详细解答

# STEP II 样本试卷，第 3 题

纯数学 · 棣美弗定理

**STEP II 样本试卷，第 3 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q3

## 关键思路

棣莫弗定理（De Moivre's theorem）用数学归纳法（induction）证明最为自然：根据复角公式（compound-angle formulae），每多乘一个因子 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，角度就增加 $\theta$。至于那两条方程，$\cos ky$、$\sin ky$ 伴随着 $x^k$ 出现，这个规律分明在提示“实部（real part）与虚部（imaginary part）”。设 $z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$，把第一条方程看成一条复数方程的实部，第二条看成它的虚部，这对方程便化为 $z$ 的一条三次方程（cubic），而且有一个容易找到的根。

## 解答

### 棣莫弗定理

我们对 $n$ 用归纳法。当 $n = 1$ 时，两边都是 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，所以结果成立。

假设结果对某个 $n = k \geq 1$ 成立。则

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta,\end{aligned}$$

其中第一行用了归纳假设（induction hypothesis），第二行用了 $\mathrm{i}^2 = -1$，第三行用了 $\cos(A+B)$ 和 $\sin(A+B)$ 的复角公式。所以结果对 $n = k+1$ 成立，由归纳法可知，结果对所有正整数 $n$ 都成立。

**解方程**

设 $x$ 和 $y$ 为实数，并令

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

由棣莫弗定理，对 $n = 1, 2, 3$，

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

（无论 $x$ 是正是负，这都成立：实数因子 $x$ 直接提出来成为 $x^n$。）由于 $x$ 和 $y$ 是实数，两条方程的左边正好是 $z^3 + 2z^2 + 2z$ 的实部和虚部。所以这对实数方程等价于一条复数方程

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{即} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

? **想一想** 为甚么一条复数方程等同于两条实数方程?

两个复数相等，当且仅当它们的实部相同、虚部也相同。右边的 $-1$ 的实部是 $-1$，虚部是 $0$，正是题目给出的两个右边的值。所以 $(x, y)$ 同时满足两条实数方程，当且仅当 $z$ 满足该三次方程。

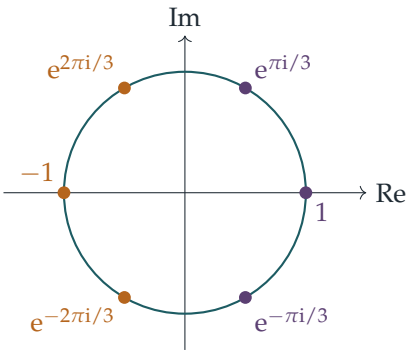
现在 $z = -1$ 是一个根，因为 $-1 + 2 - 2 + 1 = 0$，除去这个因式后得

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

这个二次式的根是 $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$。所以三个根是

$$z = -1 = \cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi, \qquad z = \cos \tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin \tfrac{2\pi}{3},$$

全部位于单位圆（unit circle）上。




余下要做的，是把每个根还原为实数对 $(x, y)$。由于 $|z| = |x|$，每个解都有 $|x| = 1$；特别地，$x = 0$ 是不可能的（否则会得出 $0 = -1$）。

- 若 $x = 1$，则 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = z$，所以 $y$ 是三个根之一的辐角（argument）：$y = \pi$、$\frac{2\pi}{3}$ 或 $-\frac{2\pi}{3}$，再加上 $2\pi$ 的任意整数倍。
- 若 $x = -1$，则 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = -z$，即 1、$\cos\frac{\pi}{3} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 其中之一（图中梅子色的点）。所以 $y = 0$、$-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$，再加上 $2\pi$ 的任意整数倍。

以上每一个都给出三次方程的一个根，所以全部都是解。设 $k$ 为任意整数，解为

$$x = 1, \quad y = \pi + 2k\pi \text{ 或 } y = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; \qquad x = -1, \quad y = 2k\pi \text{ 或 } y = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

在 $[0, 2\pi)$ 内共有六对：$(1, \frac{2\pi}{3})$、$(1, \pi)$、$(1, \frac{4\pi}{3})$、$(-1, 0)$、$(-1, \frac{\pi}{3})$、$(-1, \frac{5\pi}{3})$。

## 验算

试 $x = -1$、$y = 0$：第一条方程给出 $-1 + 2 - 2 = -1$，第二条是 $0 = 0$。试 $x = 1$、$y = \frac{2\pi}{3}$：各余弦值为 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$，得 $1 - 1 - 1 = -1$；各正弦值为 $0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$。用电脑在 $x \in [-3, 3]$、$y \in [0, 2\pi)$ 的细密网格上搜索，只在上述六点找到近似解（在舍入误差之内），所以没有遗漏。

## 常见错误

- 以为 $x$ 是模（modulus），因而 $x \geq 0$。题目容许 $x$ 为任意实数，$x = -1$ 的解同样有效；它们是同一批点 $z$，只是描述时 $y$ 平移了 $\pi$。
- 忘记 $+2k\pi$：$y$ 只确定到相差 $2\pi$ 的整数倍，所以有无限多对 $(x, y)$。

## STEP 之外

把两条实数方程合并成一条复数方程，是一个标准手法：以 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ 为变量的多项式，其实部和虚部正好满足这类三角方程组，而因式分解 $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1)$ 则把各根放在单位圆上。在大学的入门课程中，你会见到 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 以幂级数（power series）定义，这令棣莫弗定理对所有整数都成立（并赋予非整数次幂意义，但须小心处理分支（branches））。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 以优美的几何角度阐述了这一切。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。