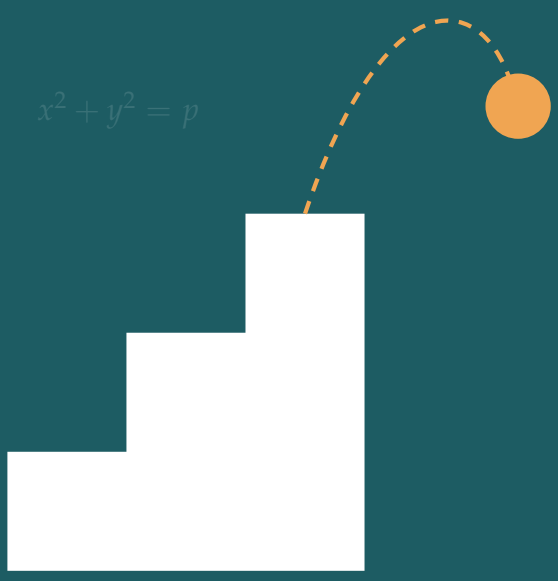
STEP 備試 · 大學數學

Beyond STEP

第 2 章

數列（sequences）、級數（series）與收斂（convergence）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以歷屆 STEP 試題為門
走進大學數學

第 2 章

數列（sequences）、級數（series）與收斂（convergence）

Keith McNulty

Beyond STEP：以歷屆 STEP 試題為門，走進大學數學

第 2 章：數列（sequences）、級數（series）與收斂（convergence）

本冊是 *Beyond STEP* 全書 13 章中的第 2 章。全書、各章的單行本、每一節的可列印工作紙，以及每一道 STEP 試題的詳細解答，均可在 beyondstep.keithmcnulty.org 免費閱讀及下載。

2026 年 11 月首次於網上發表。

本 PDF 內凡屬作者本人創作的內容，包括正文、解答、插圖、練習及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複製、改編及分享，毋須徵求許可。詳見 creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0。

本書討論的 STEP 試題，版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有。本書並無轉載這些試題：每一題均附連結，通往官方來源的題目，即 STEP Support Programme 的試題資料庫或 OCR 的歷屆試卷。

如有錯漏，歡迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

章

2

數列、級數與收斂

無窮是數學變得有趣的地方，也是最容易出錯的地方。

本章內容

2.1	「最終」是甚麼意思	STEP III 2015
2.2	作為極限的黃金比例	STEP II 2013
2.3	一個發散級數與它的收斂近親	STEP III 2014
2.4	$\pi^2/6$	STEP III 2018
2.5	韋達乘積	STEP III 2022
2.6	算術幾何平均	STEP II 2024
2.7	六位還是六百位	STEP II 2023
2.8	平方再減二	STEP III 2021
2.9	逐步逼近 e 的分數	STEP II 2021
A	練習答案	第 67 頁

馴服無窮

> 無窮！從來沒有別的問題如此深刻地觸動人類的心靈。
>
> — 希爾伯特（David Hilbert）

兩千五百年前，埃利亞的芝諾（Zeno of Elea）論證說運動是不可能的。要走過一個房間，你必須先走一半路程，然後走餘下路程的一半，再走那餘下的一半，如此類推，永無止境：這是無窮多項任務，肯定無法在有限時間內完成。人人都知道芝諾錯了，因為人們確實能走過房間，但在很長的一段時間裏，沒有人能確切說出他爲甚麼錯。答案是：無窮和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 有一個有限的值，就是 1。可是，無窮多個數加起來等於某個數，這句話究竟是甚麼意思？

這個問題佔據數學的核心達兩千年之久。十七世紀時，牛頓（Newton）和萊布尼茲（Leibniz）在它之上建立了微積分（calculus），卻始終沒有真正回答它；他們的後繼者既得出了許多精彩的結果，也製造了一些荒謬絕倫的謬論。歐拉（Euler）是有史以來最偉大的計算家，他毫不猶豫地寫下 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$。另一些人則就同一個無窮級數（infinite series）「證明」出互相矛盾的結論。直到十九世紀，經過柯西（Cauchy）、魏爾斯特拉斯（Weierstrass）等人的努力，數學家才有了足夠精確的定義，可以分辨哪些結果是真、哪些是假。這些定義就是本章的主題。

為甚麼重要

你一生中用來計算的數，幾乎每一個都是某樣東西的極限（limit）。你的計算機並不知道 $\sqrt{2}$、π 或 e 是甚麼：它只知道一些能夠愈來愈接近這些數的計算步驟，並在足夠接近時停下來。明白一套步驟逼近得有多快，正是一毫秒內完成的演算法與永遠算不完的演算法之間的分別。用來預測天氣、設計飛機和為金融產品定價的電腦模擬，背後也是同樣的想法。而在最純粹的一面，對極限的研究引出了數學中一些最優美的公式：在本章中，你將會證明

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

這個結果令歐拉一舉成名，至今看來仍然近乎神奇。

你在大學會遇到甚麼

幾乎在每一所大學，數學分析（Analysis）都是你最先修讀的課程之一，而對許多學生來說，它帶來的衝擊也最大。在中學數學裏，你學的是計算極限；在數學分析裏，你學的

是從精確的定義出發，證明關於極限的命題。你會定義數列（sequence）收斂（converge）是甚麼意思，用的正是 Section 2.1 中出現的「對於每一個 $\varepsilon > 0$」和「存在 N」這些說法。你會證明每一個有界遞增數列都收斂，並發現這有賴於實數的一項性質——*完備性*（completeness），而有理數並不具備這項性質。你會學習判別級數是否收斂的各種方法，然後運用同樣的想法，為連續性、微分和積分賦予嚴格的意義。

往後的課程會在這個基礎上向多個方向發展。*數值分析*（Numerical analysis）探討近似值收斂得有多快，以及怎樣令它們收斂得更快（Section 2.7、Section 2.6）。*動力系統*（Dynamical systems）研究反覆套用同一條規則時會發生甚麼事，有時會趨向一個極限，有時則產生混沌（chaos）（Section 2.2、Section 2.8）。*複分析*（Complex analysis）解釋了為甚麼 π 會在那麼多無窮和與無窮乘積中出現（Section 2.4、Section 2.5）。而*解析數論*（analytic number theory）則利用極限來回答關於整數的問題，例如 Section 2.9。

貫穿本章的問題

> **三大問題**
>
> 1. **一個無窮的過程有答案，是甚麼意思？**我們怎樣才能精確地說一個數列「趨近」某個極限，或者一個無窮和「加起來等於」某個數？
> 2. **怎樣在不知道極限是甚麼的情況下，證明某樣東西收斂？**而一旦知道極限存在，又怎樣把它求出來？
> 3. **有多快？**兩個過程可以有相同的極限，逼近的速度卻有天壤之別。為甚麼會這樣？我們又怎樣量度這種速度？

第一節（Section 2.1）談的是語言：數學家怎樣精確地表達「最終」這個概念。接着的五節談的是著名的極限：以連分數（continued fraction）表示的黃金比（golden ratio）、一個發散（divergent）級數和它那個收斂的近親、$\pi^2/6$、韋達（Viète）關於 $2/\pi$ 的乘積，以及高斯（Gauss）的算術幾何平均（arithmetic–geometric mean）。最後三節談的是速度與結構：線性收斂與二次收斂的對比、一個要麼爆炸式增長要麼混沌地遊走的迭代（iteration），以及一族逐步逼近 e 的積分。

處理收斂的工具

有少數幾種工具，你會一再遇到，每次的場合都不一樣。

§	主題	工具
2.1	「最終較小」	量詞（quantifiers）：找出 m、否定命題
2.2	黃金比	單調有界子數列（monotone bounded subsequences）
2.3	調和級數（harmonic series）與 Kempner 級數	分段比較
2.4	$\pi^2/6$	多項式的根，然後用夾逼法（squeeze）
2.5	韋達乘積	裂項相消（telescoping），然後求一個簡單的極限
2.6	算術幾何平均（AGM）	兩個數列互相夾逼；一個不變量（invariant）
2.7	逼近 $\sqrt{2}$	誤差的遞推關係（recurrences）：線性與二次
2.8	$x \mapsto x^2 - 2$	一個令映射變得簡單的代換（substitution）
2.9	逼近 e 的分數	很小但不為零的積分

怎樣閱讀本章

與第 1 章一樣，每一節都以一道 STEP 原題開始。請先自己嘗試，然後才往下讀。本章的題目往往會告訴你該用哪一種工具（「考慮……」、「你可以使用以下定理……」）；在解題的過程中，請留意同樣的幾種工具出現得有多頻密，因為到了大學，你便要自己作出選擇。

有好幾道題目要求你假設極限存在，或者假設無窮和與無窮乘積收斂。遇到這種情況時，該節會解釋要證明這一點還需要些甚麼。意識到「這顯然行得通」與「我能證明這行得通」之間的差距，是學會像分析學家那樣思考的第一步。

2.1 「最終」是甚麼意思

題目

STEP III 2015，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/15-s3-q2`

引子

大學第一門分析（analysis）課程裏，幾乎每一個命題都是同一個模樣：*存在*某個東西，使得*對所有*某些東西，某個條件都成立。「數列（sequence）趨向 L」的意思是：對每一個容許誤差 $\varepsilon > 0$，都*存在*一個位置 N，使得*對所有* $n \geq N$，都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。能夠純熟運用這種句式的學生，會覺得分析引人入勝；不熟悉的學生，則會覺得摸不着頭腦。

這道題目設計精妙，正好是這種說話方式的一個平易入門。它定義了一個新概念「最終小於」，然後就這個概念問了四條是非題。四條之中有一條是假的，而它為假的原因，正正是大多數大學一年級學生初次嘗試*否定*（negate）含有量詞（quantifier）的命題時會掉進的陷阱。

動筆之前

慢慢細讀定義。$(s_n) \leq (t_n)$ 並不是說對每個 n 都有 $s_n \leq t_n$，而是說*由某一項開始*，這個不等式一直成立。最初的幾項完全無關痛癢：即使你把其中一個數列開首的一百萬項改掉，$(s_n) \leq (t_n)$ 是否成立也不受影響。

> **想一想** 定義中有「存在正整數 m」這句話。要證明 $(s_n) \leq (t_n)$，你究竟要拿出甚麼來？要證明它是*假*的，你又要說明甚麼？

要證明它，你必須*拿出*一個合適的 m，然後說明*每一個* $n \geq m$ 都符合要求。要否證它，你必須說明*沒有任何* m *行得通*：無論別人提出哪一個 m，總有某個 $n \geq m$ 使得 $s_n > t_n$。請把後面這個說法記在心裏，第 (ii) 部分會用到。

逐步解題

階段 1　線性函數對二次函數

第 (i) 部分問的是 $1000n \le n^2$ 是否最終成立。由於 $n > 0$，這等同於 $1000 \le n$。所以取 $m = 1000$ 便可：對每個 $n \ge 1000$，都有 $n^2 = n \cdot n \ge 1000n$。此命題為**真**。 ■

在最初的 999 項，$1000n$ 遠大於 n^2，但這並不要緊。「最終」二字不理會任何有限多項。

階段 2　「最終小於」跟普通的「小於」相似嗎？

對普通的數而言，如果 $a \le b$ 不成立，那麼 $b < a$，因此當然有 $b \le a$。第 (ii) 部分問的是，我們這個新關係是否也有同樣的性質。

> **想一想**　「$(s_n) \le (t_n)$ 不成立」究竟是甚麼意思？把它完整地寫出來，而且句首不要用「不」字。

「存在 m，使得對所有 $n \ge m$，都有 $s_n \le t_n$」這個命題為假，恰好就是

$$\text{對每個 } m\text{，都有某個 } n \ge m \text{ 使得 } s_n > t_n\text{。}$$

換句話說，$s_n > t_n$ 出現無限多次。這比「由某一項開始一直有 $s_n > t_n$」弱得多。兩個數列大可以不斷互換位置。

> **停一停，試一試**　試找出兩個正數數列，它們永遠不斷互換位置，以致任何一個都不是最終小於另一個。

取 $s_n = 2 + (-1)^n$，即 $s_n = 1, 3, 1, 3, \ldots$，並對所有 n 取 $t_n = 2$。對每個 m，都有一個偶數 $n \ge m$ 使得 $s_n = 3 > 2 = t_n$，所以 $(s_n) \le (t_n)$ 不成立。但同樣地，對每個 m，都有一個奇數 $n \ge m$ 使得 $t_n = 2 > 1 = s_n$，所以 $(t_n) \le (s_n)$ 也不成立。此命題為**假**。 ■

階段 3　串連起來

> **想一想**　在第 (iii) 部分，你有兩個 m 的值，每個假設各給一個，兩者可能不同。要得出結論，應該用哪一個？

假設對所有 $n \ge m_1$ 都有 $s_n \le t_n$，並且對所有 $n \ge m_2$ 都有 $t_n \le u_n$。若 $n \ge \max(m_1, m_2)$，兩個不等式同時成立，所以 $s_n \le t_n \le u_n$。因此取 $m = \max(m_1, m_2)$ 便可，此命題為**真**。 ■

在兩個門檻之中取較大者，是你在分析裏會用上數百次的一着。舉例說，要證明兩個收斂（convergent）數列之和也收斂，用的就是這一着。

階段 4 二次函數對指數函數

先試幾個數值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256

可見 $n^2 \le 2^n$ 在 $n = 1, 2$ 時成立，在 $n = 3$ 時不成立，然後由 $n = 4$ 起似乎一直成立（圖 2.1.1）。很自然會猜 $m = 4$。

? **想一想** 要用歸納法（induction）證明對所有 $n \ge 4$ 都有 $n^2 \le 2^n$，你需要由 $n^2 \le 2^n$ 推到 $(n+1)^2 \le 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$。$(n+1)^2$ 與 n^2 之間要有怎樣的不等式，這一步才行得通？

只要知道 $(n+1)^2 \le 2n^2$ 就足夠，因為這樣便有 $(n+1)^2 \le 2n^2 \le 2 \cdot 2^n$。而 $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$，當 $n \ge 3$ 時為正數。於是：

- 基礎步驟：$4^2 = 16 = 2^4$。
- 歸納步驟：若 $n \ge 4$ 且 $n^2 \le 2^n$，則 $(n+1)^2 \le 2n^2 \le 2^{n+1}$。

因此對所有 $n \ge 4$ 都有 $n^2 \le 2^n$，此命題為**真**，可取 $m = 4$。 ■

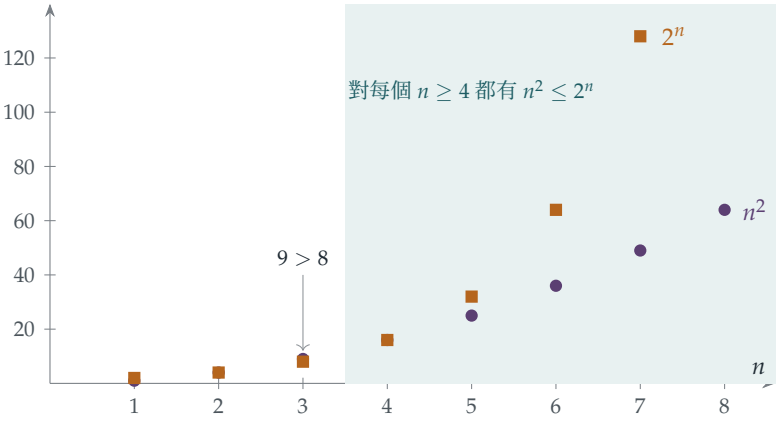


圖 2.1.1 n^2（紫色圓點）對 2^n（琥珀色方塊）。兩個數列在最初幾項交叉了兩次，但由 $n = 4$ 起，2^n 永遠領先。這正是 $(n^2) \le (2^n)$ 的意思，其中 $m = 4$。

回顧

- **證明「存在」，就是要拿出來。**在第 (i)、(iii) 和 (iv) 部分，證明的內容就是指明 m 是甚麼，然後加以驗證。

- **否定會把量詞對調。**「並非（存在 m，對所有 $n \geq m$，P）」變成「對所有 m，存在 $n \geq m$，非 P」。第 (ii) 部分考的就是能否把這一點做對。
- **新的關係不一定跟舊的關係性質相同。**「最終小於」跟 $\leq$ 一樣具有傳遞性（transitive），但跟 $\leq$ 不同的是，它並不能比較每一對數列。

背後的數學

分析的語言

在牛頓（Newton）和萊布尼茲（Leibniz）之後約 150 年間，數學家運用極限（limit）和無窮小（infinitesimal）出神入化，卻說不清楚它們確切是甚麼意思。貝克萊主教（Bishop Berkeley）在 1734 年嘲諷無窮小是「已逝之量的鬼魂」，他說的不無道理。補救要等到十九世紀：柯西（Augustin-Louis Cauchy）以及其後的魏爾斯特拉斯（Karl Weierstrass），以由「對每個」和「存在」構成的命題，取代了「變得無限接近」這類含糊的說法。現代的定義

$$a_n \to L \iff \text{對每個} \varepsilon > 0\text{，都存在} N\text{，使得} |a_n - L| < \varepsilon \text{ 適用於所有} n \geq N$$

跟本題的定義模樣完全相同，只是前面多了一個量詞。這是你在大學分析課程裏最先遇到的東西。

增長的階

第 (iv) 部分是一道著名階梯（增長的階，orders of growth）的其中一小級。對任何固定的 $k > 0$ 和 $c > 1$，

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

而事實上，每個數列不單最終小於下一個，更是最終小於下一個的*任何常數倍*。哈代（G. H. Hardy）為這類比較寫了一整本書：*Orders of Infinity*（1910）。今天它已是計算機科學的日常語言，「這個算法需要 $O(n^2)$ 步」的意思，就是步數最終不超過 n^2 的某個常數倍。n^2 與 2^n 之別，就是一個會完成的程式，與一個到太陽燃盡也完成不了的程式之別。

並非全序的序

第 (ii) 部分說明「最終小於」不是*全序*（total order）：有些數列對根本無法比較。這類具有傳遞性但不能比較所有東西的關係，稱為*預序*（preorder）或*偏序*（partial order），而且隨處可見：整數的整除性、集合的包含關係，以及「是……的子羣（subgroup）」都

是例子。辨別一個關係具有哪些性質、不具有哪些性質，是數學家訓練的一部分。

思維技巧

處理量詞

要證明「存在 m，使得對所有 $n \geq m$...」，先指明 m，再檢查每一個 n。要否證它，則說明對每個 m，都有某個 $n \geq m$ 不符合要求。

當一個命題含有多個量詞時，先把它完整寫出來，才嘗試證明或否證；否定時由左至右逐個處理：每個「對所有」變成「存在」，每個「存在」變成「對所有」，而末尾的條件則取其否定。

延伸練習

1 **樣本試卷熱身題。**試做 STEP III Specimen paper，第 2 題（`step.maths.org/questions/spec-s3-q2`），此題出自 1987 年首屆 STEP 舉行之前發出的試卷。（最後一部分的提示：利用二項展開式（binomial expansion）的下一項。）

2 **兩邊都成立。**證明若 $(s_n) \leq (t_n)$ 且 $(t_n) \leq (s_n)$，則對所有足夠大的 n 都有 $s_n = t_n$。

3 **競逐無窮。**試找出兩個遞增的正數數列，兩者皆趨向無窮大，而任何一個都不是最終小於另一個。

4 **拾級而上。**證明 $(2^n) \leq (n!)$，並給出一個明確的 m。然後證明 $(n^{10}) \leq (2^n)$，並求出可行的最小 m。（第二部分用試算表會有幫助；答案大得出人意表。）

延伸閱讀

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***（牛津大學出版社 Oxford University Press）。第 3 章講的正是這種邏輯語言，以及大學新生為何覺得它困難。
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***（牛津大學出版社 Oxford University Press）。一本親切易讀的指南，講解大學一年級分析的各個定義。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（劍橋大學出版社 Cambridge University Press）。有系統地介紹邏輯、量詞與證明。

2.2 作為極限的黃金比例

題目

STEP II 2013，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/13-s2-q6`

引子

寫下這個式子

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

然後問它等於甚麼。一個快捷的答案是：設它為 x；第一條分數線下面的部分又是 x，所以 $x = 1 + 1/x$，由此得 $x^2 = x + 1$，於是 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，即黃金比（golden ratio）φ。

但這個論證成立嗎？它假設了這個無窮式子*真的有意義*，即逐層構造下去的過程最終會穩定於一個數。把同樣的手法用在 $1-1+1-1+\cdots$ 上（「設它為 S；那麼 $S = 1 - S$，所以 $S = \frac{1}{2}$」），得出的卻是荒謬的結果。本題示範怎樣把這件事做得嚴謹，所用的是 STEP 考生在事先不知道極限（limit）的情況下證明收斂（convergence）的唯一工具：*單調數列*（*monotone sequences*）。

動筆之前

先計算幾項。取 $u_1 = 1$：

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \ldots$$

想一想 你認得這些分子和分母嗎？再看看小數值：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。這個數列是遞增的嗎？還是遞減的？

它們是相鄰斐波那契數（Fibonacci numbers）之比。這個數列既不遞增也不遞減：它呈鋸齒狀擺動，時而過高，時而過低。因此，題目給出的定理是關於遞增數列的，不能用於整個數列。不過，奇數項 $1, 1.5, 1.6, 1.615, \ldots$ 看來在上升，而偶數項 $2, 1.667, 1.625, \ldots$ 看來在下降。這正是本題的佈局。

逐步解題

階段 1　比較相隔兩項的項

第 (i) 部分比較相隔兩步的 u_{n+2} 與 u_n。最自然的第一步，是利用 $(*)$ 把它們各自用前一項表示。

> **想一想**　運用 $(*)$ 兩次，把 $u_{n+2} - u_n$ 用 $u_{n+1} - u_{n-1}$ 表示，再把 $u_{n+1} - u_{n-1}$ 用 $u_n - u_{n-2}$ 表示。

由 $(*)$，

$$u_{n+2} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}} = -\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{u_{n+1}u_{n-1}},$$

同理 $u_{n+1} - u_{n-1} = -\dfrac{u_n - u_{n-2}}{u_n u_{n-2}}$。把兩式合起來，兩個負號互相抵消：

$$u_{n+2} - u_n = \frac{u_n - u_{n-2}}{u_{n+1}u_n \cdot u_{n-1}u_{n-2}}.$$

最後，由 $(*)$ 可知 $u_{n+1}u_n = u_n + 1$ 及 $u_{n-1}u_{n-2} = u_{n-2} + 1$，於是得到所求的公式。（我們需要 $n \geq 3$，u_{n-2} 才存在。）∎

階段 2　一個陷阱

> **停一停，試一試**　證明對所有 n 均有 $1 \leq u_n \leq 2$。

對 $u_1 = 1$ 這是成立的。若 $1 \leq u_n \leq 2$，則 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$，所以 $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$，這當然介乎 1 與 2 之間。由歸納法（induction），對所有 n 均有 $1 \leq u_n \leq 2$。∎

特別地，每個 u_n 都是正數，所以第 (i) 部分中的分母 $(1 + u_n)(1 + u_{n-2})$ 是正數。

階段 3　兩個單調子數列

> **想一想**　第 (i) 部分的公式說明，$u_{n+2} - u_n$ 是 $u_n - u_{n-2}$ 的正數倍。由此你能看出 $u_3 - u_1$、$u_5 - u_3$、$u_7 - u_5$、...的正負號有甚麼關係嗎？

它們的正負號全部相同！由於 $u_3 - u_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$，由第 (i) 部分和歸納法可得 $u_5 >$

u_3、$u_7 > u_5$，如此類推：奇數項是遞增的。它們有上界 2，所以根據定理，它們趨向一個極限；設它為 L。

同樣地，$u_4 - u_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$，所以偶數項是遞減的。它們有下界 1。定理是就遞增數列而言的，但 $-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$ 是遞增的，且有上界 -1，所以它收斂，因而偶數項也收斂；設它們的極限為 M。

階段 4 求出極限

想一想 要求出 L，你需要一條把 u_{n+2} 與 u_n 直接聯繫起來的方程。你能從 $(*)$ 得出這樣的方程嗎？

運用 $(*)$ 兩次，

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + 1/u_n} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

令 $n \to \infty$ 而只取奇數值，則 u_n 和 u_{n+2} 都趨向 L，所以

$$L = \frac{2L + 1}{L + 1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0.$$

方程的根是 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，而由於 $L \geq 1$，必有 $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$。對偶數值作完全相同的論證，可得 $M = \varphi$。

想一想 奇數項趨向 φ，偶數項也趨向 φ。為甚麼這就表示整個數列趨向 φ？

直觀地說，每一項不是奇數項就是偶數項，而兩類項都在逼近 φ。嚴格地說：給定任意容許誤差 $\varepsilon > 0$，奇數項由某個位置 N_1 起與 φ 的距離都小於 ε，偶數項則由某個位置 N_2 起如此。所以由 $\max(N_1, N_2)$ 起，*所有*項與 φ 的距離都小於 ε，而這正是收斂的意思。（這就是 Section 2.1 中「取較大的那個門檻」的做法。）

階段 5 從別處出發

取 $u_1 = 3$ 時，數列是

$$3, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{11}{7}, \quad \frac{18}{11}, \quad \frac{29}{18}, \quad \cdots$$

現在 $u_1 = 3$ 在 $[1, 2]$ 之外，所以第 (ii) 部分的歸納法無法起步。但 $u_2 = \frac{4}{3}$ 在區間之內，歸納法由此開始便行得通：對所有 $n \geq 2$ 均有 $1 \leq u_n \leq 2$。第 (i) 部分只用到由 u_{n-2} 起的各項，而且只需要它們是正數，而它們確實全是正數。這一次 $u_3 - u_1 = \frac{7}{4} - 3 < 0$ 而 $u_4 - u_2 = \frac{11}{7} - \frac{4}{3} > 0$，所以奇數項遞減，偶數項遞增：角色互換了，但每個子數列（subsequence）仍然是單調且有界（bounded）的。兩個極限滿足同一條方程，而且都是正數，所以都是 φ。結論**沒有**改變。 ■

回顧

- **數列不單調時，找出單調的部分。**把數列分成奇數項和偶數項，鋸齒狀的數列就變成了兩個規矩的數列。
- **先證明收斂，再求極限。**方程 $L = (2L+1)/(L+1)$ 只有在我們知道 L 存在之後才站得住腳。引子中那個快捷的論證所略過的，正是這一步。
- **檢查該取哪個根。**極限方程有兩個解；第 (ii) 部分的上下界告訴我們哪一個才對。

背後的數學

蛛網圖與不動點

每個由 $u_{n+1} = f(u_n)$ 定義的數列，都可以畫成一幅蛛網圖（*cobweb diagram*）（圖 2.2.1）。畫出 $y = f(x)$ 和 $y = x$。由 x 軸上的 u_1 出發，垂直走到曲線（高度為 $u_2 = f(u_1)$），再水平走到直線 $y = x$（這樣便移到 $x = u_2$），然後再垂直走到曲線，如此類推。這裏 $f(x) = 1 + 1/x$ 是遞減的，所以路徑會向內盤旋，交替地過高和過低，趨向曲線與直線相交的那一點：不動點（*fixed point*）φ，該處 $f(\varphi) = \varphi$。

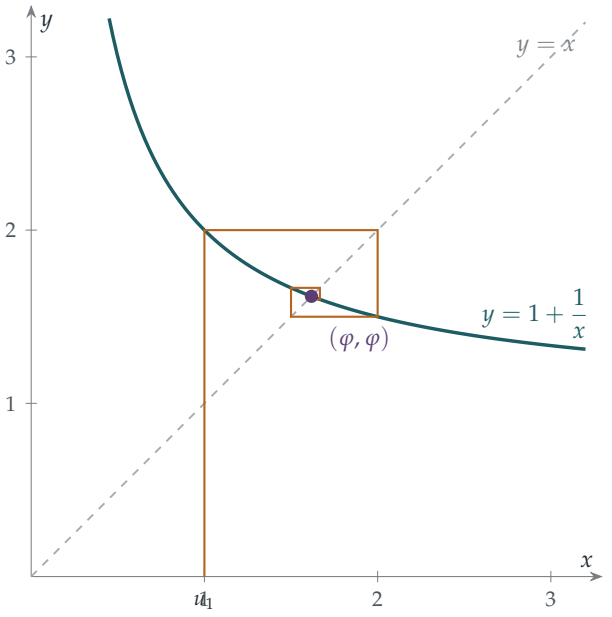


圖 2.2.1 $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ 由 $u_1 = 1$ 出發的蛛網圖。路徑向上走到曲線，再橫向走到直線 $y = x$，如此不斷重複。由於曲線向下傾斜，路徑會向內盤旋，趨向不動點 $\varphi \approx 1.618$，並且交替落在兩側：這就是奇數項與偶數項的鋸齒狀擺動。

有多快，為甚麼

第 (i) 部分中的因子 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ 從何而來？在不動點附近，$u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$，而 $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$。所以每走一步，誤差大約乘以 -0.38：正負號反轉（鋸齒狀擺動），大小縮減（收斂）。走兩步則乘以 $1/\varphi^4 \approx 0.146$，這正是 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$ 所趨向的值。到了大學，這會發展成*壓縮映射定理*（*contraction mapping theorem*）：若在不動點附近有 $|f'| \le k < 1$，則迭代會收斂至該不動點，而誤差至少以幾何級數的速度縮小。它是數學中最有用的定理之一，也是用來證明微分方程有解的方法（第 8 章）。在 Section 2.8 中，我們會遇到一個不動點並不吸引的映射，結果截然不同。

最無理的數

各項 $u_n = F_{n+1}/F_n$ 是同等大小的分數之中對 φ 最好的逼近，但所謂「最好」其實並不太好：φ 比任何其他數都更難用分數逼近。原因可從它的連分數（continued fraction）$[1;1,1,1,\ldots]$ 看出：連分數中出現大的項，就表示有非常好的逼近（試想 $\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$ 和極佳的 $\frac{355}{113}$），而 φ 的每一項自始至終都是最小的。赫維茲（Adolf Hurwitz）於 1891 年證明，對每個無理數（irrational）x，都有無窮多個分數滿足

$|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$，而且 $\sqrt{5}$ 不能再改進，原因正正在於 φ。這種「最大無理性」，就是黃金角出現在向日葵種子螺旋圖案中的原因。

思維技巧

單調有界必收斂

要在不知道極限的情況下證明數列收斂，可找出一個單調有界的數列，或者把數列分成若干單調有界的部分。

只有在知道極限存在之後，才可以在遞推關係（recurrence）中「令 $n \to \infty$」來求出極限。在大學裏，這個定理是實數完備性（*completeness*）的推論，完備性正是 $\mathbb{R}$ 有別於 $\mathbb{Q}$ 的性質，你會看到它由公理出發的證明。

延伸練習

1. **藏在其中的斐波那契數。**證明 $u_n = F_{n+1}/F_n$，其中 $F_1 = F_2 = 1$ 及 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$。

2. **誤差縮小。**證明 $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$，並由此推出對所有 n 均有 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$。（利用 $\varphi^2 = \varphi + 1$ 及 $u_n \ge 1$。）

3. **令數列中斷。**證明若 $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，則數列是常數數列。求出所有使得某個 $u_n = 0$、以致數列無法繼續下去的初始值 u_1。（提示：由 $u_n = 0$ 倒推回去。）

4. **$\sqrt{2}$ 的近親。**設 $v_1 = 1$ 及 $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$。仿照本題的方法，證明 $v_n \to \sqrt{2}$，並把 $\sqrt{2}$ 寫成連分數。

延伸閱讀

- **Mario Livio, *The Golden Ratio***（Broadway）。講述 φ 的歷史，把真正的數學與眾多迷思區分開來。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions***（Mathematical Association of America）。一本簡短而非常易讀的入門書，對象是能力較強的中學生。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis***（Cambridge University Press）。嚴謹地處理單調數列與完備性，並附有大量習題。

2.3 一個發散級數與它的收斂近親

題目

STEP III 2014，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/14-s3-q8`

引子

調和級數（harmonic series）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 是最著名的例子：它的各項縮小至零，但總和卻無止境地增長。它增長得慢得離譜：要超過 10，需要多於 12,000 項；要超過 100，則需要大約 1.5×10^{43} 項。但它終究會超過任何一個數。

現在把分母含有數字 2 的項全部丟掉：$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{20}$ 至 $\frac{1}{29}$、$\frac{1}{32}$ 等等統統刪去。你也許會以為，對一個本來就是無窮大的和來說，刪去十分之一左右的項不會有多大分別。事實卻是，餘下各項加起來小於 80。這個出人意表的結果由 A. J. Kempner 於 1914 年證明，而本題只用一個簡單而漂亮的想法，就把你一步步帶到這個結論：把和式切成一塊一塊。

動筆之前

想一想 第一個不等式談的是由 $r=k^n$ 至 $r=k^{n+1}-1$ 的那一塊。取 $k=2$ 和 $n=3$，這一塊包含哪些項？共有多少項？

它們是 $f(8), f(9), \ldots, f(15)$，共八項。一般而言，這一塊由 k^n 排到 $k^{n+1}-1$，所以共有 $k^{n+1}-k^n = k^n(k-1)$ 項。不等式所說的是：這一塊的和介乎（項數）×（各項可能取的最小值）與（項數）×（最大的一項）之間。

逐步解題

階段 1　估計一塊的上下界

由於 f 是遞減（decreasing）的，這一塊內的每一項都滿足

$$f(k^{n+1}) < f(k^{n+1}-1) \le f(r) \le f(k^n) \qquad (k^n \le r \le k^{n+1}-1).$$

把這 $k^n(k-1)$ 項加起來，便得到該不等式。 ■

階段 2　調和級數

> **想一想**　取 $k=2$ 和 $f(r)=1/r$，由 2^n 至 $2^{n+1}-1$ 的那一塊，兩個界分別是甚麼？

下界（lower bound）是 $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$，上界（upper bound）是 $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$。所以每一塊，不論排得多後，其貢獻都介乎 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間（圖 2.3.1）。$n = 0, 1, \dots, N$ 的各塊恰好拼合成由 $r=1$ 至 $r = 2^{N+1}-1$ 的和，所以把 $N+1$ 塊加起來，便得

$$\frac{N+1}{2} \le \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \le N+1.$$

當 $N \to \infty$ 時，左邊無止境地增長，所以部分和（partial sum）無界，級數發散（diverge）。 ■

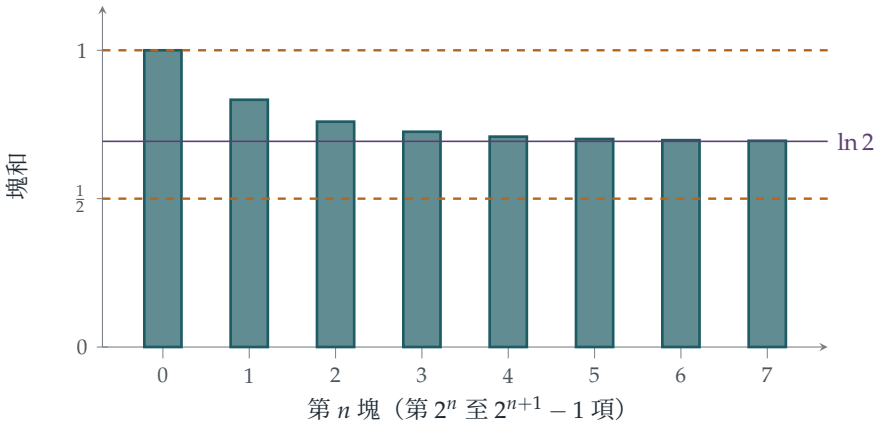


圖 2.3.1　把調和級數切成分別有 $1, 2, 4, 8, \dots$ 項的各塊。每一塊的和都介乎 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間（琥珀色虛線），而事實上各塊的和會逐漸趨近 $\ln 2 \approx 0.693$（紫紅色線）。無窮多塊，每塊至少值 $\frac{1}{2}$，總和不可能有限。

階段 3　立方倒數之和

現在取 $f(r) = 1/r^3$，仍然用 $k=2$。第 n 塊的上界是

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{4^n}.$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ 的各塊把每個正整數恰好覆蓋一次，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

（嚴格來說，這只證明了每個部分和都不超過 $\frac{4}{3}$；一個遞增而有上界的數列必定收斂（converge），所以這個無窮和存在，而且不超過 $\frac{4}{3}$。它的真正數值是 1.2020 . . .）

階段 4 數一數不含 2 的數

想一想 如果容許在前面補零（例如把 7 寫成 007），由 0 至 999 的整數之中，有多少個可以只用數字 $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 寫出來？

三個數位每個都有 9 種選擇，所以這樣的數字串共有 9^3 個。它們與由 0 至 999 之中不含 2 的數一一對應，再剔除 0（它不是正數），$S(1000)$ 中便剩下 $9^3 - 1 = 728$ 個數。 $\blacksquare$

階段 5 Kempner 級數

分塊的想法現在同樣適用，只是改為按位數來分塊，這等同於取 $k = 10$。

停一停，試一試 有多少個 d 位數不含 2？而一個 d 位數最小可以是多少？

首位數字可以是 $1, 3, 4, \ldots, 9$ 中任何一個（八種選擇：不能是 0，也不能是 2），其餘 $d - 1$ 個數位各有九種選擇。所以這樣的數共有 $8 \times 9^{d-1}$ 個，而每一個都至少是 10^{d-1}。因此，$S(n)$ 中的 d 位數對 $\sigma(n)$ 的貢獻至多是

$$8 \times 9^{d-1} \times \frac{1}{10^{d-1}} = 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1}$$

。對所有位數 $d = 1, 2, 3, \ldots$ 求和，

$$\sigma(n) \le \sum_{d=1}^{\infty} 8\left(\frac{9}{10}\right)^{d-1} = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

至於嚴格不等式，只須留意大部分的界都遠遠未達到相等（例如 $\frac{1}{3} < 1$，而我們卻用 1 作為每個一位數項的上界），所以對所有 n 都有 $\sigma(n) < 80$。 $\blacksquare$

回顧

- **把各項分組。**兩個和逐項處理都不容易。把它們分成大小合適的塊之後，每個和都可以與一個等比級數（geometric series）比較。
- **怎樣分塊視乎問題而定。**2 的冪適合 $1/r$ 和 $1/r^3$；10 的冪則適合一道關於十進制數字的題目。

- **有界而遞增。**兩個收斂證明都建基於與 Section 2.2 相同的原理：正項的部分和是遞增的，所以只需要找到一個界便足夠。

背後的數學

凝聚判別法

題目中的第一個不等式正是柯西凝聚判別法（Cauchy's condensation test）的核心：若 f 為正且遞減，則

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ 收斂} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ 收斂。}$$

它把困難的級數變成容易的級數。應用於 $f(r) = 1/r^p$，便得到 $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$，這是一個等比級數，恰好在 $p > 1$ 時收斂。應用於 $1/(r \ln r)$，可知連這個級數也發散；應用於 $1/(r(\ln r)^2)$，則可知這個級數收斂。這個論證可追溯至奧雷姆（Nicole Oresme），他在大約 1350 年正是用圖 2.3.1 中的分塊方法，證明了調和級數發散。

調和級數發散得有多慢

圖 2.3.1 顯示每一塊的貢獻大約是 $\ln 2$，所以首 N 項之和應該大約是 $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$。事實上

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (\text{某個趨向 } 0 \text{ 的量}),$$

其中 $\gamma = 0.5772\ldots$ 是歐拉－馬斯刻若尼常數（Euler–Mascheroni constant）。至今沒有人知道 γ 是否有理數（rational）。你會在大學一年級的分析課中用積分證明這條公式，而調和數（harmonic numbers）會在 Section 9.11 和 Section 11.12 再次出現。

大多數的數都含有 2

Kempner 級數為甚麼收斂？因為在大數之中，「不含 2 的數」非常罕有：在小於 10^d 的數之中，不含 2 的所佔比例至多是 $(0.9)^d$，而這個比例趨向 0。在 100 位數之中，只有不足 0.003% 能避開數字 2。所以我們刪去的並不是十分之一的項，而是幾乎所有的項。我們求得的界 80 相當寬鬆：1979 年，Robert Baillie 用一種加速方法把這個和計算到小數點後許多位，其值約為 19.257。

冪的倒數之和

第 (ii) 部分的和是 $\zeta(3)$，即我們在 Section 1.2 遇過的黎曼（Riemann）zeta 函數的一個值。在 Section 2.4 我們會求出 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 的準確值，而歐拉（Euler）亦找到了

$\zeta(4), \zeta(6), \ldots$ 的公式。但至今沒有人找到 $\zeta(3)$ 的公式。1978 年，Roger Apéry 證明了 $\zeta(3)$ 是無理數（irrational），震驚了整個數學界；他所用的積分與 Section 2.9 中的頗為相似。至於 $\zeta(5)$ 是否無理數，至今仍然未知。

思維技巧

分塊比較

要判斷一個正項級數是否收斂，可以把各項分成若干塊，使每塊內的項大致不變，然後把每一塊與一個簡單的級數比較。

比較判別法（comparison test）是大學一年級分析課的家常便飯。技巧在於選擇與甚麼比較：在這裏，就是選大小為 2^n 或 10^d 的塊，塊內各項的變化不超過一個固定的倍數。

延伸練習

1 **感受一下有多慢。**利用 $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$，估計調和級數需要多少項才超過 10，以及需要多少項才超過 100。

2 **判別法的實際運用。**用第 (i) 部分的方法，取 $f(r) = 1/r^2$，證明 $\sum 1/r^2 \le 2$。然後把第一項分開處理，從而改進這個界。

3 **在收斂與發散之間。**利用 $k = 2$ 的分塊不等式，證明 $\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$ 發散，而 $\sum_{r \ge 2} \dfrac{1}{r (\ln r)^2}$ 收斂。

4 **排除更多數字。**較難證明：十進制表示中既不含 2 亦不含 7 的所有正整數，其倒數（reciprocal）之和小於 35。（你看得出 35 是怎樣來的嗎？）

延伸閱讀

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。講述調和級數、γ 以及更多相關課題，為程度較高的中學生而寫。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。一本簡明的大學一年級教科書，其中論級數與比較判別法的一章寫得十分清晰。
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathe-*

matical Monthly 86 (1979)。一篇短論文（論缺少某個指定數字的整數的倒數之和），讀完本節後你便有能力讀懂。

2.4 $\pi^2/6$

題目

STEP III 2018，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

`step.maths.org/questions/18-s3-q7`

引子

1650 年，Pietro Mengoli 提出了一個簡單的問題：

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots ?$$

的值是甚麼？各項縮小得夠快，足以令這個和收斂（converge）（Section 2.3 已證明它不超過 2），但沒有人能求出它的值。伯努利（Bernoulli）兄弟試過，卻無功而還；雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli）更公開懇求他人相助。這個問題後來以伯努利兄弟的家鄉命名，稱為巴塞爾問題（*Basel problem*）。

1734 年，年輕的歐拉（Leonhard Euler）解決了這個問題，答案令他一舉成名：這個和等於 $\pi^2/6$。π 明明是一個關於圓的數，究竟為甚麼會出現在平方倒數之和裏？本題給出一個完整而嚴格的證明，所用的工具全部不超出高級程度（A-level）的範圍：棣美弗定理（De Moivre's theorem）、多項式（polynomial）的根之和，以及夾逼（squeeze）。

動筆之前

在處理細節之前，值得先看看整體的計劃。

- 第 (i) 部分構造一個多項式，它的根就是 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ 這些數。
- 第 (ii) 部分利用係數（coefficient），在不知道各個根的情況下把這些根加起來。
- 第 (iii) 部分利用「當 θ 很小時 $\cot\theta \approx 1/\theta$」這個事實，把 $\cot^2$ 值之和變成 $1/m^2$ 值之和，然後夾逼。

> **想一想**　若多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根為 $r_1, \ldots, r_n$，那麼 $r_1 + \cdots + r_n$ 以係數表示是甚麼？

答案是 $-a_{n-1}/a_n$。這個事實正是第 (ii) 部分的動力所在。

逐步解題

階段 1　棣美弗定理

> **想一想**　把 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 寫成單一分數。你留意到分子有甚麼特別？

$\cot\theta + \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$，同樣地 $\cot\theta - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$。根據棣美弗定理，

$$(\cot\theta \pm \mathrm{i})^{2n+1} = \frac{\cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

兩式相減，餘弦項互相抵消，正弦項則變成兩倍，再除以 $2\mathrm{i}$ 便得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}. \qquad \blacksquare$$

階段 2　多項式

現在改用二項式定理（binomial theorem）展開左邊。設 $c = \cot\theta$ 及 $N = 2n+1$。

> **想一想**　在 $(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N$ 中，兩個二項展開式有哪些項互相抵消，又有哪些項變成兩倍？

含 i^j 的項在第一個展開式中帶 $+$ 號，在第二個展開式中則帶 $(-1)^j$。因此 j 為偶數的項互相抵消，j 為奇數的項變成兩倍：

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = 2\sum_{j\ \text{為奇數}} \binom{N}{j} c^{N-j}\,\mathrm{i}^j.$$

取 $j = 2k+1$，則 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}\,(-1)^k$ 及 $c^{N-j} = c^{2n-2k} = (c^2)^{n-k}$。除以 $2\mathrm{i}$，得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n,$$

其中 $x = \cot^2\theta$。

> **停一停，試一試** 左邊在哪些 θ 的值時等於零？利用這一點找出多項式的 n 個不同的根。

當 $\sin(2n+1)\theta = 0$ 而 $\sin\theta \neq 0$ 時，左邊等於零，例如當 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$，其中 $m = 1, 2, \ldots, n$。這些角全部嚴格介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，而 cot 在這個範圍內為正且嚴格遞減，所以 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ 這 n 個值各不相同。n 次多項式最多有 n 個根，所以這些就是它的全部根。 ■

階段 3 把根加起來

根之和等於 $-$(以下一項的係數：x^{n-1})/(以下一項的係數：x^n)：

$$\sum_{m=1}^{n} \cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad ■$$

以 $n = 1$ 驗算：$\cot^2(\pi/3) = \frac{1}{3}$，而 $\frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$。

階段 4 夾逼

由 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ 出發，取倒數（不等號方向因而倒轉）再平方：

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

> **想一想** 代入 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$，並對 $m = 1, \ldots, n$ 求和。外側的兩個和變成甚麼？中間的和與 $\sum 1/m^2$ 有甚麼關係？

中間的和是 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{m^2\pi^2}$。根據第 (ii) 部分，左邊的和是 $\frac{n(2n-1)}{3}$，而右邊的和是 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$。各項同乘以 $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$：

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

當 $n \to \infty$ 時，$\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$ 和 $\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$ 都趨向 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$（把分子和分母同除以 n^2）。所以上下兩個界都趨向 $\frac{\pi^2}{6}$，而部分和（partial sum）被夾在兩者之間，亦必定趨向 $\frac{\pi^2}{6}$（圖 2.4.1）。 ■

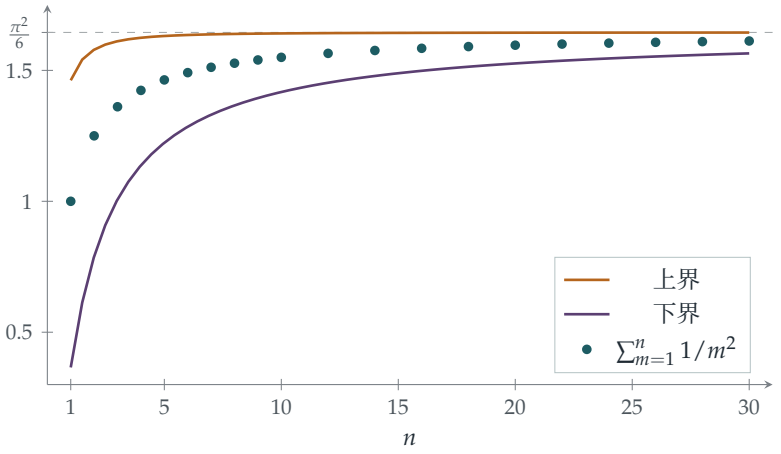


圖 2.4.1　第 (iii) 部分的夾逼。$\sum 1/m^2$ 的部分和（藍綠色點）被夾在下界（紫紅色）與上界（琥珀色）之間，而兩個界都趨向 $\pi^2/6 \approx 1.645$。

回顧

- **從係數取得資訊。**我們始終沒有把 $\cot^2(m\pi/(2n+1))$ 這些根化成任何更簡單的形式，卻準確地求出了它們的和。
- **先近似，再夾逼。**$\cot\theta$ 只是近似等於 $1/\theta$，但誤差在兩個方向上都受到精確的不等式控制。
- **由有限到無限。**除了最後一步，每一步處理的都是有限和。無窮和只在我們於不等式中令 $n \to \infty$ 時才出現，這正是處理無限的穩妥方法。

背後的數學

歐拉的大膽論證

以現代標準來看，歐拉本人在 1734 年的論證並不嚴格，卻令人目眩神迷。一個多項式若以 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$ 為根，且在 0 處取值 1，便可分解為 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$。函數 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 處取值 1，而它的根是 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$，於是歐拉把它當作一個「無限多項式」，寫下

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

右邊 x^2 的係數是 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$，而由麥克勞林級數（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$ 可知它是 $-\frac{1}{6}$。兩相比較便得 $\pi^2/6$。我們這個 STEP 證明正是同一想法的

有限而嚴格的版本：一個多項式，它的根與 π 的倍數息息相關，再加上它的第二個係數。

平方倒數以外

歐拉其後還求出 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$、$\sum 1/m^6 = \pi^6/945$，而一般而言 $\sum 1/m^{2k}$ 是 π^{2k} 的有理數倍，當中涉及伯努利數（*Bernoulli numbers*）。奇數次冪則是另一回事：正如我們在 Section 2.3 所見，沒有人知道 $\sum 1/m^3$ 的公式。這些和就是黎曼 ζ 函數（Riemann zeta function）的值 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$，而這個函數在複數自變量上的表現，支配着質數的分佈（Section 1.2）。

日後在哪裏再遇上

在大學裏，你會至少再遇到 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 的三個證明：一個來自傅立葉級數（*Fourier series*）（把函數寫成正弦和餘弦之和），一個來自二重積分（double integral），還有一個來自複分析（complex analysis）。這個數也在概率中出現：隨機選出的兩個整數沒有公因數的機會是 $6/\pi^2 \approx 0.61$。（質數 p 同時整除兩者的概率是 $1/p^2$，所以沒有任何質數同時整除兩者的機會是 $\prod_p (1 - 1/p^2)$，而歐拉證明了這個乘積等於 $1/\zeta(2)$。）π 在概率極限中的另一次現身，是 Section 12.23 的主題。

思維技巧

夾逼，以及根的對稱函數（symmetric functions）

要求一個極限，可把該量夾在兩個極限相同而較簡單的式子之間。

而當你需要求一些難纏的數之和（或積）時，不妨試找一個以它們為根的多項式：係數會把這些數的對稱組合白白送給你。

延伸練習

1 **1992 年的版本。**試做 STEP III 1992，第 8 題（`step.maths.org/questions/92-s3-q8`）。它利用一個與本節相似的多項式，求出正切平方與餘割平方的準確和。（提示：若你知道一個多項式的根是 r_i，那麼哪個多項式的根是 $1/r_i$？）

2 **奇數的平方。**由 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ 推導出 $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$。

3 **四次方。** 較難 利用 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$ 和多項式的係數，求 $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\!\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$，並改動夾逼的論證以證明 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$。

4 **有多快？** 利用第 (iii) 部分的下界，證明 $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$。按這個結果，$n$ 要多大才能保證部分和與 $\pi^2/6$ 相差不超過 0.001？試與真正的誤差比較，後者接近 $1/n$。

延伸閱讀

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***（Mathematical Association of America）。第 3 章講述巴塞爾問題的故事，並完整交代當中的數學。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 9 章「Three times $\pi^2/6$」。當中包括本節的證明。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula***（Princeton University Press）。內容涵蓋複數、傅立葉級數，以及類似本節的求和。

2.5 韋達乘積

題目

STEP III 2022，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

引子

這道題的最後一行，是數學中最優美的公式之一，也是同類公式中最古老的一條。它由法國律師兼數學家韋達（François Viète）於 1593 年發表，是歷史上第一次有人把 π 準確地寫成一個無窮過程的結果。在韋達之前，π 只能求近似值；在他之後，它可以用一條公式來定義，只要一直算下去，就能得出每一個數位。

這條公式看來很神祕：一層套一層的 2 的平方根，即嵌套平方根（nested square roots），究竟從何而來？這道題揭示，它其實來自反覆運用倍角公式（double-angle formula），而且同一套方法還順道得出另一條名氣較小的公式，是關於 $\ln 2$ 的。

動筆之前

想一想 sinh 的倍角公式是甚麼？（如果不肯定，可把 $\sinh 2y$ 和 $\sinh y \cosh y$ 用指數函數寫出來，再作比較。）

$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$，與 $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ 完全一樣。整道題就是靠反覆運用這一條恆等式（identity）來推動的。題目一直使用雙曲函數（hyperbolic functions），到最後一部分我們才轉用普通的三角函數。

逐步解題

階段 1　反覆減半

$n = 1$ 的情況就是取 $y = x/2$ 的倍角公式：

$$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right).$$

> **想一想**　假設公式對 n 成立。最後一個因子是 $\sinh(x/2^n)$。怎樣改寫它，才能得到 $n+1$ 時的公式？

對它運用倍角公式：$\sinh(x/2^n) = 2\cosh(x/2^{n+1})\sinh(x/2^{n+1})$。代入後得

$$\sinh x = 2^{n+1}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cosh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

這正是 $n+1$ 時的公式。根據歸納法（induction），公式對所有 n 成立。 ■

至於隨後的推論，先把兩邊除以 x，再把兩邊乘以 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$。在右邊，$2^n\sinh(x/2^n)\cdot\dfrac{x/2^n}{x\sinh(x/2^n)} = 1$，只剩下各個 cosh 項的乘積。 ■

階段 2　極限

由級數（series）可知，當 $y \neq 0$ 時，

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots,$$

當 $y \to 0$ 時它趨向 1，所以它的倒數 $y/\sinh y$ 也趨向 1。（如果想嚴謹一點：尾部 $\frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots$ 中的每個階乘都至少是 6，所以當 $0 < |y| < 1$ 時，尾部至多是 $\frac{1}{6}(y^2 + y^4 + \cdots) = \frac{y^2}{6(1-y^2)}$，而這個量趨向 0。）

現在固定 x，在第 (i) 部分中令 $n \to \infty$。這時 $y = x/2^n \to 0$，所以左邊趨向 $\dfrac{\sinh x}{x} \times 1$。右邊是部分積（partial product），因此它也趨向 $\dfrac{\sinh x}{x}$。這正是無窮乘積（infinite product）的意思。 ■

階段 3　$\ln 2$ 的公式

取 $x = \ln 2$，則 $e^{x/2} = \sqrt{2}$，所以

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2^{1/2} + 2^{-1/2}}{2} = \frac{2+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

同樣地，$e^{x/4} = 2^{1/4}$，所以 $\cosh(x/4) = \dfrac{2^{1/4} + 2^{-1/4}}{2}$，把分子和分母同乘以 $2^{1/4}$，便得 $\dfrac{2^{1/2}+1}{2\times 2^{1/4}}$。 ■

想一想 $\cosh(x/2^k)$ 的一般規律是甚麼？把所有分母 $2\times 2^{1/2^k}$ 乘在一起，會有甚麼結果？

同樣的計算顯示，對每個 $k\geq 1$，

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1+2^{1/2^{k-1}}}{2}\times 2^{-1/2^k}.$$

（當 $k=1$ 時，這就是 $\frac{1+2}{2}\times 2^{-1/2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$，與前面一致。）對 $k=1,2,3,\ldots$ 連乘，2 的各個冪合併成 $2^{-(1/2+1/4+1/8+\cdots)}=2^{-1}$，而第一個分數是 $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$。所以這個無窮乘積是

$$\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1+2^{1/2}}{2}\times\frac{1+2^{1/4}}{2}\times\frac{1+2^{1/8}}{2}\cdots.$$

另一邊，$\sinh(\ln 2)=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$，所以 $\dfrac{\sinh x}{x}=\dfrac{3}{4\ln 2}$。兩邊的因子 $\frac{3}{4}$ 互相約去，剩下

$$\frac{1}{\ln 2}=\frac{1+2^{1/2}}{2}\times\frac{1+2^{1/4}}{2}\times\frac{1+2^{1/8}}{2}\cdots. \qquad \blacksquare$$

階段 4 韋達公式

想一想 第 (iv) 部分含有 π，所以它必定來自普通的三角函數，而不是雙曲函數。如果把 sinh 和 cosh 換成 sin 和 cos，第 (i) 和第 (ii) 部分的一切是否仍然成立？

仍然成立。歸納法只用到倍角公式，而 $\sin 2y=2\sin y\cos y$。極限只用到當 $y\to 0$ 時 $\frac{\sin y}{y}\to 1$，這可以用同樣的方法由 $\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\cdots$ 推出。所以當 $x\neq 0$（並且 x 不是 π 的倍數，以確保過程中沒有因子為零）時，

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

停一停，試一試 選取 x 使左邊等於 $2/\pi$，然後算出最初幾個因子。半角公式（half-angle formula）$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$（適用於 $0\leq\theta\leq\pi$）會派上用場。

取 $x=\frac{\pi}{2}$。這時 $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$，而各因子是 $\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{8},\cos\frac{\pi}{16},\ldots$。第一個是 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。如果某個因子是 $\cos\theta=\frac{c}{2}$，由半角公式可知下一個因子是

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+c/2}{2}}=\frac{\sqrt{2+c}}{2}.$$

所以分子依次是 $\sqrt{2}$、$\sqrt{2+\sqrt{2}}$、$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$、...，每一個都是把前一個加上 2 再開平方而得。這就是韋達公式。 $\blacksquare$

回顧

- **乘積的相消（telescoping）。**第 (i) 部分的恆等式是一個會收攏的乘積，正如某些和式可以裂項相消一樣。
- **先有有限的恆等式，再取極限。**與 Section 2.4 一樣，每一步對有限的 n 都是準確的，唯一需要的極限就是非常簡單的 $\frac{\sin y}{y} \to 1$。
- **雙曲函數與圓函數是孿生兄弟。**同一個證明對兩者都適用，因為兩者滿足相同的倍角公式和相同的小角極限。這並非巧合：$\cosh(ix) = \cos x$，你會在 Section 5.7 看到。

背後的數學

阿基米德（Archimedes）的多邊形

韋達公式有一個幾何意義，可追溯至阿基米德。內接（inscribed）於半徑為 1 的圓的正 2^n 邊形，面積是 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$。把邊數加倍，面積就乘以

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

由正方形（$A_2 = 2$）開始，不斷把邊數加倍，面積便趨向圓的面積 π。所以 $\pi = 2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\right)$，這正是韋達公式。乘積中的每個因子，都是圖 2.5.1 中相鄰兩個多邊形的面積之比。

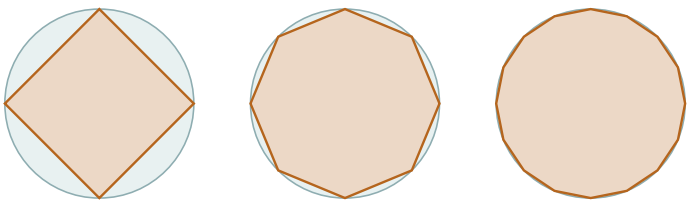


圖 2.5.1　內接於半徑為 1 的圓的正多邊形，邊數分別為 4、8 和 16。邊數每加倍一次，面積就多除以韋達乘積中的一個因子，而面積不斷增大並趨向 π。

無窮乘積

韋達乘積是數學史上第一個無窮乘積。其後陸續有其他例子：沃利斯（John Wallis）在 1655 年發現 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$，而歐拉（Euler）關於 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘積已在 Section 2.4 出現過。到了大學，你會學到無窮乘積在甚麼情況下收斂（converge）。粗略地說，當 $\prod(1+a_n)$ 中的 a_n 是細小的正數時，它的表現與 $\sum a_n$ 相似，因為 $\ln(1+a_n)\approx a_n$。這裏 $1-\cos(\pi/2^n)\approx\frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$，每次縮小 4 倍，所以這個乘積收斂得很快。

有多快？

乘了 n 個因子之後，部分積恰好等於 $\dfrac{1}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}$，其誤差大約是 $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$ 乘以 $\frac{2}{\pi}$。每多一個因子，答案的準確度大約提高 4 倍，即多得大約 0.6 個小數位。十個因子可使 $2/\pi$ 準確至六個小數位。這已經不錯，但遠遠不及 Section 2.6 的方法那麼快，那些方法每一步都令準確的位數加倍。

思維技巧

反覆運用恆等式

一條把 $f(x)$ 與 $f(x/2)$ 聯繫起來的恆等式，可以一次又一次地運用；取極限之後，結果往往是一個無窮和或無窮乘積。

找出 n 步之後的「餘項」（這裏是 $2^n\sinh(x/2^n)$），然後另行求出它的極限。這個模式在分析學中隨處可見，由無窮乘積以至分形（fractals）的構造都有它的蹤影。

延伸練習

1 **1990 年的版本。**試做 STEP I 1990，第 8 題（`step.maths.org/questions/90-s1-q8`）。它循一條與本節不同的途徑得出韋達乘積，所用的不外乎 sin 的倍角公式。你覺得哪一種方法較為自然？

2 **另一個角。**在 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘積中取 $x=\frac{\pi}{3}$，把 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ 寫成無窮乘積，並化簡最初兩個因子。

3 **要多少個因子？**用計算機找出韋達乘積需要多少個因子，才能使 π 準確至 4 個小數位。解釋為甚麼每多一個因子大約多得 0.6 個數位。

4 $\ln 3$ **的公式。**取 $x = \ln 3$ 重做第 (iii) 部分，把 $\frac{1}{\ln 3}$ 寫成無窮乘積。需要多少個因子才能使 $\frac{1}{\ln 3}$ 準確至兩個小數位？為甚麼這個乘積收斂得比韋達乘積慢？

延伸閱讀

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。阿基米德、韋達、沃利斯等人的故事，寫得興味盎然。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。關於計算 π 的嚴謹數學，包括 Section 2.6 的方法。讀完本章之後，第 1 章應該讀得懂。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。書中有一章專門講述韋達和他的乘積。

2.6 算術幾何平均

題目

STEP II 2024，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

引子

取兩個正數，例如 $\sqrt{2}$ 和 1。把它們換成兩者的算術平均（arithmetic mean）和幾何平均（geometric mean）。再做一次，然後再做一次。結果如下：

n	x_n（算術）	y_n（幾何）
0	1.4142135623730950488	1
1	1.2071067811865475244	1.1892071150027210667
2	1.1981569480946342956	1.1981235214931201226
3	1.1981402347938772091	1.1981402346773072058
4	1.1981402347355922074	1.1981402347355922074

只需四步，兩個數便有二十位小數完全相同。它們的共同極限（limit）就是*算術幾何平均*（arithmetic–geometric mean，簡稱 AGM）$M(\sqrt{2},1) = 1.19814\ldots$

1799 年 5 月 30 日，年僅 21 歲的高斯（Carl Friedrich Gauss）在日記中寫道，他發現 $1/M(\sqrt{2},1)$ 與一個常數有十一位小數相同，而這個常數出自一個完全不同的問題：一條稱為雙紐線（lemniscate）的曲線的弧長。他寫道：「這必定會開闢一個全新的分析領域。」事實果然如此。本題要證明的，正是高斯這項發現背後的關鍵事實：AGM 能求出一個用任何常規方法都計算不了的積分。

動筆之前

> **想一想**　為甚麼兩個不相等的正數的算術平均，總是大於它們的幾何平均？你能用一行證明嗎？

這就是算術幾何平均不等式（AM–GM inequality），而第 (i) 部分的提示正好給出這個一行證明：當 $x \neq y$ 時，$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 > 0$，展開後便是 $x+y > 2\sqrt{xy}$。第 (i) 部分的一切，都由這個不等式，以及「每個平均都介乎原來兩個數之間」這個事實推出。

逐步解題

階段 1　兩個數列互相夾緊

若 $y_n < x_n$，則 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$，所以 $x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n > 0$，即 $x_{n+1} > y_{n+1}$。由於 $y_0 < x_0$，用歸納法（induction）可知對所有 n 都有 $y_n < x_n$。

> **想一想**　為甚麼 x_n 與 y_n 的算術平均小於 x_n，而幾何平均大於 y_n？

因為 $y_n < x_n$：$x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} < \frac{x_n+x_n}{2} = x_n$，而 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n$。所以

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

y_n 遞增，並以 x_0 為上界（bounded above），所以根據題目所給的定理，它趨向一個極限 M。

至於兩者的差距，

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \frac{x_n+y_n}{2} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

而由第一部分可知它是正數。所以差距每次至少減半：$0 < x_n - y_n < (x_0 - y_0)/2^n$，而後者趨向 0。

最後，$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ 是一個趨向 M 的數列與一個趨向 0 的數列之和，所以 $x_n \to M$ 亦成立。 ■

階段 2　代換

這個代換（substitution）看來無緣無故，但它其實經過精心設計，令根號下的兩個括號都變成完全平方（或接近完全平方）。

想一想 設 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$，計算 $t^2 + pq$。然後計算 $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$。兩者之中，有沒有哪一個可以漂亮地因式分解？

首先，

$$t^2 + pq = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) + pq = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2.$$

其次，

$$\begin{aligned} t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2} + p^2 + 2pq + q^2\right) \\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}. \end{aligned}$$

另外 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{pq}{x^2}\right) = \dfrac{x^2+pq}{2x^2}$。

停一停，試一試 把以上結果合起來。當 x 由 0 走到 ∞ 時，t 怎樣變化？關於 t 的積分會變成甚麼？

當 x 由 0 增加至 ∞ 時，t 由 $-\infty$ 遞增至 ∞（因為它的導數是正數）。對 $x > 0$，

$$\sqrt{\left(t^2 + \tfrac{1}{4}(p+q)^2\right)\left(t^2+pq\right)} = \frac{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}{2x} \cdot \frac{x^2+pq}{2x},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cdots}} = \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}.$$

因此關於 t 的積分等於 $2\,\mathrm{I}(p,q)$。

另一方面，關於 t 的積分與 I 的形式完全一樣，只是 p 和 q 分別換成了 $\frac{1}{2}(p+q) = \mathrm{a}(p,q)$ 和 $\sqrt{pq} = \mathrm{g}(p,q)$，而且積分範圍是整條實數線。被積函數（integrand）是 t 的偶函數（even function），所以關於 t 的積分等於 $2\,\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big)$。兩者比較，得

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big). \qquad \blacksquare$$

階段 3 求積分的值

想一想 由 (x_0, y_0) 開始，反覆應用這個恆等式。經過 n 步之後，$\mathrm{I}(x_0,y_0)$ 等於甚麼？當 $n \to \infty$ 時又會怎樣？

對每個 n，$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_1,y_1) = \mathrm{I}(x_2,y_2) = \cdots = \mathrm{I}(x_n,y_n)$。當 $n \to \infty$ 時，兩個變數都趨向 M，而

$$\mathrm{I}(M,M) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{M^2+x^2} = \left[\frac{1}{M}\arctan\frac{x}{M}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2M}.$$

所以

$$\mathrm{I}(x_0, y_0) = \frac{\pi}{2M}. \qquad \blacksquare$$

題目容許我們直接接受「$\mathrm{I}(x_n, y_n) \to \mathrm{I}(M, M)$」這一步，但其實可以簡潔地加以證明。把 p 或 q 增大，被積函數便會變小，而 $y_n < x_n$，所以

$$\frac{\pi}{2x_n} = \mathrm{I}(x_n, x_n) < \mathrm{I}(x_n, y_n) < \mathrm{I}(y_n, y_n) = \frac{\pi}{2y_n}.$$

上下兩個界都趨向 $\frac{\pi}{2M}$，而對每個 n，$\mathrm{I}(x_n, y_n)$ 都是同一個數 $\mathrm{I}(x_0, y_0)$，所以它必定等於 $\frac{\pi}{2M}$。這又是一次夾逼（squeeze），與 Section 2.4 中的做法一樣。

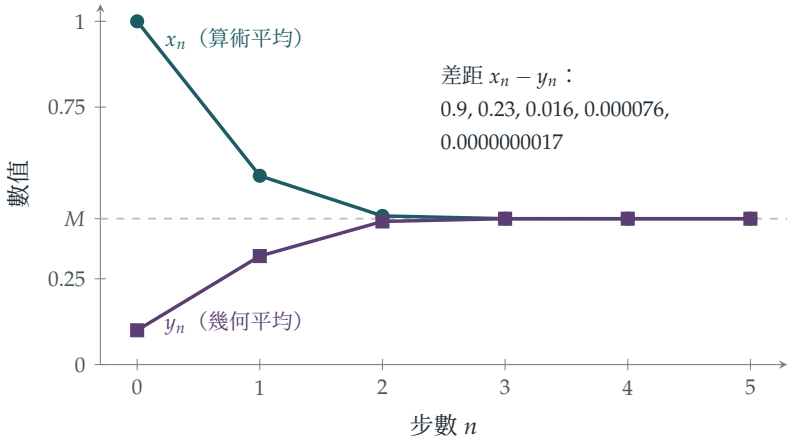


圖 2.6.1　$x_0 = 1$ 與 $y_0 = 0.1$ 的算術幾何平均。算術平均 x_n（藍綠色）遞減，幾何平均 y_n（紫紅色）遞增，兩者以驚人的速度逼近共同極限 $M = 0.425040709\ldots$：一旦兩者接近，正確位數每一步大約增加一倍。

回顧

- **兩個單調數列互相夾緊。**一個上升，一個下降，而兩者的差距縮小至零。要證明兩個數列有共同極限，這是最乾淨利落的方法。
- **不變量（invariant）。**$\mathrm{I}(x_n, y_n)$ 這個量在每一步都保持不變。在其他一切都在變動時，找出某樣固定不變的東西，是數學中最有力的想法之一。
- **巧妙的代換是設計出來的，不是猜出來的。**選用這個代換，正是為了令根號下的式子可以因式分解。

背後的數學

比題目所說的還要快

第 (i) 部分證明了差距每一步至少減半，這相當於每一步大約多得一個二進制位。引子中的表格所顯示的卻驚人得多：正確位數每一步大約*增加一倍*（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。事實上

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\bigr)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\bigl(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\bigr)^2},$$

所以每個差距大約是一個常數乘以前一個差距的*平方*。這稱為*二次收斂*（quadratic convergence），我們會在 Section 2.7 中仔細探討。

橢圓積分

我們的積分 $\mathrm{I}(p, q)$ 其實是一個喬裝了的*完全橢圓積分*（complete elliptic integral）。這類積分在計算橢圓的弧長時出現，而且不能用你所認識的函數表示。它最著名的應用是單擺。高級程度（A-level）課程中的週期公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 只是小幅度擺動時的近似。由角度 θ_0 釋放的單擺，其準確週期是

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\bigl(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\bigr)},$$

這是一個可用 AGM 求值的橢圓積分。當 $\theta_0 = 90^\circ$ 時，真正的週期比簡單公式所預測的長約 18%。高斯那則日記所談的是雙紐線，一條 8 字形的曲線，它的總弧長涉及 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$；這個積分其實就是喬裝了的 $\mathrm{I}(\sqrt{2}, 1)$，所以可以用 AGM 求值。

計算 π

1976 年，Richard Brent 與 Eugene Salamin 各自獨立地把高斯的想法變成一個計算 π 的算法（algorithm），每一步都令正確位數增加一倍。二十五步便可得出數千萬位。在 1980 及 1990 年代，這類算法曾用於多次刷新紀錄的 π 計算；時至今日，凡是需要高精度的地方，類似的二次收斂算法已成為標準工具。試比較 Section 2.5 中的韋達（Viète）乘積，它每一步只多得約 0.6 位。

思維技巧

尋找不變量

當一個過程同時改變許多東西時，找出一個不變的量。然後在過程的終點求它的值，因爲那裏一切都很簡單。

在這裏，過程就是 AGM 的每一步，而不變量就是積分 I。在過程的終點，兩個變數相等，積分變成初等積分。不變量在數學中隨處可見，由力學中的能量守恆（第 10 章），以至證明某些謎題無解。

延伸練習

1 **二次收斂。**證明恆等式 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$，並由此推出 $x_{n+1}-y_{n+1}\le\dfrac{(x_n-y_n)^2}{8y_0}$。

2 **親手計算。**用計算機求 $M(2,1)$，準確至六位小數。你需要多少步？

3 **縮放。**證明對 $\lambda>0$ 有 $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda M(x,y)$，以及 $\mathrm{I}(\lambda p,\lambda q)=\lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$。驗證這兩個事實與 $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\pi/(2M)$ 互相吻合。

4 **單擺。**利用上面的公式，求由 60° 釋放的單擺的週期比小角度近似的預測值長多少，答案準確至三位有效數字。

延伸閱讀

- **David Cox, “The arithmetic–geometric mean of Gauss”**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)。講述這段歷史和有關數學的經典文章；開首幾節只需要微積分知識。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)。關於 AGM 與 π 的快速計算的權威著作。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)。講述實驗數學，包括像高斯那樣憑着留意數值上的巧合而得出的發現。

2.7 六位還是六百位

題目

STEP II 2023，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

引子

有兩個求 $\sqrt{2}$ 近似值的簡單方法，同樣由 1 開始，同樣只用加法、乘法和除法。十步之後，第一個方法準確至小數點後約 8 位，第二個方法則準確至超過 700 位。

兩者的分別，並不在於第二個方法對付 $\sqrt{2}$ 的手法較為高明，而在於誤差的形態不同：第一個方法每走一步，誤差乘以一個固定的分數；第二個方法每走一步，誤差就被平方一次。這道題目把這一點說得精確，同時引入數值分析（numerical analysis）的一個核心概念；每一部計算機、每一次天氣預報、每一個工程模擬，背後都是這門學科。

動筆之前

先以分數形式計算兩個數列（sequence）的首幾項。

$$x_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \cdots \qquad y_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ \cdots$$

? **想一想** 你留意到這兩列數有甚麼特別嗎？（看看哪些分數在兩列中都有出現。）

每一個 y_n 都在 x 的那一列中出現，只是位置愈來愈後：$y_2 = x_3$，$y_3 = x_7$，一般而言 $y_n = x_{2^n-1}$。第二個方法其實是在同一列近似值之中，以指數速度向前跳。請記住這一點，我們會在本節末解釋。

逐步解題

階段 1　第一個方法的各項不小於 1

我們可以寫成 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$。若 $x_n \geq 1$，則 $x_n + 1 > 0$，所以 $x_{n+1} > 1$。由於 $x_0 = 1$，由歸納法（induction）可知對所有 n 都有 $x_n \geq 1$。 ■

階段 2　第一個方法的誤差

> **想一想**　題目以 $x_n^2 - 2$ 而不是 $x_n - \sqrt{2}$ 來量度誤差。試把 $x_{n+1}^2 - 2$ 寫成以 x_n 表示的單一分數。分子有甚麼特別之處？

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n + 2)^2 - 2(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2 - x_n^2}{(x_n + 1)^2}.$$

分子正好是 $-(x_n^2 - 2)$。所以 $x_{n+1}^2 - 2$ 與 $x_n^2 - 2$ 異號（近似值交替落在 $\sqrt{2}$ 的兩側），而且由 $x_n \geq 1$ 可得 $(x_n + 1)^2 \geq 4$，因此

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4}|x_n^2 - 2|. \qquad \blacksquare$$

階段 3　十步之後

把上式連續應用十次，得 $|x_{10}^2 - 2| \leq 4^{-10}|x_0^2 - 2| = 4^{-10} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$。至於正負號：$x_0^2 - 2 = -1 < 0$，而正負號逐項交替，所以對每個偶數 n 都有 $x_n^2 - 2 < 0$。於是 $x_{10}^2 < 2$，兩者合起來便得 $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2$。 ■

x_n^2 的誤差每一步最多乘以 $\frac{1}{4}$。這稱為**線性收斂**（linear convergence）：每一步增加固定數目的準確位數（這裏最少是 $\log_{10} 4 \approx 0.6$；實際上較接近 0.77）。

階段 4　第二個方法的誤差

> **想一想**　試把 $y_{n+1} - \sqrt{2}$ 寫成單一分數。分子應該會令你想起完全平方。

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{\left(y_n - \sqrt{2}\right)^2}{2y_n}. \qquad \blacksquare$$

若 $y_n > 0$，右方為非負數，所以 $y_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$。由於 $y_0 = 1$，由歸納法可知對所有 n 都有 $y_n \geq 1$。 ■（事實上，對所有 $n \geq 1$ 都有 $y_n \geq \sqrt{2}$：走完第一步之後，第二個方法永遠從上方逼近 $\sqrt{2}$。）

階段 5　把誤差平方

設 $e_n = y_n - \sqrt{2}$，則當 $n \geq 1$ 時 $e_n \geq 0$，而且因為 $y_n \geq 1$，有 $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2y_n} \leq \dfrac{e_n^2}{2}$。

> **停一停，試一試** 用歸納法證明：當 $n \geq 1$ 時 $e_n \leq 2r^{2^n}$，其中 $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$。請仔細檢查基礎情況。

基礎情況：$e_1 = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$，而 $2r^2 = 2 \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$。兩者相等，所以基礎情況成立（而且是等式）。

歸納步驟：若 $e_n \leq 2r^{2^n}$，則

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}}. \qquad \blacksquare$$

階段 6 六百位小數

由於 $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$，我們有 $r < \frac{1}{4}$，所以

$$0 \leq y_{10} - \sqrt{2} \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{10}} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

而 $2^{10} = 1024 > 10^3$，所以 $2^{-2047} < 2^{-2040} = (2^{10})^{-204} < 10^{-612}$，這當然小於 10^{-600}。 $\blacksquare$

回顧

- **找出誤差的遞推關係。**兩部分的做法，都是把新誤差寫成舊誤差的一個精確函數，其餘一切便隨之而來。
- **線性與二次之別。**「新誤差 $\leq$ 常數 $\times$ 舊誤差」表示每一步增加固定數目的準確位數。「新誤差 $\leq$ 常數 $\times$ (舊誤差)^2」則表示每一步令準確位數加倍（圖 2.7.1）。
- **平方量決定正負號。**在第 (ii) 部分，走一步之後的誤差是一個平方數除以一個正數，所以永遠不會是負數：迭代從上方逼近。

背後的數學

牛頓法

第二個方法其實是把牛頓法（Newton's method）應用於 $f(y) = y^2 - 2$。牛頓法求 f 的根的做法，是反覆把猜測值 y 換成 y 處的切線與橫軸的交點：

$$y_{\text{新}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

在單根（simple root）α 附近，由泰勒展開式（Taylor expansion）可知新誤差約為 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{舊誤差})^2$，這就是牛頓法二次收斂（quadratic convergence）的原因。這個特殊情況，即「取 y 與 $2/y$ 的平均值」，古巴比倫人早已知道；一塊約公元前 1700 年的泥板（現稱為 YBC 7289）以 60 進制給出 $\sqrt{2}$ 的值，誤差小於百萬分之一。

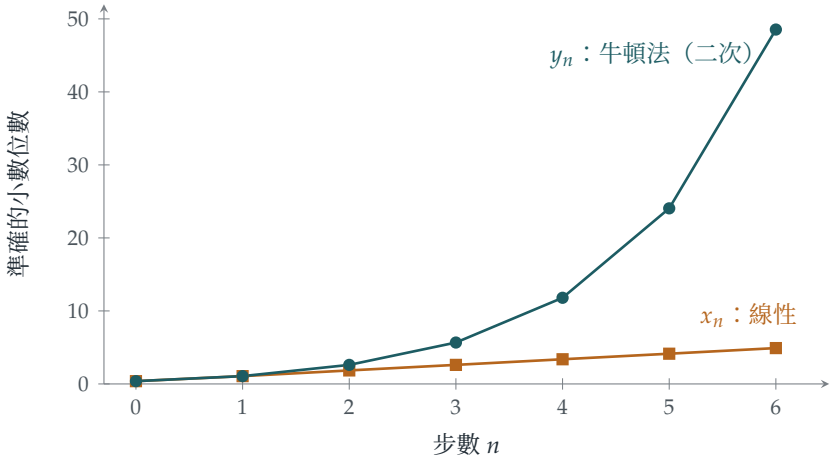


圖 2.7.1　兩個方法各走 n 步之後，$\sqrt{2}$ 的準確小數位數。線性的方法每一步增加約 0.77 位；牛頓法則每一步令準確位數大約加倍，到 $n = 10$ 時達到約 780 位。

不動點及其收斂速度

兩個方法都具有 $u_{n+1} = g(u_n)$ 的形式，而且 $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}$ 是一個不動點（fixed point），正如 Section 2.2 的蛛網圖（cobweb diagram）所示。在不動點 α 附近，誤差每一步大約乘以 $g'(\alpha)$。對第一個方法而言，$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$，而 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3 - 2\sqrt{2}) \approx -0.17$：負號解釋了正負號為何交替，0.17 則解釋了每一步為何增加 0.77 位（$\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$）。對牛頓法而言，$g'(\alpha) = 0$，所以線性項消失，誤差由下一

項（即平方項）決定。設計出滿足 $g'(\alpha) = 0$ 的迭代（iteration），正是快速數值方法的精髓所在。

為何出現相同的分數

分數 $x_n = p_n/q_n$ 滿足 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ 和 $q_{n+1} = p_n + q_n$，並且 $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$，正負交替。它們是佩爾方程（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ 的解，也是連分數（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ 的漸近分數（convergents）。它們來自 $1 + \sqrt{2}$ 的冪：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{n+1}$。牛頓法的每一步把 $p + q\sqrt{2}$ 平方（不妨一試：$(p + q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$，而 $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ 正是把牛頓法的公式應用於 p/q 的結果）。平方令指數加倍，這就是 $y_n = x_{2^n-1}$ 的原因。同樣的「平方」模式，也是 Section 2.8 中迭代的動力來源。

思維技巧

分析誤差，而不是答案

要了解一個近似方法的表現，就寫下某一步的誤差如何取決於上一步的誤差。

這是數值分析的起點。兩個方法的答案本身（$\sqrt{2}$）是一樣的；不同之處，亦是實際應用中最要緊之處，在於誤差如何演變。

延伸練習

1 **佩爾方程。**證明：若 $y_n = p/q$ 為最簡分數，且 $p^2 - 2q^2 = 1$，則 $y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$ 亦滿足這個方程。驗證 $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$。

2 **立方根。**寫出應用於 $f(y) = y^3 - 2$ 的牛頓法，並證明新誤差為 $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$，其中 $\alpha = \sqrt[3]{2}$。由此推出：若 $y_n > \alpha$，則新誤差最多是舊誤差平方的 $\frac{1}{\alpha}$ 倍。（提示：利用 $\alpha^3 = 2$。）

3 **不用除法的除法。**證明應用於 $f(y) = \frac{1}{y} - a$ 的牛頓法給出 $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$，當中無需除法。若 $e_n = 1 - ay_n$，證明 $e_{n+1} = e_n^2$。（電腦處理器正是用這類迭代來做除法的。）

4 **牛頓法失效的時候。**把牛頓法應用於 $f(y) = y^{1/3}$，它唯一的根是 0。證明無論從哪裏開始，每一步都令與根的距離加倍。誤差公式的哪一個假設不成立？

延伸閱讀

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。標準的大學本科數值分析教科書；第 1 章講述不動點迭代和牛頓法。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。收錄有關牛頓法和數值分析的短文，由專家執筆，面向廣大讀者。
- **David Fowler & Eleanor Robson, "Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context"**（古巴比倫數學中的平方根近似值），*Historia Mathematica* 25 (1998)。

2.8 平方再減二

題目

STEP III 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

引子

「平方後減二」幾乎是可以用來生成數列（sequence）的最簡單規則。然而它把實數線分成兩個世界。從 $[-2,2]$ 之外出發，各項會以比指數增長還要快的速度衝向無窮大。從區間之內出發，各項則永遠被困在其中，四處遊走，而且在一個精確的意義下完全無法預測：這是混沌（chaos）最簡單的例子之一。

同一條規則，用在非常大的整數上，就是盧卡斯－萊默檢驗法（Lucas–Lehmer test）的核心。這是一個高效的檢驗法，用來判斷梅森數（Mersenne number）2^p-1 是否質數（prime）；現時的最大質數紀錄，以及其他已知最大的質數中的大部分，都是靠它找到的。本題探討的是故事中「逃逸」的一面，並找出一條隱藏的公式，令這個數列完全可解。

動筆之前

先試幾個初始值。取 $a=3$：$3, 7, 47, 2207, \ldots$ 取 $a=1$：$1, -1, -1, -1, \ldots$ 取 $a=0$：$0, -2, 2, 2, 2, \ldots$ 取 $a=0.3$：$0.3, -1.91, 1.648, 0.716, -1.487, 0.211, \ldots$

想一想 為甚麼 $[-2,2]$ 內的數永遠無法逃出去？當 $-2 \le x \le 2$ 時，x^2-2 最大和最小可以是多少？

若 $-2 \le x \le 2$，則 $0 \le x^2 \le 4$，所以 $-2 \le x^2-2 \le 2$。區間 $[-2,2]$ 被映射到它自身之內。這就是第 (ii) 部分的一半。

逐步解題

階段 1　逃逸

想一想　第 (i) 部分出現了 4^{n-1}，暗示與 2 的距離每一步至少變成四倍。設 $x_n = 2 + d$。以 d 表示，x_{n+1} 是甚麼？

$x_{n+1} = (2+d)^2 - 2 = 2 + 4d + d^2$。所以若 $d \geq 0$，新一項高出 2 的距離是 $4d + d^2 \geq 4d$。

現在用歸納法 (induction)。當 $n = 1$ 時，$x_1 = a = 2 + 4^0(a-2)$。若 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$，則 $d = x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2) \geq 0$，所以

$$x_{n+1} - 2 \geq 4d \geq 4^n(a-2). \qquad \blacksquare$$

階段 2　逃逸當且僅當 $|a| > 2$

想一想　「當且僅當」(if and only if) 表示要分別作兩個證明。第 (i) 部分差不多已經給出哪一個方向？還欠甚麼？

若 $|a| > 2$：當 $a > 2$ 時，由第 (i) 部分得 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2) \to \infty$。當 $a < -2$ 時，第一步已把正負號糾正過來：$x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$，而由 x_2 開始的數列，就是以 $x_2 > 2$ 為初始值的同一個數列，所以它趨向無窮大。

僅當：若 $|a| \leq 2$，則 $a \in [-2, 2]$，由上面的觀察可知每一項都留在 $[-2, 2]$ 之內。有界 (bounded) 的數列不可能趨向無窮大。 $\blacksquare$

階段 3　一條隱藏的公式

第 (iii) 部分看來令人卻步。在動手之前，值得先找出 x_n 的公式。

想一想　若 $a > 2$，則存在一個數 $t > 1$ 使得 $a = t + \dfrac{1}{t}$。(為甚麼？) 以 t 表示，x_2 和 x_3 是甚麼？

當 t 由 1 增至 ∞ 時，函數 $t + 1/t$ 由 2 遞增至 ∞，所以每個 $a > 2$ 都可以寫成這個形式。於是

$$x_2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad x_3 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 = t^4 + \frac{1}{t^4},$$

再由歸納法得

$$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}.$$

平方後減 2，只不過是把指數加倍。這樣題目就變得容易處理了。

階段 4 乘積裂項相消

想一想 $\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 是甚麼？若把結果再乘以 $t^2+\frac{1}{t^2}$，會怎樣？

$\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^2-\frac{1}{t^2}$，然後 $\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)=t^4-\frac{1}{t^4}$，如此類推：每個因子 x_k 都把兩個冪之差中的指數加倍。所以

$$\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n=t^{2^n}-t^{-2^n}.$$

停一停，試一試 以 t 表示並計算 x_{n+1}^2-4，然後與上面的乘積比較。

$$x_{n+1}^2-4=\left(t^{2^n}+t^{-2^n}\right)^2-4=\left(t^{2^n}-t^{-2^n}\right)^2.$$

由於 $t>1$，$t^{2^n}-t^{-2^n}>0$，所以 $\sqrt{x_{n+1}^2-4}=t^{2^n}-t^{-2^n}=\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n$。因此

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2-4}}{x_{n+1}}=\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1\cdots x_n}{x_{n+1}},$$

而它對每個 n 都等於 y_n，恰好就是 $A=t-\frac{1}{t}$ 的時候。最後，$\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-4=a^2-4$，所以條件是 $A=\sqrt{a^2-4}$，即

$$a=\sqrt{A^2+4}.$$

（因為 $A>0$，這個值大於 2，符合要求。） ■

階段 5 y_n 是否收斂？

取這個 a 值時，

$$y_n=\frac{\sqrt{x_{n+1}^2-4}}{x_{n+1}}=\sqrt{1-\frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

由第 (ii) 部分知 $x_{n+1}\to\infty$，所以 $\frac{4}{x_{n+1}^2}\to 0$，而 $y_n\to 1$。數列收斂（converge），極限為 1。 ■

所以無窮乘積（infinite product）$x_1x_2x_3\cdots$ 的增長速度與 x_{n+1}/A 完全相同：我們找到了一個由急速增長的項所組成的乘積的精確增長率。

回顧

- **不變區域（invariant region）。**$[-2,2]$ 被映射到它自身之內，單憑這一點就解決了第 (ii) 部分的一半。

- **把問題線性化的代換（substitution）。**寫成 $a = t + 1/t$ 之後，「平方後減 2」就變成「把指數加倍」。雜亂的非線性行為變得簡單。
- **又是裂項相消（telescoping）。**與 Section 2.5 中的乘積一樣，由許多因子組成的乘積之所以能摺疊起來，是因為每個因子都與下一個互相配合。

背後的數學

秩序與混沌

在 $[-2, 2]$ 之內會發生甚麼事？在那裏 $a = t + 1/t$ 行不通（它需要 $|a| \geq 2$），但三角函數的版本卻可行：設 $a = 2\cos\theta$。則 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$，而一般地

$$x_n = 2\cos\left(2^{n-1}\theta\right).$$

所以在區間之內，這個映射只不過是*把角度加倍*。聽起來無傷大雅，但把角度加倍其實是混沌的。把 θ/π 寫成二進制（binary）：加倍會把二進制小數點向右移一位，並丟掉最前面的一位數字。經過 50 步之後，x_n 取決於 θ/π 的第 51 位二進制數字，所以初始值若有 10^{-15} 的誤差（一般電腦的精確度），50 步之後的答案就完全不可靠。這種對初始條件的敏感依賴（sensitive dependence on initial conditions）正是混沌的標誌，見圖 2.8.1。映射 $x \mapsto x^2 - 2$ 經變數代換後，等價於著名的邏輯斯諦映射（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$，我們會在 Section 8.7 再遇上它。

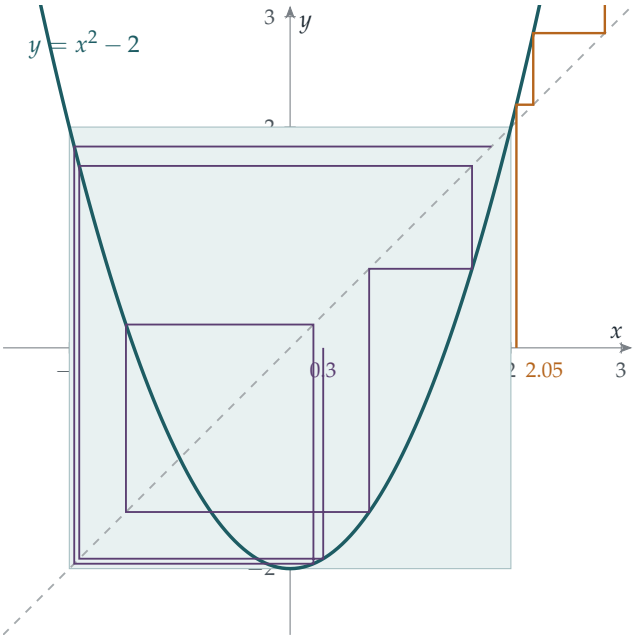


圖 2.8.1 $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ 的蛛網圖（cobweb diagram）。由 0.3 出發（紫紅色），軌道（orbit）永遠留在陰影正方形 $[-2,2]^2$ 之內，混沌地遊走。由區間外不遠處的 2.05 出發（琥珀色），它就會逃逸：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

尋找最大的質數

梅森數是指 $M_p = 2^p - 1$。盧卡斯（Édouard Lucas）在 1876 年發現了一個出色的檢驗法，用來判斷 M_p 是否質數（其中 p 為奇質數），其後萊默（Derrick Lehmer）在 1930 年把它完善：由 $s_0 = 4$ 開始，反覆平方後減 2，每次都取模（modulo）M_p 化簡。則

$$M_p \text{ 是質數} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

以 $M_7 = 127$ 為例：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$，所以 127 是質數。它與本題的聯繫就在於那個代換：$4 = t + 1/t$，其中 $t = 2 + \sqrt{3}$，所以 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$，而檢驗法的證明用到形如 $a + b\sqrt{3}$ 的數的算術，與 Section 1.6 的高斯整數（Gaussian integers）頗為相似。由於每一步只需要一次平方，這個檢驗法極為快速，這就是為甚麼已知最大的質數中的大部分，包括現時的紀錄保持者，都是梅森質數（並非全部都是：其他特殊形式，例如 $a^{2^n} + 1$，也有各自的快速檢驗法）。在本書撰寫之時，紀錄是 $2^{136279841} - 1$，這個數有多於 41 百萬位數字，於 2024 年發現。

曼德博集合

把 -2 換成任意常數 c，並容許複數：$z \mapsto z^2 + c$。令 0 的軌道保持有界的所有 c 所組成的集合，就是曼德博集合（Mandelbrot set）。我們的映射對應 $c = -2$，即曼德博集合最左邊的一點，而軌道保持有界的初始值所組成的集合（它的茹利亞集合（Julia set））正好是我們在第 (ii) 部分找到的區間 $[-2, 2]$。對於幾乎所有其他的 c，這個集合都是分形（fractal）。

思維技巧

> **轉換變數，令映射變得簡單**
>
> *若一個迭代（iteration）看來很複雜，就找一個代換，把它變成簡單的東西，例如加倍或加上一個常數。*
>
> 這裏 $x = t + 1/t$ 和 $x = 2\cos\theta$ 把 $x \mapsto x^2 - 2$ 變成了加倍。在動力系統（dynamical systems）理論中，這稱為*共軛*（conjugacy），而找到共軛往往是徹底理解一個系統的關鍵。

延伸練習

1 **區間之內。**證明若 $a = 2\cos\theta$，則 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$。求所有使得 $x_3 = a$ 但 $x_2 \neq a$ 的 a 值。（*提示*：你需要 $4\theta \equiv \pm\theta$，模 2π。）

2 **手算盧卡斯－萊默檢驗法。**用這個檢驗法證明 $M_5 = 31$ 是質數，而 $M_{11} = 2047$ 不是。（對 M_{11} 你需要九步；用計算機會有幫助。把 2047 作因數分解，以驗證你的結論。）

3 **一個具體例子。**取 $A = \frac{3}{2}$。求 a 和 t，並以數值驗證公式 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$。

4 **裂項相消的和。**較難設 $a = t + 1/t$ 且 $t > 1$，證明

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

利用恆等式 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$，其中 $z = t^{2^n}$，由此推出

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

當 $a = 3$ 時，以數值驗證這個結果。

延伸閱讀

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。講述混沌的經典科普著作，當中包括邏輯斯諦映射。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。標準的大學本科入門教材；第 10 章講述像本題這樣的一維映射。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。書中包括搜尋梅森質數的故事。

2.9 逐步逼近 e 的分數

題目

STEP II 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

引子

怎樣才能找到逼近 e 的好分數？你可以把級數（series）$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$ 截斷，但以分母的大小來衡量，這樣得到的分數並不算特別好。這道題的做法高明得多：它構造出一族積分，每個積分都是形如「整數 $+$ 整數 $\times e$」的一個很小的數。如果 $a+be$ 極小，那麼 e 就非常接近 $-a/b$，於是這些積分便為我們送上一連串極佳的分數：$\frac{19}{7}$、$\frac{193}{71}$、$\frac{2721}{1001}$、…

同樣的技巧，即找出既很小、又形如「你所關心的那個數的整數組合」的積分，正是數學中一些最深刻的無理性證明背後的想法，包括埃爾米特（Hermite）對 e 是超越數（transcendental）的證明，以及阿佩里（Apéry）對 $\zeta(3)$ 是無理數（irrational）的證明。

動筆之前

看看 $[0,1]$ 上的被積函數（integrand）$\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$。

> **想一想** $t(1-t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是多少？由此可知，當 n 增大時 T_n 的大小會怎樣變化？

$t(1-t)$ 的最大值是 $\frac{1}{4}$，在 $t=\frac{1}{2}$ 處取得。所以被積函數至多為 $\frac{e}{4^n n!}$，它縮小的速度快得驚人（圖 2.9.1）。這個「小」只是故事的一半。另一半，即 T_n 具有 a_n+b_ne 這種特殊形式，則來自分部積分法（integration by parts）。

逐步解題

階段 1　求導兩次

設 $p(t) = t^n(1-t)^n$。由積法則（product rule），

$$p'(t) = nt^{n-1}(1-t)^n - nt^n(1-t)^{n-1} = nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t).$$

> **想一想**　再求導一次。你會得到兩項；把公因式 $nt^{n-2}(1-t)^{n-2}$ 抽出來。要配合題目要求的形式，你需要把 $(1-2t)^2$ 改寫成以 $t(1-t)$ 表示的式子。怎樣做？

用積法則對 $n\,[t(1-t)]^{n-1}(1-2t)$ 求導（留意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$）：

$$\begin{aligned} p''(t) &= n(n-1)[t(1-t)]^{n-2}(1-2t)^2 - 2n[t(1-t)]^{n-1} \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\Big[(n-1)(1-2t)^2 - 2t(1-t)\Big]. \end{aligned}$$

現在 $(1-2t)^2 = 1-4t+4t^2 = 1-4t(1-t)$，所以方括號內的式子是 $(n-1) - 4(n-1)t(1-t) - 2t(1-t) = (n-1) - 2(2n-1)t(1-t)$。 ■

階段 2　分部積分兩次

> **想一想**　$p(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 處都等於零。當 $n \geq 2$ 時，$p'(t)$ 又如何？在對 $p(t)e^t$ 作分部積分時，這一點為甚麼重要？

當 $n \geq 2$ 時，$p'(t)$ 含有因式 $t^{n-1}(1-t)^{n-1}$，所以它在兩個端點也等於零。分部積分兩次，每一個邊界項都是零：

$$\int_0^1 p\,e^t\,\mathrm{d}t = \Big[p\,e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 p'\,e^t\,\mathrm{d}t = -\Big[p'\,e^t\Big]_0^1 + \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

由第 1 階段，$p''(t) = n(n-1)\,t^{n-2}(1-t)^{n-2} - 2n(2n-1)\,t^{n-1}(1-t)^{n-1}$。除以 $n!$：

$$\frac{p''(t)}{n!} = \frac{t^{n-2}(1-t)^{n-2}}{(n-2)!} - 2(2n-1)\frac{t^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

乘以 e^t 再積分，便得 $T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1}$。 ■

階段 3　整數結構

$T_0 = \int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t = e-1$。至於 $T_1 = \int_0^1 (t-t^2)e^t\,\mathrm{d}t$，由分部積分得 $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t = 1$ 及 $\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t = e-2$，所以 $T_1 = 1-(e-2) = 3-e$。

想一想 $T_0 = -1 + 1 \cdot e$ 而 $T_1 = 3 + (-1) \cdot e$。為甚麼每個 T_n 都必定具有 $a_n + b_n e$ 的形式，其中 a_n、b_n 是整數？

用強歸納法（strong induction）：若 $T_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2}e$ 及 $T_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}e$，其中係數都是整數，則

$$T_n = (a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}) + (b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1})e,$$

而新的係數也是整數。 ■

階段 4 很小，因而帶來資訊

當 $0 < t < 1$ 時，被積函數是正數，並且 $t^n(1-t)^n \le 1$ 及 $e^t < e$。所以

$$0 < T_n < \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

停一停，試一試 把 $0 < a_n + b_n e < \dfrac{e}{n!}$ 除以 $|b_n|$。這說明 e 與 $-a_n/b_n$ 之間的距離如何？

除以 $|b_n|$（它是正整數，所以至少是 1），

$$\left| e - \left(\frac{-a_n}{b_n} \right) \right| = \frac{|a_n + b_n e|}{|b_n|} < \frac{e}{n!\,|b_n|} \le \frac{e}{n!}.$$

右邊趨向 0，所以 $-a_n/b_n \to e$。 ■

以下是由遞推關係（recurrence）算出的頭幾個分數：

n	2	3	4	5	6
$-a_n/b_n$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$	$\frac{1084483}{398959}$
誤差	4×10^{-3}	3×10^{-5}	1×10^{-7}	3×10^{-10}	5×10^{-13}

分數 $\frac{2721}{1001}$ 準確至小數點後 6 位，而分母只有四位數。

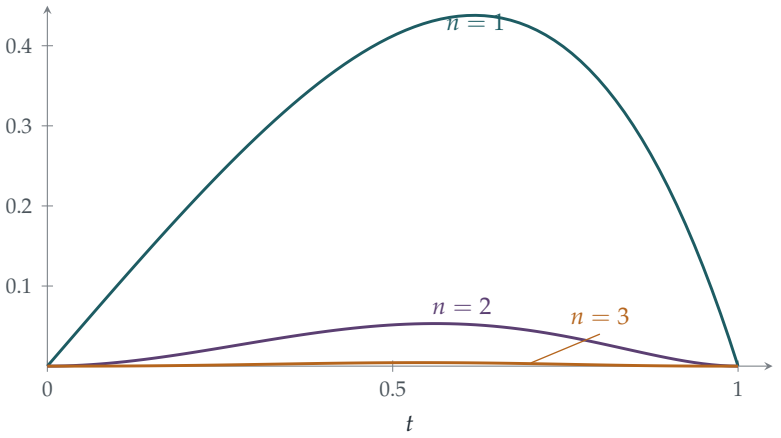


圖 2.9.1　$n = 1, 2, 3$ 時的被積函數 $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$。每一個在 $(0, 1)$ 上都是正數，所以每個 T_n 都是正數；而且它們縮小得極快，到 $n = 3$ 時曲線已幾乎看不見。是正數但極小，正是這個論證所需要的。

回顧

- **分部積分是製造遞推關係的機器。**由於多項式及其導數在兩個端點都等於零，分部積分給出了一個沒有邊界項的簡潔遞推關係。
- **結構與大小並用。**遞推關係說明 T_n 具有 $a_n + b_n e$ 的形式；上界說明它很小。單憑其中任何一項，都無法說明怎樣逼近 e。
- **不需要的就不要算。**題目叫我們不必求出 a_n 和 b_n 的值，而論證也從來用不着它們；所需要的只是它們是整數。

背後的數學

e 是無理數的另一個證明

這道題離一個著名定理只差一步。假設 $e = p/q$，其中 p, q 是正整數。那麼

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

是一個整數。但是 $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$，而當 n 很大時，右邊小於 1。於是 qT_n 就會是一個嚴格介乎 0 與 1 之間的整數，這是不可能的。因此 e 是無理數。這正是 Section 1.4 中「把一個整數困在 0 與 1 之間」的想法，只是這次由積分而不是級數來實現。正是這一類積分，配合 $t^n(1-t)^n$ 這樣的多項式，在 1873 年被夏爾·埃爾米特（Charles Hermite）用來證明 e 是*超越數*：它不是任何整係數多項式的根。

連分數

表中的分數不僅是好；它們更屬於*最佳之列*。e 的連分數（continued fraction）由歐拉（Euler）發現，有一個優美的規律：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

而它的漸近分數（convergents）是 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$。我們的 $-a_n/b_n$ 恰好是每隔兩個取一個的漸近分數。沒有任何分母更小的分數能更接近 e。歐拉發現的這個規律本身就是 e 是無理數的第一個證明，因為只有有理數才有有限的連分數。

阿佩里的奇蹟

1978 年，羅傑·阿佩里（Roger Apéry）宣佈證明了 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ 是無理數，這是自歐拉以來一直懸而未決的問題（見 Section 2.3）。他的證明實在太出人意表，以致在場聽眾起初並不相信。一年後，Frits Beukers 找到一個簡短的版本，所用的積分形如

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

其中 P_n 由 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n(1-x)^n\big)$ 構造而成。這些積分很小，是正數，並且形如「整數 + 整數 $\times\,\zeta(3)$」再除以一個受控的分母：這正是本題的策略。至於 $\zeta(5)$ 或 $e + \pi$ 是否無理數，至今仍然未知。

思維技巧

很小但不是零

如果已知某個量是若干個數的整數組合，又已知它很小但不是零，它就帶有資訊：關於逼近的資訊，有時還有關於無理性的資訊。

這個模式就是「結構來自代數，大小來自分析」。它在數論中反覆出現，也是分析與代數交匯得最有成果的地方之一。

延伸練習

1. **運行遞推關係。**由遞推關係計算 $n = 2, 3, 4$ 時的 a_n 和 b_n，並核對表中的分數。證明 b_n 的正負號交替出現。

2. **更精確的上界。**證明 $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$。這把 $-a_n/b_n$ 的誤差估計改進了多少？

3. **無理性的證明。**把上面方框中的論證仔細寫出來。你究竟在哪一處用到 $T_n > 0$？

4. **換一個權函數。**較難把 e^t 換成 e^{2t}，重做這道題（即 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,\mathrm{d}t$）。求 U_n 的遞推關係，證明 U_n 是 1 和 e^2 的有理係數組合，並探究這個論證是否仍能證明 e^2 是無理數。（與 Section 1.4 比較。）

延伸閱讀

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。關於無理性證明的經典小書，當中包括埃爾米特的方法。
- **Alfred van der Poorten, 「A proof that Euler missed」**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。生動地記述阿佩里的證明及其所得到的迴響。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。一部無理數的歷史，為一般數學讀者而寫。

我們學到了甚麼

我們由芝諾（Zeno）說起，並提出了關於無窮過程的三個問題：說無窮過程有答案，究竟是甚麼意思？怎樣證明它們確實有答案？它們又以多快的速度到達答案？做過九道 STEP 題目之後，讓我們看看自己走了多遠。

1. 說無窮過程有答案，是甚麼意思？

在 Section 2.1 中，我們學會了這套語言。凡是描述數列（sequence）長遠表現的命題，都具有這樣的形式：「存在某一點 m，使得對所有 $n \geq m$...」。要證明它，就要把 m 找出來；要否定它，就要證明任何人提出的 m 都不管用。極限（limit）的定義只是在最前面多加一個量詞（quantifier）：「對任意容許誤差 $\varepsilon > 0$」。有了這個定義，芝諾悖論便迎刃而解：無論你要求的容許誤差多小，$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ 由某一點起，與 1 的距離都在這個誤差之內，而「和等於 1」的全部意思，不過如此。

這套語言也能防止我們說出毫無意義的話。在 Section 2.2 中，「設 x 等於那個無窮表達式」這種取巧的論證，為黃金比（golden ratio）給出了正確答案，但那只是因為我們能夠另行證明極限存在。把同一個論證用在 $1 - 1 + 1 - \cdots$ 上，得出的答案卻毫無意義。

2. 不知道極限是甚麼，怎樣證明收斂？

本章大部分小節所用的，都不外乎以下幾種工具。

- **單調有界。**遞增而有上界的數列必定收斂（converge）（Section 2.2、Section 2.6）。各項皆為正數的部分和（partial sum）亦然（Section 2.3）。到了大學，你會發現這其實是關於實數本身的一個命題：它就是實數的*完備性*（completeness）。
- **比較。**一個正項級數（series）如果比某個收斂的級數小，它就收斂；如果比某個發散（diverge）的級數大，它就發散。把各項分組成段之後，比較起來便很容易，由此可見調和級數（harmonic series）發散，而 Kempner 那個刪減了部分項的版本卻收斂（Section 2.3）。
- **夾逼。**把要研究的量夾在兩個較簡單而極限相同的量之間。我們就是這樣證明 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$（Section 2.4），並嚴格地計算出算術幾何平均（AGM）積分的值（Section 2.6）。

- **有限階段的精確公式。**在 Section 2.5 和 Section 2.8 中，我們利用裂項相消（telescoping）求出 n 步之後的精確表達式，到了最後一刻才讓 $n \to \infty$。

一旦知道極限存在，往往只需在遞推關係（recurrence）中「讓 $n \to \infty$」便可求出極限，例如黃金比的 $L = (2L+1)/(L+1)$。但次序十分重要：先證存在，後求數值。

3. 有多快？

在這方面，本章有些出人意表的發現。韋達（Viète）乘積（Section 2.5）每多乘一個因子，大約多得 0.6 個小數位。Section 2.7 中計算 $\sqrt{2}$ 的簡單方法，每一步大約多得 0.8 個數位。牛頓法（Newton's method）和 AGM（Section 2.6）則每一步都令正確數位的數目*倍增*：牛頓法只需十步，便可得出 $\sqrt{2}$ 的 700 多個數位。差別在於誤差遞推關係的形式：一種是「新誤差 $\approx$ 常數 $\times$ 舊誤差」（線性），另一種是「新誤差 $\approx$ 常數 $\times$（舊誤差）^{2}」（二次）。而在 Section 2.8 中，我們見到了另一個極端：由僅僅大於 2 的數出發，映射（map）$x \mapsto x^2 - 2$ 會以比指數增長還要快的速度把數推開；而在 $[-2, 2]$ 之內，它會把微小的誤差不斷放大，直至完全無法預測。

速度對理論同樣重要。Section 2.9 中的積分所產生的分數，趨近 e 的速度極快，足以證明 e 是無理數（irrational）：任何分數 p/q 都不可能被其他分數以這樣快的速度逼近。

4. 分析學的工具箱

方法	你在哪裏用過
找出量詞所要求的對象與否定量詞	「最終」（2.1）
單調有界數列	黃金比（2.2）；AGM（2.6）
比較與凝聚（condensation）	調和級數與 Kempner 級數（2.3）
夾逼	$\pi^2/6$（2.4）；AGM 積分（2.6）
根的對稱函數（symmetric function）	$\cot^2$ 值之和（2.4）
裂項相消的和與積	韋達（2.5）；$x^2 - 2$（2.8）
不變量（invariant）	AGM 積分（2.6）
誤差遞推關係	線性收斂與二次收斂（2.7）
以變數代換簡化映射	$a = t + 1/t$、$a = 2\cos\theta$（2.8）
細小但非零的整數組合	逼近 e（2.9）

留意這些工具當中，有多少附帶着一條「你可以直接使用的定理」。STEP 經常直接把單調收斂定理（monotone convergence theorem）交給你，或者叫你假設極限存在。到了大學，你要由實數的公理（axiom）出發證明這些定理，而且當一個論證不動聲色地假設了極限存在，你也要自己察覺得到。閱讀解答的時候，不妨養成一個很好的習慣，問問自己：*究竟在哪一步取了極限？這一步有沒有根據？*

下一步

本章的想法貫穿全書其餘部分。

- 不動點（fixed point）和蛛網圖（cobweb diagram）會在 Section 8.7 再次出現，在那裏，一個混沌（chaotic）映射原來有精確解。
- 調和數（harmonic number）$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 會在 Section 9.11 的概率和 Section 11.12 的力學中出現。
- π 另一次在極限中現身，是在 Section 12.23，這次來自概率。
- 對極限的審慎態度是第 3 章的主題，該章以 Section 3.1 開始：一些看似正確、其實不然的論證。

如果你想在上大學之前再進一步

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***：大學一年級的分析學是怎樣的，又該如何應付。
- **David Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis***：循歷史脈絡講授分析學，由那些迫使數學家不得不嚴謹起來的難題說起。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）：由一位劍橋的分析學家執筆，正是為本書這樣的讀者而寫。
- **Julian Havil, *Gamma*** 和 **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***：本章許多級數背後的故事。

芝諾認為無窮令運動變得不可能。數學家花了兩千年才回應他，而答案原來是人類發現過最強而有力的想法之一：一種能夠精確地描述永無止境的過程的方法。這套語言最初的幾個詞語，你現在已經認識了。到了分析學，你便會學懂怎樣流利地說這套語言。

延伸練習答案

以下只是簡短的答案和提示，並非完整解答：這裏只給出結果和關鍵步驟，方便你核對自己的做法。請先認真做過每一道練習，然後才翻看。

2.1 「最終」是甚麼意思

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$ 的各項均為非負，所以 $(1+x)^n \geq 1 + nx > nx$。設 $y = 1 + x$，則只要 $n > K/(y-1)$，便有 $y^n > n(y-1) > K$。利用下一項，$y^n > \binom{n}{2}(y-1)^2$，所以只要 $n > 1 + 2K/(y-1)^2$，便有 $y^n/n > \frac{1}{2}(n-1)(y-1)^2 > K$。

2. 若當 $n \geq m_1$ 時 $s_n \leq t_n$，而當 $n \geq m_2$ 時 $t_n \leq s_n$，則當 $n \geq \max(m_1, m_2)$ 時 $s_n = t_n$。

3. 例如：當 n 為偶數時 $s_n = n + 0.6$，當 n 為奇數時 $s_n = n$；而當 n 為奇數時 $t_n = n + 0.6$，當 n 為偶數時 $t_n = n$。兩個數列（sequence）都是遞增的，而且各自都有無限多次大於對方。

4. 當 $n \geq 4$ 時 $2^n \leq n!$（用歸納法（induction）：$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1)\,n!$）。至於 $n^{10} \leq 2^n$，這個不等式對由 2 至 58 的每一個 n 都不成立，而對所有 $n \geq 59$ 都成立，所以最小的 m 是 59。

2.2 作為極限的黃金比例

1. 用歸納法：$u_1 = 1 = F_2/F_1$，而若 $u_n = F_{n+1}/F_n$，則 $u_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$。

2. 由於 $\varphi - 1 = 1/\varphi$，$u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{u_n - \varphi}{\varphi u_n}$。因為 $u_n \geq 1$，所以 $|u_{n+1} - \varphi| \leq |u_n - \varphi|/\varphi$，又 $|u_1 - \varphi| < 1$，故 $|u_n - \varphi| \leq \varphi^{-(n-1)}$。

3. $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 滿足 $\psi^2 = \psi + 1$，所以 $1 + 1/\psi = \psi$。倒推回去，$u_{n-1} = \frac{1}{u_n - 1}$：由 0 出發，得到 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots$，即對某個 $k \geq 1$ 有 $u_1 = -F_{k-1}/F_k$。這些數值趨近 ψ。

4. 不動點（fixed point）滿足 $v = 1 + \frac{1}{1+v}$，即 $v^2 = 2$。誤差每次乘以 $-\frac{1}{(1+v_n)(1+\sqrt{2})}$，

其大小不超過 $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$，所以 $v_n \to \sqrt{2}$。並且 $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$。

2.3 一個發散級數與它的收斂近親

1. 由 $\ln N + 0.5772 = 10$ 得 $N \approx 12\,400$；要超過 100，大約需要 $e^{99.4} \approx 1.5 \times 10^{43}$ 項。

2. 取 $k = 2$，第 n 組之和不超過 $2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$，所以總和不超過 $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} = 2$。把 $1 + \frac14 + \frac19$ 準確加起來，再以 $\frac14 + \frac18 + \cdots = \frac12$ 作為由 $r = 4$ 起各組的上界，便得到約 1.86。（真確值是 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$。）

3. 對於 $1/(r \ln r)$，由 2^n 至 $2^{n+1} - 1$ 的一組之和至少是 $\frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)\ln 2} = \frac{1}{2(n+1)\ln 2}$，而這些數之和的表現與調和級數（harmonic series）相同：級數發散（divergence）。對於 $1/(r(\ln r)^2)$，該組之和不超過 $\frac{1}{n^2(\ln 2)^2}$，而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收斂（converges）。

4. 可用的數字：首位數字有 7 個選擇，其餘每一位各有 8 個選擇，所以符合條件的 d 位數最多有 $7 \cdot 8^{d-1}$ 個，而每個都至少是 10^{d-1}。總和不超過 $\sum_{d\ge 1} 7(0.8)^{d-1} = \frac{7}{1-0.8} = 35$。

2.4 $\pi^2/6$

1. 各個 $\tan^2 = 1/\cot^2$ 的值是倒序多項式 $\sum_j (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} y^j$ 的根（roots），其根之和為 $\binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1)$。然後由 $\operatorname{cosec}^2 = 1 + \cot^2$ 得 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$。

2. 偶數項之和為 $\frac14 \sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}$，所以奇數項之和為 $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$。

3. 這些根滿足 $e_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$ 和 $e_2 = \binom{2n+1}{5}\big/\binom{2n+1}{1}$，由此得 $\sum \cot^4 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$。利用 $\cot^4\theta < \theta^{-4} < (1+\cot^2\theta)^2$ 作夾逼（squeezing），再令 $n \to \infty$，便得到 $\frac{\pi^4}{90}$。

4. 由下界得 $\sum_{m\le n} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$，所以誤差小於 $\frac{\pi^2(6n+1)}{6(2n+1)^2} < \frac{\pi^2}{4n}$。這保證了當 $n \ge 2468$ 時準確度達到 0.001；事實上 $n \approx 1000$ 已經足夠。

2.5 韋達乘積

1. 反覆使用 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$：乘積會逐項相消（telescopes）。令 $n \to \infty$（於是 $2^n \sin(\alpha/2^n) \to \alpha$），並取 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，再利用 $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac12}$ 和 $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac12 + \frac12\cos\theta}$。

2. $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt3}{2\pi} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cdots$，其中 $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2}$，而 $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2} = \frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$。

3. 取 8 個因子得 3.14157，四捨五入後是 3.1416。取 n 個因子後，誤差約為 $\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}}$，因為被略去的因子是 $\cos\frac{\pi}{2^{j+1}} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$：每多一個因子，誤差約縮小至原來的 4 分之一，而 $\log_{10} 4 \approx 0.6$。

4. 設 $x = \ln a$，同樣的論證給出

$$\frac{a-1}{\ln a} = \prod_{j\geq 1} \frac{1 + a^{1/2^j}}{2},$$

所以 $\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\prod_{j\geq 1}\frac{1+3^{1/2^j}}{2}$。取七個因子得 0.906，四捨五入後是 0.91（真確值是 0.9102）。這裏的因子趨近 1 的方式如同 $1 + \frac{\ln 3}{2^{j+1}}$，所以每多一個因子只能把誤差減半（約 0.3 位數字）；而韋達（Viète）的因子趨近 1 的方式如同 $1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$，每次把誤差縮小至四分之一。

2.6 算術幾何平均

1. $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$，而 $(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n})^2 \geq 4y_n \geq 4y_0$。

2. $M(2,1) = 1.456791$；三步之後，x_3 與 y_3 已經有七位小數相同。

3. 迭代（iteration）的每一步都按 λ 的比例縮放，所以 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$。在積分中代入 $x = \lambda u$，得 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$。$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2M}$ 的兩邊都按 λ^{-1} 的比例縮放。

4. $M(1, \cos 30^\circ) \approx 0.9318$，所以週期變長至原來的 1.073 倍：即長了約 7.32%。

2.7 六位還是六百位

1. $(p^2+2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = (p^2-2q^2)^2 = 1$；並且 $577^2 - 2\times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = 1$。

2. $y_{n+1} = \frac{2y_n^3+2}{3y_n^2}$，而 $y_{n+1} - \alpha = \frac{2y^3 - 3\alpha y^2 + \alpha^3}{3y^2} = \frac{(y-\alpha)^2(2y+\alpha)}{3y^2}$。若 $y > \alpha$，則 $\frac{2y+\alpha}{3y^2} < \frac{3y}{3y^2} = \frac{1}{y} < \frac{1}{\alpha}$。

3. $y - \frac{1/y - a}{-1/y^2} = y + y - ay^2 = y(2-ay)$，而 $1 - ay(2-ay) = (1-ay)^2$。

4. $y - \frac{y^{1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}} = y - 3y = -2y$。誤差公式要求在根的附近 f′ 不等於零，而且 f″ 有界（bounded）；但這裏 f′ 在 0 處是無限大。

2.8 平方再減二

1. $(2\cos u)^2 - 2 = 2\cos 2u$，所以由歸納法得 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$。$x_3 = a$ 需要 $4\theta \equiv \pm\theta$：即 3θ 或 $5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$。排除 $x_2 = a$ 的情況（不動點 $a = 2$ 和 $a = -1$）

後，剩下 $\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$：即 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，也就是一個 2-循環（cycle）的兩個點。

2. 對於 M_5，數列是 4，14，$194 \equiv 8$，$62 \equiv 0$：是質數（prime）。對於 M_{11}，數列是 4，14，194，788，701，119，1877，240，282，$1736 \neq 0$：是合成數（composite），而事實上 $2047 = 23 \times 89$。

3. 由 $A = t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$ 得 $t = 2$ 和 $a = \frac{5}{2}$。於是 $x_2 = \frac{17}{4}$，$y_1 = \frac{Ax_1}{x_2} = \frac{15}{17}$，而 $\frac{\sqrt{x_2^2-4}}{x_2} = \frac{15/4}{17/4} = \frac{15}{17}$。

4. $x_k = t^{2^{k-1}} + t^{-2^{k-1}}$，而把 $x_1 \cdots x_n$ 乘以 $t - t^{-1}$ 後，逐項相消得 $t^{2^n} - t^{-2^n}$。所求之和變成 $(t - t^{-1}) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{t^{2^n}-1} - \frac{1}{t^{2^{n+1}}-1} \right) = \frac{t-t^{-1}}{t^2-1} = \frac{1}{t}$。當 $a = 3$ 時，$t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 而 $\frac{1}{t} \approx 0.3820$；級數 $\frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{987} + \cdots$ 與此吻合。

2.9 逐步逼近 e 的分數

1. $T_0 = e - 1$，$T_1 = 3 - e$，$T_2 = 7e - 19$，$T_3 = 193 - 71e$，$T_4 = 1001e - 2721$，由此得到 $\frac{19}{7}$，$\frac{193}{71}$，$\frac{2721}{1001}$。由於 $b_n = b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}$，而（按歸納法）$b_{n-1}$ 與 b_{n-2} 異號，所以 b_n 與 b_{n-2} 同號。

2. $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$，所以 $T_n < \frac{e}{4^n n!}$；$-a_n/b_n$ 的誤差是 $T_n/|b_n|$，現在改進了 4^n 倍。

3. 若 $e = \frac{p}{q}$，則 $qT_n = qa_n + pb_n$ 是整數。由 $T_n > 0$ 可知它是正整數，所以至少是 1；但當 n 足夠大時，$qT_n < \frac{qe}{n!} < 1$。

4. 分部積分（integration by parts）兩次（邊界項為零），得 $U_n = \frac{1}{4}\big(U_{n-2} - 2(2n-1)U_{n-1}\big)$，其中 $U_0 = \frac{e^2-1}{2}$ 和 $U_1 = \frac{1}{2}$。所以 $2^{2n+1}U_n = A_n + B_n e^2$，其中 A_n，B_n 為整數，而 $0 < U_n < \frac{e^2}{4^n n!}$。若 $e^2 = \frac{p}{q}$，則 $q2^{2n+1}U_n$ 是一個小於 $\frac{2qe^2}{n!}$ 的正整數，當 n 足夠大時這是不可能的。所以這個論證確實證明了 e^2 是無理數（irrational）。

Beyond STEP

STEP 是大多數中學生一生中應考過最艱深的數學考試，也是最出色的考試之一：題目簡短、陌生而深刻，當中最精彩的，其實是喬裝了的大學數學小品。

本書精選最有趣的 STEP 試題，由 1987 年首次開考之前的樣本試卷（specimen papers），到 2025 年的試卷，並以每一道題目作為一扇門。每道題目都會仔細解答，沿途提出優秀學生會問的問題，然後帶你穿過這扇門：這個想法從何而來，到了大學會演變成甚麼，以及接下來該讀些甚麼。

本書為正在準備 STEP、有天分又有志投身數學的學生而寫。他們想要的不止是模擬試卷：他們想開始像數學系本科生那樣思考，並一探前方有甚麼正等着自己。

- 共 13 章，涵蓋純數學（pure mathematics）、力學（mechanics）、概率（probability）與統計（statistics）
- 136 道 STEP 歷屆試題，每題均附引導式解答
- 每道題目背後的大學數學
- 附答案的延伸練習，以及延伸閱讀

全書共 13 章，本冊為第 2 章。 全書各章及所有詳細解答均可免費閱讀、下載及分享，網址為

beyondstep.keithmcnulty.org

文字內容已貢獻予公有領域（CC0 1.0）。STEP 試題 © Cambridge University Press & Assessment。