详细解答

STEP III 样本试卷，第 2 题

纯数学 · 二项式不等式与极限

> **STEP III 样本试卷，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

关键思路

设 $y = 1 + x$，其中 $x > 0$，则 y 的幂可写成二项式展开（binomial expansion），而展开式中每一项都是非负的。因此，我们可以舍去其余各项，只保留一项，所得的仍然是一个下界（lower bound）。保留含 x 的一项，得到的下界增长速度与 n 相若，足以超越任何固定的 K；若要在除以 n 之后仍能超越 K，便需要一个增长速度与 n^2 相若的下界，所以我们改为保留含 x^2 的一项。

解答

不等式

设 $x \geq 0$，并设 n 为正整数。根据二项式定理（binomial theorem），

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

由于 $x \geq 0$，首两项之后的每一项都是非负的，所以

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

最后一个不等式（inequality）是严格的，原因在于那个 1；正因如此，即使 $x = 0$，结果依然成立（此时不等式变成 $1 > 0$）。

推导 y^n 最终会超过 K

设 $y > 1$，并取 $x = y - 1$，于是 $x > 0$。由第一部分可知，对每个正整数 n，

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

若 $K \leq 0$，则毋须再做甚么：对每个 n 都有 $y^n > 0 \geq K$，所以取 $N = 1$ 即可。若 $K > 0$，则选取一个整数 N，使得

$$N > \frac{K}{y-1},$$

这是办得到的，因为 $y - 1 > 0$，所以右边是一个固定的数。于是对每个整数 $n \geq N$，

$$y^n > n(y-1) \geq N(y-1) > K,$$

其中中间一步用到了 $y - 1 > 0$。这正是我们所需要的结果。注意同一个 N 对所有 $n \geq N$ 都适用，而不仅是对 $n = N$ 适用，因为下界 $n(y-1)$ 随 n 递增。

证明 y^n/n 最终会超过 K

由下界 $y^n > n(y-1)$ 只能得出 $y^n/n > y - 1$，而这是一个固定的数，对付不了很大的 K。我们需要为 y^n 找一个增长得比 n 更快的下界。

想一想 这一次，我们应该保留二项式展开中的哪一项?

保留含 x^2 的一项。由于 $x = y - 1 > 0$，展开式中所有项都是正的，所以对每个正整数 n，

$$y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

（当 $n = 1$ 时，展开式中并没有含 x^2 的项，但最后一个不等式仍然成立，因为其右边等于 0。）两边除以 $n > 0$，得

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

现在右边会随 n 增大而无止境地增长，这正是我们所需要的。若 $K \leq 0$，则取 $N = 1$ 即可，因为 $y^n/n > 0$。若 $K > 0$，则选取一个整数 N，使得

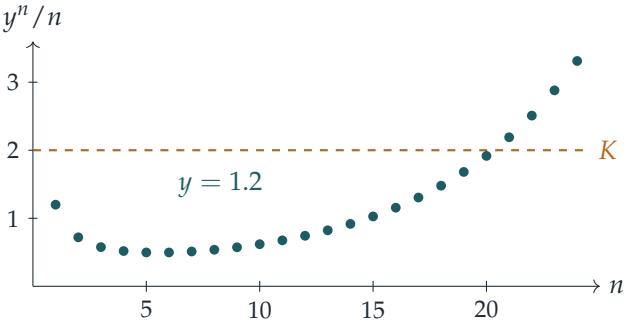
$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

于是对每个整数 $n \geq N$，我们有 $n - 1 \geq N - 1 > 2K/(y-1)^2$，因此

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

这就是所要求的结果。

这个下界同样随 n 递增，所以论证对每个 $n \geq N$ 都成立。这一点在这里十分重要：y^n/n 本身并非总是递增的。当 y 接近 1 时，它起初会下降（例如，只要 $y < 2$，便有 $y^2/2 < y$），正如 $y = 1.2$ 的略图所示。因此，我们不能只找出一个满足 $y^n/n > K$ 的 n，然后声称其后各项都会更大。



验算

试取 $y = 1.01$ 和 $K = 1000$。按照我们的方法，对于 $y^n > K$ 得出 $N = 100\,001$，对于 $y^n/n > K$ 得出 $N = 20\,000\,002$。直接计算可知，其实对每个 $n \geq 1424$，$1.01^n/n > 1000$ 已经成立。我们的 N 远非最小的可能值，但题目只要求找出某一个 N。我们还以有理数（rational）x 作精确计算，对数千组随机的 x 和 n 检验了两个不等式，并对数千组随机的 $y > 1$ 和 K 检验了所选的 N（以及许多更大的 n）。

常见错误

- 只证明了对某一个 N 有 $y^N > K$，却没有解释为何对每个 $n \geq N$ 都有 $y^n > K$。
- 在最后一部分使用 $y^n > n(y-1)$：除以 n 之后只剩下一个常数，无法超越任意的 K。
- 忘记了 K 可以是负数或零；在这种情况下，$K/(y-1)$ 本身并不是一个合理的下界（不过此时任何 N 都适用）。

STEP 之外

这是大多数学生遇到的第一个严格的“ε–N”式论证：它证明了当 $y > 1$ 时，$y^n \to \infty$ 且 $y^n/n \to \infty$。运用同样的技巧，保留含 x^{k+1} 的一项，便可证明对任何固定的 k 都有 $y^n/n^k \to \infty$，所以指数函数（exponential）的增长胜过任何多项式（polynomial）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 正是由这类推理出发，建立起数列（sequence）与极限（limit）的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。