详细解答

# STEP III 样本试卷，第 1 题

纯数学 · 数学归纳法

> **STEP III 样本试卷，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q1

## 关键思路

第 (i) 部分：先算出最初几个乘积，再用合适的角度去看：只要把每个乘积都写成分母为 $2n$ 的形式，规律便一目了然。因式分解（factorisation）$1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$ 解释了个中原因，也令归纳步骤变成一行计算。第 (ii) 部分：固定 $n$，对 $k$ 作归纳（induct）：在和式中多加一项，其实正是换了个样子的帕斯卡法则（Pascal's rule）。

## 解答

### 第 (i) 部分

记 $P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$。最初几个值是

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

分母 4、8 提示我们把所有分数都写成以 $2n$ 为分母：$P_2=\frac{3}{4}$，$P_3=\frac{4}{6}$，$P_4=\frac{5}{8}$，$P_5=\frac{6}{10}$。于是我们猜想

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{对于} n\geq 2.$$

**用数学归纳法（induction）证明**。设 $S(n)$ 为命题 $P_n=\dfrac{n+1}{2n}$。

基础情况（*base case*）。$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$，所以 $S(2)$ 成立。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $S(n)$ 对某个 $n\geq 2$ 成立。由于 $P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$，

而 $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$，故

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{2(n+1)},\end{aligned}$$

这正是 $S(n+1)$。根据数学归纳法，$S(n)$ 对所有 $n\geq 2$ 成立。

（这个因式分解也解释了上面的猜想：$P_n=\prod_{m=2}^{n}\frac{m-1}{m}\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{m+1}{m}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$，两个乘积都可以逐项相消（telescoping）。）

**第 (ii) 部分**

固定一个正整数 $n$，并设 $T(k)$ 为命题

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

我们对 $k$ 作归纳，证明 $T(k)$ 对 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立。

*基础情况*。当 $k=0$ 时，两边都等于 $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}=1$。

*归纳步骤*。假设 $T(k)$ 对某个满足 $0\leq k\leq n-2$ 的 $k$ 成立（这样 $k+1$ 仍在范围之内）。加上下一项，

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}&=(-1)^k\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\\&=(-1)^{k+1}\left[\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}\right].\end{aligned}$$

> ? **想一想** $\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}$ 等于甚么？

帕斯卡法则指出 $\binom{n}{k+1}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$：从 $n$ 件物件中选出 $k+1$ 件，某一件指定的物件要么被选中（其余 $k$ 件来自另外 $n-1$ 件），要么没有被选中（全部 $k+1$ 件都来自另外 $n-1$ 件）。所以方括号内的式子等于 $\binom{n-1}{k+1}$，于是

$$\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1},$$

这正是 $T(k+1)$。根据数学归纳法，$T(k)$ 对 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立，证明完毕。

若 $n=1$，唯一的情况是 $k=0$，基础情况已经涵盖，所以这个论证在该处无须特别处理。

## 验算

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$；用电脑以分数把各因子精确相乘，结果对 2 至 300 的每一个 $n$ 都与 $\frac{n+1}{2n}$ 吻合。当 $n \to \infty$ 时，乘积趋向 $\frac{1}{2}$。
- 当 $n = 4$ 时：部分和（partial sums）$1,\ 1-4=-3,\ -3+6=3,\ 3-4=-1$ 与 $\binom{3}{0}$，$-\binom{3}{1}$，$\binom{3}{2}$，$-\binom{3}{3}$ 吻合。电脑已对所有 $n \le 79$ 及所有 $k \le n-1$ 精确验证 (ii)。
- 取 $k = n-1$，再加上最后一项 $(-1)^n\binom{n}{n}$，得 $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$，这就是大家熟悉的结果 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$。

## 常见错误

- 根据约至最简的分数（$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$）来猜想，因而看不出规律：窍门在于把约分还原，写成统一的形式。
- 在 (ii) 中对 $n$ 而不是对 $k$ 作归纳（可行，但较为繁复），或者忘记了由 $k$ 到 $k+1$ 的一步只需在 $k+1 \le n-1$ 时进行。

## STEP 之外

第 (i) 部分是无穷乘积（infinite product）$\prod_{m\ge 2}\left(1-\frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$ 的开端。它是欧拉（Euler）乘积 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\ge 1}\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)$ 的特殊情况：把两边除以 $m=1$ 的因子 $1-x^2$，再令 $x \to 1$ 即可。怎样理解无穷乘积，以及它们何时收敛（converge），是大学一年级分析学（analysis）的课题。第 (ii) 部分是众多二项式恒等式（binomial identities）之一，这些恒等式可由帕斯卡法则或生成函数（generating functions）推出：它就是 $(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$ 中 $x^k$ 的系数。想了解无穷和与无穷乘积的收敛，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门书）是很好的读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。