详细解答

STEP III 样本试卷，第 15 题

概率与统计 • 随机网络的连通性

STEP III 样本试卷，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s3-q15

关键思路

先把几何抛开：唯一要紧的，是六条路之中哪几条仍然开通。任何一条村都能从其余各村到达，当且仅当开通的道路在四条村之间构成一个连通（connected）的网络。因此，我们把所有可能的开通道路集合按所含道路的数目分类，数出每种大小之中有多少个是连通的，再各自乘上相应的概率。由于只有四条村，这个计数过程既短又干净。

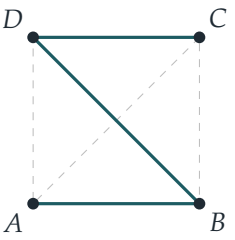
解答

设 $q = 1 - p$ 为某一条路开通的概率。设 K 为下雪之后每条村都能从其余各村到达这一事件。

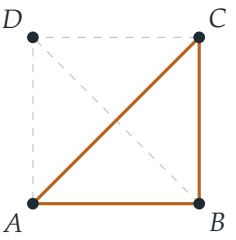
由于六条路互相独立（independent），任何一个指定的 k 条开通道路的集合（其余 $6 - k$ 条封闭）出现的概率都是 $q^k p^{6-k}$。所以

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

其中 N_k 是能把四条村全部连通的 k 条道路集合的数目。



三条路：连通各村的树



三条路：三角形，D 被隔绝

计数连通的道路集合

最多两条路开通。每条开通的路连接两条村，所以从某一条村出发，每条路最多只能带来一条新的村。要到达其余三条村，至少需要三条路。因此 $N_0 = N_1 = N_2 = 0$。

三条路开通。三条路的集合共有 $\binom{6}{3} = 20$ 个。假设某个这样的集合未能连通各村。若有某条村被隔绝，则三条路全部落在其余三条村之间。但连接那三条村的路只有三条，所以这个集合恰好是一个三角形。若没有任何村被隔绝，则四条村分成两对，而最多只有两条路（每对之内各一条）可以开通，矛盾。所以失败的情况只有 4 个三角形，每个对应一条被隔绝的村，于是

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

? **想一想** 为甚么有四条路开通时，网络绝不可能不连通？

四条或以上的路开通。沿用上面两种失败的方式。若有一条村被隔绝，所有开通的路都必须落在其余三条村之间，而那里只有三条路。若分成两对，则最多只容许两条路开通。有四条或以上的路开通时，两种情况都不可能发生，所以每个这样的集合都是连通的：

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

所求概率

把各个数目合起来，

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

按 p 的幂展开，得到等价的形式

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

$p = \frac{1}{2}$ 的情况

此时 $p = q = \frac{1}{2}$，所以道路开通与封闭的 $2^6 = 64$ 种组合全部等可能，每种的概率为 $\frac{1}{64}$。因此

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

正是所求。

验算

- 极端值。当 $p = 0$ 时，每条路都开通，公式给出 1。当 $p = 1$ 时，每条路都封闭，公式给出 $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$。

- 补事件（*complement*）。网络不连通，当且仅当有某条村被隔绝，或者四条村分成两对而两对之间没有任何路相通。一条村被隔绝的概率是 p^3。对四条村运用容斥原理（inclusion–exclusion）（两条指定的村同时被隔绝需要五条路封闭，而三条村被隔绝即表示四条村全部被隔绝），得出 $4p^3 - 6p^5 + 3p^6$。分成两对的方法有 3 种，每种在两条对内的路都开通的情况下，再加上 p^4q^2。以一减去总和，结果与上面的公式吻合：当 $p = \frac{1}{2}$ 时，不连通的概率是 $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$。
- 穷举法（*brute force*）。用电脑列出全部 64 个道路集合，证实了 $16, 15, 6, 1$ 这几个数目。以 $p = 0.3$ 进行模拟，得出 0.893，而准确值是 0.8925。

常见错误

- 把全部 20 个三条路的集合都当作连通，忘记了那四个三角形。
- 以为任何四条路的集合仍有可能令某条村孤立。一条村只有在它的三条路全部封闭时才会被隔绝。
- 写 $q^k p^{6-k}$ 时，把 p（封闭）和 $1 - p$（开通）混淆。

STEP 之外

这是随机图（random graph）的一个微型例子：网络的每条边各自独立地保留下来，然后我们问所得的结果是否连通。这个 p 的多项式称为该网络的可靠度多项式（reliability polynomial），而 16 这个数则是凯莱公式（Cayley's formula）的一个实例：连接 n 个有标号的点的树（tree）共有 n^{n-2} 棵。对于大型网络，艾狄胥（Erdős）和伦伊（Rényi）发现，当道路开通的概率越过某个临界值（threshold）时，连通性会异常突然地出现。若想进一步了解由独立事件构成的随机结构，可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。