详细解答

STEP III 样本试卷，第 14 题

力学 • 转动碰撞

STEP III 样本试卷，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s3-q14

关键思路

枢轴（pivot）对棒施加一个未知的冲量（impulse），所以线动量（linear momentum）并不守恒；但这个冲量对枢轴没有力矩（moment），因此对中点的角动量（angular momentum）守恒。再在接触点应用牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）（由于碰撞是完全弹性（perfectly elastic）的，恢复系数为 1），一切便确定下来。至于第二部分，先找出质点接下来怎样运动，然后追踪两个物体：棒的另一半会转过来，到达质点的运动直线。

解答

模型。质点视为点质量；桌面光滑，所以两个物体都不受摩擦力；棒是均匀的，并在其中点 O 处光滑地枢接。棒对 O 的转动惯量（moment of inertia）为

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

碰撞期间，冲量沿质点的运动直线作用（棒是光滑的，而质点垂直撞向棒），所以质点继续沿同一直线运动。设碰撞后质点的速度为 v，以其原来的运动方向为正。

角速率

对 O 的角动量。系统（质点和棒）所受的唯一外来冲量来自 O 处的枢轴，而它对 O 的力矩为零。碰撞前，质点对 O 的角动量为 mua，而棒静止，所以

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

恢复定律。棒上被撞击的一点与 O 相距 a，所以刚碰撞后，它以速率 $a\omega$ 沿质点原来的方

向运动。恢复系数（coefficient of restitution）为 1，故分离速率等于接近速率：

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

想一想 牛顿恢复定律可以用于转动中的物体吗?

可以：它适用于两个接触点沿公法线方向的速度。如果你喜欢，也可以改用能量："完全弹性"表示动能（kinetic energy）守恒，$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$。把它写成 $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$，并利用 (1)，即 $u - v = \frac{4}{3}a\omega$，便得 $u + v = a\omega$（两边除以 $\omega \neq 0$），这正是 (2)。

把 (1) 和 (2) 相加，消去 v：

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

这就是所要求的结果。然后由 (2)，

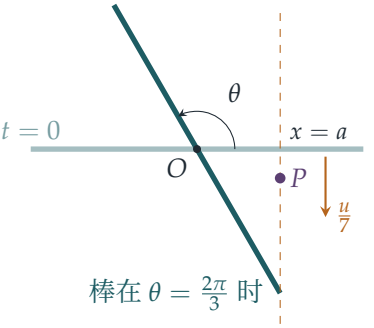
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

所以质点沿原来的直线以速率 $u/7$ 反弹。

第二次碰撞

在桌面上取坐标轴，以 O 为原点，x 轴沿棒的初始位置，而质点原本沿直线 $x = a$ 向正 y 方向运动，于是它在时间 $t = 0$ 时在 $(a, 0)$ 撞击棒。那么当 $t > 0$ 时：

- 质点位于 $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$，向负 y 方向匀速运动；
- 被撞击的一点向正 y 方向运动，所以棒逆时针转动，在时间 t 时它与 x 轴成角 $\theta = \omega t$。在两者再次碰撞之前，没有其他力作用于任何一个物体，所以两者的运动都是匀速的。



棒的半长为 $2a$，所以只有当棒所在直线上落在直线 $x = a$ 的那一点（它与 O 相距 $a/|\cos\theta|$）距离 O 不超过 $2a$ 时，棒才会到达该直线；也就是说，当 $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$ 时。在这种情况下，棒在高度 $y = a\tan\theta$ 处与该直线相交。

- 当 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ 时，棒与该直线相交于 $y = a\tan\theta > 0$，在 x 轴上方，而质点在其下方：没有接触。
- 当 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ 时，棒根本到不了该直线。
- 当 $\frac{2\pi}{3} \le \theta < \pi$ 时，棒的另一半与该直线相交于 $y = a\tan\theta < 0$，与质点在同一侧。

现在比较位置。由于 $t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$，在角度为 θ 时质点的 y 坐标为 $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$。考虑

$$f(\theta) = (\text{棒的}y\text{ 坐标，取于直线}x = a) - (\text{质点的}y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \le \theta < \pi.$$

- 在 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时（棒的末端到达该直线）：$f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$，因为 $\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$。质点位于 $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$，介乎 x 轴与位于 $y = -\sqrt{3}a$ 的棒末端之间：棒的末端已经转到质点之外。
- 当 $\theta \to \pi^-$ 时：$\tan\theta \to 0$，所以 $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$。棒正向上扫回 x 轴，而质点大约位于 $-0.52a$。

f 在 $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 上连续，所以根据介值定理（intermediate value theorem），在两者之间存在某个 θ 使得 $f(\theta) = 0$：在那一刻棒正处于质点的位置，两者再次碰撞。（由上面头两点可知，之前不可能有接触。）证明至此完成。

以数值计算，碰撞发生在 $\tan\theta = -\theta/6$ 之处，即 $\theta \approx 2.716$（约 155.6°），时间为 $t \approx 3.17\,a/u$，此时质点位于 $y \approx -0.45a$，沿棒量度距离 O 约 $1.10a$。

验算

- 能量：以 $a\omega = \frac{6}{7}u$ 和 $v = -\frac{1}{7}u$ 代入，最终动能为 $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$，恰好等于初始能量。
- 对一个转动惯量为 I 的物体，在距离 d 处撞击，重复以上论证可得 $d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$。当 $I \to 0$ 时，被撞击的一点以 $2u$ 离开，正如与一个极轻的物体作弹性碰撞；当 $I \to \infty$ 时，棒几乎不转动，质点以速率 u 反弹。这里 $I/ma^2 = \frac{4}{3}$，得出 $\frac{6}{7}u$。
- 我们以精确分数验证了 $a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ 同时令角动量和能量守恒，然后把两个运动按时间逐步推进：碰撞后的首次接触发生在 $\theta \approx 2.7165$，与用二分法（bisection）解 $\tan\theta + \theta/6 = 0$ 所得的结果吻合。

常见错误

- 以为线动量守恒。枢轴会提供冲量，所以只有对枢轴的角动量守恒。
- 使用 $I = \frac{1}{3}m\ell^2$（这是对端点的值），或者忘记棒的长度是 $4a$ 而不是 $2a$。

▶ 在棒被撞击的那一半上寻找第二次碰撞。那一半会远离质点的运动直线；与质点相遇的是转过来的另一半。

STEP 之外

把对某固定点的角动量与能量条件或恢复条件配合使用，是处理刚体（rigid body）冲击运动的标准方法，并由此引出撞击中心（centre of percussion）的概念：即撞击一个枢接物体时，枢轴处不会产生冲量的那一点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）仔细讲解了刚体碰撞和角动量，并收录了许多正是这一类型的习题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。