详细解答

# STEP II 样本试卷，第 15 题

概率与统计 • 期望值与样本平均值

**STEP II 样本试卷，第 15 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q15

## 关键思路

国王每天向极大量的小贩罚款，所以根据大数定律（law of large numbers），他每天从每名小贩身上得到的收入，实际上就等于罚款的期望值（expected value）。因此我们要求出每个方案下的期望罚款。头两个方案涉及一组正态变量的样本平均值（sample mean），其分布仍然是正态分布（normal distribution），只是方差（variance）较小。第三个方案是等待时间的问题，所以要用上几何分布（geometric distribution）。

## 解答

设 $W_1, W_2, \ldots$ 为被选中的那箱腌鱼各自的重量（以克为单位）。箱中的腌鱼基本上是随机选出的，所以各 $W_i$ 互相独立（independent），而且每个 $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$。从箱中随机抽取腌鱼，与牠们的重量无关，所以无论我们抽出哪些腌鱼、次序如何，牠们仍然是独立的 $\mathrm{N}(200, 10^2)$ 变量。

我们会用到以下的标准结果：若 $W_1, \ldots, W_m$ 是独立的 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 变量，则它们的平均值满足

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

### 第 (i) 部分

这里 $m = 625$，所以 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$，标准差（standard deviation）为 $\frac{10}{25} = 0.4$。于是

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

期望罚款为

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ 克朗}.$$

**第 (ii) 部分**

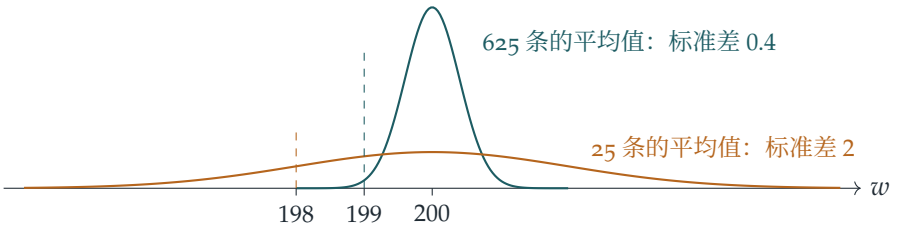
现在 $m = 25$，所以 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$，标准差为 2。于是

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

而期望罚款为

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ 克朗}.$$

下图说明了为何金额较小的罚款反而胜出。对 625 条腌鱼的平均值来说，比平均值低一克的门槛距离平均值有 2.5 个标准差；但对 25 条腌鱼的平均值来说，比平均值低两克的门槛只相距一个标准差。




**第 (iii) 部分**

设 $N$ 为取出的腌鱼数目。每条腌鱼重于 200 g 的概率是 $\frac{1}{2}$，因为 200 是一个对称分布的平均值，而且 $\mathrm{P}(W = 200) = 0$。抽出的腌鱼互相独立，所以 $N$ 就是在成功概率为 $\frac{1}{2}$ 的独立试验中，直至首次成功为止（包括该次在内）的试验次数。换言之，$N$ 服从几何分布：

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

（严格来说，抽完 625 条腌鱼后箱子就空了，但当中没有一条超过 200 g 的机会是 $2^{-625}$，完全可以忽略不计。）

**想一想** 怎样可以不先计算 $\mathrm{E}[N^2]$ 而求出 $\mathrm{E}[N(N-1)]$？

把几何级数（geometric series）求导两次。对于 $|x| < 1$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

乘以 $x^2$ 并代入 $x = \frac{1}{2}$（$n = 1$ 的一项反正是零）：

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

（等价地，取 $p = \frac{1}{2}$，则 $\mathrm{E}[N] = 2$ 及 $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = 2$，所以 $\mathrm{E}[N^2] = 6$，而 $\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N] = 4$。）因此期望罚款为

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3 \times 4 = 12 \text{ 克朗}.$$

### 结论

在方案 (i)、(ii) 和 (iii) 之下，每名小贩每天的期望罚款分别约为 9.3、15.9 和 12 克朗。由于受检查的箱子数量极多，国王的总收入非常接近检查次数乘以期望罚款。所以他应该选择**方案 (ii)**。它的收入比方案 (i) 多大约 70%，比方案 (iii) 多约三分之一。

## 验算

- 方案 (iii) 无法查表核对，但这个级数很容易逐项相加：$\frac{3\cdot2}{4} + \frac{3\cdot6}{8} + \frac{3\cdot12}{16} + \cdots = 1.5 + 2.25 + 2.25 + 1.875 + \cdots$。部分和（partial sum）很快就攀升趋近 12。
- 模拟 $10^5$ 箱各有 625 条正态腌鱼的箱子，并把三个方案都执行一遍，所得的平均罚款约为 10.2（来自 $2 \times 10^4$ 箱，所以误差较大）、15.9 和 11.9 克朗。这些数值与 9.31、15.87 和 12 相当接近。

## 常见错误

- 把样本平均值的标准差当作 $\frac{10}{625}$ 或 $\frac{100}{25}$。被 $m$ 除的是*方差*，所以标准差是除以 $\sqrt{m}$。
- 把 $N$ 当作由 0 开始（只数失败的次数）。这里 $n$ 包括那条重的腌鱼，所以 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$，而此时罚款为零。
- 比较被罚款的概率而不是比较期望罚款：方案 (iii) 有一半机会向小贩罚款（即 $n \geq 2$ 时），但通常只罚 6 克朗。

## STEP 之外

“数量极多，所以用期望值”这个理据就是大数定律；而 $\overline{W}$ 服从方差为 $\sigma^2/m$ 的正态分布这一事实，则与中心极限定理（central limit theorem）相伴而来，该定理令这个结论即使在个别重量并非正态分布时仍然近似成立。谨慎的国王或许还会考虑离散程度：方案 (i) 是罕有但巨额的罚款，其方差远比其他方案大。借着对级数求导来求出 $\mathrm{E}[N(N-1)]$ 这

类阶乘矩（factorial moment），这个想法会引伸出概率生成函数（probability generating function），它是大学一年级概率论的核心工具。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）把这一切都讲解得十分清楚。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。