详细解答

STEP III 样本试卷，第 3 题

纯数学 · 复数的三角不等式

> **STEP III 样本试卷，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q3

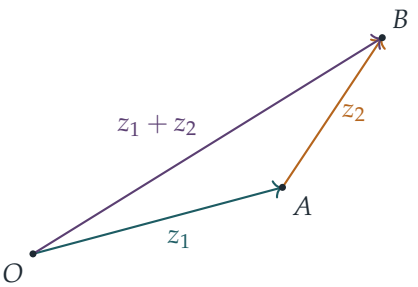
关键思路

题中的不等式就是三角不等式（triangle inequality）：三角形任何一边的长度都不会超过另外两边之和。反复应用这个不等式，便可以用各项模（modulus）之和来界定整个和的模。如果当 $|z| \leq \frac{1}{3}$ 时，方程左方的模总是严格小于 1，那么它就永远不可能等于 1；而这个上界只需用一个等比级数（geometric series）便可求得。

解答

几何意义

在阿根图（Argand diagram）中，把 z_1 看成由原点 O 到点 A 的位移，把 z_2 看成由 A 到点 B 的位移。那么 $z_1 + z_2$ 就是由 O 直接到 B 的位移。



三角形 OAB 三边的长度分别是 $|z_1|$、$|z_2|$ 和 $|z_1 + z_2|$。这个不等式说的是：由 O 直接走到 B，路程绝不会比途经 A 更长，也就是三角形的一边至多等于另外两边之和。等号成立，当且仅当三角形退化成一条线段，而 A 位于线段 OB 上，即 z_1 与 z_2 指向同一方向

（其中一个是另一个的非负实数倍，或者其中一个是零）。

利用归纳法（induction），同样的结论对任意有限多项都成立：

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \le |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

因为 $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \le |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$。从几何上看，由 n 段直线组成的路径，其长度至少等于由起点到终点的直线距离。

在 $|z| \le \frac{1}{3}$ 内没有解

假设 $|z| \le \frac{1}{3}$，并且对每个 i 都有 $|a_i| \le 2$。先用推广后的三角不等式，再用 $|ab| = |a||b|$，得

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\le |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\le 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

其中第二步用到 $|a_i| \le 2$，以及对每个 k 都有 $|z|^k \le \left(\frac{1}{3}\right)^k$（所涉及的量全部非负，所以可以逐项估计上界）。

括号内是一个有限等比级数，首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$：

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

> ? **想一想** 上面每一步都只用了 $\le$，为甚么最后的不等式却是严格的?

严格性来自级数，而不是来自三角不等式。由于求和到第 n 项便停止，它与无穷级数的总和 1 相比，恰好少了 $3^{-n} > 0$。所以无论 a_i 取甚么值，也无论 z 是哪一个满足 $|z| \le \frac{1}{3}$ 的数，都有

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \le 1 - 3^{-n} < 1.$$

但假如 z 是一个解，左方就会等于 $|1| = 1$。这是矛盾的，所以方程在 $|z| \le \frac{1}{3}$ 内没有解，这正是所要证明的。

验算

- 最坏的情况是 $a_1 = \cdots = a_n = 2$ 且 $z = \frac{1}{3}$，这时每个不等式都变成等式，左方等于 $1 - 3^{-n}$。当 $n = 10$ 时，这个值是 $0.99998\ldots$，仅仅略小于 1。
- 常数 $\frac{1}{3}$ 不能再改进。当每个 $a_i = 2$ 时，实函数 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处取负值，而当 n 很大时，它在稍稍超过 $\frac{1}{3}$ 的地方取正值，所以存在与 $\frac{1}{3}$ 要多接近有多接近的实根。

- 以数值方法测试了 200 000 组随机选取的 $n \leq 30$、满足 $|a_i| \leq 2$ 的 a_i 以及满足 $|z| \leq \frac{1}{3}$ 的 z，左方的模从未达到 1 或以上。

常见错误

- 用无穷级数来估计上界，只得到 ≤ 1，这并不能排除等号成立的可能。你需要的是严格不等式，而它正是来自级数只有有限项这一点。
- 写下 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \leq |a_1 z| + \cdots$ 却没有说明理由：这是推广到 n 项的三角不等式，题目设置第一部分正是为此。

STEP 之外

这是*无根区域*（root-free region）最简单的例子：只要多项式的系数有界，它的根就会被排除在某个圆盘之外。把同样的估计反过来用，便得到柯西（Cauchy）界：$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$ 的每个根的模都小于 $1 + \max |c_k|$；而在复分析（complex analysis）中，儒歇定理（Rouché's theorem）更把这类论证化为圆内根的个数的精确计算。想看一个极富几何味道的讲述，可以读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。