详细解答

STEP III 样本试卷，第 6 题

纯数学 · 双曲函数归约公式

STEP III 样本试卷，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s3-q6

关键思路

被积函数（integrand）$\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$ 可以很自然地拆成 $\sinh u$ 乘以 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$，而第二个因子除了一个常数倍之外，正是 $\operatorname{sech}^{n+1}u$ 的导数（derivative）。这样一来，分部积分法（integration by parts）就是顺理成章的做法。至于归约公式（reduction formula），恒等式 $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$ 让我们可以把同一个积分改写成两个 I 之差。

解答

积分恒等式

首先求一个稍后要用的导数。由于 $\operatorname{sech}u=(\cosh u)^{-1}$，由链式法则（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u=-(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u=-(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

因此我们取以下各项作分部积分：

$$f=\sinh u,\qquad g'=\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u,\qquad \text{于是}\qquad f'=\cosh u,\qquad g=-\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

由此得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u&=\Big[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\Big]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{n+1}\Big[\tanh u\operatorname{sech}^n u\Big]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \operatorname{sech}^n u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

当中用到 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u=\tanh u\operatorname{sech}^n u$ 及 $\cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u=\operatorname{sech}^n u$。

想一想 为甚么边界项（boundary term）会消失？$n > 0$ 这个条件又在哪里用到？

当 $u = 0$ 时，$\tanh 0 = 0$。当 $u \to \infty$ 时，$\tanh u \to 1$，而 $\operatorname{sech} u = 2/(e^u + e^{-u}) \to 0$，所以 $\operatorname{sech}^n u \to 0$，原因正是 $n > 0$。（若 $n = 0$，该项会趋向 1，而不是 0。）同一个事实 $\operatorname{sech}^n u < 2^n e^{-nu}$ 亦说明了 I_n 在 $n > 0$ 时收敛（converge）。因此边界项为零，而

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} I_n,$$

这正是所要证明的结果。

归约公式

现在用第二种方法计算同一个积分。由于 $\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$，

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

两部分在 $[0, \infty)$ 上的积分都收敛（因为 $n > 0$），所以

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = I_n - I_{n+2}.$$

与第一个结果比较，

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

即 $(n+1) I_{n+2} = n I_n$，这正是所要证明的结果。

I_6 的值

归约公式每次把 n 增加 2，所以我们需要一个 n 为偶数的起始值。最容易计算的是

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, \mathrm{d}u = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

（我们不能由 I_0 开始：它发散（diverge），而且在公式中代入 $n = 0$ 会得出 $I_2 = 0$ 这个错误的结论。这正是 $n > 0$ 发挥作用的地方。）于是

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

所以

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



验算

- 数列 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ 是递减的，这是必然的：$0 < \operatorname{sech} u \leq 1$，所以幂次愈高，数值愈小。
- 若改由 $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ 开始，公式给出 $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$，与直接作数值积分的结果吻合。
- 在 $[0, 60]$ 上使用辛普森法则（Simpson's rule）得 $I_6 \approx 0.5333333$，与 $\frac{8}{15}$ 相符；对于非整数的 n，例如 $n = 0.5$ 和 $n = 2.5$，恒等式和归约公式同样通过数值检验。

常见错误

- 在 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$ 中弄错正负号或因子 $n+1$：$\operatorname{sech} u$ 在 $u > 0$ 时递减，所以导数必定是负数。
- 没有说明边界项为何在无穷远处消失。这是唯一需要用到条件 $n > 0$ 的地方。
- 把答案写成 $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$，却没有计算 I_2 的值。

STEP 之外

这类归约公式与沃利斯公式（Wallis's formula）结构相同：设 $t = \tanh u$（或 $\sin \theta = \tanh u$，即古德曼代换（Gudermannian substitution）），I_n 便化为 $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} \theta \, \mathrm{d}\theta$，而所得的递推关系（recurrence）正是沃利斯（Wallis）的递推关系。到了大学，这些积分会以贝塔函数（Beta function）的值再次出现，$I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$，从而把递推关系推广至所有实数 $n > 0$；而我们处理边界项时的谨慎态度，正是反常积分（improper integral）理论的起点。若想看严谨的论述，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*；若想找更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。