Beyond STEP

數學符號

數學寫作往往以寥寥幾個記號承載豐富的意思，而大學講師所用的許多符號，在中學課本裏甚少出現。下面各表按主題列出本書用到的符號，並說明每個符號的含義和讀法。入讀大學後不出幾個星期，其中大部分都會變得習以為常；在此之前，這裏可供你隨時查閱。

有兩項慣例值得一開始就知道。第一，本書依照 STEP 的做法，把某些具有固定含義的字母印成正體而非斜體：e 表示自然對數的底，i 表示 $\sqrt{-1}$，dy/dx 中的 d，以及函數的名稱，例如 f(x) 和 P(A)。斜體字母則表示變數。第二，同一個符號在不同場合有時會有不同的意思；$\equiv$ 和 $\sim$ 是最常見的例子，表中會在相應位置指出。

邏輯與證明

符號	含義	例子或讀法
$P \Rightarrow Q$	P 蘊含（implies）Q：若 P 成立，則 Q 亦成立	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$；「$P$ 蘊含 Q」
$P \Leftarrow Q$	P 由 Q 所蘊含	「只要 Q 成立，P 就成立」
$P \iff Q$	P 當且僅當（if and only if）Q：兩者互相蘊含	$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$；亦寫作「iff」
$\forall$	對所有、對每一個	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
$\exists$	存在	$\exists n \in \mathbb{Z}$ 使得 $n^2 = 9$
$\neg P$	非 P，即 P 的否定（negation）	「$\forall x,\ P(x)$」的否定是「$\exists x$ 使得 $\neg P(x)$」
$:=$	定義為	f$(x) := x^2 + 1$
■	證明完畢；亦寫作 QED	源自拉丁文 *quod erat demonstrandum*，意即「這就是所要證明的」

集合與數系

符號	含義	例子或讀法
$\{\dots\}$	由所列元素組成的集合（set）	$\{1,2,3\}$
$\{x : \dots\}$	所有滿足 … 的 x 所組成的集合；亦寫作 $\{x \mid \dots\}$	$\{x : x^2 < 2\}$；「滿足 $x^2 < 2$ 的 x 所組成的集合」
$x \in A$	x 是 A 的元素（element）	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$；「$\sqrt{2}$ 屬於 $\mathbb{R}$」
$x \notin A$	x 不是 A 的元素	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
$A \subseteq B$	A 是 B 的子集（subset）：A 的每個元素都在 B 之內	$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$
$A \cup B$	併集（union）：屬於 A 或 B（或同時屬於兩者）的元素	$\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$
$A \cap B$	交集（intersection）：同時屬於 A 和 B 的元素	$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
$A \setminus B$	屬於 A 但不屬於 B 的元素	$\{1,2,3\} \setminus \{2\} = \{1,3\}$
A'	補集（complement）：所有不屬於 A 的元素	亦寫作 A^{c} 或 $\bar{A}$
$\varnothing$	空集（empty set），不含任何元素	$\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \varnothing$
$\lvert A \rvert$	有限集 A 的元素個數	$\lvert\{a,b,c\}\rvert = 3$
$A \times B$	所有數對 (a,b) 所組成的集合，其中 $a \in A$，$b \in B$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 就是平面，亦寫作 $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{N}$	自然數（natural numbers）$1,2,3,\dots$	有些作者把 0 也算在內
$\mathbb{Z}$	整數（integers）$\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$	源自德文 *Zahlen*，意即「數」
$\mathbb{Q}$	有理數（rational numbers），即分數	源自 *quotient* 一字
$\mathbb{R}$	實數（real numbers）	
$\mathbb{C}$	複數（complex numbers）	
$\mathbb{H}$	四元數（quaternions）	以哈密頓（Hamilton）命名（Section 6.7）
$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$	形如 $a + b\mathrm{i}$ 的數，其中 $a, b \in \mathbb{Z}$	高斯整數（Gaussian integers）（Section 1.6）
$[a,b]$	閉區間（closed interval）：$a \le x \le b$	包含端點
(a,b)	開區間（open interval）：$a < x < b$	不包含端點；亦可表示數對或點

數、整除性與近似

符號	含義	例子或讀法
$a \mid b$	a 整除（divides）b：b 是 a 的整數倍	$3 \mid 12$；「3 整除 12」
$a \nmid b$	a 不整除 b	$5 \nmid 12$
$a \equiv b \pmod{n}$	a 與 b 除以 n 所得的餘數相同	$17 \equiv 2 \pmod{5}$；「17 與 2 模 5 同餘（congruent）」
$\equiv$	（不帶模時）恆等於：對所有值都成立	$(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$
$\lfloor x \rfloor$	下取整（floor）：$\le x$ 的最大整數	$\lfloor 3.7 \rfloor = 3$，$\lfloor -3.7 \rfloor = -4$
$\lceil x \rceil$	上取整（ceiling）：$\ge x$ 的最小整數	$\lceil 3.2 \rceil = 4$
$n!$	n 的階乘（factorial），即 $1 \times 2 \times \cdots \times n$	按慣例 $0! = 1$
$\binom{n}{r}$	二項式係數（binomial coefficient）$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$	讀作「n choose r」；亦寫作 ${}^{n}\mathrm{C}_{r}$
$\approx$	約等於	$\pi \approx 3.1416$
$\sim$	漸近於（asymptotic to）：兩者之比趨向 1	$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$（但另見概率部分）
$\propto$	與……成正比	$v \propto 1/d$
$\pm, \mp$	正負；負正	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
$0.\overline{01}$	循環數字	$0.\overline{01} = 0.010101\ldots$

函數

符號	含義	例子或讀法
$\mathrm{f} : A \to B$	f 是由集合 A 到集合 B 的函數（function）	$\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ldots$	x 被送到 ...	$x \mapsto x^2 - 2$；「x 映射到 $x^2 - 2$」
$\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$	複合（composition）：先作 g，再作 f	$(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(x) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$
f^{-1}	f 的反函數（inverse function）	並非 $1/\mathrm{f}$
f^n	在本書中，通常指把 f 施行 n 次	$\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$；但 $\sin^2 x$ 表示 $(\sin x)^2$
$\lvert x \rvert$	模（modulus），或絕對值	$\lvert -3 \rvert = 3$
$\exp x$	指數函數（exponential function）e^x	
$\ln x$	自然對數（natural logarithm），以 e 為底	在大學裏常寫作 $\log x$
sec, cosec, cot	$1/\cos$, $1/\sin$, $1/\tan$	
arcsin, arccos, arctan	反三角函數	亦寫作 $\sin^{-1}$ 等
sinh, cosh, tanh	雙曲函數（hyperbolic functions）：$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$，$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$，$\tanh = \sinh / \cosh$	讀作「shine」（或「sinch」）、「cosh」和「than」（或「tanch」）
artanh	tanh 的反函數	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
max, min	當中最大者、最小者	$\max(3, 7) = 7$
$\Gamma(x)$	伽瑪函數（gamma function）	$\Gamma(n+1) = n!$（Section 4.4）

求和、極限與微積分

符號	含義	例子或讀法
$\sum$	求和	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$
$\prod$	求積	$\prod_{k=1}^{n} k = n!$
∞	無窮大：並不是一個數，而是「沒有界限」的簡寫	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$x \to a$	x 趨向 a	當 $n \to \infty$ 時，$\frac{1}{n} \to 0$
$\lim$	極限（limit）	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$f'(x)$, $f''(x)$	一階及二階導數（derivative）	讀作「f dash」或「f prime」
$\dot{x}$, $\ddot{x}$	對時間的導數	$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$；讀作「x dot」、「x double dot」
$\frac{\partial f}{\partial x}$	偏導數（partial derivative）：對 x 求導，其他變數保持不變	讀作「partial f by partial x」
$\int_a^b$	由 a 到 b 的定積分（definite integral）	
$\oint$	沿閉合迴路的積分	$\oint p\,dq$（Section 10.4）
δx, Δx	x 的微小變化；x 的變化	
ε, δ	分析學中慣常用來表示細小正數的記號	「對每個 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得 ...」

複數

符號	含義	例子或讀法
i	-1 的一個平方根	工程師寫作 j
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	實部與虛部	若 $z = 3 + 4\mathrm{i}$，則 $\operatorname{Re} z = 3$，$\operatorname{Im} z = 4$
z^*, $\bar{z}$	共軛複數（complex conjugate）	$(3+4\mathrm{i})^* = 3 - 4\mathrm{i}$；兩種記法都有人使用
$\lvert z \rvert$	模：與 0 的距離	$\lvert 3 + 4\mathrm{i} \rvert = 5$
$\arg z$	輻角（argument）：由正實軸量起的角	$\arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$
ω	慣常表示 1 的一個複立方根（cube root of unity）	$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$，$1 + \omega + \omega^2 = 0$

向量與矩陣

符號	含義	例子或讀法
$\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}$	向量（vector）；由 A 到 B 的向量	手寫時作 $\underline{a}$
$\hat{\mathbf{n}}$	單位向量（unit vector），長度為 1	讀作「n hat」
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	$\mathbf{a}$ 的長度（大小）	
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	純量積（scalar product），又稱點積（dot product）	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta$
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	向量積（vector product），又稱叉積（cross product）	同時垂直於 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$
$\mathbf{M}$	矩陣（matrix）	
$\mathbf{I}$	單位矩陣（identity matrix）	對每個 $\mathbf{v}$ 都有 $\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}$
$\mathbf{M}^{-1}$	逆矩陣（inverse matrix）	$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$
$\det\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$ 的行列式（determinant）	$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
$\operatorname{tr}\mathbf{M}$	跡（trace）：對角線上各元素之和	$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$
λ	慣常表示特徵值（eigenvalue）	$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

概率與統計

符號	含義	例子或讀法
$\mathrm{P}(A)$	事件 A 的概率（probability）	
$\mathrm{P}(A \mid B)$	已知 B 發生時 A 的概率	$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$；讀作「$A$ given B」
$\mathrm{E}(X)$	X 的期望值（expectation），即平均值	亦寫作 μ
$\mathrm{Var}(X)$	X 的方差（variance）	$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$；亦寫作 σ^2
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	協方差（covariance）	$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
$\mathrm{Corr}(X, Y)$	相關係數（correlation）	$\mathrm{Cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$；亦寫作 ρ
$X \sim \ldots$	X 的分佈為 ...	$X \sim \mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$；「$X$ 的分佈為 ...」
$\mathrm{B}(n, p)$	二項分佈（binomial distribution）	n 次試驗中成功的次數
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	正態分佈（normal distribution），平均值為 μ，方差為 σ^2	
$\mathrm{f}(x), \mathrm{F}(x)$	概率密度函數（probability density function）；累積分佈函數（cumulative distribution function）	$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$
$\mathrm{G}(t)$	概率生成函數（probability generating function）	$\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X)$
$\mathrm{M}_X(\theta)$	矩生成函數（moment generating function）	$\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$
$\bar{x}$	樣本的平均值	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
$\hat{\theta}$	未知量 θ 的估計值	讀作「theta hat」

希臘字母

希臘字母在數學中隨處可見，而且往往有約定俗成的含義。下表列出各字母的小寫和大寫形式（與羅馬字母外形相同的大寫字母，例如 alpha 的大寫 A，不會用作獨立的符號，故此從略）、名稱，以及一些常見用途。

字母	名稱	常見用途
α	alpha	角；方程的根
β	beta	角；方程的根；貝塔函數（beta function）
γ, Γ	gamma	歐拉（Euler）常數 $\gamma \approx 0.5772$；伽瑪函數 Γ；在相對論中，$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
δ, Δ	delta	微小的量；Δ 表示變化，或表示三角形、判別式（discriminant）
ε, ϵ	epsilon	微小的正數量；在力學中表示相位角
ζ	zeta	黎曼（Riemann）zeta 函數，當 $s > 1$ 時 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$（以更高深的方法可推廣至 $s = 1$ 以外的其他值）
η	eta	效率；微小的量
θ, Θ	theta	角；統計學中的未知參數
ι	iota	甚少使用
κ	kappa	曲率；常數
λ, Λ	lambda	特徵值；參數，例如泊松（Poisson）分佈的率；波長
μ	mu	平均值；摩擦係數
ν	nu	頻率
ξ, Ξ	xi	變數或隨機量
π, Π	pi	$\pi \approx 3.14159$；Π 表示求積
ρ	rho	密度；相關係數；與原點的距離
σ, Σ	sigma	標準差；Σ 表示求和
τ	tau	時間；力矩
υ, Υ	upsilon	甚少使用
ϕ, φ, Φ	phi	角；黃金比 $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$；快度（rapidity）；$\Phi$ 表示標準正態分佈函數
χ	chi	χ^2（卡方，chi-squared）分佈
ψ, Ψ	psi	量子力學中的波函數
ω, Ω	omega	角速度或角頻率；1 的立方根；Ω 表示樣本空間

力學

符號	含義	例子或讀法
g	重力加速度	在地球表面約為 $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
G	萬有引力常數	兩個質量之間的力為 Gm_1m_2/r^2
e	恢復係數（coefficient of restitution）（以斜體印刷，切勿與 e 混淆）	沿碰撞線方向，分離速率 $= e\times$ 接近速率
ω	角速度；角頻率	簡諧運動（simple harmonic motion）中 $\ddot{x} = -\omega^2 x$
I	轉動慣量（moment of inertia）	轉動動能 $\frac{1}{2}I\omega^2$（Section 11.7）
c	光速	約為 $3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\hbar$	普朗克（Planck）常數除以 2π	讀作「h bar」（Section 8.6）