详细解答

STEP III 样本试卷，第 5 题

纯数学 • 方程根的计数

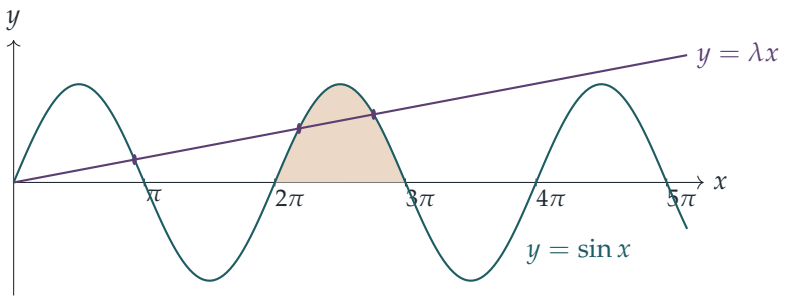
STEP III 样本试卷，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

关键思路

把直线 $y = \lambda x$ 与曲线 $y = \sin x$ 画在一起：方程的解就是两者的交点。直线只能在 $\sin x > 0$ 的地方与曲线相交，即在正的“拱” $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ 上；又因为 $\sin x$ 在每个拱上都是凹（concave）的，直线与一个拱要么相交两次，要么完全不相交（第一个拱除外，因为它从原点开始）。至于 ϵ 很小时的估算，用麦克劳林级数（Maclaurin series）$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ 就可以了。



（图中 $\lambda = 0.08$：第一个拱上有一个交点，涂上阴影的第二个拱上有两个交点，而直线在第三个拱到达顶点之前已升至 1 以上，所以 $N = 3$。）

解答

第 (i) 部分

$\lambda > 1$ **时无解**。曲线 $y = \sin x$ 的斜率（gradient）为 $\cos x \leq 1$，并且通过原点，而直线 $y = x$ 是它在原点的切线（tangent）。当 $x > 0$ 时，我们有 $\sin x < x$（函数 $x - \sin x$ 在

0 处的值为零，其导数（derivative）$1-\cos x \geq 0$ 只在孤立的点上等于零，所以它严格递增（strictly increasing））。从图像来看，当 $x>0$ 时，曲线严格位于其切线 $y=x$ 的下方，而若 $\lambda>1$，直线 $y=\lambda x$ 在该处位于 $y=x$ 的上方。因此

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{对所有} x>0,$$

故此没有非零解。

$\lambda = 1-\epsilon^2$ 的情况。当 $x>0$ 时，方程等价于

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\epsilon^2.$$

首先，解存在，而且只有一个。在 $(0,\pi]$ 上，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 是连续（continuous）的，当 $x\to 0^+$ 时趋向 1，在 $x=\pi$ 处等于 0，所以它在 $(0,\pi)$ 内某处取值 $1-\epsilon^2$；它在该区间上严格递减（由原点连到凹拱上一点的直线，会随着该点沿拱移动而变得愈来愈平缓），所以这种情况只出现一次。当 $x\geq\pi$ 时再没有其他解：因为 ϵ 很小，所以 $\lambda x \geq (1-\epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$。

现在来确定它的位置。利用 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$，

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1-\epsilon^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

> ? **想一想** 为甚么可以舍去 x^4 项？我们还未知道 x 是否很小。

当 $\epsilon\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 1$，而由于 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上由 1 开始严格递减，这个根必定趋向 0。所以当 ϵ 很小时，根也很小，于是 x^4 与 x^2 相比可以忽略。取首阶近似，$x^2/6=\epsilon^2$，所以

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

（若保留下一项，$x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$，可得更精确的结果 $x\approx \epsilon\sqrt{6}\left(1+\frac{3}{20}\epsilon^2\right)$。）

第 (ii) 部分

设 $g(x)=\sin x - \lambda x$，则方程的解就是 g 在 $x>0$ 时的零点。由于当 $x>0$ 时 $\lambda x>0$，每个解都满足 $\sin x>0$，所以它必定位于其中一个拱

$$A_n = \big((2n-2)\pi,\,(2n-1)\pi\big), \qquad n=1,2,3,\ldots$$

之上。

第一个拱。在原点处，直线的斜率为 $\lambda<1$，比曲线的斜率小，所以直线起初在曲线下方；在 $x=\pi$ 处，直线则在曲线上方（$\lambda\pi>0=\sin\pi$）。由于 $\sin x$ 在 A_1 上是凹的，而直线是直的，两者在该处恰好相交一次。所以 A_1 上恰好有一个解，它必定是 x_1，并且 $0<x_1<\pi$。

其后的拱。在 $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 上，其中 $n \geq 1$，有 $g''(x) = -\sin x < 0$，所以 g 是凹的，最多有两个零点。在拱的两端，$\sin x = 0 < \lambda x$，所以该处 $g < 0$。g 的最大值出现在 $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$ 之处，即 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$，而且 $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$，因为当 $\lambda > 0$ 时 $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$。由此可知，$g$ 在 $(2n\pi, c_n)$ 上递增，在 $(c_n, (2n+1)\pi)$ 上递减，所以：

- 若 $g(c_n) < 0$，直线与这个拱不相交；
- 若 $g(c_n) = 0$，直线与这个拱相切于一点；
- 若 $g(c_n) > 0$，则恰好有两个解，一个在 $(2n\pi, c_n)$ 内，另一个在 $(c_n, (2n+1)\pi)$ 内。

此外，直线一旦与某个拱不相交，便与其后所有的拱都不相交：若 $x \in A_{n+2}$，则 $x - 2\pi \in A_{n+1}$，所以 $\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$。

所以，与直线相交的拱是 $A_1, A_2, \ldots$ 直至最后某一个，它们分别贡献 $1, 2, 2, \ldots$ 个解，其后可能还有一个切点（tangency）。由于 $N = 2R + 1$ 是奇数，所以没有切点，而与直线相交的拱恰好是 $A_1, \ldots, A_{R+1}$。把各个解由小至大排列，拱 A_{n+1}（$1 \leq n \leq R$）包含 x_{2n} 和 x_{2n+1}，并且

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

第一个不等式给出题目所求不等式的第二行。把 x_{2n+1} 写成 $x_{2(n+1)-1}$，第二个不等式连同 $0 < x_1 < \pi$，便给出 $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$，其中 $m = 1, \ldots, R+1$。这就是所求的结果。

估算 N。当 λ 很小时，直线与很多个拱相交，所以 $R \geq 1$。在 x_{2R} 处，我们有 $\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \leq 1$，而由上文可知 $x_{2R} > 2R\pi$，所以

$$2R\pi\lambda < 1.$$

另一方面，直线与 $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$ 不相交。在这个拱的中点 $(2R + \frac{5}{2})\pi$ 处，我们有 $\sin x = 1$，所以必须有 $\lambda(2R + \frac{5}{2})\pi > 1$（否则该处 $g \geq 0$，直线便会与这个拱相交）。把两者合并，

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

当 λ 非常小时，$\frac{1}{\pi\lambda}$ 非常大，相比之下这个有界的误差可以忽略，所以

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

这是合理的：直线在 $x = 1/\lambda$ 处到达高度 1，而在这一点之前，$\sin x$ 大约有 $\frac{1}{2\pi\lambda}$ 个完整的周期，每个周期贡献两个交点。

验算

- 取 $\epsilon = 0.01$（$\lambda = 0.9999$），用二分法（bisection）求得根为 0.0244953，而 $\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$；两者之比为 1.000015，正好就是 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ 这个修正。
- 当 $\lambda = 0.001$ 时，电脑找到 $N = 317$ 个根，而 $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$；当 $\lambda = 0.01$ 时，电脑找到 31 个根，而估算值为 31.8。就多个 λ 值所找到的全部根，都符合 (ii) 的区间不等式，而 N 也落在上述的界限之内。
- 当 $\lambda = 1.0001$、1.1、2 或 5 时，找不到任何根。

常见错误

- 忘记了 x_1 独自位于第一个拱上：原点也是一个交点，所以这个拱只贡献一个非零解，而不是两个。
- 没有给出理由，便把 x_{2n} 放在所属拱的前半部分。关键在于 g 要过了 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ 之后才开始递减，而这一点位于 $\sin x$ 的顶点之前。

STEP 之外

近似式 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$ 是渐近展开（asymptotic expansion）的第一步，而在截断级数之前先论证根必定很小，正是分析课程所要求的那种严谨。利用凹性、单调性（monotonicity）和中间值定理（intermediate value theorem）来数算解的个数，是大学一年级分析课的标准内容；参看 Abbott 的 *Understanding Analysis*。一个相关的经典例子是 $\tan x = x$，它的根趋近 $(n + \frac{1}{2})\pi$，并且出现在热传导和振动问题之中。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。