详细解答

STEP II 样本试卷，第 9 题

纯数学 • 球面、平面与反射

> **STEP II 样本试卷，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q9

关键思路

两部分其实都围绕同一幅图：一个平面，以及向它所作的垂线。在 (i) 中，球面的球心在原点，所以一切都取决于由原点到平面的垂足（foot of the perpendicular）：它与 O 的距离决定两者是否相交，然后用毕氏定理（Pythagoras' theorem）便可求出那个圆。在 (ii) 中，把 $\mathbf{x}$ 分拆成沿 $\mathbf{c}$ 方向的部分和垂直于 $\mathbf{c}$ 的部分，再看看公式对每一部分做了甚么。

解答

第 (i) 部分

平面 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$ 通过点 $\mathbf{a}$，并以 $\mathbf{b}$ 为法向量（normal）。设 N 为由原点 O 到该平面的垂足。由于 ON 沿法向量方向，故对某个纯量（scalar）λ 有 $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$；又因为 N 在平面上，

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

这一步是容许的，因为 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$。所以

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

其中 d 是由 O 到平面的距离。

现在取平面上任意一点 $\mathbf{x}$。向量 $\mathbf{x}-\mathbf{n}$ 位于平面之内，所以它垂直于 $\mathbf{b}$，因而也垂直于 $\mathbf{n}$。由毕氏定理，

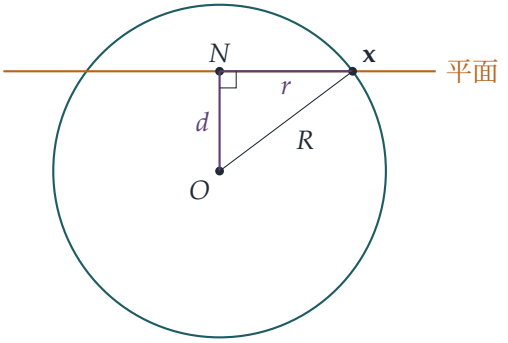
$$|\mathbf{x}|^2=|\mathbf{n}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2=d^2+|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

所以平面上的点都满足 $|\mathbf{x}|\geq d$，而且每一个满足 $|\mathbf{x}|\geq d$ 的值都会出现（只要在平面内

由 N 向外移动）。因此，球面 $|\mathbf{x}| = R$ 与平面相交，当且仅当 $R \geq d$，即

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{或等价地} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

在等号成立的情况下，该平面是切平面（tangent plane），而那个“圆”则缩成单独一点 N。



当条件成立时，同时在两个曲面上的点满足 $|\mathbf{x}| = R$，并且由 $(*)$ 得

$$|\mathbf{x} - \mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

所以这些点都在平面内，并且与 N 保持固定距离，而后者本身是平面上的一点：它们组成一个以 N 为圆心的圆。其圆心和半径为

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

第 (ii) 部分

记 $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$，这是一个单位向量（unit vector）（由于 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$，这样做没有问题）。于是该关系式变成

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

? **想一想** 从几何上看，$(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$ 是甚么？

它是 $\mathbf{x}$ 沿 $\mathbf{c}$ 方向的分量（component），亦即 $\mathbf{x}$ 在通过 O 而方向为 $\mathbf{c}$ 的直线上的投影（projection）。所以可作分拆

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel},$$

其中 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}) = 0$。关系式变成

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

设 Π 为通过 O 并垂直于 $\mathbf{c}$ 的平面（即平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$），则位于这个平面内的分量保持不变，而垂直于 Π 的分量则反转方向。这正正是镜子的作用：**$\mathbf{x}'$ 是 $\mathbf{x}$ 关于平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ 的反射（reflection）**，即关于通过原点、以 $\mathbf{c}$ 为法向量的平面的反射。

以下按反射的定义加以确认：

- $\mathbf{x}'-\mathbf{x}=-2\mathbf{x}_{\parallel}$ 是 $\mathbf{c}$ 的倍数，所以由 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{x}'$ 的线段垂直于 Π；
- 中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathbf{x}_{\perp}$ 满足 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c}=0$，所以它在 Π 上。

以下几个推论可令这幅图像更具体。Π 上的点（即满足 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ 的点）固定不动；$\mathbf{c}$ 本身变成 $-\mathbf{c}$；$|\mathbf{x}'|=|\mathbf{x}|$，因为 $|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}_{\perp}|^2+|\mathbf{x}_{\parallel}|^2$；而把这个映射连续施行两次便会得回 $\mathbf{x}$，反射两次理应如此。若把 $\mathbf{c}$ 换成任何非零倍数 $k\mathbf{c}$，关系式并无改变，这也很合理：起作用的只有那个平面，而不是其法向量的长度或指向。

验算

在 (i) 中，取 $\mathbf{a}=\mathbf{b}=(0,0,1)$ 及 $R=2$：平面是 $z=1$，它与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交于圆 $x^2+y^2=3$，$z=1$。公式给出圆心 $(0,0,1)$ 和半径 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，与预期相符。在 (ii) 中，取 $\mathbf{c}=(0,0,1)$：公式把 (x,y,z) 映射到 $(x,y,-z)$，即关于 $z=0$ 的反射。我们亦以 20,000 组随机选取的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、R 以及 $\mathbf{x}$、$\mathbf{c}$ 对两部分作了数值测试：在所预测的圆上构作的点，都在球面和平面上，误差不超过 10^{-9}；而 (ii) 中的映射使 Π 内的向量固定不动，保持长度和点积（dot product）不变，并且是它自己的逆映射。

常见错误

- 忘记加上绝对值（modulus）：条件是 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le R|\mathbf{b}|$，而不是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le R|\mathbf{b}|$；位于 O 另一侧的平面有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$。
- 把 $\mathbf{a}$ 当作圆心。点 $\mathbf{a}$ 只不过是平面上的某一点；圆心是由 O 所作垂线的垂足。
- 在 (ii) 中，说成“关于 $\mathbf{c}$ 的反射”或“关于沿 $\mathbf{c}$ 的直线的反射”。关于该直线的反射应是 $\mathbf{x}\mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{x}$，亦即 $-\mathbf{x}'$。

STEP 之外

(ii) 中的映射是一个豪斯霍尔德反射（*Householder reflection*），$\mathbf{x}\mapsto(I-2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$，它是一个线性映射（linear map），既正交（orthogonal）又对称（symmetric），行列式（determinant）为 -1。空间中的每一个旋转都是两个这类反射的乘积，而数值分析学者利用它们来稳定地分解矩阵（QR 分解，QR decomposition）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线

性代数入门）正是从这个观点讲解投影、反射和正交矩阵。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。