详细解答

STEP II 样本试卷，第 12 题

力学 • 金属线上的振动

STEP II 样本试卷，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

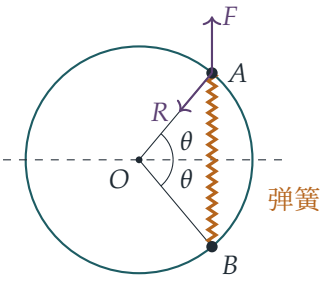
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

关键思路

金属线是光滑的，所以只有弹簧的力做功，机械能（mechanical energy）守恒。我们只需要用 θ 表示弹簧的长度（圆的一条弦（chord）），以及每颗珠子的速率。有两件事要稍作思考。为甚么平分角 AOB 的直线会保持固定？还有在第 (ii) 部分，如果珠子有足够的能量到达直径的两端，会发生甚么事？

解答

把珠子看成质点，它们套在水平面上的光滑圆形金属线上，并由一条遵从胡克定律（Hooke's law）的轻弹簧连接。重力沿铅垂方向，与金属线反作用力（reaction）的铅垂分量互相平衡，所以对水平方向的运动没有影响。



图中，F 是弹簧对 A 的推力（沿 BA 方向，因为弹簧起初处于压缩状态），R 是金属线对 A 的反作用力的水平分量。

建立能量方程

用圆上的角度来量度每颗珠子的位置：A 位于角 ϕ_A，B 位于角 ϕ_B。

> **想一想** 为甚么可以假设两颗珠子以相同的速率运动，并且关于一条固定的直线对称?

对通过 O 的铅垂轴取力矩（moments）。弹簧作用于 A 和 B 的力大小相等、方向相反，并且沿同一条直线 AB 作用，所以它们的力矩互相抵销。每个金属线反作用力的水平分量 R 都垂直于金属线，因此沿着通过 O 的半径方向，没有力矩。铅垂方向的力对铅垂轴没有力矩。所以角动量（angular momentum）$ma^2(\dot\phi_A+\dot\phi_B)$ 守恒。由于珠子从静止释放，角动量起初为零，因此 $\phi_A+\phi_B$ 保持不变：角 AOB 的平分线是固定的。取它为图中的虚线，使得 $\phi_A=\theta$ 及 $\phi_B=-\theta$。于是每颗珠子的速率都是 $a\dot\theta$。

弹簧就是弦 AB，长度为 $2a\sin\theta$。它的自然长度（natural length）是 $2a\sin\alpha$，所以伸长量（extension）是 $x=2a(\sin\theta-\sin\alpha)$，而弹性势能（elastic energy）是

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha}=\frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha}=\frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

这条公式在 $x<0$（压缩）时同样成立，因为 x 取了平方。动能（kinetic energy）是 $2\cdot\frac12 m(a\dot\theta)^2=ma^2\dot\theta^2$。金属线是光滑的，它的反作用力始终垂直于运动方向，所以不做功，能量守恒。释放时 $\theta=\beta$ 而 $\dot\theta=0$，所以

$$ma^2\dot\theta^2+\frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}=\frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

全式乘以 $\sin\alpha/a$，得

$$ma\dot\theta^2\sin\alpha+\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2=\lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

这正是所求的结果。注意弹簧起初处于压缩状态，所以 $\beta<\alpha$。

第 (i) 部分

把能量方程对 t 求导：

$$2ma\sin\alpha\,\dot\theta\ddot\theta+2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot\theta=0.$$

除以 $2\dot\theta$（只要珠子在运动，这一步就成立，而所得结果可凭连续性推广至所有 t），得运动方程

$$ma\sin\alpha\,\ddot\theta=-\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta.$$

平衡位置（equilibrium）在 $\theta=\alpha$，此时弹簧处于自然长度。如果 $\beta-\alpha$ 很小，则 θ 会一直接近 α（由能量方程可得 $|\sin\theta-\sin\alpha|\le|\sin\beta-\sin\alpha|$），所以可写 $\theta=\alpha+\varepsilon$，其中

ε 很小。准确至一阶，$\sin\theta - \sin\alpha \approx \varepsilon\cos\alpha$，而 $\cos\theta \approx \cos\alpha$，后者所乘的量本身已经很小。所以

$$\ddot{\varepsilon} \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

这是简谐运动（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$。因此周期（period）是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

第 (ii) 部分

设 $k = \sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$。由能量方程，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2\Big].$$

珠子在 $\sin\theta - \sin\alpha = \pm(\sin\alpha - \sin\beta)$ 时停下，即当 $\sin\theta = \sin\beta$ 或 $\sin\theta = 2\sin\alpha - \sin\beta$ 时。由 $\theta = \beta$ 出发，θ 会增加（受压缩的弹簧把两颗珠子推开），而只要 $\sin\beta < \sin\theta < 2\sin\alpha - \sin\beta$，就有 $\dot{\theta}^2 > 0$。

想一想 是甚么决定我们处于两种情况中的哪一种?

关键在于 θ 能否在 $2\theta = \pi$ 之前到达第二个停止点；在该处 A 和 B 位于直径的两端，而 $\sin\theta$ 达到其最大值 1。这取决于 $2\sin\alpha - \sin\beta$ 是小于还是大于 1。

(a) $\sin\beta > 2\sin\alpha - 1$。这时 $2\sin\alpha - \sin\beta < 1$，所以存在锐角 γ 使得 $\sin\gamma = 2\sin\alpha - \sin\beta$，并且 $\gamma > \alpha$。珠子在 $\theta = \gamma$ 时停下（此时弹簧的伸长量与原来的压缩量相同），而 θ 在 β 与 γ 之间振荡。去程和回程所需的时间相等，所以

$$T = 2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}, \qquad \gamma = \arcsin(2\sin\alpha - \sin\beta).$$

(b) $\sin\beta < 2\sin\alpha - 1$。这时 $2\sin\alpha - \sin\beta > 1 \geq \sin\theta$，所以当 θ 介乎 β 与 $\frac{1}{2}\pi$ 之间时，$\dot{\theta}$ 永不为零：珠子经过直径两端时仍在运动。此后弦再次缩短。能量方程只通过 $\sin\theta$ 与 θ 有关，而前者关于 $\frac{1}{2}\pi$ 对称，所以由 $\frac{1}{2}\pi$ 到 $\pi - \beta$ 的运动，是由 β 到 $\frac{1}{2}\pi$ 的运动的镜像。珠子在 $\theta = \pi - \beta$ 停下，此时弹簧再次被压缩至原来的长度，然后把珠子沿原路推回去。（在 $\theta = \pi - \beta$ 时，运动方程给出 $\ddot{\theta} < 0$，因为 $\sin\theta - \sin\alpha < 0$ 而 $\cos\theta < 0$。）一次完整的振荡是 $\beta \to \pi - \beta \to \beta$，相当于把由 β 到 $\frac{1}{2}\pi$ 的四分之一段重复四次：

$$T = 4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}.$$

由于 $\sin\alpha < 1$，我们有 $2\sin\alpha - 1 < \sin\alpha$，所以两种情况都与 $\beta < \alpha$ 相容。情况 (b) 只会在 $2\sin\alpha - 1 > 0$ 时出现，即当 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 时。

验算

- 在情况 (a) 中，代换 $\sin\theta = \sin\alpha - (\sin\alpha - \sin\beta)\cos u$ 把积分化为 $\int_0^{\pi} \mathrm{d}u / \cos\theta$。当 $\beta \to \alpha$ 时，它趋向 $\pi/\cos\alpha$，从而得回第 (i) 部分的周期。
- 我们以 $m = 1.3$、$a = 0.7$、$\lambda = 2.1$ 模拟了两颗珠子在金属线上各自独立运动的情况。能量方程在舍入误差范围内成立，平分线亦保持固定。取 $\alpha = 0.6$、$\beta = 0.59$ 时，周期为 3.766，而第 (i) 部分给出 3.7657。取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 0.4$（情况 (a)）时，周期为 4.8847，而积分给出 4.8846。取 $\alpha = 0.75$、$\beta = 0.1$（情况 (b)）时，周期为 7.0553，而积分给出 7.0553，并且 θ 一如所料在 $\pi - \beta$ 达到最大值。

常见错误

- 用 $\lambda x^2/(2a)$ 作为弹性势能。分母应是*自然长度*的两倍，即 $2 \cdot 2a\sin\alpha$。
- 在情况 (b) 中，把积分停在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，或声称珠子在该处停下。珠子经过直径两端时速率不为零，所以周期是 $4\int_{\beta}^{\pi/2}$，而不是 $2\int_{\beta}^{\pi/2}$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的周期积分无法以初等函数表示。它们与*椭圆积分*（elliptic integrals）属同一家族，后者给出单摆（simple pendulum）的精确周期。留意第 (i) 部分的小幅振荡周期与振幅无关，而精确周期则不然。线性化振子与非线性振子之间的这种对比，是经典力学入门课程的核心主题之一。内力作用下的系统的角动量守恒，在本题中令平分线保持固定；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）对此有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。