详细解答

STEP III 样本试卷，第 7 题

纯数学 · 降阶法

> **STEP III 样本试卷，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q7

关键思路

当一条二阶线性方程（second-order linear equation）含有 x^2y''、xy' 和 y 时，最自然的做法是试 x 的幂：这样每一项都会变成 x^α 的倍数，而方程就化为关于 α 的条件。一旦知道一个解 y_1，设 $y = y_1 v$ 就是*降阶法*（reduction of order）：只含 v 本身的各项会互相抵消，剩下一条关于 v' 的一阶方程。

解答

幂函数解

试 $y = x^\alpha$（取 $x > 0$，使 x^α 对任意实数 α 都有意义）。则 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ 及 $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$，所以

$$xy' - y = (\alpha - 1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

代入后得

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = [\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha+x-2)\,x^\alpha.$$

要使上式对*所有* x 都等于零，括号内的式子必须恒等于零。因子 $\alpha + x - 2$ 取决于 x，不可能恒等于零；因此 $\alpha = 1$。

所以 $y = x$ 是一个解，而这一点可以直接看出：$y'' = 0$ 且 $xy' - y = x - x = 0$。于是任何倍数 $y = Ax$ 也是解，这就是所谓解“与 x^α 成正比”的意思。

通解

按照提示，设 $y = xv$，其中 v 是 x 的函数。则

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

而方程中出现的那个组合可以化简得很漂亮：

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

代入方程，

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2(xv'' + 2v' + xv' - 2v') \\ &= x^3\,(v'' + v'). \end{aligned}$$

> ? **想一想** 为甚么所有只含 v 本身（不带导数）的项都消失了？

因为 $y = x$ 是一个解：假如 v 是常数，$y = xv$ 就是 x 的倍数，左边便等于零。所以只有 v' 和 v'' 能够留下来。降阶法之所以行得通，正是这个原因，而这也是检查代数运算的好方法。

在任何不包含 0 的区间上，我们可以除以 x^3，得到

$$v'' + v' = 0.$$

这是关于 $w = v'$ 的一阶方程：$w' = -w$，所以 $w = Be^{-x}$，其中 B 为常数。再积分一次（并把正负号并入常数之中），

$$v = A + Be^{-x}.$$

因此通解（general solution）为

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

其中 A 和 B 为任意常数。它含有两个任意常数，二阶线性方程的通解必须如此，而且 x 与 xe^{-x} 这两部分并非彼此的倍数。

直接验证新的那一部分：$y = xe^{-x}$ 给出 $y' = (1-x)e^{-x}$ 及 $y'' = (x-2)e^{-x}$，所以

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}[x^2 + x(1-x) - x] = 0.$$

关于 $x = 0$ 的一点说明。 y'' 的系数在 $x = 0$ 处等于零，所以我们只在远离 0 的地方除以 x^3。原则上，在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两边可以取不同的常数；但每一个这样的函数都有 $y(0) = 0$、$y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$ 及 $y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$，所以要使 y 在 0 处二阶可导，必须有 $B_+ = B_-$，继而 $A_+ = A_-$。因此 $y = Ax + Bxe^{-x}$ 在整条实数线上也是通解。

验算

- 如上所述，把 $y = x$ 和 $y = xe^{-x}$ 分别代回方程：两者都得出零。
- 数值验算：由 $x = 1$ 出发，以 $y(1) = y_0$、$y'(1) = y_1$ 逐步求解方程，公式预测 $A = y_1$、$B = (y_0 - y_1)e$。取 $y_0 = 2$、$y_1 = 1$，得 $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$；以四阶龙格—库塔法（Runge–Kutta）作数值积分，对若干个随机初始值，结果的误差都小于 10^{-8}。

常见错误

- 由因子 $(\alpha + x - 2)$ 得出 $\alpha = 2 - x$：α 必须是常数，所以这个根不可取。
- 对 $y = xv$ 求 y'' 时出错（应为 $2v' + xv''$，而不是 $v' + xv''$）。如果含 v 的项没有抵消，就表示求导时出了错。
- 停在 $v' = Be^{-x}$，在积分求 v 时忘记第二个常数。

STEP 之外

降阶法适用于任何二阶线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$：已知一个解 y_1，代换 $y = y_1 v$ 总会给出一条关于 v' 的一阶线性方程，而第二个解可以写成一个涉及 y_1 和 p 的积分。它与朗斯基行列式（Wronskian）和阿贝尔（Abel）公式关系密切，而在 $x = 0$ 这类点上试 x^{α}，正是以弗罗贝尼乌斯（Frobenius）方法求级数解的第一步。以上内容在 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）中都有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。