详细解答

STEP II 样本试卷，第 14 题

力学 • 刚体的转动

STEP II 样本试卷，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q14

关键思路

圆盘和质点都绕同一条固定的铅垂轴转动，所以最自然的工具是转动的运动方程（rotational equation of motion）：力矩（torque）= 转动惯量（moment of inertia）× 角加速度（angular acceleration），并分别应用于两个物体。两者之间的摩擦力是一对内力：它令其中一个加快多少（以角动量（angular momentum）计），就令另一个减慢多少。由此立即得出守恒的组合；再把两条方程相减，便得到一条关于相对角速率的一阶方程，而这个相对角速率按指数衰减（exponential decay）。

解答

模型

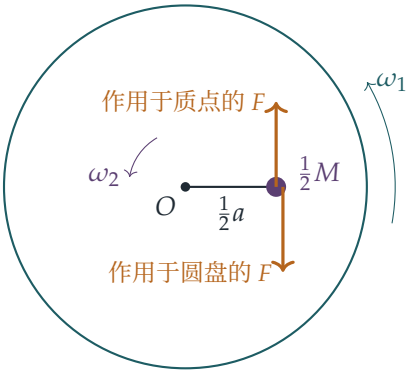
圆盘是一块均匀薄片（uniform lamina），绕通过其中心 O 的光滑固定轴转动，所以它对该轴的转动惯量为

$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

质点的质量为 $\frac{1}{2}M$，由一条轻而刚硬的金属线固定在距离轴 $\frac{1}{2}a$ 之处，所以它沿半径为 $\frac{1}{2}a$ 的圆运动，对该轴的转动惯量为

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

起初 $\omega_1 = \Omega$ 而 $\omega_2 = 0$，所以在接触点处圆盘比质点运动得快。因此摩擦力沿质点的运动方向作用于质点（沿切线方向，位于半径 $\frac{1}{2}a$ 处），而根据牛顿第三定律（Newton's third law），在同一点上有一个大小相等、方向相反的力作用于圆盘。



（俯视图；$F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$。金属线的张力沿径向，所以它对轴没有力矩。）

运动方程

摩擦力 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ 作用于距离轴 $\frac{1}{2}a$ 之处，并与半径垂直，所以它对轴的力矩为

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

质点的重量和各法向反作用力（normal reaction）都是铅垂的，所以它们对铅垂轴没有力矩，而轴本身是光滑的。对圆盘而言，摩擦力阻碍转动：

$$\tfrac{1}{2}Ma^2\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

对质点而言，摩擦力推动转动：

$$\tfrac{1}{8}Ma^2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

（对质点，你同样可以沿切线方向应用牛顿第二定律：$\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\,\dot{\omega}_2 = F$，这是同一条方程。）

守恒的组合

把第一条方程乘以 4，再加上第二条，

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

所以 $4\omega_1 + \omega_2$ 是常数。在 $t = 0$ 时它等于 $4\Omega + 0$，因此

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

正如所求。这就是对该轴的角动量守恒（conservation of angular momentum）：$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$，而仅有的外力（轴上的反作用力、重力和铅垂的反作用力）对该轴都没有力矩。

求解 ω_1

想一想 我们有两条耦合的方程。哪一个量能够独自满足一条方程?

两个变化率都只取决于差 $u = \omega_1 - \omega_2$，所以不妨考虑这个量。把两条方程相减，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

其中 $u(0) = \Omega - 0 = \Omega$。分离变量（separating variables）（或认出这是指数衰减），

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}.$$

把这条式子与 $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$ 相加，便消去 ω_2：

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{所以} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

正如所求。由此可得 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$。

另一个做法是把 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$ 代入圆盘的方程，得到 $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$，这是一条线性方程，它满足 $\omega_1(0) = \Omega$ 的解与上面相同。

验算

- 在 $t = 0$ 时：$\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$ 而 $\omega_2 = 0$。正确。
- 当 $t \to \infty$ 时：$\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$，两者趋向同一速率，这正是摩擦力最终必然造成的结果。最终的动能（kinetic energy）为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}Ma^2\cdot\frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$，而最初为 $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$，所以有五分之一的能量因摩擦而损失，这与“完全非弹性”（perfectly inelastic）耦合的预期相符。
- 数值上，取 $M = a = k = \Omega = 1$，把两条运动方程逐步计算至 $t = 1$，得 $\omega_1 = 0.80135$ 和 $\omega_2 = 0.79461$，与 $\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ 和 $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$ 吻合，而 $4\omega_1 + \omega_2$ 自始至终保持为 4。

常见错误

- 把质点的转动惯量当作 $\frac{1}{2}Ma^2$（仿佛它位于圆盘边缘），而不是 $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$。
- 在转动方程中使用摩擦力本身，而不是它的力矩 $F\cdot\frac{1}{2}a$。
- 在两条方程中给摩擦力相同的正负号：它令圆盘减慢，却令质点加快。

STEP 之外

这里的摩擦力是内力，而 $4\omega_1 + \omega_2$ 的守恒正是碰撞中动量守恒的转动版本；以指数方式趋向同一速率，与两个物体以黏滞阻力（viscous drag）耦合的情况是同一套数学。更一

般地说，线性系统（linear system）$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 以 A 的特征向量（eigenvector）表示时便会解耦（decouple）：在这里，特征向量就是组合 $4\omega_1 + \omega_2$（特征值（eigenvalue）为 0）和 $\omega_1 - \omega_2$（特征值为 $-5k$）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）细致地讲述刚体转动和角动量，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则以特征向量处理线性系统。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。