详细解答

STEP III 样本试卷，第 8 题

纯数学 · 向量与柯西–施瓦兹不等式

STEP III 样本试卷，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s3-q8

关键思路

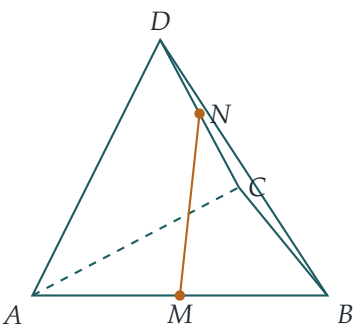
在第 (i) 部分，先为四个顶点设置位置向量（position vector）。我们需要的每一个长度，都是这些向量的某个简单组合的模（modulus），而长度的平方就是可以展开的点积（dot product）。于是两边都会化成同一个式子，而大部分的整理工作都可以靠对称性（symmetry）完成。在第 (ii) 部分，左边看起来像是与固定向量 $(3,2,6)$ 的点积，而这个向量的长度刚好是整数。这正是柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）大派用场的地方。

解答

第 (i) 部分

设四面体（tetrahedron）为 $ABCD$，各顶点相对于任意原点的位置向量为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$。它的六条棱可分成三对对棱（即没有公共顶点的棱）：

$$AB \text{ 与 } CD, \qquad AC \text{ 与 } BD, \qquad AD \text{ 与 } BC.$$



考虑 AB、CD 这一对：两条棱的中点分别是 $M = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 和 $N = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$，所以

$$MN^2 = \tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

另外两条中线（midline）可用同样方法求得，因此三条中线的平方和的四倍是

$$S = |-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

利用 $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 展开每一项。每一项都给出 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$，另加交叉项 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$；若 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 在该项中同号，交叉项便取正号。

想一想 把三项的交叉项加起来，结果会怎样？

任取一对顶点，例如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$。它们在第一项中同号，在另外两项中异号，所以它们的交叉项合共是 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。每一对顶点都是如此：三项中的每一项都把四个顶点分成两对（一对顶点连同与它相对的一对），而每一对顶点恰好只在三项中的其中一项同号。因此

$$S = 3(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2) - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}).$$

现在看各条棱。例如 $AB^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。把六条棱全部加起来：每个顶点都在三条棱上，所以每个 $|\mathbf{a}|^2$ 出现三次，而每一对顶点给出一个 $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$：

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 3\sum|\mathbf{a}|^2 - 2\sum_{\text{各对}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = S.$$

所以各棱的平方和，等于连接对棱中点的三条线段的平方和的四倍，这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

取

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{于是} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3x+2y+6,$$

其中 $|\mathbf{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$，$|\mathbf{b}| = \sqrt{x^2+y^2+1}$。由于任何实数都不大于它的绝对值，

$$3x+2y+6 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| = 7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

这就是所求的不等式。

等号成立的情况。两步都必须取等号。

- $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ 恰好在 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行时成立，因为 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$，而我们需要 $|\cos\theta| = 1$。由于 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$，这表示存在某个 λ 使得 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$。比较第三个分量得 $1 = 6\lambda$，所以 $\lambda = \frac{1}{6}$，而 $x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{3}$。
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 需要 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$。这里 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2 = \frac{49}{6} > 0$，所以这一步也成立。

直接验证：当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ 时，左边是 $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 6 = \frac{49}{6}$，右边是 $7\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1} = 7\cdot\frac{7}{6} = \frac{49}{6}$。所以等号成立当且仅当

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{3}.$$

验算

- 对于棱长为 1 的正四面体（regular tetrahedron），六条棱的平方和是 6。把它的顶点放在边长为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的正方体上相间的四个顶点，每条中线都连接一对相对的面的中心，所以长度是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$。
- 以 10^4 个随机四面体作数值测试，结果与恒等式吻合，误差只在舍入误差范围之内。至于 (ii)，$7\sqrt{x^2+y^2+1} - (3x+2y+6)$ 在 2×10^5 个随机点上都是正数，而它在一个细密网格上的最小值出现在 $(0.5, 0.335)$，接近 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$，而在该点它的值是 0。

常见错误

- 漏掉 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 这一步，或者在讨论等号成立的情况时忽略了它。在这题中因为 $\lambda > 0$，这一步不会出问题，但仍然必须检查：假如 $\lambda < 0$，两边的正负号就会不同。
- 用了 $(3,2,6)$ 和 $(x,y,1)$，却没有把 $|\mathbf{a}|$ 算成 7。这题是特意设计的，使 $3^2+2^2+6^2$ 是一个完全平方数。

STEP 之外

第 (i) 部分是平行四边形恒等式（parallelogram law）$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ 在三维空间中的近亲。事实上，三条中线相交于形心（centroid），并且互相平分。第 (ii) 部分就是柯西－施瓦茨不等式，它在任何内积空间（inner-product space）中都成立，包括由函数组成的空间，在那里它可以用来估计积分的上界。想在更广阔的背景下认识这两个想法，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）是很好的起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。