详细解答

STEP III 样本试卷，第 4 题

纯数学 • 抛物线的切线

> **STEP III 样本试卷，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q4

关键思路

一条直线与抛物线（parabola）相切，当且仅当把直线方程代入抛物线方程后，所得的二次方程有重根（repeated root）。因此第一部分只是一行的判别式（discriminant）计算，并且给出一族以 t 标记的切线（tangent）。至于第二部分，可把从某定点所作的切线，看成满足某个二次方程的 t 值：这样一来，有关 L 和 M 的一切都可以用两根之和与两根之积表示，而这两个量可直接从系数读出。

解答

切线

由直线方程得 $x = ty - at^2$。代入 $y^2 = 4ax$ 得

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

这个关于 y 的二次方程有重根 $y = 2at$，所以直线与抛物线恰好交于一点，而且重数为二：直线与抛物线相切。（它并不是与抛物线的轴平行的直线——那种直线也只与抛物线相交一次——因为它不是水平线；当 $t = 0$ 时，它是直线 $x = 0$，即顶点处的切线。）对应的 x 为 $x = t(2at) - at^2 = at^2$，所以切点是

$$(at^2,\ 2at).$$

作为覆核，对 $y^2 = 4ax$ 作隐函数求导（implicit differentiation），得在该点 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$，这正是 $ty = x + at^2$ 的斜率。

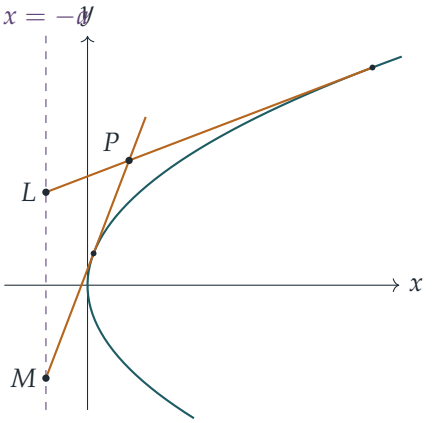
轨迹

抛物线上每一点都可写成 $(at^2, 2at)$，而且对应的 t 是唯一的，所以每条切线都是直线 $ty = x + at^2$ 的其中一条。设给定的点为 $P = (h, k)$。参数为 t 的切线通过 P，当且仅当

$$at^2 - kt + h = 0.$$

要有两条切线，就需要两个相异实根 t_1, t_2，即 $k^2 > 4ah$（P 位于抛物线之外）。这时

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$



参数为 t 的切线与准线（directrix）$x = -a$ 相交于满足 $ty = -a + at^2$ 之处。只要 $t \neq 0$，便有

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

（若 $t = 0$，切线是 $x = 0$，与准线平行，没有交点。这种情况只会在 $h = t_1 t_2\, a = 0$ 时出现，所以要 L 和 M 存在，必须有 $h \neq 0$，这时 $t_1, t_2 \neq 0$。）因此 L 和 M 分别是 $(-a,\, a(t_1 - \frac{1}{t_1}))$ 和 $(-a,\, a(t_2 - \frac{1}{t_2}))$，而由于两点位于同一条铅垂线上，

$$\begin{aligned} LM &= \left|a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\right| = \left|a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2|\left|\frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2}\right|. \end{aligned}$$

想一想 怎样不解二次方程而求得 $t_1 - t_2$？

它的平方是两根的对称式：

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

另外

$$\frac{t_1t_2+1}{t_1t_2}=\frac{h/a+1}{h/a}=\frac{h+a}{h}.$$

把 LM 的表达式平方再代入，

$$LM^2=a^2\cdot\frac{k^2-4ah}{a^2}\cdot\frac{(h+a)^2}{h^2}=\frac{(h+a)^2(k^2-4ah)}{h^2}.$$

若 $LM=\ell$，两边同乘 h^2 得

$$(h+a)^2(k^2-4ah)=\ell^2h^2,$$

所以 $P=(h,k)$ 位于 $(x+a)^2(y^2-4ax)=\ell^2x^2$ 上，这正是所要证明的。

验算

- 取 $a=1$ 及 $P=(1,3)$，如图所示。参数满足 $t^2-3t+1=0$，所以 $t=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$，而 $t-\frac{1}{t}=\pm\sqrt{5}$（因为 $t_1t_2=1$，故 $1/t_1=t_2$）。因此 $LM=2\sqrt{5}$，$LM^2=20$，而公式给出 $(1+1)^2(9-4)/1^2=20$。
- 准线上的点，即 $h=-a$：公式给出 $LM=0$。事实上，从这样的点所作的切线，与准线的交点就是该点本身，所以 $L=M$。
- 我们用另一方法独立地求出切线（直线 $y=k+m(x-h)$，其中 $hm^2-km+a=0$），对超过 14,000 组随机的 a、h、k 作测试，计算所得的 LM^2 每次都与 $(h+a)^2(k^2-4ah)/h^2$ 吻合。例如 $a=1$、$P=(2,5)$ 时，两种方法都得出 $LM^2=38.25$。

常见错误

- 把切线的参数方程用反了：P 固定而 t 未知，得出的是二次方程 $at^2-kt+h=0$，而不是关于 h 和 k 的方程。
- 写成 $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}=\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$；正确的是 $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$，正是这个正负号令两项相加而非互相抵销。

STEP 之外

从一点向圆锥曲线（conic）所作的切线，以及连接两个切点的直线（即该点的极线（polar）），是射影几何（projective geometry）的起点。在射影几何中，极点（pole）、极线与准线都可纳入同一幅图像：准线就是焦点（focus）的极线。像本题这样通过根的对称函数（symmetric functions）来处理各根，也是迈向方程论（theory of equations）和伽罗瓦理论（Galois theory）的第一步。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收录了更多这类风格的坐标几何题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。