详细解答

STEP III 样本试卷，第 13 题

力学 • 滚动圆环

STEP III 样本试卷，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

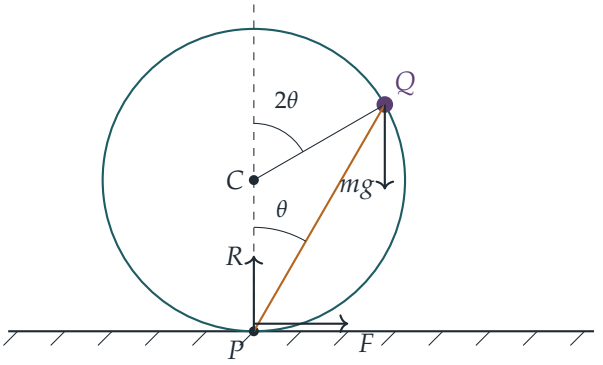
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

关键思路

由于圆环是轻的，系统中唯一的动能就是质点的动能；又由于圆环作滚动，摩擦力不作功。因此能量守恒（energy conservation）可立即给出速率。滚动亦完全确定了几何关系：圆环转过 2θ 之后，其中心已移动了距离 $2a\theta$，由此可把 x 和 y 单用 θ 表示。最后，轻圆环不能承受任何净力，所以桌面的反作用力恰好就是质点的加速度所要求的力，而且它不能是负数。

解答

把圆环模型化为一个只滚不滑的轻刚性圆，把质点视为固定在环边上的点质量。设 P 为圆环与桌面的接触点，C 为圆心，Q 为质点。取圆环沿正 x 方向滚动，使 θ 由 0 开始增加。



这里 R 和 F 分别是桌面在 P 点作用于圆环的法向反作用力（normal reaction）和摩擦力（friction），而弦 PQ 与铅垂线的夹角为 θ（即圆心角 2θ 的一半）。

速率

R 和 F 都作用于 P 点，而由于圆环作滚动，该点在瞬间是静止的，所以两者都不作功。圆环是轻的，所以唯一的动能是质点的动能，唯一的势能变化也是质点的势能变化。质点由高度 $2a$ 出发，起初几乎静止；当半径 CQ 与向上的铅垂线成角 2θ 时，它的高度为 $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$。由能量守恒得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

所以 $v^2 = 4ga\sin^2\theta$，而由于 $0 \le \theta < \tfrac{\pi}{2}$ 给出 $\sin\theta \ge 0$，

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

这正是所求。

位置与 $\dot\theta$

圆环已转过角 2θ，而只滚不滑意味着圆心向前移动的距离等于弧长 $a\cdot 2\theta$。相对于 C，质点在前方 $a\sin 2\theta$、上方 $a\cos 2\theta$ 处。所以

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

对时间求导，

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

因此

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

想一想 有没有更快的方法看出 $v = 4a\dot\theta\cos\theta$?

有：P 是瞬时转动中心（instantaneous centre of rotation），而圆环以角速率 $2\dot\theta$ 转动。弦 PQ 在 C 所对的角为 $\pi - 2\theta$，所以 $PQ = 2a\cos\theta$，于是 $v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$，与上面的计算吻合。

由于 $\dot\theta > 0$ 且 $\cos\theta > 0$，与由能量求得的速率比较，

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

这就是要求的第一个结果。（左边必须是变率 $\dot\theta$，而不是 θ：右边的单位是 s^{-1}。）

铅垂加速度

把 $\dot\theta$ 代入 $\dot y$,

$$\dot y = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac12(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

再求导一次，并再次使用 $\dot\theta$,

$$\ddot y = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac12(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

这正是所求。同样地，$\dot x = 4a\cos^2\theta\,\dot\theta = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$，而

$$\ddot x = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot\theta = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

甚么令滚动停止

圆环是轻的，所以作用于“圆环连质点”这个系统的合力等于 m 乘以质点的加速度。外力有向下的 mg、向上的 R 和水平方向的 F。沿铅垂方向分解,

$$R - mg = m\ddot y \quad\Longrightarrow\quad R = mg\big(1-2\sin^2\theta\big) = mg\cos 2\theta,$$

而沿水平方向则有 $F = m\ddot x = mg\cos 2\theta\tan\theta$，所以当 $R>0$ 时 $F/R = \tan\theta$。

> **想一想** 当 θ 超过 $\pi/4$ 时，会出甚么问题?

桌面只能推而不能拉，所以 $R\ge 0$。但 $R = mg\cos 2\theta$ 在 $\theta=\pi/4$ 时降至零，此时质点与圆心同高, 而要继续滚动下去就需要 $R<0$。换一个说法, 继续滚动需要 $\ddot y = -2g\sin^2\theta < -g$：质点向下的加速度要比自由下落还要大，单靠重力是做不到的。所以在 $\theta=\pi/4$ 时接触力消失，圆环离开桌面。此后质点作抛体运动（projectile motion），初速度的分量为向前 $(ga)^{1/2}$ 和向下 $(ga)^{1/2}$，而轻圆环只是被它带着走，其最低点升离桌面。

摩擦力可能更早介入。滚动需要 $|F|\le\mu R$，即 $\tan\theta\le\mu$，而当 $\theta\to\pi/4$ 时 $\tan\theta$ 递增至 1。所以若摩擦系数（coefficient of friction）满足 $\mu<1$，圆环在 $\tan\theta=\mu$ 时便开始滑动，未及到达 $\theta=\pi/4$。只有当 $\mu\ge 1$ 时，它才会一直滚到 $\theta=\pi/4$，然后跳起。

验算

- 当 $\theta=0$ 时，$\dot\theta=0$：最高位置是一个平衡位置，这就是为甚么圆环必须被轻微移离该位置。
- 当 $\theta=\pi/4$ 时：$v=(2ga)^{1/2}$，这是下落距离 a 所得的速率，而质点确实由 $2a$ 降到了 a。
- 电脑独立地对 $\phi=2\theta$ 的运动方程作数值积分（由拉格朗日量（Lagrangian）$ma^2(1+\cos\phi)\dot\phi^2 - mga(1+\cos\phi)$ 出发），并把有限差分求得的速度和加速度与公式比较。速

率、$\dot{\theta}$、$\ddot{y}$、$R = mg\cos 2\theta$ 和 $F/R = \tan\theta$ 全部吻合，误差在 10^{-6} 以内；例如在 $\theta = \pi/4$ 时，它给出 $R = 0$ 和 $F/R = 1$。

常见错误

- 以为圆心移动的距离是 $a\theta$ 而不是 $2a\theta$：圆环转过的角是 2θ，不是 θ。
- 把摩擦力计入能量方程。接触点是静止的，所以圆环滚动时摩擦力不作功。
- 只说质点“掉下来”。质点是固定在环上的；离开桌面的是圆环，因为反作用力否则就要变成负数。

STEP 之外

滚动物体的接触点就是它的瞬时转动中心，而只滚不滑是一个约束（constraint），它消去一个自由度（degree of freedom）而不作功。这类约束可由拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）有系统地处理：只需用单一坐标（例如 θ）写出能量，运动方程便自动得出；上面的验算正是这样做的。约束力何时消失的问题（珠子离开球面、汽车离开路拱）是大学一年级动力学的典型题目。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对滚动运动和约束力有详细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。