詞彙表

大學數學有自己的一套詞彙，其中不少你大概從未見過。本詞彙表收錄了書中那些你在中學不大可能遇過的用語，每個詞附上簡短的解釋，並在有幫助的地方指出哪一節用到或詳細說明了這個概念。這些解釋只為幫你入門，並非精確的定義；凡有嚴格定義的詞，所指的那一節都會給出。

有幾個詞，例如*集合*、*函數*和*證明*，你早已熟悉，但大學裏使用它們時比中學更為講究，所以也一併收錄。詞條內以*斜體*標示的詞，本身另有詞條。

A

絕熱不變量（Adiabatic invariant） 當系統緩慢改變時幾乎保持不變的量。一個分子在緩慢壓縮的氣缸內來回彈跳時，它的速率乘以氣缸長度幾乎固定不變（Section 10.4）。

代數數（Algebraic number） 某個整數系數（可正、可負、可為零，但不全為零）多項式方程的根。$\sqrt{2}$、i 和 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 都是代數數；不是代數數的數稱為*超越數*（transcendental）（Section 6.3）。

分析（Analysis） 為微積分奠定嚴格基礎的數學分支：極限、連續性、微分、積分和無窮級數，全都精確地定義，並從基本原理出發加以證明。第 2 至 4 章是這門學問的入門。

角動量（Angular momentum） 動量在轉動中的對應量。對於繞軸自轉的物體，它等於*轉動慣量*（moment of inertia）乘以角速度；只要沒有外來的轉動效應，角動量便守恆（Section 11.6）。

算術幾何平均（Arithmetic–geometric mean） 把一對數反覆換成它們的算術平均和幾何平均，由此得到兩個數列，它們的共同極限就是算術幾何平均。其收斂速度快得驚人（Section 2.6）。

結合律（Associative） 若對所有 a、b、c 都有 $(a*b)*c = a*(b*c)$，則運算 $*$ 滿足結合律，括號因而可以省去。數的加法和乘法都滿足結合律；減法則不然。

漸近（Asymptotic） 若兩個式子之比當 $n \to \infty$ 時趨向 1，則稱它們漸近相等，記作 $f(n) \sim g(n)$。斯特靈公式（Stirling's formula）指出 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$，儘管兩邊之差會無止境地增大（Section 12.23）。

公理（Axiom） 不加證明而視為出發點的命題，其他一切都由它推導出來。大學代數有很大部分都是從一張簡短的公理清單出發，探究由此可以推出甚麼（Section 7.3、Section 6.5）。

B

基礎步驟（Base case） *歸納法*（induction）證明的第一步：驗證命題對最小的值成立，通常是 $n = 0$ 或 $n = 1$。其後的*歸納步驟*（inductive step）則證明：命題對某個值成立，便對下一個值也成立。

基本比率謬誤（Base-rate fallacy） 只憑證據判斷某事的概率（probability），卻忽略它本來有多常見，這種錯誤就是基本比率謬誤。如果某種疾病足夠罕見，即使準確的測試得出陽性結果，它是虛驚一場的可能性也可以比真正患病更大；實際是否如此，取決於疾病有多罕見和測試有多準確（Section 12.2）。

基（Basis） 一組向量，使得空間中每個向量都能以唯一的方式寫成它們的組合。在平面上，**i** 和 **j** 構成一個基；任何一對不平行的向量也是如此。一個基所含向量的數目就是空間的*維數*（dimension）（Section 6.3）。

貝葉斯定理（Bayes' theorem） 把一個條件概率倒轉過來的法則：$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A)/\mathrm{P}(B)$。它告訴你怎樣根據證據修正原有的判斷（Section 12.2）。

偏差（Bias） 若一個*估計量*（estimator）在大量樣本上平均而言偏高或偏低，它便是有偏的；若它的期望值恰好等於所估計的量，它便是*無偏*（unbiased）的（Section 13.3）。

雙射（Bijection） 一一對應：一種把一個集合的每個成員與另一個集合的恰好一個成員配對的規則，而且兩邊都沒有剩餘。兩個有限集合大小相同，恰好就是它們之間存在雙射的時候；無限集合的大小正是這樣定義的（Section 1.8、Section 9.10）。

二元運算（Binary operation） 把兩個對象結合而得出第三個對象的規則，例如數的加法、矩陣的乘法或函數的複合。

界（Bound） 一個數集或數列的上界，是其中沒有任何數超過的數；下界則是其中沒有任何數低於的數。若數列兩者皆有，便稱為*有界*（bounded）（Section 2.2）。

分支過程（Branching process） 一種族羣模型，其中每個個體各自獨立地產生隨機數目的後代。核心問題是這個家族會否絕後，而答案來自*概率生成函數*（probability generating function）（Section 12.15）。

C

變分法（Calculus of variations） 研究這樣一類問題的學問：未知的是整個函數或整條曲線，要選取它使某個量盡可能小或盡可能大，例如最短的路徑、最快的滑道、圍出最大面積的曲線（Section 4.7）。

懸鏈線（Catenary） 懸掛的鏈條所呈的形狀，即 $y = a\cosh(x/a)$ 的圖像。它看似拋物線，其實不是（Section 11.14）。

柯西分佈（Cauchy distribution） 一種連續分佈，圖像呈鐘形，但尾部極厚，以致沒有平均值。從中抽取樣本，樣本的平均值並不比單獨一個觀測值可靠（Section 12.22）。

中心極限定理（Central limit theorem） 這個定理指出：大量獨立、同分佈而方差有限的隨機量之和，經適當平移和縮放後，近似服從正態分佈，不論那個共同的分佈是甚麼。對於分佈各不相同的隨機量也有相應的版本，條件是其中沒有少數幾個量主導整個和。它解釋了為何鐘形曲線無處不在（Section 12.24）。

混沌（Chaos） 確定性系統的一種行為：它對起點極為敏感，以致實際上無法作長期預測——兩個非常接近的起點，會導向截然不同的未來（Section 8.7、Section 8.8）。

封閉（Closed） 若把集合中兩個成員結合起來，所得的總是集合中的另一個成員，則該集合在這個運算下封閉。偶數在加法下封閉；奇數則不然。

交換律（Commutative） 若 $a * b = b * a$ 恆成立，則運算 $*$ 滿足交換律。數的乘法滿足交換律；矩陣的乘法和*四元數*(quaternions)的乘法則不滿足(Section 7.1、Section 6.7)。

完備性（Completeness） 實數沒有空隙這一性質：每個有上界的遞增數列都收斂於某個實數。有理數並無這個性質，因為一列分數可以逐步逼近 $\sqrt{2}$。*分析*有很大部分建基於此（Section 2.2）。

同餘（Congruence） $a \equiv b \pmod{n}$，讀作「a 與 b 模 n 同餘」，意思是 a 和 b 除以 n 所得的餘數相同；等價地說，n 整除 $a - b$。用同餘式進行的運算稱為*模算術*（modular arithmetic）（Section 1.5）。

猜想（Conjecture） 人們相信為真但尚未證明的命題。

守恆定律（Conservation law） 指出某個量（例如能量、動量或角動量）在系統演變過程中保持不變的命題。有了守恆定律，往往不必追蹤細節便能解決問題（Section 10.1）。

連續（Continuous） 若輸入的微小改變只引致輸出的微小改變，則函數是連續的；通俗地說，就是筆不離紙也能畫出它的圖像。精確地說，若當 $x \to a$ 時 $\mathrm{f}(x) \to \mathrm{f}(a)$，則 f 在 a 連續（Section 3.1、Section 8.8）。

反證法（Contradiction, proof by） 先假設命題不成立，再由此推出不可能的結論，這樣的證明稱為反證法。經典的例子是 $\sqrt{2}$ 為無理數的證明（Section 1.3）。

逆否命題（Contrapositive） 「若 P 則 Q」的逆否命題是「若非 Q 則非 P」。兩個命題在邏輯上等價，而證明逆否命題往往較為容易。它與*逆命題*（converse）「若 Q 則 P」並不相同，後者很可能不成立。

收斂（Converge） 若數列各項能夠任意接近某個固定的數，並一直保持接近，則數列收斂，該數就是它的*極限*（limit）。若級數的*部分和*（partial sums）收斂，則級數收斂。不收斂的數列或級數稱為*發散*（diverge）（Section 2.1、Section 2.3）。

凸（Convex） 若連接函數圖像上任意兩點的弦都位於圖像之上或與圖像重合，則函數是凸的，例如 x^2 或 e^x。許多不等式，包括 AM–GM 不等式，都是凸性的推論（Section 3.3）。

推論（Corollary） 由剛證明的*定理*（theorem）很快便能得出的結果。

相關係數（Correlation） 一個介乎 -1 與 1 之間的數，量度兩個隨機量之間的關係有多接近直線關係。它是*協方差*（covariance）除以兩個標準差所得的值（Section 13.7）。

可數（Countable） 若集合的成員可以排成第一個、第二個、第三個……這樣列下去（可能永無止境），則該集合是可數的。整數是可數的，而令人意外的是，分數也是可數的；實數則不可數（Section 1.8）。

反例（Counterexample） 顯示某個一般性命題不成立的單一例子。不論有多少例子支持某個論斷，一個反例已足以把它推翻。

協方差（Covariance） $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y)$，量度兩個隨機量如何一同變化。獨立的隨機量協方差為零，但協方差為零並不代表獨立（Section 12.4、Section 13.7）。

循環（Cycle） 反覆施行某個函數時依次到訪的一組點：$x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto x_n \mapsto x_1$。數 n 是它的*週期*（period），而這些點稱為*週期點*（periodic points）（Section 8.8）。

擺線（Cycloid） 滾動的輪子邊緣上一點所描出的曲線。把它上下倒轉，它既是最速降線，也是無論從哪裏滑下所需時間都相同的曲線（Section 11.4）。

分圓多項式（Cyclotomic polynomial） 以全部*本原*（primitive）n 次*單位根*（roots of unity）為根、且別無其他根的多項式 $\Phi_n(x)$。它的系數都是整數，而且*不可約*（irreducible）；$x^n - 1$ 等於 n 的所有因數 d 所對應的 $\Phi_d(x)$ 之積：例如 $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$（Section 6.1）。

D

錯排（Derangement） 把一列東西重新排列，使得沒有任何一項留在原來的位置（Section 9.8）。

導子（Derivation） 作用於函數（或其他對象）的運算 D，滿足 $D(f+g) = Df + Dg$ 和乘積法則 $D(fg) = f\,Dg + g\,Df$。求導是標準的例子，而它的許多性質單憑這兩條法則便可推出（Section 6.5）。

行列式（Determinant） 由方陣算出的一個數，量度相應的變換把面積或體積放大多少倍。它等於零，恰好就是矩陣沒有逆矩陣的時候（Section 7.3）。

可微（Differentiable） 若函數的圖像在某點有明確的切線，即定義導數的那個極限存在，則函數在該點可微。每個可微函數都是連續的，但反之不然：$|x|$ 在 0 連續但不可微。

維數（Dimension） 一個基所含向量的數目，即向量空間（vector space）中獨立方向的數目。

發散（Diverge） 見收斂。

動力系統（Dynamical system） 描述系統狀態如何隨時間改變的規則，可以是逐步改變（由 $x_{n+1} = \mathrm{f}(x_n)$ 定義的數列），也可以是連續改變（微分方程）。第 8 章以此為主題。

E

特徵值、特徵向量（Eigenvalue, eigenvector） 若對某個數 λ 有 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$，則非零向量 $\mathbf{v}$ 是矩陣 $\mathbf{M}$ 的特徵向量，而該數就是它的特徵值：這個變換只把 $\mathbf{v}$ 拉伸，而不把它轉動（Section 7.2）。

包絡線（Envelope） 與一族曲線中每一條都相切的曲線。以固定速率拋出的球，其所有軌跡的包絡線就是安全拋物線（safety parabola），即球所能到達的區域的邊界（Section 11.9）。

平衡（Equilibrium） 系統不再改變的狀態。若微小的擾動始終保持微小，平衡便是穩定（stable）的；若擾動還會逐漸消失，便是漸近穩定（asymptotically stable）的，有摩擦的擺就是這樣；沒有摩擦而垂直下垂的擺是穩定的，但輕輕一推便會令它永遠擺動下去。若有些微小的擾動會增大，平衡便是不穩定（unstable）的（Section 8.3、Section 11.8）。

估計量（Estimator） 根據數據計算出某個未知量（例如族羣的大小或分佈的平均值）的估計值的規則（Section 13.3）。

歐拉示性數（Euler characteristic） 對於有 V 個頂點、E 條棱和 F 個面的多面體，指 $V - E + F$ 這個數；沒有洞的多面體，這個數永遠是 2（Section 7.9）。

存在性證明（Existence proof） 證明某物存在，卻不一定說明怎樣把它找出來的證明。鴿巢原理（pigeonhole principle）和介值定理（intermediate value theorem）都能給出存在性證明。

期望值（Expectation） 隨機量 X 的平均值，記作 $\mathrm{E}(X)$：即多次獨立重複試驗的長期平均。期望值具有可加性，$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$，不論 X 與 Y 是否獨立（Section 9.11）。

極端原理（Extremal principle） 一種策略：考察某類對象中最小、最大、最先或最後的一個，並證明它具有某種性質，從而得出所求的結果或導出矛盾（Section 1.3）。

F

域（Field） 可以進行加、減、乘、除（除數不為零）而且所有慣常法則都成立的數系。有理數、實數和複數都是域；模質數的整數也是。整數不是域，因為並非總能相除（Section 6.3）。

域擴張（Field extension） 包含一個較小的域的較大的域，例如所有形如 $a + b\sqrt{2}$（其中 a、b 為有理數）的數，它們包含了有理數。域擴張的次數（degree），就是把它看成較小的域上的向量空間時的維數（Section 6.3）。

不動點（Fixed point） 滿足 $\mathrm{f}(x) = x$ 的點 x，即函數讓它留在原處的點。在圖像上，不動點就是 $y = \mathrm{f}(x)$ 與 $y = x$ 相交之處（Section 2.2、Section 8.8）。

參考系（Frame of reference） 量度位置和運動時所採取的觀點。慣性（inertial）參考系是牛頓（Newton）第一定律成立的參考系；在加速的參考系中，例如正在加速的火車上，看起來會多出一些力（Section 11.5）。

函數（Function） 一種規則，把一個集合（定義域（domain））的每個成員對應到另一個集合（上域（codomain））的恰好一個成員。在大學裏，函數並不等同於公式：許多重要的函數沒有公式，而有些公式並不定義函數。

函數方程（Functional equation） 以函數為未知量的方程，例如 $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$（Section 3.8）。

代數基本定理（Fundamental theorem of algebra） 每個次數至少為 1 的複系數多項式都有一個複數根，因而可以在複數範圍內完全分解成一次因式。

G

伽瑪函數（Gamma function） 把階乘推廣至非整數的函數 Γ：對整數 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$，而且 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，在某種意義上這是說 $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$（Section 4.4）。

高斯整數（Gaussian integer） 形如 $a + bi$ 的複數，其中 a 和 b 為整數。它們的表現與普通整數十分相似，有自己的質數，也有唯一分解（Section 1.6）。

生成函數（Generating function） 以某個數列各項為系數的冪級數 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$。對級數所作的運算（例如乘法）對應於對數列所作的有用運算（Section 9.4）。*概率生成函數*是對取整數值的隨機量的各個概率這樣做（Section 9.6、Section 12.15）；*矩生成函數*（moment generating function）則是它的近親（Section 12.24）。

羣（Group） 一個集合連同一個*二元運算*，這個運算滿足*結合律*，有*單位元*（identity），並且每個元素都有*逆元*（inverse）。一個圖形的所有對稱構成一個羣，非零複數在乘法下也構成一個羣。羣是描述對稱的語言（Section 6.6、Section 6.7）。

H

雙曲幾何（Hyperbolic geometry） 一種幾何，其中過已知直線外一點有無窮多條直線永不與該直線相交，而三角形的內角和小於 π。配上適當的距離量度方法的圓盤，就是它的一個模型（Section 5.8）。

I

單位元；恆等式（Identity） 運算 $*$ 的單位元是這樣的元素 e：對每個 a 都有 $e * a = a * e = a$。加法的單位元是 0，乘法的是 1，矩陣乘法的是單位矩陣 $\mathbf{I}$。另一個意思是恆等式，即對變量的每個值都成立的等式，例如 $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$。

當且僅當（If and only if） 「P 當且僅當 Q」，常寫作「P iff Q」或 $P \iff Q$，意思是 P 和 Q 要麼同時為真，要麼同時為假。證明它需要兩個論證，每個方向各一個。

獨立（Independent） 若知道其中一個事件已經發生並不改變另一個事件的概率，則兩個事件獨立：$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$。三個或更多事件可以兩兩獨立，卻並非整體獨立（Section 12.4）。

歸納法（Induction） 證明某個命題對每個整數 n 都成立的方法：先證明它對第一個值成立（*基礎步驟*），再證明只要它對某個值成立，便對下一個值也成立（*歸納步驟*）。在*強歸納法*（strong induction）中，歸納步驟可以使用命題對所有較小的值都成立這一點，而不只是對前一個值（Section 1.2）。

無窮遞降法（Infinite descent） 反證法的一種形式：證明某個整數問題的任何一個

解都會引出一個更小的解，從而得到一列無窮遞減的正整數，而這是不可能的（Section 1.5）。

介值定理（Intermediate value theorem） 若連續函數取到 a 和 b 這兩個值，它便取到兩者之間的每一個值。因此，變號的連續函數必定有根（Section 8.8）。

不變量（Invariant） 在某個過程進行期間，或在某種變換之下，保持不變的量。要證明某事不可能，或者不必追蹤每一步便解決問題，尋找不變量是最有力的方法之一（Section 7.7、Section 10.4）。

逆元；反函數（Inverse） 對於具有單位元 e 的運算，元素 a 的逆元是滿足 $a * b = b * a = e$ 的元素 b。反函數則把函數的作用還原：$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$。

無理數（Irrational） 不能寫成分數 $\frac{p}{q}$（其中 p 和 q 為整數，$q \neq 0$）的實數，例如 $\sqrt{2}$、π 或 e（Section 1.4）。

不可約（Irreducible） 若多項式不能寫成兩個次數較低、系數屬同一類的多項式之積，則它是不可約的。$x^2 - 2$ 在有理數範圍內不可約，但在實數範圍內可分解為 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$（Section 6.1）。

同構（Isomorphic） 若兩個結構（例如兩個羣）之間存在一個雙射，使它們的運算完全對應，則這兩個結構同構：它們是同一個結構，只是標籤不同（Section 6.7、Section 6.8）。

迭代（Iteration） 反覆施行同一個函數，於是 $x_1 = \mathrm{f}(x_0)$，$x_2 = \mathrm{f}(x_1)$，如此類推。數列 x_0、x_1、x_2、… 稱為 x_0 的軌道（orbit）（Section 8.7）。

L

大數定律（Law of large numbers） 這個定理指出：只要期望值存在，一個隨機量多次獨立重複所得的平均值便趨向它的期望值（Section 12.22）。

引理（Lemma） 主要為了證明某個更大的定理而先行證明的結果。

極限（Limit） 數列或函數任意接近、並一直保持接近的那個值。把這個想法精確化，是十九世紀數學的偉大成就之一，也是分析的起點（Section 2.1）。

極限環（Limit cycle） 系統運動中的一個閉合迴路，鄰近的運動會螺旋地趨近（或遠離）它，例如心跳或時鐘的穩定節奏（Section 8.4）。

線性映射（Linear map） 向量空間之間滿足 $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ 和 $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ 的函數 T。每個線性映射都可以用矩陣表示，而線性代數就是研究線性映射的學問（Section 7.2）。

邏輯斯諦映射（Logistic map） 規則 $u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$，是受食物供應限制的族羣的簡單模型，也是混沌的標準例子（Section 8.7）。

M

馬可夫鏈（Markov chain） 一種在各個狀態之間逐步轉移的隨機過程，其中下一步的概率只取決於當前的狀態，而與過程怎樣到達這個狀態無關（Section 12.16）。

最大似然法（Maximum likelihood） 估計未知量的一種方法：選取使觀測所得數據出現的概率最大的那個值（Section 13.2）。

無記憶性（Memoryless） 若不論你已經等了多久，餘下的等候時間的分佈都與開始時相同，則這個隨機等候時間具有無記憶性。指數分佈是唯一具有無記憶性的連續分佈（Section 12.18）。

最小多項式（Minimal polynomial） 以某個已知代數數為根、系數為有理數而首項系數為 1 的多項式之中，次數最低的一個。$\sqrt{2}$ 的最小多項式是 $x^2 - 2$（Section 6.3）。

模算術（Modular arithmetic） 見同餘。

轉動慣量（Moment of inertia） 質量在轉動中的對應量：量度要改變物體繞某軸轉動的快慢有多困難。它取決於質量離軸有多遠，而不只取決於質量有多少（Section 11.7）。

單調（Monotonic） 若數列或函數從不下降（遞增）或從不上升（遞減），則它是單調的。有界的單調數列必定收斂（Section 2.2、Section 11.10）。

N

必要及充分（Necessary and sufficient） 若沒有 P 則 Q 不可能成立（$Q \Rightarrow P$），則 P 是 Q 的必要條件；若 P 保證 Q 成立（$P \Rightarrow Q$），則它是充分條件。既必要又充分的條件與 Q 等價。

簡正模態（Normal modes） 系統的一些特殊振動形態，其中每個部分都以相同的頻率同步運動。系統的任何振動都是它的簡正模態的組合（Section 11.2）。

O

階（Order） 羣中元素 g 的階，是使 g^n 等於單位元的最小正整數 n：即必須把它施行多少次才回到起點（Section 7.4）。若不存在這樣的 n，例如整數加法羣中的數 1，則稱 g 的階為無限（infinite order）。有限羣的階是它所含元素的數目。

正交（Orthogonal） 即垂直。在大學裏，這個詞的用法推廣至向量以外：若在適當的範圍上 $\int \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = 0$，則兩個函數 f 和 g 可稱為正交（Section 8.6）。

P

參數（Parameter） 在某一個問題之內固定不變、但在不同問題之間可以改變的量，例如邏輯斯諦映射中的 r。許多 STEP 題目都會問答案怎樣隨參數而變。

部分和（Partial sum） 級數首 n 項之和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。若部分和收斂，則級數收斂（Section 2.3）。

鴿巢原理（Pigeonhole principle） 若把多於 n 件物件放進 n 個盒子，則必有某個盒子裝有至少兩件。它雖然簡單，卻能證明一些出人意表的存在性結果（Section 9.2）。

泊松過程（Poisson process） 一種模型，描述在時間或空間中以恆定的平均率隨機而獨立地發生的事件：放射性衰變、電話來電、天上的星星（Section 12.19、Section 12.18）。

本原單位根（Primitive root of unity） 一個 n 次單位根，其各次冪恰好給出全部 n 個 n 次單位根；等價地說，對任何較小的 m，它都不是 m 次單位根（Section 6.1）。

概率密度函數（Probability density function） 對於連續的隨機量，指這樣的函數 f：它在某個區間上的積分，就是隨機量落在該區間內的概率。

證明（Proof） 從定義、公理和已經證明的結果出發，說明某個命題為真的完整邏輯論證。在大學裏，即使一段計算得出正確答案，除非每一步都有理據，否則不算證明。

Q

四元數（Quaternions） 哈密頓（William Rowan Hamilton）於 1843 年發現的數系，它把複數加以擴充，包含 -1 的三個平方根，記作 i、j、k，滿足 $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$。四元數的乘法不滿足交換律。它們用於描述三維空間中的旋轉（Section 6.7、Section 7.5）。

R

隨機變量（Random variable） 其值由隨機試驗的結果決定的量，例如擲十次硬幣所得正面的次數。

隨機遊走（Random walk） 由接連的隨機步伐組成的路徑，例如一枚棋子按擲硬幣的結果向左或向右移動一格（Section 9.10、Section 12.17）。

快度（Rapidity） 狹義相對論中量度快慢的一個量；與速度不同，當一個運動與另一個同方向的運動合成時，快度只需直接相加。若 c 為光速，則速度 v 對應的快度為 $\operatorname{artanh}(v/c)$（Section 7.6）。

遞推關係（Recurrence relation） 以數列中較前的項表示每一項的等式，例如斐波那契（Fibonacci）數所滿足的 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$。

共振（Resonance） 系統受到週期性的推動，而推動的頻率等於或接近系統本身的固有頻率時所產生的強烈反應，就像配合鞦韆的節奏去推鞦韆上的小孩那樣（Section 11.1）。

黎曼積分（Riemann integral） 積分的精確定義：把積分定為許多細長矩形面積之和的極限（當這個極限存在時）（Section 4.1）。

嚴謹性（Rigour） 一種論證的標準：每一步都要有理據，不會因為某事看來顯然、或者在你試過的例子中都成立，便視為理所當然（第 3 章）。

單位根（Root of unity） 對某個正整數 n 滿足 $z^n = 1$ 的複數 z。全部 n 次單位根是 $e^{2\pi ik/n}$，其中 $k = 0、1、\ldots、n-1$，它們在單位圓上構成一個正 n 邊形（Section 5.2）。

S

樣本空間（Sample space） 一個隨機試驗所有可能結果組成的集合。事件是它的子集（Section 12.1）。

集合（Set） 一批對象（稱為它的*元素*（elements））合起來看成的單一整體。元素的次序無關重要，重複與否也無關重要：$\{1,2,3\}$ 和 $\{3,1,2,2\}$ 是同一個集合。

簡諧運動（Simple harmonic motion） 加速度與相對某固定點的位移成正比、並且指向該點的運動，$\ddot{x} = -\omega^2 x$。它的解是 $x = A\cos(\omega t + \varepsilon)$，而週期 $2\pi/\omega$ 與擺動的幅度無關（Section 11.4）。

穩定、不穩定（Stable, unstable） 見*平衡*。

斯特靈公式（Stirling's formula） 近似式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$，其百分誤差隨 n 增大而趨向零（Section 12.23）。

子羣（Subgroup） *羣*的一個子集，它在同一運算下本身也是一個羣（Section 6.6）。

對稱性論證（Symmetry argument） 這樣的一種論證：由於問題中沒有任何東西能把兩個量區分開來，所以它們必定相等。一個好的對稱性論證可以取代好幾頁的計算（Section 12.5）。

T

定理（Theorem） 已獲證明的重要命題。較次要的結果常稱為*命題*（propositions），在通往定理的途中證明的稱為*引理*，而很快便能得出的結果則稱為*推論*。

跡（Trace） 方陣主對角線上各元素之和。與行列式一樣，把矩陣改用另一個基來表示時，它並不改變；它還等於各特徵值之和（Section 7.4、Section 7.7）。

超越數（Transcendental） 不是代數數的數：它不是任何整數系數（不全為零）多項式方程的根。e 和 π 都是超越數，不過要證明這一點並不容易（Section 1.4）。

三角不等式（Triangle inequality） $|a+b| \leq |a|+|b|$，對實數、複數或向量都成立：三角形的一邊永遠不會比另外兩邊加起來更長。

U

唯一分解（Unique factorisation） 每個大於 1 的整數都只能以一種方式寫成質數之積（不計因數的次序）這一性質。它並不如看起來那麼顯然：在有些數系中它並不成立（Section 1.7）。

唯一性定理（Uniqueness theorem） 指出某個問題只有一個解的定理。對於微分方程，當方程的性質不夠良好時，唯一性可能失效，以致同一個起點會導向幾個不同的未來（Section 8.1）。

V

向量空間（Vector space） 一批稱為向量的對象，它們可以相加，也可以乘以數，並遵從平面上箭頭所滿足的那些熟悉法則。多項式、函數以及許多微分方程的解都構成向量空間，所以線性代數的方法對它們都適用（Section 6.3）。

W

良定義（Well-defined） 若某個對象或規則的定義確實指明了單獨一個毫不含糊的東西，例如不取決於過程中所作的任意選擇，它便是良定義的。

良序原理（Well-ordering principle） 每個非空的正整數集合都有最小的成員。它與歸納法原理等價，而每一個以「取最小的反例」開始的論證，背後都是這個原理（Section 1.3）。

不失一般性（Without loss of generality） 常簡寫為 WLOG 的一句用語，意思是論證只考慮其中一種情況，因為其他情況除了要重新標記之外並無分別。「不失一般性，設 $a \leq b$」的意思是：如果 $a > b$，把兩者的名稱對調便可。