详细解答

STEP III 样本试卷，第 10 题

纯数学 · 模算术

> **STEP III 样本试卷，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q10

关键思路

两部分都与余数（remainder）有关，所以应选一个合适的数，以它为模（modulo）来计算。在 (i) 中，平方数模 8 只能取少数几个值，而这些值中任取三个，相加都不可能得到 7。在 (ii) 中，把各个幂改写，使两项在模 17 下有相同的底；这样两个系数之和便是 17 的倍数。

解答

第 (i) 部分

*奇数的平方。*把奇数写成 $2k+1$，其中 k 为整数。则

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

两个连续整数 k 与 $k+1$ 之中必有一个是偶数，所以 $k(k+1)$ 是偶数，而 $4k(k+1)$ 是 8 的倍数。因此，每个奇数的平方除以 8 的余数都是 1。

*偶数的平方。*把偶数写成 $2k$。则 $(2k)^2 = 4k^2$。

- 若 k 是偶数，设 $k = 2j$，则 $4k^2 = 16j^2$，是 8 的倍数：余数为 0。
- 若 k 是奇数，则 k^2 是奇数，设 $k^2 = 2j+1$，于是 $4k^2 = 8j + 4$：余数为 4。

所以每个偶数的平方除以 8 的余数是 0 或 4。

*推论。*每个平方数模 8 都同余（congruent）于 0、1 或 4（这包括 $0^2 = 0$，即我们容许三个平方数中有些是零）。假设 $N = a^2 + b^2 + c^2$。则 $N \bmod 8$ 是三个各取自 $\{0, 1, 4\}$ 的数之和的余数。按其中有多少个等于 4 来分类：

4 的个数	其余各数之和的可能值，以及总和模 8 的值
0	$0,1,2,3$
1	$4+\{0,1,2\}=4,5,6$
2	$8+\{0,1\}\equiv 0,1$
3	$12\equiv 4$

可能的余数是 $0,1,2,3,4,5,6$，而 7 从未出现。形如 $8n+7$ 的数除以 8 的余数是 7，所以它不可能是三个平方数之和。

> ? **想一想** 为甚么不能只验证 7 本身不是三个平方数之和?

因为这个命题涉及无穷多个数 $7,15,23,\ldots$，逐一验证永远做不完。以 8 为模来计算，就能一次过处理所有情况：无论 a、b、c 是甚么，要紧的只是它们的余数，而上表已涵盖每一种情形。

第 (ii) 部分

把各个幂拆开，使每一项都是常数乘以一个 n 次幂：

$$2^{3n+1}=2\cdot 8^n, \qquad 3\left(5^{2n+1}\right)=15\cdot 25^n.$$

由于 $25=17+8$，故 $25\equiv 8 \pmod{17}$，因此对所有 $n\geq 0$ 都有 $25^n\equiv 8^n \pmod{17}$（同余式可以相乘）。于是

$$\begin{aligned} 2^{3n+1}+3\left(5^{2n+1}\right) &= 2\cdot 8^n+15\cdot 25^n \\ &\equiv 2\cdot 8^n+15\cdot 8^n \\ &= 17\cdot 8^n\equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

所以对所有整数 $n\geq 0$，17 整除 $2^{3n+1}+3(5^{2n+1})$，这正是所要证明的。

> ? **想一想** 如果我没有学过同余，怎么办?

同样的想法可以用归纳法（induction）来实现。设 $f(n)=2\cdot 8^n+15\cdot 25^n$。则 $f(0)=17$，并且

$$f(n+1)-8f(n)=15\cdot 25^{n+1}-15\cdot 8\cdot 25^n=15\cdot 25^n(25-8)=17\cdot 15\cdot 25^n,$$

所以 $f(n+1)=8f(n)+17\cdot 15\cdot 25^n$。若 $17\mid f(n)$，则 $17\mid f(n+1)$，由归纳法即得结论。

验算

试试较小的情况。$7=4+1+1+1$ 需要四个平方数，而 $15=9+4+1+1$ 同样需要四个。另一方面，$6=4+1+1$ 和 $14=9+4+1$ 则没有问题。电脑搜索证实，在 5000 以内

没有任何形如 $8n+7$ 的数是三个平方数之和。至于 (ii)：$n=0$ 时得 $2+15=17$，$n=1$ 时得 $16+375=391=17\times 23$。我们亦已验证，对由 0 至 299 的每个 n，该式都可被 17 整除。

常见错误

- 忘记 0 也是平方数，所以“三个平方数之和”其实可能只用了一个或两个非零的平方数。上面的论证已自动包括这种情况，因为 0 是其中一个剩余（residue）。
- 以“$4k^2+4k$ 可被 4 整除”为理由，说奇数的平方是 1 mod 8：这只能得出 1 mod 4。你还需要 $k(k+1)$ 所提供的因数 2。

STEP 之外

第 (i) 部分是勒让德（Legendre）三平方和定理（three-square theorem）中较容易的一半：一个正整数是三个平方数之和，当且仅当它不是 $4^a(8n+7)$ 的形式。逆命题（converse）的方向困难得多，需要用到二次型（quadratic forms）的理论。相比之下，拉格朗日（Lagrange）证明了每一个正整数都是四个平方数之和。第 (ii) 部分是 $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ 中的日常算术，大学一年级的课程会由此发展出群（groups）和环（rings）的研究。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）对同余和平方和有十分精彩的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。