是 $\pi/2$？

當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，J 的最小值是 0，而且只有 $y \equiv 0$ 才能取得。當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，最小值仍然是 0，但多了一個函數能取得它。當 $a > \frac{\pi}{2}$ 時，同一個函數 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 給出

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

而只要把 y 按比例放大，J 就可以負得要多大有多大：根本沒有最小值（圖 4.7.1）。臨界值就是第一個令 $y'' + a^2y = 0$ 有非零解滿足邊界條件的 a（邊界條件是 $y(1) = 0$，以及在自由端的「自然」條件 $y'(0) = 0$）。這是一個*特徵值問題*（eigenvalue problem），而 $a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ 是它最小的特徵值。試與 Section 3.7 比較：那裏把函數在長度為 π 的區間的兩端都固定，得出臨界值 1；這裏區間長度為 1，而且只固定一端，相當於長度為 2 的區間的一半，所以臨界的 a 是 $\frac{\pi}{2}$。

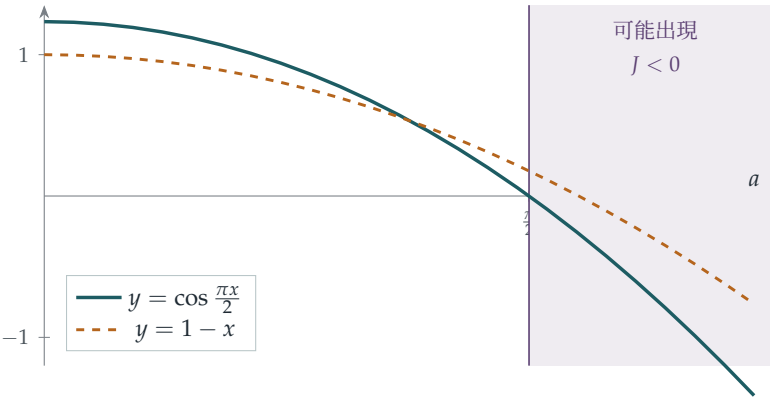


圖 4.7.1 對於兩個滿足 $y(1) = 0$ 的試驗函數，J 的值隨 a 的變化。對於 $y = 1 - x$，$J = 1 - \frac{a^2}{3}$ 要到 $a > \sqrt{3}$ 才變成負數。對於 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$ 在 $a > \frac{\pi}{2}$ 時隨即變成負數，而且沒有函數能做得更好：當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，對每個 y 都有 $J \geq 0$。

物理學與最小作用量原理

後來發現，變分法描述的竟是大自然本身。在十八和十九世紀，人們逐漸明白運動定律可以這樣表述：力學系統的運動方式，會令一個稱為作用量（action）的積分取平穩值，這就是最小作用量原理（principle of least action）。同樣，光沿着需時最短的路徑前進（費馬原理，Fermat's principle），這解釋了折射現象。到了二十世紀，同一個想法通過費曼（Richard Feynman）的「路徑求和」（sum over paths），成為量子力學的基礎。本題中的二次積分是最簡單的例子，而它們引出的特徵值問題，會在 Section 8.6 以量子振子能級的面貌再次出現。

思維技巧

先配方，再留意邊界

要證明一個二次式非負，可把它寫成一個平方加上一些你能控制的東西。對於積分，這些「東西」往往恰好是某個函數的導數，積分後便成爲邊界項。

此外，永遠要問這個方法在哪裏不再奏效。本題中方法失效之處並非偶然；它正是題目中最重要的那個數。

延伸練習

1 **越過臨界值。**證明若 $a > \frac{\pi}{2}$，則 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 給出 $J < 0$。

2 **歐拉－拉格朗日方程。**較難設 y 在滿足 $y(1) = 0$ 的函數之中令 J 取最小值。對任何滿足 $\eta(1) = 0$ 的函數 η 和任何數 ε，都有 $J(y + \varepsilon\eta) \geq J(y)$。把 $J(y + \varepsilon\eta)$ 按 ε 的冪展開，並由此推出 $\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$。用分部積分法（integration by parts）證明 $y'' + a^2 y = 0$ 及 $y'(0) = 0$（假設 y 足夠光滑）。

3 **較長的區間。**用代換法（substitution）證明：若 $y(L) = 0$，則 $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right)\mathrm{d}x \geq 0$ 對所有 y 成立，當且僅當 $a \leq \frac{\pi}{2L}$；並證明只有當 $a = \frac{\pi}{2L}$ 時，才有非零的 y 令等號成立。

4 **擺線。**查閱最速降線問題，並找出擺線的參數方程（parametric equations）。證明在一條倒置的擺線上，珠子無論從哪一點由靜止釋放，到達最低點所需的時間都相同（這是等時（tautochrone）性質，由惠更斯（Huygens）於 1659 年發現）。

延伸閱讀

- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。講述最優化的歷史與數學，包括最速降線，為學生而寫。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***，第二卷第 19 章（「The principle of least action」，最小作用量原理）。可在網上免費閱讀。
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations***（Springer）。一本大學本科教科書；頭幾章只需要高級程度（A-level）的微積分知識。

4.8 切球形麵包

題目

STEP I 2001，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/01-s1-q6`

引子

把一個球形麵包切成厚度相等的薄片。靠近中間的幾片是又大又厚的圓片，只有邊緣一圈窄窄的麵包皮；靠近兩端的幾片則是小小的球冠，看起來幾乎全是麵包皮。兩端的薄片，麵包皮一定比較多吧？

其實不然。不論切在靠近中間還是靠近兩端的位置，每一片的麵包皮面積都完全相同。中間那圈窄帶周長很大，但幾乎是垂直的；兩端的球冠周長很小，但傾斜得很厲害，所以麵包皮鋪開的闊度反而較大。這兩種效應恰好互相抵消。這是阿基米德（Archimedes）的一條定理，他對這條定理珍愛有加，甚至要求在自己的墓碑上刻上一個內切於圓柱（cylinder）的球（sphere）。題目的第二部分是一則較為輕鬆的「規例」，但它所依據的正是同一個計算。

動筆之前

? **想一想** 半徑為 a 的球，是由哪一條曲線繞 x-軸旋轉而成的？該曲線的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是甚麼？

把半圓（semicircle）$y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ 旋轉，便得到這個球。於是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$。請記住這一點：斜率（slope）在兩端附近（$x \to \pm a$）很陡，在中間則很平緩，這正是引子中所描述的效應。

逐步解題

階段 1　麵包皮公式的化簡

? **想一想**　對這個半圓計算 $y\sqrt{1+(y')^2}$。奇妙的事情出現了。

由於 $y' = -x/y$，

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2},$$

所以 $y\sqrt{1+(y')^2} = y \cdot \frac{a}{y} = a$，竟然是一個常數！因此，任意兩個平面 $x = x_1$ 與 $x = x_2$ 之間的麵包皮面積為

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} a \, \mathrm{d}x = 2\pi a (x_2 - x_1).$$

它只取決於兩個平面之間的距離，而與平面的位置無關。

階段 2　麵包皮與片數成正比

如果把麵包切成厚度為 h 的薄片，每一片的麵包皮面積都是 $2\pi a h$，片片相同。不論是從一端吃、從兩端吃，還是從任何地方吃掉若干片，剩下的麵包皮面積都是 $2\pi a h$ 乘以剩下的片數。 ■

階段 3　「脆皮」的條件

題目的提示所描述的，是從一端吃掉若干片之後剩下的麵包，我們就依照提示去做：假設從 $x = a$ 那一端開始吃，於是剩下的部分由 $x = -a$ 延伸至 $x = -a + t$。一項關於「任意片數」的規定，應該不論麵包切得多薄都成立，所以我們把 t 看成可以取 0 與 $2a$ 之間的任何值。（第 4 階段會探討從兩端吃的情況。）

? **想一想**　利用題目給出的公式計算 V。使用代換（substitution）$s = x + a$ 或許能令代數運算更簡潔。

設 $s = x + a$，則 $y^2 = a^2 - x^2 = a^2 - (s-a)^2 = 2as - s^2$，所以

$$V = \pi \int_0^t (2as - s^2)\, \mathrm{d}s = \pi \left(at^2 - \frac{t^3}{3} \right), \qquad A = 2\pi a t,$$

以及

$$\frac{V}{A} = \frac{at^2 - t^3/3}{2at} = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}.$$

停一停，試一試 規定要求吃掉任意片數之後都有 $V/A < 1$，即是對所有滿足 $0 < t \le 2a$ 的 t 都成立。在這個範圍內，$\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6a}$ 的最大值是多少？

對 t 求導：$\frac{1}{2} - \frac{t}{3a} = 0$ 於 $t = \frac{3a}{2}$ 時成立，這個值位於範圍 $(0, 2a]$ 之內，而且是極大值（maximum）（該式是 t 的一條開口向下的拋物線）。最大值為

$$\frac{3a}{4} - \frac{9a^2/4}{6a} = \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} = \frac{3a}{8}.$$

脆皮麵包需要對所有 t 都有 $V/A < 1$，特別是在 $t = \frac{3a}{2}$ 時也要成立，所以 $\frac{3a}{8} < 1$，即 $a < \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ 米。 ■

階段 4 題目之外：$2\frac{2}{3}$ 足夠嗎？

想一想 題目只要求找出半徑必須滿足的條件。$a < \frac{8}{3}$ 是否同時也足夠？如果從兩端吃又如何？

並不足夠。從兩端吃會在中間剩下一條環帶，而以同樣多的麵包皮計算，中間的環帶比末端的球冠包含更多麵包。對於環帶 $-\frac{w}{2} \le x \le \frac{w}{2}$，

$$V = \pi \int_{-w/2}^{w/2} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\left(a^2 w - \frac{w^3}{12}\right), \qquad A = 2\pi a w, \qquad \frac{V}{A} = \frac{a}{2} - \frac{w^2}{24a},$$

當環帶很窄時，這個值接近 $\frac{a}{2}$。例如，一個半徑為 2.4 米的麵包，明顯小於 $2\frac{2}{3}$，切成四片後吃掉兩端的兩片，剩下的環帶有 $w = a$ 及 $\frac{V}{A} = \frac{11a}{24} = 1.1$。事實上，對於任何一組薄片都有 $\frac{V}{A} < \frac{a}{2}$，所以如果可以從任何地方吃掉薄片，麵包是脆皮的當且僅當 $a \le 2$ 米。題目中的 $2\frac{2}{3}$ 是一個正確的必要條件（necessary condition），但這項規定其實比題目所透露的更為嚴格。

回顧

- **先化簡，後積分。**麵包皮的被積函數（integrand）看似複雜，結果卻是常數。動手積分之前，務必先把被積函數化簡。
- **仔細閱讀「任意」二字。**條件必須在吃掉任意片數之後都成立，所以我們需要的是 V/A 的最大值，而不是整個麵包的值（即 $\frac{a}{3}$）。
- **簡單的計算，出人意表的答案。**「麵包皮相等」這個性質聽起來難以置信，但計算只有兩行。

背後的數學

阿基米德的帽盒定理

阿基米德在《論球與圓柱》（*On the Sphere and Cylinder*）中證明了：球面上夾在兩個平行平面之間的環帶，其面積等於這兩個平面在包裹球的圓柱上所截出的環帶的面積（圖 4.8.1）。我們的計算正是這條帽盒定理（hat-box theorem）：半徑為 a 的圓柱每單位長度的麵包皮面積為 $2\pi a$，球也是如此。考慮整個球，它的表面積（surface area）等於圓柱的曲面面積，即 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$。阿基米德認為，這個結果連同「球的體積是圓柱體積的三分之二」這一事實，是他畢生最出色的成就。西塞羅（Cicero）於公元前 75 年到訪敍拉古（Syracuse）時，正是憑着尋找刻在墓上的球與圓柱，找到了那座雜草叢生的墳墓。

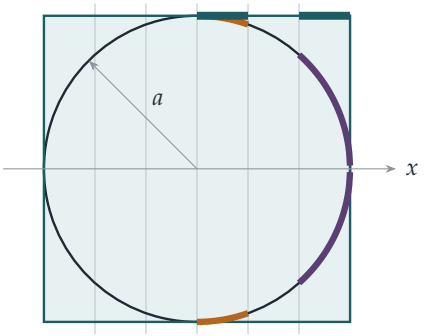


圖 4.8.1　半徑為 a 的球形麵包置於包裹它的圓柱之內的橫截面，麵包被切成厚度相等的薄片。中間的薄片（琥珀色）的麵包皮是一段短而接近水平的弧，離軸較遠；末端的薄片（紫紅色）的麵包皮是一段長而陡峭的弧，離軸較近。繞 x-軸旋轉後，兩者的麵包皮面積都恰好等於圓柱上對應環帶（藍綠色）的面積：$2\pi a$ 乘以厚度。

地球的地圖

帽盒定理提供了一種繪製保持面積不變的地球地圖的方法。把地球儀上的每一點沿水平方向向外投影到包裹它的圓柱上，然後把圓柱攤開。球面上的環帶會映射到圓柱上面積相同的環帶，而任何區域也是如此。這就是蘭伯特（*Lambert*）圓柱等積投影（Lambert's cylindrical equal-area projection，1772 年）。它在兩極附近會令形狀嚴重失真，但面積是如實的，不像人們熟悉的麥卡托（Mercator）投影那樣，令格陵蘭看起來與非洲一樣大（其實格陵蘭大約只有非洲的十四分之一）。高斯（Gauss）有一條著名的定理，稱為「絕妙定理」（*Theorema Egregium*，1827 年），它說明沒有任何球面地圖可以同時保持面

積和形狀：每一幅平面的地球地圖都必定有所失真。

球面上的隨機點

以下是一個實際的應用。要在球面上均勻（uniformly）隨機地選取一點，你或許會嘗試均勻地選取緯度（latitude）和經度（longitude），但這樣會令點在兩極附近過於密集。帽盒定理給出了正確的做法：在 $-a$ 與 a 之間均勻地選取高度 x，並在 0 與 2π 之間均勻地選取經度。由於面積與高度成正比，這樣選出的點恰好是均勻分佈的。物理學和電腦圖像的電腦模擬都採用這個方法。（值得一提的是，這個方法只在三維空間中有效：對於四維或更高維的球面，相應的命題並不成立。）

思維技巧

尋找隱藏的簡潔

當計算得出出乎意料地簡單的結果（例如一個常數）時，請停下來問一問爲甚麼。背後通常有幾何上的原因，而找出這個原因，才是眞正理解之所在。

在這裏，被積函數 $y\sqrt{1+(y')^2}$ 是常數，因為在球面上，陡峭程度與離軸的距離恰好互相補償：這就是阿基米德的定理。

延伸練習

1. **整個麵包。**證明對於整個未切開的麵包，$V/A = \frac{a}{3}$。為甚麼題目中的條件比 $\frac{a}{3} < 1$ 更難滿足？

2. **熱帶地區。**地球表面有多大比例位於南緯 23.4° 與北緯 23.4° 之間？（把地球視為一個球。由於面積與高度成正比，你只需要用到 $\sin 23.4°$。）

3. **其他形狀。**證明對於拋物面（paraboloid）形狀的麵包（把 $y = \sqrt{x}$ 繞 x-軸旋轉），每片的麵包皮並非常數。對於哪些曲線 $y(x)$，$y\sqrt{1+(y')^2}$ 是常數？（解出相應的微分方程（differential equation）。）

4. **體積。**利用體積公式，證明球的體積是包裹它的圓柱體積的三分之二，正如阿基米德所發現的那樣。

延伸閱讀

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?***（Mathematical Association of America）。為現代讀者講解阿基米德的數學。
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。書中關於幾何的一章介紹了曲面的幾何。
- **John Snyder, *Flattening the Earth***（University of Chicago Press）。兩千年來的地圖投影史。

4.9 Holditch 定理

題目

STEP III 2011，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/11-s3-q5`

引子

隨便取一個卵形，甚麼形狀都可以，只要它是凸（convex）的，然後讓一根長度固定的桿在裏面滑動一圈，兩端始終留在曲線上。在桿上塗一個點，把桿分成長度為 a 和 b 的兩段。桿繞行一周時，這個點會描出一個較小的卵形。兩條曲線之間的環形區域，面積是多少？

答案令人驚訝：*無論原來的曲線是甚麼形狀，面積都是* πab。又長又窄的卵形、蛋形、圓角三角形：環形的面積永遠相同，只取決於那個點在桿上的位置。這個結果由劍橋大學岡維爾與凱斯學院（Gonville and Caius College, Cambridge）的院士 Hamnet Holditch 牧師於 1858 年發現，是初等幾何中最出人意表的定理之一。本題只用一條面積公式就把它證明出來。

動筆之前

想一想 先在最簡單的情況下檢驗這個定理。若 $\mathcal{C}$ 是半徑為 R 的圓，P 描出的是甚麼曲線？環形的面積是多少？

由對稱性可知，P 描出一個同心的圓，設其半徑為 r。桿 AB 是大圓上一條通過 P 的弦，而*相交弦定理*（intersecting chords theorem，又稱「圓冪」（power of a point））指出，對任何通過 P 的弦，都有 $PA \times PB = R^2 - r^2$。所以 $ab = R^2 - r^2$，環形的面積是 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$。定理說的是：這個結論對每一條凸曲線都成立，不限於圓。

逐步解題

階段 1　由坐標求面積

想一想　設 $x = r\cos\theta$ 和 $y = r\sin\theta$，全部都是 t 的函數，計算 $x\dot{y} - y\dot{x}$，其中上方的點表示 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$。

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}$，而 $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$。於是

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r\cos\theta\,(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}) - r\sin\theta\,(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta}) = r^2\dot{\theta}.$$

所以 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int r^2\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathrm{d}t$。 ■

這條公式不需要極坐標（polar coordinates），只需要把笛卡兒坐標（cartesian coordinates）下的位置寫成某個參數（parameter）的函數。當一點沿着一條包圍 O 的閉曲線逆時針繞行一周時，公式給出的就是曲線內的面積。

階段 2　桿的兩端

桿由 A 指向 B 的方向是 $(\cos t, \sin t)$，而 P 與 A 的距離是 a，與 B 的距離是 b。所以

$$A = (x - a\cos t,\ y - a\sin t), \qquad B = (x + b\cos t,\ y + b\sin t).$$

階段 3　OA 掃過的面積

想一想　把 $(*)$ 應用於 A。展開 $x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$，並按 a 的冪次把各項整理好。

由 $x_A = x - a\cos t$、$y_A = y - a\sin t$，可得 $\dot{x}_A = \dot{x} + a\sin t$ 和 $\dot{y}_A = \dot{y} - a\cos t$。展開得

$$\begin{aligned} x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A &= (x - a\cos t)(\dot{y} - a\cos t) - (y - a\sin t)(\dot{x} + a\sin t) \\ &= (x\dot{y} - y\dot{x}) + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - a[(x + \dot{y})\cos t + (y - \dot{x})\sin t]. \end{aligned}$$

由 0 積分至 2π 再除以二：第一項給出 $[P]$，第二項給出 $\frac{1}{2}a^2 \cdot 2\pi = \pi a^2$，第三項給出 $-af$。所以

$$[A] = [P] + \pi a^2 - af. \qquad ■$$

停一停，試一試　現在求 $[B]$。（提示：把 A 的公式中的 a 換成甚麼，就得到 B？）

$B = (x + b\cos t, y + b\sin t)$ 就是把 A 的公式中的 a 換成 $-b$。所以

$$[B] = [P] + \pi b^2 + bf.$$

階段 4 消去 f

想一想 A 和 B 都沿同一條曲線 $\mathcal{C}$ 繞行一周。由此可知 $[A]$ 和 $[B]$ 有甚麼關係？

當 t 由 0 變到 2π 時，A 和 B 各自沿 $\mathcal{C}$ 逆時針繞行一周，所以 $[A] = [B] =$ 面積$(\mathcal{C})$。令兩個表達式相等，

$$\pi a^2 - af = \pi b^2 + bf \quad\Longrightarrow\quad f(a+b) = \pi(a^2 - b^2) \quad\Longrightarrow\quad f = \pi(a-b).$$

由於 P 沿 $\mathcal{D}$ 繞行一周，$[P] =$ 面積$(\mathcal{D})$，於是

$$\text{面積}(\mathcal{C}) - \text{面積}(\mathcal{D}) = [A] - [P] = \pi a^2 - a\pi(a-b) = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

那個取決於曲線形狀的神祕量 f，自始至終沒有計算過：它被消去了。

回顧

- **切合問題的公式。**面積公式 $(*)$ 只需要把坐標寫成參數的函數，而桿的運動正是這樣描述的。
- **兩個表達式，一個未知量。**我們無法計算 f，但手上有兩條含有它的方程，於是把它消去，就像解聯立方程（simultaneous equations）一樣。
- **先檢驗特殊情況。**動筆之前，圓的情況已經給出答案 πab，讓我們知道目標是甚麼。

背後的數學

格林定理與求積儀

公式 $(*)$ 是格林定理（Green's theorem）的特殊情況；格林定理把沿閉曲線的積分與曲線內區域上的積分聯繫起來。它的面積形式指出，曲線所包圍的面積是 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$，這個積分只需沿邊界走一圈就能算出。工程師利用這一點造出了求積儀（planimeter），這是十九世紀發明的一種機械儀器（其中以 Jakob Amsler 在 1854 年的設計最為成功）：用指針沿着地圖或圖表上某個圖形的邊界描一圈，一個小輪就會記錄所包圍的面積。求積儀曾用來量度土地面積、根據示功圖（indicator diagram）計算蒸汽機所作的功，還有許多其他用途，直至被數碼方法取代為止。Holditch 定理與此密切相關：那根桿就像求積儀的臂。

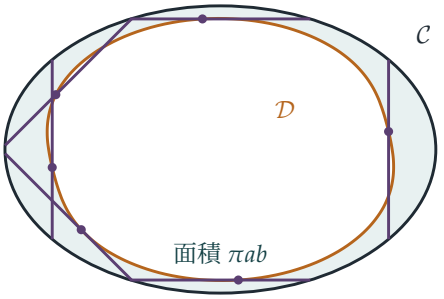


圖 4.9.1　Holditch 定理的例子：橢圓的半軸（semi-axes）為 3 和 2，桿長 2.5，其中 $a = 1$、$b = 1.5$。圖中畫出了桿的若干位置（紫色），並標出點 P。P 所描出的曲線 $\mathcal{D}$（琥珀色）是用數值方法算出的，而兩條曲線之間的陰影環形面積為 $4.7124\ldots = 1.5\pi$，與定理的預測完全吻合。

細節條款

Holditch 陳述這個定理時，對條件不大講究，但定理其實需要一些條件。桿必須能夠在兩端都留在曲線上的情況下繞足一整圈，而描出的曲線 $\mathcal{D}$ 必須是只描一次的簡單閉曲線（simple closed curve）；如果桿相對於 $\mathcal{C}$ 的闊度太長，$\mathcal{D}$ 可能會自相交，這時公式給出的「面積」會把某些區域計算兩次，或以負號計算。題目假設 $\mathcal{D}$ 是一條包含 O 的凸曲線，從而避開了這些困難。找出定理究竟在甚麼條件下成立，正好說明一個優美的想法必須經過嚴格化才站得住腳，這也是第 3 章的主題。

思維技巧

算不出來的，就把它消去

如果某個量太複雜而無法計算，就找兩條含有它的不同方程，把它消去。

這裏 f 取決於曲線的每一個細節，但它同時出現在 $[A]$ 和 $[B]$ 的表達式中，而 $[A] = [B]$ 這個事實把它消除了。答案 πab 之所以能夠與曲線無關，全因取決於曲線的部分互相抵消了。

延伸練習

1 **橢圓的面積。**利用 $(*)$，取 $x = p\cos t$、$y = q\sin t$，證明半軸為 p 和 q 的橢圓面積為 πpq。

2 **圓的情況。**證明相交弦定理：若圓的兩條弦相交於 P，則每條弦被分成的兩段，其長度之積相等。由此推導出圓的 Holditch 定理。

3 **中點。**證明由 $f = \pi(a - b)$ 可知，當 P 是桿的中點時，$f = 0$。這時環形的面積是多少？答案以桿長 L 表示。

4 **三角形。**較難利用 $(*)$，沿邊界繞行一周，求頂點為 $(0,0)$、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 的三角形的面積，並證明它等於 $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$。這就是求任意多邊形面積的「鞋帶公式」（shoelace formula）的起點。

延伸閱讀

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic***（Princeton University Press）。以桿、輪和彈簧等物理推理來證明數學結果，與本節的精神一脈相承。
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That***（Norton）。向量微積分（vector calculus）的非正式入門，內容包括格林定理。
- **Hamnet Holditch, "Geometrical theorem"**，*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858)。原始的短文，只有短短一段，完全沒有提及任何細節條款。

我們學到了甚麼

本章開始時，我們提出了三個問題：積分（integral）究竟是甚麼？積分可以證明甚麼？當一個積分沒有公式時，又該怎麼辦？以下是本章九道題目給出的答案。

1. 積分是甚麼？哪些函數有積分？

在 Section 4.1 中，我們把積分定義為由窄長矩形組成的下和（lower sum）與上和（upper sum）的共同極限，並單憑這個定義計算出 $\int_0^a x^5\,\mathrm{d}x$。這要花一番工夫：先以裂項相消求和（telescoping sum）處理連續整數乘積之和，再從兩邊估計上下界，最後用夾逼（squeeze）得出結果。花了多少力氣，正好說明微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）讓你不勞而獲的有多少。

這個定義也告訴我們，並非每個函數都可積（integrable）。狄利克雷（Dirichlet）函數在有理數上取值 1，在無理數上取值 0，它的上和全部等於 1，下和全部等於 0。正是這類問題，促使勒貝格（Lebesgue）建立了一套更強大的積分理論，你日後在大學便會學到。

2. 積分可以證明甚麼？

遠遠不止面積。

- **數與數之間的不等式。**一個正函數的積分等於 $\frac{22}{7}-\pi$，所以 $\frac{22}{7} > \pi$（Section 4.3）。「把 $A-B$ 寫成某個正函數的積分」這個想法既簡單，又非常有用。
- **無窮乘積與特殊值。**利用 $\int \sin^n t\,\mathrm{d}t$ 的歸約公式（reduction formula）、一個不變量（invariant）和一次夾逼，便得到沃利斯（Wallis）乘積、斯特靈（Stirling）公式中的常數，以及 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$（Section 4.4）。
- **無窮和。**把 x^x 展開成冪級數（power series）再逐項積分，便得到「二年級生之夢」（sophomore's dream）（Section 4.5）。
- **三角學的基礎。**定義 $\mathrm{T}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 及 $\pi = 2\mathrm{T}(\infty)$ 之後，單靠代換（substitution）便推出了加法公式，以及 $\mathrm{T}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ 等特殊值（Section 4.2）。
- **幾何。**一個化簡後變成常數的被積函數（integrand），揭示了阿基米德（Archimedes）的帽盒定理（hat-box theorem）（Section 4.8）；而把面積公式寫成沿邊界的積分，則

證明了令人驚歎的 Holditch 定理（Section 4.9）。

- **最優函數。**在積分內配方（completing the square），便準確指出 $\int\left((y')^2 - a^2y^2\right)$ 在甚麼情況下必定非負，而臨界值 $\frac{\pi}{2}$ 原來是一個特徵值（eigenvalue）（Section 4.7）。

3. 沒有公式時，我們可以怎麼辦？

在 Section 4.6 中，我們證明了 $\int \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ 不能寫成有理函數（rational function）乘以 e^x 的形式，而劉維爾（Liouville）的理論更表明它根本沒有初等（elementary）公式。從極點（pole）的角度看，原因是其原函數（antiderivative）在 $x = -1$ 附近的表現必須像對數函數，而有理函數做不到這一點。然而這個積分確確實實存在，我們也可以把它算出來：可以用數值方法，可以用級數（如 Section 4.5 中處理 $\int x^x$ 那樣），也可以給它起一個名字，把它當作一個新函數來研究，就像我們在 Section 3.9 中對待 W 函數那樣。

4. 積分工具箱

方法	你在哪裏用過
從定義出發	由矩形求 $\int_0^a x^5$（4.1）
裂項相消求和	連續整數乘積之和（4.1）
保持積分不變的代換	由 $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ 建立三角學（4.2）
多項式除法	$\frac{22}{7} - \pi$（4.3）
正性與被積函數的估界	$\pi < \frac{22}{7}$（4.3）
歸約公式	$\int \sin^n t$（4.4）；$\int x^m(\ln x)^n$（4.5）
不變量與夾逼	$nu_nu_{n-1} = \frac{\pi}{2}$（4.4）
逐項積分	二年級生之夢（4.5）
因式與次數論證	不存在有理原函數（4.6）
配方法	變分法（calculus of variations）（4.7）
先化簡，後積分	球形麵包（4.8）
以邊界積分表示面積	Holditch 定理（4.9）

下一站

- Section 4.4 中的伽瑪函數（Gamma function）和貝塔函數（Beta function），以及斯特靈公式中的常數 $\sqrt{2\pi}$，會在 Section 12.23 的概率問題中再度出現。
- Section 4.7 的特徵值問題，到了 Section 8.6 會變成量子諧振子（quantum harmonic oscillator）。
- 梅欽（Machin）公式由 Section 4.2 的加法恆等式建立而成，是 Section 5.1 的主題。
- 第 5 章轉向複數（complex numbers），它解釋了為何本章有這麼多積分都與 π 有關。

如果你想在上大學前走得更遠

- **Paul Nahin, *Inside Interesting Integrals***（Springer）：一場巧妙積分的盛宴，並道出背後的種種竅門。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***：從牛頓（Newton）到勒貝格的分析學傑作。
- **Michael Spivak, *Calculus***：嚴謹地講述積分的定義和微積分基本定理。
- **Sherman Stein, *Archimedes***：追溯積分的古代源頭。

埃爾米特（Hermite）對沒有導數的函數避之則吉，但積分從來沒有這個問題：它十分寬容，連微分無法處理的函數也照單全收，而且不斷帶來驚喜。如果說有一個主題貫穿本章，那就是：積分不只是一種求面積的技巧。它是一種語言，用來表達和證明關於數、函數和圖形的事實，而在你往後的數學生涯中，你都會一直說這種語言。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：只列出結果和關鍵步驟，方便你核對自己的做法。請先認真做過每道練習，然後才看答案。

4.1 甚麼是積分？

1. 這個和是 $y=\mathrm{f}(x)$ 之下、在 $[1,2]$ 上 n 個闊度為 $\frac{1}{n}$ 的長方形的總面積。取 $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$，得 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+m/n}=\sum\frac{1}{n+m}\to\ln 2$。第二個和是 $\frac{1}{n}\sum\frac{1}{1+(m/n)^2}\to\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$。

2. 分成 n 條時，上和（upper sum）是 $\frac{a}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{ra}{n}\right)^2=\frac{a^3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$，下和（lower sum）則只須把第一個因子中的 $n+1$ 換成 $n-1$；兩者都趨向 $\frac{a^3}{3}$。

3. 各項可以裂項相消（telescope）：$r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r\cdots(r+k-1)=(k+1)\,r(r+1)\cdots(r+k-1)$。

4. $\sum_{r=1}^{n}r^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$。

4.2 由一個積分建立三角學

1. 導數（derivative）是 $-\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=0$，所以 $\mathrm{f}(a-x)\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(a)$；代入 $a=x+y$ 即可。至於餘弦，固定 y，設 $p(x)=\mathrm{c}(x+y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)+\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$ 及 $q(x)=\mathrm{s}(x+y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$。於是 $p'=-q$ 而 $q'=p$，所以 p^2+q^2 是常數，而它在 $x=0$ 時等於 0。

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=(1+u^2)^{-3/2}$ 而 $\sqrt{1-y^2}=(1+u^2)^{-1/2}$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$。於是 $\mathrm{S}(\frac{1}{\sqrt{2}})=\mathrm{T}(1)$，而在第 (i) 部分取 $x=1$ 便得 $\mathrm{T}(1)=\frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$。

3. 取 $a=\frac{1}{2}$ 及 $x=\frac{1}{3}$，則 $\frac{x+a}{1-ax}=1$，所以 $\mathrm{T}(\frac{1}{3})=\mathrm{T}(1)-\mathrm{T}(\frac{1}{2})$。

4. 在 $[0,1]$ 上 $\frac{1}{1+u^2}\le 1$，在 $[1,x]$ 上則 $\le\frac{1}{u^2}$，所以當 $x\ge 1$ 時，$\mathrm{T}(x)\le 1+(1-\frac{1}{x})<2$；當 $0<x<1$ 時，$\mathrm{T}(x)<\mathrm{T}(1)\le 1$。（上界 $1+\int_1^x u^{-2}\,\mathrm{d}u$ 在 $x<1$ 時並不成立：在 $x=\frac{1}{2}$ 時它等於 0。）T 遞增而且有界（bounded），所以它有極限（limit）。

4.3 $22/7$ 大於 π

1. $\frac{22}{7}-\pi\approx 0.001264$，介乎 $\frac{1}{1260}\approx 0.000794$ 與 $\frac{1}{630}\approx 0.001587$ 之間。

2. $\frac{(4!)^2}{9!} = \frac{576}{362\,880} = \frac{1}{630}$。

3. $\frac{x(1-x)^2}{1+x^2} = x - 2 + \frac{2}{1+x^2}$，積分（integrate）後得 $\frac{1}{2} - 2 + \frac{\pi}{2}$。同樣地，$\frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2} = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4 + \frac{4}{1+x^2}$，積分後得 $\frac{1}{5} - 1 + \frac{5}{3} - 4 + \pi = \pi - \frac{47}{15}$。兩個積分都是正數。這兩個被積函數（integrand）遠大於 $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$（其最大值約為 0.003），所以誤差 $\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \approx 0.07$ 和 $\pi - \frac{47}{15} \approx 0.008$ 也較大。

4. 多項式除法（polynomial division）餘下 $\frac{16}{1+x^2}$，積分後得 4π；整個積分是 $4\pi - \frac{188684}{15015} \approx 3.6 \times 10^{-6}$，所以 $\pi \approx 3.14159174$。

4.4 沃利斯、Beta 與二分之一的階乘

1. $u_{2m} = \frac{1\cdot3\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdots2m} \cdot \frac{\pi}{2}$ 而 $u_{2m+1} = \frac{2\cdot4\cdots2m}{3\cdot5\cdots(2m+1)}$。於是 $1 < \frac{u_{2m}}{u_{2m+1}} < \frac{u_{2m-1}}{u_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}$，所以這個比趨向 1，整理後即得 $\frac{\pi}{2} = \prod_{k\ge1} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$。

2. 分部積分法（integration by parts）給出 $I_n = \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$，再寫成 $x^{n+1}(1-x)^{n-1} = x^n(1-x)^{n-1} - x^n(1-x)^n$ 並利用對稱性，便得 $I_n = \frac{n}{2(2n+1)} I_{n-1}$；用歸納法（induction）可得 $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$。取 $x = \sin^2\theta$，得 $I_{1/2} = \int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$。公式提示 $\left((\frac{1}{2})!\right)^2/2! = \frac{\pi}{8}$，所以 $(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$（即 $\Gamma(\frac{3}{2})$）。

3. 對稱性來自 $x \mapsto 1-x$；遞推關係（recurrence）來自 $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$；而取 $x = \frac{t}{1+t}$ 時，$1 - x = \frac{1}{1+t}$ 且 $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$。該積分是 $\mathrm{b}(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$；利用遞推關係和對稱性化簡至 $\mathrm{b}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$，便得 $\frac{3\pi}{256}$。

4. 由第 (i) 部分的顯式數值，$u_{2m} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{2m}{m}\frac{\pi}{2^{2m+1}}$。於是由 $2mu_{2m}^2 \to \frac{\pi}{2}$ 得 $\binom{2m}{m}^2 \approx \frac{4^{2m}}{\pi m}$。當 $m = 10$ 時：$\binom{20}{10} = 184\,756$，而 $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} \approx 187\,079$（高出約 1.3%）。

4.5 大二學生之夢

1. $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n\ge0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$，而 $\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$（代入 $x = e^{-u}$）。所以該積分是 $\sum_{n\ge1} n^{-n} \approx 1.2913$。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x^x(\ln x + 1)$，在 $x = \frac{1}{e}$ 時為零；其值為 $(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.692$。

3. 各項是 $\frac{1}{n^n}$。取 7 項後停止，誤差小於 $\frac{1}{8^8} \approx 6 \times 10^{-8}$，已經足夠；只取 6 項的話，上界 $\frac{1}{7^7} \approx 1.2 \times 10^{-6}$ 並不足夠。所以要取 7 項。

4. 用分部積分法：$\int_0^1 x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3\ln x}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$。一般而言 $\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$，而 $\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n\ge0} x^n \ln x$。

4.6 沒有公式的積分

1. 求導：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x}{x+1} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x-1)e^x}{x+1} = e^x\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{P}e^{-x^2}\right) = (\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P})e^{-x^2}$，而 $\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P}$ 的次數是 $\deg \mathrm{P} + 1 \geq 1$（當 $\mathrm{P} \neq 0$），所以它不可能等於 1。

3. 假如 $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q}$（已約至最簡）在 0 處有 $k \geq 1$ 階的極點（pole），則 $\mathrm{R}' + \mathrm{R}$ 在該處會有 $k+1 \geq 2$ 階的極點，但 $\frac{1}{x}$ 的極點只是 1 階。假如 R 在 0 處沒有極點，則 $\mathrm{R}' + \mathrm{R}$ 也沒有。無論哪種情況，都有 $(\mathrm{R}e^x)' \neq \frac{e^x}{x}$。

4. 對 $\frac{\mathrm{P}e^x}{x+1}$ 求導，得 $e^x\frac{(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}}{(x+1)^2}$。在 $x = -1$ 處：$\mathrm{f}(-1) = -\mathrm{P}(-1)$，而由 $\mathrm{f}' = (x+1)\mathrm{P}'' + (x+1)\mathrm{P}' + \mathrm{P}$ 得 $\mathrm{f}'(-1) = \mathrm{P}(-1)$。對於 $x^3 - 2$：$-3+3=0$；對於 x：$-1+1=0$；對於 x^2+1：$2-2=0$。這個條件也是充分的：映射 $\mathrm{P} \mapsto (x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P}$ 把次數小於 d 的多項式映到次數不超過 d 的多項式，而且是單射（injective），所以它的像（image）的維數（dimension）是 d，並且包含在由滿足 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$ 的 f 所組成的 d 維空間之內；因此像就是整個空間。

4.7 變分法

1. 取 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，得 $J = \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \sin^2 - a^2\int_0^1 \cos^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right) < 0$。

2. $J(y+\varepsilon\eta) = J(y) + 2\varepsilon\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta) + \varepsilon^2 J(\eta)$；要在 $\varepsilon = 0$ 處取得最小值，線性項必須為零。分部積分後，對每個滿足 $\eta(1) = 0$ 的 η 都有 $-y'(0)\eta(0) - \int_0^1 (y'' + a^2 y)\eta = 0$，由此必有 $y'' + a^2 y = 0$ 及 $y'(0) = 0$。

3. 取 $x = Lu$，得 $\int_0^L \left((y')^2 - a^2y^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^1 \left((Y')^2 - (aL)^2Y^2\right)\mathrm{d}u$，所以條件是 $aL \leq \frac{\pi}{2}$。（當 $aL = \frac{\pi}{2}$ 時，正如正文所述，積分仍然不會是負數，但 $y = \cos\frac{\pi x}{2L}$ 會令它等於零；當 $aL > \frac{\pi}{2}$ 時，同一個函數會令它變成負數。）

4. 擺線（cycloid）是 $x = R(\theta - \sin\theta), y = R(1-\cos\theta)$。關於等時曲線（tautochrone），見 Section 11.4：以弧長（arc length）表示時，該運動恰好是簡諧運動（simple harmonic motion）。

4.8 切球形麵包

1. $V/A = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$。但餘下一塊高度為 t 的部分有 $A = 2\pi a t$ 及 $V = \frac{1}{3}\pi t^2(3a-t)$，所以 $V/A = \frac{t(3a-t)}{6a}$，它在 $t = \frac{3}{2}a$ 時取得最大值 $\frac{3a}{8}$：比 $\frac{a}{3}$ 還要大。

2. 這條帶的高度是 $2R\sin 23.4°$，而球的高度是 $2R$，所以所佔比例是 $\sin 23.4° \approx 0.40$。

3. 對於 $y = \sqrt{x}$，$y\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$，並非常數。由 $y\sqrt{1+(y')^2} = c$ 得 $(y')^2 =$

$\frac{c^2}{y^2} - 1$，其解為 $y = c$（圓柱）以及圓 $(x - x_0)^2 + y^2 = c^2$（球）。

4. 球的體積是 $\frac{4}{3}\pi a^3$，圓柱的體積是 $\pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$；兩者之比是 $\frac{2}{3}$。

4.9 Holditch 定理

1. $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p\cos t \cdot q\cos t + q\sin t \cdot p\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot 2\pi pq = \pi pq$。

2. 把兩條弦（chord）的端點連起來所得的兩個三角形相似（同弧所對的角相等），所以 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$。對於半徑為 R 的圓，若 P 與圓心的距離為 r，則通過 P 的直徑給出 $(R - r)(R + r)$，所以 $ab = R^2 - r^2$，而圓環的面積是 $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi ab$。

3. 若 $a = b$，則 $f = \pi(a - b) = 0$，而圓環的面積是 $\pi a^2 = \frac{\pi L^2}{4}$：即以該桿為直徑的圓的面積。

4. 沿着通過 O 的兩條邊，$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0$。第三條邊以 $(x_1, y_1) + s(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$（其中 $0 \le s \le 1$）作參數表示，在這條邊上它等於 $(x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\mathrm{d}s$。所以面積是 $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 4 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。