详细解答

STEP III 样本试卷，第 11 题

力学 • 一阶微分方程

> **STEP III 样本试卷，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 11.13 节铲雪车问题中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/snowplough.html

关键思路

每部铲雪车的速率都以积雪深度表示，而深度则取决于铲雪车何时到达某一点。因此，很自然会把时间看成位置的函数，并写出 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$，即速率的倒数（reciprocal）。对第一部铲雪车而言，深度就是原有深度加上其后落下的雪；对第二部而言，关键的观察是：它前方的雪，只是从第一部铲雪车清理该处之后才开始累积的。

解答

把每部铲雪车看成沿路移动的一点，并由共同的起点量度距离。全文中，深度以米为单位，时间以秒为单位，距离以米为单位。

第 (i) 部分

在时间 t，第一部铲雪车遇到的雪自 $t = 0$ 起一直不受干扰地落下，所以其深度为

$$z = h + kt.$$

因此速率为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

（这里取倒数并无问题，因为速率为正，所以 x 是 t 的严格递增函数（strictly increasing function）。）这个方程对 t 是线性的，最简洁的写法是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(t+\frac{h}{k}\Big)=\alpha\Big(t+\frac{h}{k}\Big).$$

由此得 $t+h/k=Ce^{\alpha x}$，其中 C 为常数。当 $x=0$ 时 $t=0$，所以 $C=h/k$，而行走 x 米所需的时间为

$$t_1(x)=\big(e^{\alpha x}-1\big)\frac{h}{k}\text{ 秒},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

建立方程。 设在时间 $t>T$，第二部铲雪车位于位置 y。第一部铲雪车在第 (i) 部分所得的时间 $t_1(y)$ 经过这一点，并把该处的雪全部清除。

想一想 第二部铲雪车前方的积雪深度是多少?

不是 $h+kt$：第一部铲雪车驶过后，留下的是光秃秃的路面。在位置 y，雪自时间 $t_1(y)$ 起由零开始以速率 k 累积，所以深度为

$$z=k\big(t-t_1(y)\big).$$

（这需要 $t>t_1(y)$，即第二部铲雪车仍在第一部后面；在两车相遇之前，这一点都成立。）因此第二部铲雪车的速率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\alpha k\big(t-t_1(y)\big)}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=t-\big(e^{\alpha y}-1\big)\frac{h}{k},$$

这正是题目给出的方程。第二部铲雪车在时间 T 由原点出发，所以初始条件（initial condition）是：当 $y=0$ 时 $t=T$。

验证解。 把题目提出的解写成

$$t=t_1(y)+g(y),\qquad g(y)=\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}.$$

于是 $t-t_1(y)=g(y)$，所以我们需要 $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y=g(y)$。求导，并对 g 使用积法则（product rule），得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}&=\frac{\alpha h}{k}e^{\alpha y}\;-\;\frac{\alpha h}{k}e^{\alpha y}\;+\;\alpha\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}\\&=\alpha\,g(y),\end{aligned}$$

其中第一项是 $t_1'(y)$，其后两项是 $g'(y)$。所以微分方程（differential equation）成立。此外，当 $y=0$ 时，$t=0+T\cdot 1=T$，所以初始条件亦成立。

为甚么这就是所求的唯一解？这个方程是一阶线性方程：若 t 和 $\tilde{t}$ 都满足它，则两者之差 u 满足 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$，所以 $u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$。两者都满足 $t(0) = T$，所以 $u(0) = 0$，从而 $u \equiv 0$。因此，通过 $(y,t) = (0,T)$ 的解恰好只有一个，而我们已经找到了它。

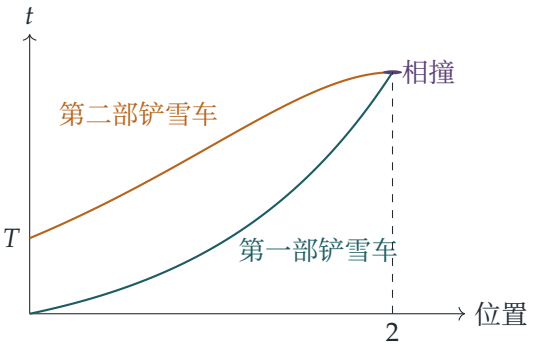
（如果你想直接把它推导出来：乘以积分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{-\alpha y}$ 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha y}\right)$，再由 0 积分至 y，便会得到同一条公式。）

相撞。 若两部铲雪车在同一时间到达某一点 y，它们便会在该点相撞；也就是说 $t = t_1(y)$，即 $g(y) = 0$。由于 $\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$，这种情况恰好在以下条件成立时出现：

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

当 $0 \le y < kT/(\alpha h)$ 时，我们有 $g(y) > 0$（取 $\alpha, h, k > 0$，因为速率必须为正），所以第二部铲雪车到达每个这样的点的时间都严格迟于第一部，两车不会更早相遇。因此，两部铲雪车在行走了 $kT/(\alpha h)$ 米时相撞。 ■

下图显示当 $h = k = \alpha = 1$ 及 $T = 2$ 时，两条路径在 (y,t) 平面上的情况；两条曲线之间的时间差 $g(y)$ 在 $y = 2$ 处缩减至零。



验算

- 单位：α 的单位是 m^{-1}（因为 $k/(\alpha z)$ 是速率），所以 αx 是无量纲（dimensionless）的，h/k 是时间，而 $kT/(\alpha h)$ 是长度。
- 若 $T = 0$，两部铲雪车同时出发，公式给出在距离 0 处相撞；第一部铲雪车领先的时间 T 越大，相撞的地点便沿路推得越远，这与预期相符。
- 数值上，对多组随机选取的 h、k、α 和 T 的值，把每部铲雪车的运动逐步向前推算（对第二部而言，是由 $t = T$ 时 $y = 0$ 出发，按 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$ 推算），所得结果与公式相符，误差小于 10^{-8}。取 $h = k = \alpha = 1$ 及 $T = 2$，如图中所示，两部铲雪车都在时间 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$ 到达 $y = 2$。

常见错误

- 对第二部铲雪车也使用深度 $h + kt$。它所铲的路面在时间 $t_1(y)$ 已被清理过，所以深度是 $k(t - t_1(y))$。
- 验证解的时候忘记了初始条件：当 $y = 0$ 时 $t = T$；单单是微分方程的解并不足够。
- 写成 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 而不是 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$：以时间作为因变量（dependent variable），方程便会变成线性，容易处理。

STEP 之外

这属于经典的“铲雪车问题”（snowplough problem）一类题目，而把因变量与自变量（independent variable）的角色互换、使方程变成线性的技巧，在大学一年级的微分方程课程中经常用到。上文的唯一性论证，是初值问题（initial value problem）的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）的一个最简单特例。还要留意，当第二部铲雪车前方的积雪薄至全无时，它的速率会趋向无限大，这反映的是模型的局限，而不是现实情况。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）涵盖一阶线性方程、积分因子和唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。