详细解答

STEP II 样本试卷，第 4 题

纯数学 · 双曲函数

STEP II 样本试卷，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q4

关键思路

这些恒等式（identity）每一条所讲的，都只是一个角（或一个双曲“角”）。先为右边的式子起一个名字，读出它的其中一个函数值，再利用毕氏恒等式（Pythagorean identities）$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$ 求出另一个。唯一真正要小心的是平方根的正负号，而这正是主值（principal value）范围发挥作用的地方——到了最后一部分，也正是恒等式不再成立的地方。

解答

第 (i) 部分

设 $\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$，则 $\tan\theta=\sinh x$，而且由于它是主值，$-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$。于是

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上有 $\cos\theta>0$，所以 $\sec\theta>0$；而 $\cosh x>0$ 恒成立。取正平方根，得 $\sec\theta=\cosh x$，因此

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

由于 θ 位于 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之内，即 $\sin^{-1}$ 的主值范围，这正好表示 $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$。因此对所有实数 x 都有 $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$，这就是所要证明的结果。

? **想一想** 为甚么得到 $\sin\theta=\tanh x$ 还不算完成论证?

因为 $\sin\theta=\tanh x$ 有无穷多个解 θ。正因为我们的 θ 位于 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之内，而 sin 在这

个区间上是一对一（one-to-one）的，我们才可以断定 θ 就是主值 $\sin^{-1}(\tanh x)$。同一个范围也决定了 $\sec\theta$ 的正负号。

第 (ii) 部分

设 $u = \sinh^{-1}(\tan y)$；它有定义，因为当 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ 时 $\tan y$ 是有限的。于是 $\sinh u = \tan y$，而在第 (i) 部分取 $x = u$，可得

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

其中最后一步用到 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$，即 $\tan^{-1}$ 的主值范围。对两边取 sin，得 $\tanh u = \sin y$。由于在这个区间上 $|\sin y| < 1$，$\tanh^{-1}(\sin y)$ 有定义，而且 tanh 是一对一的，所以 $u = \tanh^{-1}(\sin y)$。也就是说，

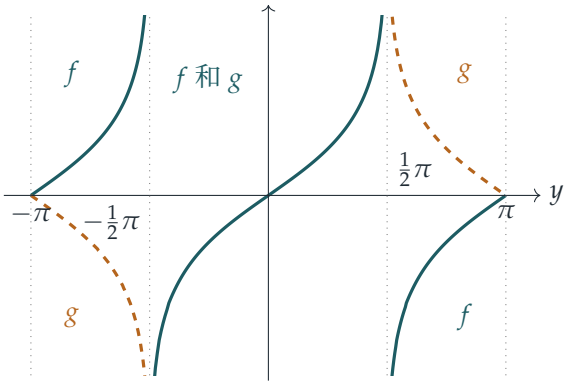
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

（直接计算：$\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$，因为 $\cos y > 0$ 所以取正值，于是 $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$。）

草图 记 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$ 和 $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$。两者在 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ 处都没有定义，因为在该处 $\tan y$ 为无穷大，而 $\sin y = \pm 1$。它们在其他地方的表现，可由 tan 和 sin 的对称性推出。

- 两者都是奇函数（odd function），并且都在 $y = 0$ 和 $y = \pm\pi$ 处取零值。
- f 的周期（period）为 π，因为 tan 也是如此。所以在 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上，它重复在 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 上的取值：由 $-\infty$ 上升至 0。
- $\sin(\pi - y) = \sin y$，所以 g 关于 $y = \frac{1}{2}\pi$ 对称。在 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上，它以镜像方式重复在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上的取值：由 $+\infty$ 下降至 0。
- 求导数，得 $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$ 和 $g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$。所以 f 在每一个有定义的区间上都是递增的，而 g 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上递增，在这个区间以外则递减。两者在原点的斜率都是 1；在 $y = \pi$ 处，f 的斜率为 1，g 的斜率为 -1。

在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上，两个图像是同一条曲线；在外侧的区间上，两者互为对方关于横轴的反射。



实线：$f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$。虚线：$g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ 与 f 不同的部分。点线 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ 是渐近线（asymptote）。

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 时的关系 草图显示在该处 $f = -g$，而我们可以证明这一点。若 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$，则 $y - \pi$ 位于 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 之内，所以刚才证明的恒等式适用于 $y - \pi$：

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

这里用到 $\tan(y-\pi) = \tan y$、$\sin(y-\pi) = -\sin y$，以及 $\tanh^{-1}$ 是奇函数这个事实。所以当 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 时，

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

（由奇函数的性质，同样的关系在 $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$ 上也成立。）

想一想 当 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 时，第 (ii) 部分的论证在哪一步失效?

在 $\tan^{-1}(\tan y) = y$ 这一步：当 y 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 以外时，主值是 $y - \pi$，而不是 y。换一个说法，在直接计算的论证中，该处有 $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$，因为 $\cos y < 0$，而这个负号正是答案中的那个负号。

验算

- 在 $y = 1$：$\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$。在 $y = 2$：$\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$，而 $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$，确认了正负号的改变。
- 正负号：当 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 时，$\tan y < 0$ 但 $\sin y > 0$，所以两个式子必定异号；它们不可能相等。

- 第 (i) 部分在 x 很大时：两边都趋向 $\frac{1}{2}\pi$，与预期相符。

我们以数值方法在 10^5 个随机点上检验了两条恒等式，以及 $f = -g$ 在 $\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$ 上的关系。

常见错误

- 写出 $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ 而没有检查 $\sec y$ 的正负号。这正是最后一部分的重点所在。
- 由 $\sin\theta = \tanh x$ 直接断定 $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$，却没有说明为甚么 θ 是主值。
- 把 g 在 $\frac{1}{2}\pi$ 以外的部分画成与 f 相同的形状：g 承袭的是 sin 关于 $\frac{1}{2}\pi$ 的对称性，而不是 tan 的周期性。

STEP 之外

函数 $\operatorname{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$ 称为古德曼函数(Gudermannian function)。它无需借助复数（complex numbers），便把圆函数与双曲函数（hyperbolic functions）联系起来，而第 (ii) 部分说明它的反函数（inverse function）是 $\sinh^{-1}(\tan y)$。它出现在麦卡托（Mercator）地图投影之中，用来把地图上的纵坐标转换为纬度。反函数及其分支（branches）在这里令恒等式出现问题；当你研究复数 z 的 $\log z$ 和 $z^{1/2}$ 时，它们更会成为核心课题。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是领略这个课题的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。