详细解答

# STEP II 样本试卷，第 5 题

纯数学 · 级数与积分界限

**STEP II 样本试卷，第 5 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q5

## 关键思路

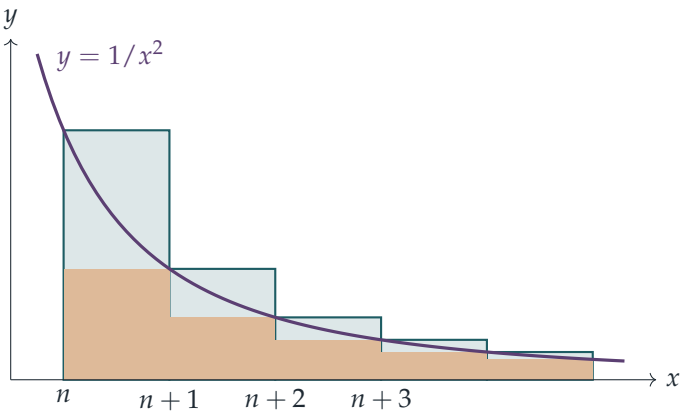
递减函数（decreasing function）各个取值之和，可以想像成一列阔度为一个单位的长方形，而积分（integral）则是曲线下的面积。把长方形放在每个取样点的右边，它们便会凸出于曲线之上；放在左边，它们便会收在曲线之下。这样就得到夹逼的不等式，其后的一切都只是按部就班的整理：级数（series）的尾项和被夹在两个简单的分数之间，所以只要加上对尾项和的一个猜测，估计值便会大幅改善。

## 解答

### 夹逼

设 $f(x) = 1/x^2$，它在 $x > 0$ 时为正，并且严格递减（strictly decreasing）。我们还需要

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$




上方长方形（蓝绿色外框）。在 $[r, r+1]$ 上放一个高度为 $f(r) = 1/r^2$ 的长方形。由于 $f$ 递减，当 $r < x \le r+1$ 时 $f(x) < f(r)$，所以这个长方形的面积 $1/r^2$ 严格大于 $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$。对 $r = n, n+1, \ldots$ 把这些式子相加，得

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

下方长方形（琥珀色）。在 $[r-1, r]$ 上放一个高度为 $f(r) = 1/r^2$ 的长方形。这次当 $r-1 \le x < r$ 时 $f(x) > f(r)$，所以这个长方形位于曲线之下，其面积 $1/r^2$ 严格小于 $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$。对 $r = n+1, n+2, \ldots$ 相加，而这些区间刚好填满 $[n, \infty)$，于是

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

（三个量都是有限的：积分等于 $1/n$，而两个和都以它为界。）这就是所要求的一对不等式（inequality），在此把它们明确写下来：

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

## 夹住尾项和

记 $S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$。那么 $A - S_n$ 正好就是尾项和（tail）$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$。

由 $(*)$ 右边的不等式可直接得到 $T < 1/n$。

> **想一想** $(*)$ 左边的不等式中，求和由 $r = n$ 开始，但尾项和却由 $r = n+1$ 开始。我们怎样才能得到 $T$ 的下界（lower bound）？

不等式 $(*)$ 对每一个正整数都成立，所以把 $n$ 换成 $n+1$，再应用它左边的一半：

$$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

把两者合起来,

$$\frac{1}{n} > A - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n+1},$$

这正是所要求的结果。

#### 最小的 $n$

所有项都是正数，所以 $S_n < A$，而误差就是 $A - S_n$。

- 若 $n \leq 9999$，则 $n+1 \leq 10^4$，所以 $A - S_n > \dfrac{1}{n+1} \geq 10^{-4}$：误差太大。
- 若 $n = 10^4$，则 $A - S_n < \dfrac{1}{n} = 10^{-4}$：误差够小。

所以最小的值是 $n = 10\,000$。留意两个不等式都是严格不等式，这一点在这里十分关键：当 $n = 9999$ 时，下界刚好是 $10^{-4}$；而当 $n = 10^4$ 时，上界（upper bound）刚好是 $10^{-4}$。

#### 改良的估计

在夹住尾项和的不等式中，每一部分都减去 $\frac{1}{n+1}$，得

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > A - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2}\right) > 0.$$

所以 $\frac{1}{n+1} + S_n$ 仍然低估了 $A$，但相差小于

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

当 $n = 10^4$ 时，这个值是 $\dfrac{1}{10^4 \times 10\,001} < \dfrac{1}{10^4 \times 10^4} = 10^{-8}$，所以改良后的估计值逼近 $A$ 的误差小于 $10^{-8}$，这正是所要求的结果。

额外加上的一项 $1/(n+1)$ 是对尾项和的一个猜测；既然尾项和被困在一个阔度只有 $1/(n(n+1))$ 的区间之内，这个猜测就不可能错得太远。

## 验算

- 小数值的情况：取 $n = 1$，则 $S_1 = 1$，而 $A = \pi^2/6 \approx 1.6449$，所以 $A - S_1 \approx 0.645$，确实介乎 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间。
- 利用 $A = \pi^2/6$ 并以数值方法求和：$A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$（仅仅太大）而 $A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$（仅仅够小），由此确认 $n = 10\,000$。
- 当 $n = 10^4$ 时,改良后的估计值相差约 $5.0 \times 10^{-9}$,低于界限 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$；它大约是界限的一半，正如图中所示（曲线把每个长方形凸出的部分大致分成两半）。

## 常见错误

- 在 $n$ 而不是 $n+1$ 处使用左边的不等式，这样得到的是 $\sum_{r=n}^{\infty}$ 的下界，而不是尾项和 $A - S_n$ 的下界。
- 把严格不等式当作非严格不等式，或只用了两个界限的其中一个，因而答 $n = 9999$ 或 $n = 10\,001$。你需要用下界来排除 $n \leq 9999$，并用上界来确定 $n = 10^4$ 可行。
- 把长方形画在每个取样点的错误一边，以致不等式的方向倒转。

## STEP 之外

这就是判别收敛（convergence）的积分审敛法（integral test），再加上它在定量方面的额外收获：用来证明级数收敛的同一批长方形，也可以用来估计它的尾项和。把这个想法加以改进，即比较和与积分，再以两端的导数（derivative）作修正，便会引出欧拉–麦克劳林公式（Euler–Maclaurin formula）。在这里，该公式预测 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$；欧拉（Euler）在证明 $\sum 1/r^2$ 等于 $\pi^2/6$ 之前，正是用这个方法把它计算到小数点后许多位。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对级数及其审敛法有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。