详细解答

STEP III 样本试卷，第 12 题

力学 • 杆的平衡

STEP III 样本试卷，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

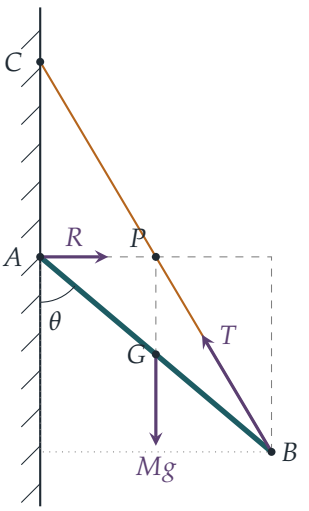
step.maths.org/questions/spec-s3-q12

关键思路

杆只受三个力作用：它的重量、光滑墙壁的反作用力（reaction），以及绳的张力（tension）。使物体保持平衡（equilibrium）的三个不平行的力必定通过同一点，而在这题中，这一点很容易找到。它完全确定了整个几何结构，之后只需分解一次力，便可求得张力。

解答

模型。杆是均匀的，所以它的重量 Mg 作用于中点 G。墙壁是光滑的，所以在 A 的反作用力 R 是水平的（垂直于墙壁）。绳是轻而不可伸长的，所以它以张力 T 拉着 B，方向沿 BC。



杆的倾斜角度

反作用力 R 沿着通过 A 的水平线作用，而重量则沿着通过 G 的铅垂线作用。这两条线相交于点 P，它与 A 同高，并位于 G 的正上方（或正下方）。由于三个力处于平衡，它们对 P 的力矩（moment）必须互相抵销；R 和 Mg 对 P 都没有力矩，所以 T 也没有，因此绳所在的直线必定通过 P。

> ? **想一想** 杆从 A 出发，是向上还是向下?

从墙壁起量度水平距离。B 与墙壁的距离是 $L\sin\theta$，其中 θ 是杆与铅垂线之间的夹角，而 G（因而 P 也一样）与墙壁的距离是它的一半，即 $\frac{1}{2}L\sin\theta$。绳从 B 成一直线伸延至墙上的 C，所以水平方向上走了一半的点，也就是绳上走了一半的点：P 是 BC 的中点。因此 P 的高度是 B 和 C 两点高度的平均值。但 P 与 A 同高，而 C 在 A 之上，所以 B 必定在 A 之下，而且低于它的距离恰好等于 AC。

所以杆是从 A 向下垂的。设 θ 为杆与向下铅垂线的夹角。那么 B 在 A 之下的深度是 $L\cos\theta$，于是 $AC = L\cos\theta$。相对于 B 来说，点 C 的水平距离是 $L\sin\theta$，高度则高出 $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$。由于绳长为 αL，由毕氏定理（Pythagoras' theorem）得

$$\alpha^2L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

所以

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{即} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2-1}{3}},$$

而杆是从 A 向下伸出，与铅垂线成这个角度。

α 的可能值

我们需要 C 严格地在 A 之上，所以 $\cos\theta > 0$。（若 $\cos\theta = 0$，则 C 与 A 重合，杆是水平的；这时 A、B、C 共线（collinear）。）我们亦需要 A、B、C 不共线，所以杆不是铅垂的：$\sin\theta \neq 0$，即 $\cos^2\theta < 1$。因此

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

当中用到 $\alpha > 0$。反过来说，对于这个范围内的任何 α，上述角度都存在，而按这个构造所得的位形中，三个力共点（concurrent），所以力矩平衡，而下文分解力所得的 T 和 R 均为正数。可能值的集合是 $1 < \alpha < 2$。

张力

沿铅垂方向分解力（resolve）。绳与铅垂线所成角的余弦是（铅垂上升高度）/（长度）$= 2L\cos\theta/(\alpha L)$，而 R 是水平的，所以

$$T\cdot\frac{2\cos\theta}{\alpha}=Mg \quad\Longrightarrow\quad T=\frac{Mg\alpha}{2\cos\theta}=\frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

这里代入了 $\cos\theta=\sqrt{(\alpha^2-1)/3}$（取正根，因为 $\cos\theta>0$）。这就是所要求的结果。

为完整起见，沿水平方向分解力可得 $R=T\cdot\dfrac{L\sin\theta}{\alpha L}=\frac{1}{2}Mg\tan\theta>0$，所以墙壁确实把杆向外推，正如墙壁应有的表现。

验算

- 当 $\alpha\to 2^-$ 时，$\cos\theta\to 1$：杆铅垂地悬在 A 之下，绳沿着杆对折回来，而 $T\to Mg$，因为这时绳承担了全部重量。当 $\alpha\to 1^+$ 时，$\theta\to 90^\circ$ 且 $T\to\infty$：一根接近水平的杆需要极大的张力才能支撑得住。
- 取 $\alpha=1.5$，我们得到 $\cos\theta\approx 0.6455$（$\theta\approx 49.8^\circ$）及 $T\approx 1.162\,Mg$。我们以数值方法验证过：对于在 $(1,2)$ 内随机选取的数千个 α，对 A 的力矩恰好只在一个角度为零，这个角度与公式吻合，张力亦然；而当 α 在 $(1,2)$ 之外时，并不存在平衡状态。

常见错误

- 把杆画成从 A 向上倾斜，就像梯子问题那样。共点的论证迫使 B 在 A 之下，而图画错了的话，方程便没有相容的解。
- 忘记光滑墙壁的反作用力是水平的，因而引入了不必要的摩擦力或铅垂分量。
- 把 $\alpha=1$ 或 $\alpha=2$ 包括在内：这两个值给出共线（退化）的位形，而题目已把这种情况排除。

STEP 之外

三力原理是静力学（statics）中一个一般事实的特殊情况：一个力系处于平衡，当且仅当它的合力以及它对任意一点的合力矩都等于零。像我们选取 P 那样巧妙地选点，往往是最快捷的途径。工程力学中对桁架、缆索和框架的分析，背后也是同一个想法。若想深入而全面地了解力与力矩，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。