详细解答

STEP II 样本试卷，第 2 题

纯数学 · 对称联立方程

STEP II 样本试卷，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q2

关键思路

三条方程具有循环（cyclic）对称性，所以很自然会把它们两两相减，而每个差都可以因式分解（factorise），并以 $x+y+z$ 为公因式（common factor）。接下来，各差的平方和有双重用途：以 x、y、z 表示时，它是 $a+b+c$ 的倍数；而第一个结果则可把它用 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 和 $x+y+z$ 表示。一旦知道 $x+y+z$ 和两两之差，余下的工作只需解三条线性方程（linear equations）便可完成。

解答

相等的比

把第一条方程减去第二条方程：

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

用完全相同的方法（或作循环代换 $x \to y \to z \to x$，$a \to b \to c \to a$），可得

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

设 $S=x+y+z$。由于 $a \neq b$，乘积 $(x-y)S$ 不等于零，所以 $S \neq 0$（同理，x、y、z 互不相等）。因为 a、b、c 互不相等，我们可以除以 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 以及 S，得出

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z},$$

这正是所要证明的结果。

求 $x+y+z$

把题目提示的和展开：

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= 2[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

另一方面，由第一部分可知 $y-z=(b-c)/S$，其余类推，所以同一个和亦等于

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{S^2}.$$

令两个表达式相等，再除以 $2(a+b+c)$（因为 a、b、c 均为正数，所以它是正数），得

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

因此 $x+y+z=\triangle$，其中 $\triangle^2$ 就是上述的量，这正是所要证明的结果。注意 $\triangle^2>0$，因为它的分子是 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ 的一半，而当 a、b、c 互不相等时，这个和是正数。所以有两个可能，即 $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$，而到目前为止，没有任何条件能从中选定其一。

解方程

现在我们知道

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

把三式相加，得

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

这个式子可以化简得很漂亮。设 $s=a+b+c$ 和 $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$，于是 $\triangle^2=Q/s$。那么

$$\begin{aligned}s(\triangle^2+2a-b-c) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc)\\ &= 3(a^2-bc).\end{aligned}$$

因此 $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$，而 y、z 可由循环代换得出。现在 $(s\triangle)^2=sQ=a^3+b^3+c^3-3abc$，这是根据以下的标准因式分解：

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

设 $K=\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}>0$，则 $s\triangle=\pm K$，而方程组的解为

$$(x,y,z)=\pm\frac{1}{K}(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab),$$

其中三个分量取相同的正负号。

想一想 我们只证明了任何解都必定是这个形式。这两组真的都是解吗?

是的。以上所有步骤只是一连串的推论，所以我们应该把结果代回原方程验证。由于方程中只出现未知数的平方和两个未知数的乘积，整体的正负号并无影响，而

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)&=a^4-2a^2bc+b^2c^2-(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc)\\&=a(a^3+b^3+c^3-3abc)=aK^2.\end{aligned}$$

除以 K^2 便得 $x^2-yz=a$；另外两条方程可由循环代换得出。所以方程组恰好有两组解，其中一组是另一组的相反数。

验算

- 取 $a=1$，$b=2$，$c=3$。那么 $a^3+b^3+c^3-3abc=18$，$K=3\sqrt{2}$，而取正号的解是 $(x,y,z)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$。例如 $x^2-yz=\frac{25-7}{18}=1$，以及 $x+y+z=\frac{1}{\sqrt{2}}$，其平方为 $\frac{1}{2}=\frac{14-11}{6}=\triangle^2$。
- 以电脑测试了 20,000 组随机选取、互不相等的正数 a、b、c，并且两种正负号都测试过：公式满足全部三条方程以及相等的比，相对误差小于 10^{-11}。

常见错误

- 只取 $\triangle$ 的正平方根：题目中的 $\triangle$ 只是通过 $\triangle^2$ 来定义，而两种正负号都给出真正的解。
- 除以 $x+y+z$ 时没有说明它为何不等于零。在这里，这是由 $a\neq b$ 推出的。

STEP 之外

恒等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 是以 (a,b,c)、(c,a,b)、(b,c,a) 为各行的循环矩阵（circulant matrix）的行列式（determinant），而它在复数（complex numbers）范围内可以完全分解为 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$，其中 $\omega=e^{2\pi i/3}$。事实上，映射 $(x,y,z)\mapsto(x^2-yz,\ y^2-zx,\ z^2-xy)$ 就是循环矩阵的伴随矩阵（adjugate），这解释了为何它那么容易求逆。循环矩阵及其特征向量（eigenvectors）

是初次接触离散傅里叶变换（discrete Fourier transform）的一个平易入门；想进一步了解，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）是很好的读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。