引言

> 我無法靠這本書教會你數學，但我相信，只要你肯下苦功，一點一點地鑿開這些題目，終會讓你內在的那位數學家顯露出來。
>
> — Stephen Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*

這是一本關於難題的書，也是一本關於難題背後有甚麼的書。全書 136 節，每一節都由一道 STEP 歷屆試題開始。但題目只是入口。幾乎每一道好的 STEP 題目背後，都有一片你將會在大學裏正式學到的數學，而本書的目的，就是帶你穿過這道門，讓你看看門後的風景。

STEP 是甚麼，為何存在

STEP，即 Sixth Term Examination Paper，是一組在中學最後一年夏天應考的數學考試。它由劍橋大學（University of Cambridge）於 1987 年設立，作用是協助決定誰適合到那裏修讀數學：劍橋數學系發出的取錄通知，幾乎全部以 STEP 成績為條件，多年來其他大學亦有採用，當中以華威大學（Warwick）最為人熟知。起初 STEP 設有多個科目的試卷，但到了 2001 年，就只剩下數學一科。在它大部分的歷史裏，考試共有三份試卷，即 I、II 和 III；Paper I 最後一次開考是在 2019 年，現時考生應考 Paper II 和 Paper III。這項考試多年來由劍橋大學考評部（Cambridge Assessment）主辦，自 2024 年起改由 OCR 負責。

STEP 試卷與學校的考試截然不同。卷上不是十道必答的短題，而是十多道長題，考生從中選答六題，而一位實力強的考生只要在四題上取得實質進展，成績已經非常好。題目不會告訴你每一部分佔多少分，也很少要你做一些你練習過的東西。它們要你把已經懂得的數學，用在全新的地方。

對 STEP 的認識無人能及的 Stephen Siklos，曾這樣形容它的用途。它是一道門檻：事實證明，STEP 的成績能相當準確地預示學生在大學數學學位課程中的表現（據他所述，STEP 名次與劍橋一年級考試名次的相關係數達 0.63，以這類數據的標準而言非常高）。它是一種準備：STEP 所獎勵的思考方式，正是大學本科數學的思考方式。它也是對動力的考驗：準備 STEP 要下真功夫，一個不願付出這份努力的學生，大概也不會享受要求嚴格的數學學位課程。

Stephen Siklos

談 STEP 而不談 Stephen Siklos，是不可能的。他是劍橋的數學家，曾是霍金（Stephen Hawking）的研究生，研究早期宇宙和引力波的數學，在應用數學及理論物理系任講師，其後出任耶穌學院（Jesus College）的高級導師（Senior Tutor），再擔任該學院的 President。1987 年 STEP 數學科創辦時，他出任首席考官（Senior Examiner），並擔任此職三十二年，直至 2019 年 8 月離世為止。這些年間，他草擬題目，「把別人的題目修整成形」（這是他自己的說法，他說這件事長久以來都是他興趣和樂趣的來源），逐一審閱每份試卷，並督導評卷工作。他也是 STEP 復活節學校（STEP Easter School）和 STEP 支援計劃（STEP Support Programme）背後的推手，這兩個項目為學校無法提供協助的學生免費提供幫助。有一篇訃聞說，在令劍橋數學入學試向不同學校背景的學生開放這件事上，沒有人比他做得更多。

他的著作 *Advanced Problems in Mathematics: Preparing for University*（《高等數學難題：為大學作準備》）由 Open Book Publishers 在網上免費出版，至今仍是認識 STEP 的最佳入門書，我極力推薦。他在書中寫下的兩點，塑造了本書的面貌。第一點是他對甚麼才算一道好的 STEP 題目的看法：題目的第一部分向你展示一個陌生的想法，其後的部分則要你在更難的情境中再次運用它，以證明你確實明白；又或者題目的答案取決於一個要你自己去發現的參數；又或者題目由特殊情況開始，以一般結果作結。正是這類題目才會引領你到達某處，而本書的題目大多屬於這幾類。第二點是他堅持解答應該是「跳板，而不是羽毛牀」。一份解答，如果你未曾先自己與題目搏鬥過就去讀，是學不到任何東西的。

我與 STEP 的相遇

我第一次接觸 STEP 是在 1990 年代初，當時我的數學老師給了我幾份試卷，作為額外的挑戰。我做這些試卷是為了樂趣，而不是為了取錄資格，也從未真正應考，但我記得那些試卷難得出奇：題目看似與我學過的任何東西都毫無關係，一道題就寫滿一頁，我能夠起步，卻很少能做完。我也記得，在終於做通了的那些時刻，我感到自己看見了一些學校數學從未讓我看見的東西。

許多年後，我從另一邊回到 STEP：協助學生準備應考。與他們一起做過數百道題目之後，我對這些試卷有了不同的看法。並非每一道題都是瑰寶。坦白說，有些題目只是漫長的耐力測試：一整頁要小心處理的代數，一段要求很高卻屬例行公事的計算，到最後既沒有多少洞見，也沒有多少樂趣。耐力固然重要，大學數學也需要它，但令 STEP 與別不同的並不是這些題目。

令它與別不同的是，在 1987 年以來所出的 1,500 多道題目之中，散落着數百道真正優美的題目。要解釋我的意思，最好的方法就是給你看幾道。

幾顆瑰寶

以下是你稍後會在書中遇到的七道題目，我特意選來展示本書涵蓋的範圍：兩道來自組合數學（combinatorics），兩道來自動力系統（dynamical systems），兩道來自力學（mechanics），一道來自概率（probability）。每一道都由你能想像得到的東西開始，以你可能難以置信的結果作結，並通往一片在大學裏會認真研究的數學。

藏在混亂中的秩序。在紙上畫六個點，把每兩點用一條線連起來，合共十五條線，每條線隨你喜歡塗成金色或銀色。現在試試避免出現三邊同色的三角形。你每一次都會失敗。五個點是做得到的（把五邊形的邊塗成金色，五條對角線塗成銀色），但六個點就不可能，無論你的塗法多麼巧妙。1989 年 STEP I 的一道題目要你證明這件事，而且只給一個提示：看看從其中一點出發的五條線。其中三條必定同色，由此出發，證明只需寥寥數行。線的塗色方法共有 $2^{15} = 32\,768$ 種，而這個論證一次過處理了全部情況，連一個個案也不用檢查。

這個結果是拉姆齊定理（Ramsey's theorem）最小的情況。這條定理由拉姆齊（Frank Ramsey）於 1928 年證明，它說的是：徹底的無序是不可能的；任何足夠大的結構，無論拼湊得多麼雜亂無章，都必定包含一小塊完美的秩序。多大才算「足夠大」？要保證有四個點彼此全以同一顏色相連，你需要 18 個點，這是 1955 年證明的事實。至於五個點，沒有人知道：答案介乎 43 與 46 之間，而上界到 2024 年才獲證明。艾狄胥（Paul Erdős）曾開玩笑說，如果外星人威脅要毀滅地球，除非我們說出這個數，我們就應該動員所有電腦和數學家去找；但如果他們問的是六個點的答案，我們就應該設法消滅外星人。你會在大學的組合數學或圖論（graph theory）課程中遇到拉姆齊理論，而推動這個 STEP 證明的鴿巢原理（pigeonhole principle），則幾乎在你修讀的每一門課都會出現（Section 9.2）。

奇怪的骰子。擲兩顆普通骰子，總和為 7 的機會最大，總和為 2 和 12 的機會最小，各總和的擲法數目依次為大家熟悉的 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$。用正整數為一對骰子編號，還有沒有別的方法，使每個總和出現的機會完全相同？看來不大可能，但這樣的方法恰好有一個：一顆骰子寫上 $1, 2, 2, 3, 3, 4$，另一顆寫上 $1, 3, 4, 5, 6, 8$。這就是 *Sicherman* 骰子，以發現它們的 George Sicherman 命名，並因馬丁·加德納（Martin Gardner）於 1978 年的介紹而廣為人知。在任何只取決於所擲總和的遊戲中，你大可用它們換掉普通骰子，而永遠不會有人察覺。

1993 年的一道題目從另一端切入這個想法。它給你一個表，列出用兩顆編號古怪的骰子擲出每個總和的方法數目，然後要你推算出骰子的編號，就像偵探根據遺下的痕跡重組案情一樣。該節接着介紹令整個課題變得簡單的想法：把每顆骰子變成一個多項式（polynomial），每一個點數為 k 的面對應一項 x^k。擲兩顆骰子相當於把它們的多項式相乘，因為 $x^i \times x^j = x^{i+j}$ 正好把兩面的數字相加。於是，尋找總和分佈相同的新骰子，就變成用另一種方式把一個多項式因式分解，情況有點像 36 可以拆成 4×9 而不是

6×6。又因為多項式與整數一樣，分解成不能再拆的因子時只有一種方式，這個因式分解同時證明了 Sicherman 骰子是唯一的另類選擇。把計數問題編碼成多項式，即*生成函數*（generating function），這個技巧是組合數學中最強大的工具之一，而背後的唯一分解（unique factorisation），則是大學第一門代數課的中心主題（Section 9.6）。

有公式的混沌。取一個介乎 0 與 1 之間的數，把它乘以 4，再乘以一減去它本身，然後不斷重複：$u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$。這就是*邏輯斯諦映射*（logistic map），一個粗略的模型，描述一個不斷增長但受糧食供應限制的種羣。這條規則簡單得不能再簡單，但它產生的數卻跳來跳去，看不出任何規律，而兩個小數點後十位都相同的初始值，通常在數十步之內就會給出完全不同的數列（sequence）。生物學家 Robert May 於 1976 年在一篇著名的論文中引起大家對它的注意，論文題為「Simple mathematical models with very complicated dynamics」（具有非常複雜動態的簡單數學模型），它自此成為混沌（chaos）的標準例子，通常藉電腦來探索。

2014 年的一道題目揭示了一件出人意表的事：這個數列有一條精確的公式。如果初始值是 $\sin^2\theta$，那麼 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，而你只需用倍角公式（double angle formulae）和歸納法（induction）就能證明。（烏拉姆（Stanisław Ulam）和馮·諾伊曼（John von Neumann）在 1940 年代已經知道這條公式。）你也許以為有了精確的公式，混沌就會被馴服。事實上，公式反而把混沌解釋得一清二楚。每一步都把角加倍，所以角上任何微小的不確定性每一步都會加倍，而初始值的誤差平均而言也以同樣的速度增長：五十步之後，誤差已增大了約一千萬億倍。把這個角表示成 π 的分數倍，再寫成二進制（binary），就看得格外分明：映射的每一步都把二進制數字向左移一位，並丟掉第一位，所以數列是把初始值的數字逐個讀出來，而要預測一百步之後的情況，你就要知道初始值準確至一百個二進制位。同一條公式還能找出這個映射的所有循環（cycle），並顯示每一種長度的循環都存在，它們稠密地擠在 $[0, 1]$ 之內，而且每一個都不穩定。這就是動力系統這門學問，你會在大學的微分方程（differential equations）課程中遇到它，其後還會在專門講混沌的課程中再遇上（Section 8.7）。

週期三意味着混沌。取函數 $f(x) = 7 - 2|x|$，由一個數開始，不斷把答案代回去。由 1 開始，得到 $1, 5, -3, 1, 5, -3, \ldots$：一個長度為三的循環。2025 年的一道題目要你尋找這類循環，方法是描繪 f、$f(f(x))$ 和 $f(f(f(x)))$ 的圖像，找出它們與直線 $y = x$ 相交的位置。每多應用一次 f，圖像中的鋸齒數目就加倍，而該節把這個觀察化為一個證明，說明這個函數具有*每一種*長度的循環：二、三、四、一百、一百萬。

這並不是這個函數獨有的特點。1975 年，李天岩（Tien-Yien Li）和 James Yorke 證明了*任何*具有長度為三的循環的連續函數（continuous function），都必定具有其他每一種長度的循環，論文的題目令人難以抗拒：「Period three implies chaos」（週期三意味着混沌）。證明所需的不過是介值定理（intermediate value theorem），也就是每當你論證一個變號的連續函數必定穿過零時已經在用的定理，再加上一幅巧妙的圖，顯示函數把哪些區間拉伸覆蓋到哪些區間之上。後來人們才發現，烏克蘭數學家沙可夫斯基（Oleksandr

Sharkovsky）早在 1964 年已證明了一個更強的結果：他找到了正整數的一種奇特排序，以 $3, 5, 7, 9, \ldots$ 開始，使得任何一種長度的循環，都會迫使排在它後面的每一種長度的循環出現。介值定理是大學分析（analysis）課程中最先嚴格證明的結果之一；這道題目顯示了它能做到多少事情（Section 8.8）。

單車氣泵為何會發熱。替單車輪胎打氣，然後摸一摸氣泵：它是暖的。擠壓氣體會令它升溫，柴油引擎正是這樣不靠火花就點燃燃料。但為甚麼呢？2002 年的一道題目這樣回答：追蹤單獨一個空氣分子，看它在氣泵末端與正被推入的活塞之間來回彈跳。分子每次從推進中的活塞反彈，都會加快一點點，就像網球被移動中的球拍擊中一樣。題目要你準確描述一次反彈，把它化成每次碰撞時氣缸長度的遞歸關係（recurrence），然後解出這個遞歸關係。

解答揭示了一條隱藏的定律：分子的速率乘以氣缸的長度，幾乎不變。把長度減半，速率就加倍，而由於溫度量度的是分子的能量，氣體便會升溫。像這樣在系統緩慢改變時幾乎保持不變的量，稱為*絕熱不變量*（adiabatic invariants），而只要再多下一點功夫，同一個論證就能導出氣體的絕熱壓縮定律，你會在大學的熱力學中學到它。這個想法影響深遠。費米（Enrico Fermi）於 1949 年提出，宇宙射線正是以這種方式獲得巨大的能量，即在太空中移動的磁場之間反覆彈跳；而埃倫費斯特（Paul Ehrenfest）則於 1916 年指出，絕熱不變量正是量子力學必須加以量子化的量。一道關於單車氣泵的題目，原來觸及統計物理、天體物理和量子理論的開端（Section 10.4）。

會回來的球。把一個球輕輕向前拋，它會穩定地遠離你，直至落地。常識告訴我們事情總是如此：球一直向前移動，又怎會靠近你呢？但只要拋得夠陡，與水平所成的角大於約 $70.5°$，怪事就會發生。在飛行的某一段，當球下降時，它會離你*更近*，儘管它在水平方向上仍然遠離你。它的高度下降得比水平距離增長得更快。

2019 年的一道題目要你證明這件事，並求出臨界角的準確值。所用的方法你日後會一用再用：不對距離本身求導，而對距離的平方求導，這樣就避開了平方根；所得的導數（derivative）原來是時間的二次式（quadratic），於是距離會否減少的問題，就變成這個二次式有沒有實根的問題。它的判別式（discriminant）給出了答案，而臨界角原來就是正弦值恰好等於 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 的那個角。這一課的意義遠遠超出拋體運動。許多「顯然」遞增的量其實並非如此，而在大學裏，透過求出導數的正負號來證明某個量是單調（monotonic）的，是證明不等式、證明數列收斂（converge），以及證明微分方程的解趨於穩定的關鍵一步（Section 11.10）。

最後一位乘客。一班列車全部滿座。第一位上車的乘客不理會自己的車票，隨機選了一個座位坐下。其後每一位乘客，如果自己的座位空着就坐自己的座位，否則就在空座位中隨機選一個。最後一位上車的乘客發現自己的座位空着的機會有多大？如果有一百個座位，各種可能性的分支令人眼花繚亂：一位被佔了座位的乘客可以佔去另一位的座位，後者又佔去另一位的，形成一條任意長度的鏈。直接計算看來毫無希望。然而，無

論座位數目是多少，答案都恰好是 $\frac{1}{2}$。

2021 年的一道題目一步一步地得出這個答案：它要你求出兩個和三個座位時的答案，再按第一位乘客所坐的位置取條件（conditioning）來建立遞歸關係，然後用歸納法證明答案永遠是 $\frac{1}{2}$。這是一個完全妥當的證明，但它令你不禁要問，答案爲甚麼如此簡單，而該節接着給出一個一句話的論證來解釋。每當有乘客要隨機選擇時，第一位乘客的座位和最後一位乘客的座位所受的對待完全相同；在其中一個被佔之前，整個過程無法分辨它們。所以最後剩下的空座位是兩者之一的機會均等，而它必定是兩者之一，因為其他每個座位，在最後一位乘客上車之前，都已被它的主人或某位被佔了座位的乘客坐了。像這樣利用對稱（symmetry）的論證，以一個觀察取代好幾頁的計算，貫穿整個大學概率論（Section 12.5）。

綜合來看，這類題目觸及數學學位一年級的每一個主要範疇：數論（number theory）、分析、微積分（calculus）、複數（complex numbers）、代數、線性代數（linear algebra）、微分方程、組合數學、力學、概率與統計。

本書的用途

這個觀察正是本書的緣起。大多數的 STEP 備試，都以通過考試為目標，這十分合理：學習技巧，操練試卷，鍛鍊速度和耐力。本書也以此為目標，而讀完它會令你更擅長應付 STEP。但它真正的目的並不在此，而在於幫助你心懷大學數學去準備 STEP：把每道題目看成一份邀請，而不是一個要清除的障礙，並且循着這份邀請一直走到盡頭。

在 STEP 中表現最好、其後在大學裏如魚得水的學生，幾乎總是那些為數學本身而熱愛數學的人。他們享受難題終於被攻破的那一刻。他們想知道一個技巧為何行得通，而不僅僅是知道它行得通。當答案簡單得令人起疑，例如 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{e}$ 或 $\pi^2/6$，他們會懷疑背後另有更深的道理，並且動身去找。本書想培養的正是這些習慣。每一道題目之所以入選，都是因為它通往一個發現：一個比題目本身更大的想法、定理或思考方式。

思考方式與定理同樣重要。大學數學要求你用學校數學很少用到的方式思考：去證明而不是去計算，用反證法（proof by contradiction）或無窮遞降法（infinite descent）來論證，用兩種方法數算同一樣東西，找出一個永不改變的量，構造一個反例（counterexample），在不把某樣東西找出來的情況下證明它存在。STEP 題目訓練的正是這些習慣，而且往往不加明言。本書的每一節都會點明該節核心的思維技巧，好讓你再次遇上時能夠認出它。

本書的編排

本書共有十三章，按題目所通往的大學數學範疇編排，而不是按題目所出自的 STEP 試卷編排。

- **純粹數學**（第 1 至 9 章）：數論與證明；數列、級數（series）與收斂；函數、不等式與嚴謹性；正正式式的微積分；複數；代數與結構；線性代數與幾何；微分方程與動力系統；以及計數與機會，當中亦取材自概率卷的組合題。
- **力學**（第 10 和 11 章）：守恆定律、碰撞與引力；以及振動、轉動與運動參考系，最後以一組出人意表的軌跡作結。
- **概率與統計**（第 12 和 13 章）：概率，由關於取條件的清晰思考到中心極限定理（central limit theorem）；以及現實世界中的統計與隨機性。

每章以一篇短文開始：這個範疇為何重要，你在大學裏會在其中遇到甚麼，以及貫穿全章的三個大問題。每章以一篇總結收結，當中會重溫這些問題，並附上所用方法的工具箱、通往其他章節的指引，以及入讀大學前的閱讀建議。每章末尾載有練習的簡短答案。第 1 章之前有一個詞彙表，收錄書中那些在學校不大可能接觸過的術語，還有一個列出書中所用數學符號的表；如果有哪個詞或哪個符號難倒了你，就到那裏查一查。

每一節都依循同一個模式。它以*題目*開始：一條連結，通往該道 STEP 題目在官方來源的原文，與當年所出的一字不差。*引子*解釋這道題目為何比表面看來更有趣。*動筆之前*給你第一個立足點。*逐步解題*是分階段的引導式解答，中間穿插着以*問問自己*和*停下來試試*為題的方框，那些都是一位好老師會在那一刻向你提出的問題；它們是用來回答的，不是用來跳過的。*回顧*挑出關鍵的幾步。*背後的數學*是該節的核心：題目背後的大學數學，它的歷史和它的驚喜。*思維技巧*點明這道題目所鍛鍊的思考習慣。*延伸練習*提供後續的題目，當中常有相關的 STEP 題目，而*延伸閱讀*則推介一些書籍和文章，程度是實力強的中學生或大學一年級生應付得來的。

本書詳細討論了 136 道題目，但 STEP 所出的題目超過 1,500 道。網站為其中每一道都提供了詳細解答，由樣本試卷直至 2025 年。它們的寫作精神與本書一致，但篇幅短得多。每一份解答都給出解開題目的關鍵思路、逐部分的完整解答、幾項你可以對答案作出的驗算、容易犯的錯誤，以及該題所觸及的大學數學的指引。如果某道題目在本書中有完整的討論，它的解答會註明，並附上連結。

有幾節用到現行 STEP 課程綱要以外的課題，例如羣（groups）、轉動慣量（moments of inertia）和矩母函數（moment generating functions）。收錄它們，是因為那些題目好得不容割捨，而每一節都會給出它所需要的事實。

學生如何使用本書

- **先做題目。**從該節開首的連結打開題目，閱讀時把它放在手邊，因為解答會不時提到題目的各個部分和用字。每道題目至少認真地花半小時，然後才往下讀。卡住了並不代表失敗；學習正是在這裏發生的。如果你完全卡住了，先讀*動筆之前*，然後再試。

- **回答方框裏的問題。**當正文向你提問時，請停下來，在紙上作答。這些引導式解答，是寫給手裏拿着鉛筆的讀者看的。
- **不要跳過「背後的數學」各節。**它們不在考試範圍之內，卻是這本書存在的理由，也是你日後會記得的東西。
- **各節可按任何次序閱讀。**每一節都自成一體，而交叉引用會指引你到別處的相關想法。跟着你的好奇心走。
- **先做練習，再對答案。**每章末尾的答案很簡短：只給出結果和關鍵的一步，而不是完整的解答過程。
- **把詳細解答當作跳板。**用歷屆試卷練習時，先認真嘗試每道題目，然後才打開網站上的解答，而且只讀到足以讓你重新起步的地方為止。如果關鍵思路已經足夠，就關上解答，自己把題目做完。
- **善用工作紙。**網站為每一節提供可列印的工作紙，載有題目的連結、依次排列的提示、背後的數學部分和練習，方便你離開屏幕來做。
- **在本書以外多讀。**Siklos 的書、STEP 支援計劃和歷屆試卷本身，全部都可以免費取得。每一節的延伸閱讀，都是挑選入讀大學前已能讀懂的材料。

教師如何使用本書

- **作為延伸教材的來源。**每一節都是一堂自成一體的課：題目、一條貫穿題目的引導路徑，以及做完之後一個值得一去的地方。各項思維技巧很適合用作一連串課堂的主題。
- **作為討論指引。**問問自己和停下來試試的方框，是全班或小組討論的現成引子。先提出這些問題，然後才揭示下一階段。
- **配合工作紙使用。**每張工作紙都載有題目的連結、依次排列的提示、背後的數學部分和後續練習；學生可以自行決定要看多少個提示。
- **用於 STEP 備試。**書中收錄了全部三份試卷的題目，由樣本試卷直至 2025 年，其中不少在練習中附有相關題目。各章的總結和工具箱有助學生看到不同課題之間的聯繫。
- **給沒有 STEP 支援的學生。**本書的寫法，是要讓一個有決心的學生能夠獨力讀完。如果你的學校不提供 STEP 備試，本書可以承擔其中大部分的工作。

版權與勘誤

本書中凡屬我本人創作的內容，包括正文、引導式解答、插圖、練習和答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授權條款貢獻予公有領域：你可以為任何目的複

製、改編和分享，無須徵求許可。STEP 題目本身的版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有，不在該授權條款的涵蓋範圍之內。因此，本書並沒有轉載這些題目。取而代之，每一節都連結到題目的官方來源：樣本試卷和 1987 至 2018 年的試卷，連結到 STEP 支援計劃的題目資料庫；2019 年起的試卷，則連結到 OCR 提供下載的各年試卷。用到其他 STEP 題目的練習，也以同樣的方式連結。

我已盡力確保書中的數學正確無誤，但這樣篇幅的一本書必定會有錯誤。如果你發現錯誤，無論多麼細微，請到本書的 GitHub 儲存庫 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 以 issue 的形式提出。收到勘誤後，本書的網站會隨即更正。

動筆之前的最後幾句話

Siklos 以米高安哲羅（Michelangelo）的*大衛像*的故事，為他那本書的引言作結：這座雕像是用一塊數十年來無人問津的大理石雕成的。他說，他無法教會你數學，但下苦功一點一點地鑿開題目，會讓你內在的那位數學家顯露出來。這番話我無法說得更好。本書為你提供大理石、一些工具，以及幾幅圖畫，讓你看看別人在石頭裏找到了甚麼。鑿石的功夫，就要靠你自己了。我希望你樂在其中，一如我編寫這本書時那樣樂在其中。

Keith McNulty
2026 年 11 月