详细解答

STEP II 样本试卷，第 7 题

纯数学 · 阶梯函数的积分

STEP II 样本试卷，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q7

关键思路

被积函数（integrand）$[\mathrm{e}^x]$ 是一个阶梯函数（step function）：在 e^x 保持于两个相邻整数之间的每个区间上，它都是常数。因此我们先找出这些区间，在每个区间上对常数积分，然后把结果加起来。这样得出的和看似难以处理，但只要把相同的项对齐，当中大部分对数（logarithm）便会成对抵消。

解答

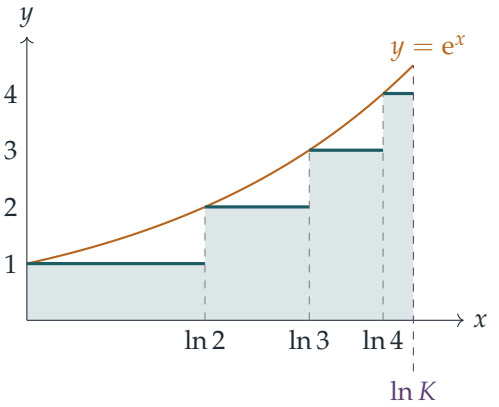
被积函数在哪里是常数

我们取 $K \geq 1$，于是 $\ln K \geq 0$ 且 $N = [K] \geq 1$。（若 $0 < K < 1$，则对于介乎 $\ln K$ 与 0 之间的 x，有 $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$，而除了 $x = 0$ 这单独一点之外 $[\mathrm{e}^x] = 0$，所以 $I = 0$；同时 $N = 0$ 且 $N \ln K - \ln 0! = 0$。结果在这情况下同样成立。）

对于整数 $k \geq 1$，

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

因为 ln 是递增函数。所以在 $[\ln k, \ln(k+1))$ 上 $[\mathrm{e}^x] = k$。在积分范围 $0 \leq x \leq \ln K$ 上有 $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$，故 $[\mathrm{e}^x]$ 取值 $1, 2, \ldots, N$，而最后一个值 N 在 $[\ln N, \ln K]$ 上取得，因为在该处 $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$。



阴影部分的面积就是 I（图中取 $K = 4.5$，故 $N = 4$）。

把各部分加起来

在每个区间上对常数积分，得

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) + N(\ln K - \ln N).$$

（当 $N = 1$ 时，这个和是空的；当 $K = N$ 时，最后一项为零。两种情况都无须另外处理。）

> **想一想** 怎样化简 $\sum k(\ln(k+1) - \ln k)$? 照现在的形式, 它并不能裂项相消 (telescope)。

把它拆成两个和，并在第一个和中移动指标，令 $j = k + 1$：

$$\sum_{k=1}^{N-1} k \ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N} (j-1) \ln j.$$

现在两个和都是 $\ln j$ 的倍数之和，我们可以把每个 $\ln j$ 的系数合并起来。利用 $\ln 1 = 0$，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) &= \sum_{j=2}^{N} (j-1) \ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j \ln j \\ &= (N-1) \ln N + \sum_{j=2}^{N-1} ((j-1) - j) \ln j \\ &= (N-1) \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j.\end{aligned}$$

加上最后一部分 $N\ln K - N\ln N$：

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

更巧妙的看法

与其把阴影区域切成垂直的长条，不如把它切成水平的层。对于 $1 \le k \le N$，高度介乎 $k-1$ 与 k 之间的那一层，恰好出现在 $[\mathrm{e}^x] \ge k$ 的地方，也就是 $\mathrm{e}^x \ge k$ 的地方，即 $\ln k \le x \le \ln K$。该层的面积是 $\ln K - \ln k$，所以立刻得到

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

。严格来说，这里用到了当 $1 \le y < N+1$ 时 $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$，然后逐项积分。这与上面的指标移动是同一种重排，只不过是用几何方式完成。

验算

- $K = 1$：积分范围的长度为零，而公式给出 $1 \cdot 0 - \ln 1 = 0$。
- $K = \mathrm{e}$：这时 $N = 2$，直接计算得 $I = \ln 2 + 2(1 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$，与 $2\ln \mathrm{e} - \ln 2$ 吻合。
- 当 $K = 10$ 时，公式给出 $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$，而对 $[\mathrm{e}^x]$ 在 $[0, \ln 10]$ 上用中点法则作数值积分，结果相差不超过 5×10^{-6}。在 $[1, 40]$ 中随机选取的 K 值亦同样吻合。

常见错误

- 把和一直加到 N，并使用区间 $[\ln N, \ln(N+1)]$。积分范围的上端是 $\ln K$，而不是 $\ln(N+1)$，所以最后一部分必须另外处理。
- 重新编排指标时弄错首尾两端的项：不妨把 $N = 3$ 时的各个和逐项写出来检查。

STEP 之外

把 $\sum k(a_{k+1}-a_k)$ 换成 $-\sum a_k$ 再加上边界项，这就是*分部求和法*（summation by parts，又称阿贝尔求和法（Abel summation）），它是分部积分法（integration by parts）的离散版本。取 $K=N$ 并利用 $\mathrm{e}^x-1<[\mathrm{e}^x]\le \mathrm{e}^x$，可得 $N\ln N-N+1\le \ln(N!)\le N\ln N-N+1+\ln N$，这是迈向斯特灵近似公式（Stirling's approximation）的第一步。同样的想法写成黎曼–斯蒂尔吉斯积分（Riemann–Stieltjes integral）$\int f\,\mathrm{d}[t]$ 之后，在解析数论（analytic number theory）中随处可见，用来把和化为积分；参看 Apostol 的 *Introduction to Analytic Number Theory*（解析数论入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。