详细解答

STEP II 样本试卷，第 13 题

力学 • 平衡与力矩

STEP II 样本试卷，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q13

关键思路

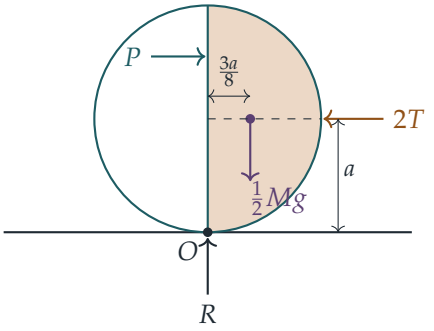
橙子若要散开，各瓣会向外翻倒，每一瓣都绕著球面与桌面接触的那一点转动。因此我们沿其中一个切面把橙子切成两半，然后对其中一半，绕通过该最低点的一条水平线取力矩（moment）。这一半的重量要把它推倒；能把它拉住的只有丝带，别无其他。另一半施加的力只会令情况更坏，“至少”二字正是由此而来。

解答

模型

我们把朱古力视为均匀的刚体（rigid body），把丝带视为轻质、整圈张力（tension）同为 T，并假设各瓣大小相等、数目为偶数（真正的朱古力橙有二十瓣），于是有一个通过轴线的切面把橙子分成两半，每一半都是半球形、夹角为 π 的楔形体。到最后我们会看到，只要切面光滑，这个论证对任何一组橙瓣都成立。

球面与桌面只在一点 O 接触，即轴线的底端。以 O 为原点建立坐标轴，z 铅垂向上，x 为水平方向，由轴线指向我们所研究的那一半（图中右边的一半）。分界平面是 $x = 0$。设 ℓ 为通过 O 且位于该平面内的水平线（即 y 轴）；我们绕 ℓ 取力矩，并规定若力矩倾向使这一半向外翻倒、远离轴线，则该力矩为正。



其中一半所受的力

右边的一半质量为 $\frac{1}{2}M$，它所受的外力如下。

- **重量** $\frac{1}{2}Mg$，作用于质心（centre of mass）。在题目给出的结果中代入 $2\theta = \pi$，可知质心与轴线的距离为
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
并位于 $x > 0$ 的一侧。它绕 ℓ 的力矩为 $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$，属翻倒方向。
- **桌面**：一个法向反作用力（normal reaction），另外可能有摩擦力（friction），全部作用于 O。由于 O 在 ℓ 上，这些力绕 ℓ 的力矩为零。
- **丝带**，绕著这一半的赤道。窄丝带沿法向压在表面上，每单位长度的力为 T/a（情况就如一条绳绕过光滑曲面）。在角度由 $-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$ 的弧上，各 x 分量之和为
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \, a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
方向指向轴线，而各 y 分量则因对称而互相抵消。（另一个等价的看法：在丝带穿过分界平面之处把它剪断，每个断口都以张力 T 沿 $-x$ 方向拉扯，同样得出 $2T$。）这个力完全是水平的，作用于高度 a，所以它绕 ℓ 的力矩为 $2T \cdot a$，属回复方向。
- **另一半**，作用于整个平面 $x = 0$ 上。这是唯一棘手的力，而我们无须知道它如何分布。

? **想一想** 为甚么另一半施加的力只会助长这一半翻倒?

把切面上每一小块所受的力分解为垂直于切面的部分和沿切面的部分（若切面粗糙，后者就是摩擦力）。

- 垂直的部分沿 x 方向。两半只是互相压著，并没有黏在一起，所以这部分是推力，沿 $+x$ 方向。它作用于某个高度 $z \geq 0$，所以它绕 ℓ 的力矩等于 z 乘以它的大小，永不为负：它倾向使这一半向外翻倒。

- 沿切面的部分位于平面 $x = 0$ 内，而这个平面也包含 ℓ。若一个力的作用线（line of action）与 ℓ 位于同一平面内，则作用线要么与 ℓ 相交，要么与它平行，所以这个力绕 ℓ 的力矩为零。

因此，无论接触的细节如何，另一半所贡献的总力矩 $P_{\text{mom}} \geq 0$，属翻倒方向。

绕 ℓ 取力矩

这一半处于平衡（equilibrium），所以绕 ℓ 的总力矩为零：

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

由于 $P_{\text{mom}} \geq 0$，

$$2Ta \;\geq\; \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{所以} \qquad T \;\geq\; \tfrac{3}{32}Mg,$$

这正是所要证明的结果。等号成立，当且仅当两半之间完全没有互相施压，即两半仅仅能够维持在一起。

橙瓣数目不是偶数的情况

假如切面是光滑的，同样的计算对任何由完整橙瓣组成、夹角为 2θ 的楔形体都适用。取 x 沿它的对称平面，并取 ℓ 为通过 O 且垂直于该平面的水平线。楔形体的重量为 $\frac{\theta}{\pi}Mg$，作用于距离 $\frac{3\pi a \sin\theta}{16\theta}$ 处，产生的翻倒力矩为 $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$。丝带在它的弧上以 $2T\sin\theta$ 向内拉，作用于高度 a。光滑的切面只会产生垂直于切面的水平推力，而这些推力在 $+x$ 方向的分量不会是负数，所以它们同样只会增加翻倒力矩。于是 $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$，约去 $\sin\theta$ 后再次得出 $T \geq \frac{3}{32}Mg$。无论我们选取哪一组橙瓣，所得的下界都相同。

验算

- 题目给出的质心结果在 $2\theta = \pi$ 时给出 $\frac{3a}{8}$，正是大家熟悉的实心半球体质心与其平面的距离。以蒙地卡罗（Monte Carlo）方法估算，这一半的结果为 $0.376a$，而对其他楔形夹角，估算值亦与公式吻合。
- 以数值方法把丝带在夹角为 2θ 的弧上的法向力加起来，得出 $2T\sin\theta$，例如对半个橙子就是 $2T$。
- 对每一个检验过的楔形夹角，所得的下界都同样是 $\frac{3}{32}Mg \;\approx\; 0.094Mg$（$2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$）。下界只取决于整个橙子，而与我们选择怎样切开它无关，这令人放心。
- 单位：力矩是力乘以长度，而 a 会约去，余下的是一个力。

常见错误

- 绕球心或绕赤道上的一点取力矩。这样一来，桌面施加的未知力，或另一半施加的未知力，就会进入方程。选取 O 点，正是因为桌面的力绕通过该点的直线没有力矩。
- 说丝带对这一半的力是 T。丝带在这一半的弧的两端都在拉，所以合力（resultant）是 $2T$。
- 没有理据就把两半之间的力设为零。那样得出的只是等号成立的情况。“至少”二字，来自留意到这个力只能是推力。

STEP 之外

这是一道含有未知内力的静力学（statics）题目，处理方法是先选取一条轴，消去我们无法求出的未知量，然后利用一个不等式（接触力只会推，不会拉）来应付余下的部分。分析砖石拱门和穹顶时，背后也是同一套推理：结构能够屹立，当且仅当能找到一条始终留在材料内部的推力线。质心的结果本身是球极坐标（spherical polar coordinates）下一个标准的三重积分（triple integral），很值得亲自推导一次。想进一步了解刚体平衡，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。