详细解答

STEP II 样本试卷，第 6 题

纯数学 · 由常微分方程推导加法公式

> **STEP II 样本试卷，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

关键思路

题目不容许我们说“f 就是 e^x”，所以一切都必须由微分方程（differential equation）本身推导出来。我们唯一可以动用的工具是：若一个函数的导数（derivative）处处为零，则该函数为常数。因此窍门在于构造一个导数恰好互相抵消为零的式子，然后代入 $x = 0$ 来确定那个常数。把 $a - x$ 处的值与 x 处的值配对是很自然的做法，因为这两个自变量之和恒为 a，而这正是加法公式（addition formula）的形状。

解答

指数函数的加法定律

固定 a，并设 $p(x) = \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x)$。由链式法则（chain rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a-x)] = -\mathrm{f}'(a-x) = -\mathrm{f}(a-x)$，其中用到 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$。于是由积法则（product rule）得

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

这就是第一个结果。

由于对每个 x 都有 $p'(x) = 0$，函数 p 是常数。它在 $x = 0$ 处的值为 $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$，因为 $\mathrm{f}(0) = 1$。因此

$$\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{对所有 } x \text{ 及所有 } a \text{ 成立。}$$

现在任取 x 和 y，并选 $a = x + y$。那么 $a - x = y$，而该恒等式变成

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+y),$$

正是所求。

余弦的加法公式

我们沿用同一策略，所以需要找出 c 与 s 在 $a-x$ 和 x 处取值的一个组合，使其导数为零。

> **想一想** 我们应该对哪一个组合求导?

让答案来引导我们：取 $a=x+y$ 时，我们想得到 $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$，即 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$。所以这就是值得一试的函数。

固定 a，并设

$$g(x)=\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

由链式法则及题目给出的导数，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)]=-\mathrm{c}'(a-x)=\mathrm{s}(a-x),\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)]=-\mathrm{s}'(a-x)=-\mathrm{c}(a-x).$$

因此，由积法则，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\big[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\big]-\big[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)+\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\big]\\&=0.\end{aligned}$$

所以 g 是常数，其值为

$$g(0)=\mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0)-\mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0)=\mathrm{c}(a)\cdot 1-\mathrm{s}(a)\cdot 0=\mathrm{c}(a).$$

故此对所有 x 和 a，都有 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)=\mathrm{c}(a)$。任给 x 和 y，取 $a=x+y$，则 $a-x=y$：

$$\mathrm{c}(x+y)=\mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y)-\mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

这就是所求的结果。

以同样的方法处理 $h(x)=\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)+\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$，可得 $h'=0$ 及 $h(0)=\mathrm{s}(a)$，所以 $\mathrm{s}(x+y)=\mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y)+\mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ 亦成立。

验算

- 代入 $y=0$：利用 $\mathrm{f}(0)=\mathrm{c}(0)=1$ 及 $\mathrm{s}(0)=0$，两个结果分别化为 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{c}(x)=\mathrm{c}(x)$。
- 在余弦的结果中代入 $y=-x$：$1=\mathrm{c}(0)=\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x)-\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$，这其实就是换了个面貌的 $\cos^2 x+\sin^2 x=1$。

- 我们以数值方法解了这些微分方程（采用龙格－库塔法（Runge–Kutta method），不使用任何内置的指数函数或三角函数），并在 $[-3,3]$ 内随机抽取 60 对数值来检验两个恒等式；例如取 $x = 0.7$ 和 $y = 1.1$ 时，余弦结果的两边准确至四位小数均为 -0.2272。所有差值都小于 10^{-11}。

常见错误

- 对 $\mathrm{f}(a-x)$、$\mathrm{c}(a-x)$ 或 $\mathrm{s}(a-x)$ 求导时，忘记了链式法则带来的负号。
- 写到“导数为零”便停下来，没有在 $x = 0$ 处求出常数的值，也没有接着选取 $a = x + y$。
- 直接引用 $\cos(x+y)$ 的公式或 $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$，而这是题目明确禁止的。

STEP 之外

在大学里，这才是定义指数函数和三角函数的严谨做法：把它们定义为微分方程的解（或定义为幂级数（power series）），然后由这个定义推导出每一个熟悉的性质。我们用到的事实，即导数处处为零的函数必为常数，是中值定理（Mean Value Theorem）的推论，而它同时说明了这些解是唯一的。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对这套理论有严谨细致的建构。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。