详细解答

STEP II 样本试卷，第 11 题

力学 • 抛体与碰撞

STEP II 样本试卷，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

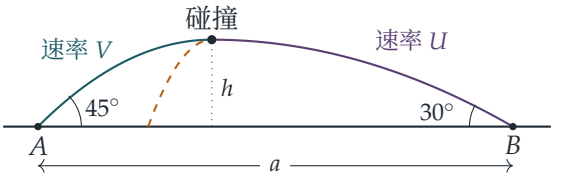
step.maths.org/questions/spec-s2-q11

关键思路

“两个质点相撞时各自位于最高点”其实包含了两个条件：两个质点（particle）必须用相同的时间到达最高点，而且那一刻必须位于同一位置。时间条件把 U 和 V 联系起来，而两段水平距离之和就是 a。碰撞之后，最要紧的观察是：两个质点在最高点时都沿水平方向运动，所以合并后的质点起初完全没有垂直速度。

解答

我们把两个质点都当作只受重力作用（不计空气阻力）的抛体（projectile），在包含 AB 的垂直平面内运动。水平方向取由 A 到 B 为正，垂直方向取向上为正。



证明 $U^2 = 2V^2$

由 A 抛出的质点，初速度的水平分量为 $\frac{V}{\sqrt{2}}$，垂直分量为 $\frac{V}{\sqrt{2}}$。由 B 抛出的质点，水平分量为 $\frac{\sqrt{3}}{2}U$（指向 A），垂直分量为 $\frac{1}{2}U$。

抛体的垂直速度为零时，它正位于最高点。若初始垂直速率为 w，这会在时间 w/g 发生。两个质点在同一瞬间抛出，所以如果它们在碰撞的一刻都位于各自的最高点，这两个时

间必须相等：

$$\frac{V}{\sqrt{2}\,g} = \frac{U}{2g} \quad\Longrightarrow\quad U = \sqrt{2}\,V \quad\Longrightarrow\quad U^2 = 2V^2,$$

正如所求。把这个共同的时间记为 $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}\,g}$。

想一想 我们不是也应该检查两个最高点的高度是否相同吗?

应该：时间相等是必要条件，但两个质点还必须相遇。初始垂直速率为 w 的抛体会上升到高度 $w^2/(2g)$。对 A 的质点而言，这是 $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$；对 B 的质点而言，这是 $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$。两者一致，所以只要 $U^2 = 2V^2$，高度便自动相同。（事实上这是必然的：两者在同一时间 T 的垂直速度都是零，而且加速度相同，所以两者的高度都是 $\frac{1}{2}gT^2$。）记

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

为碰撞时的高度。

求 a

在时间 T，两者的水平位置也必须一致。水平速度保持不变，所以在时间 T 内，由 A 抛出的质点向 B 移动了 $\frac{V}{\sqrt{2}}T$，由 B 抛出的质点向 A 移动了 $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$。两者相遇，所以这两段距离之和为 a：

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}\,g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

碰撞之后

在碰撞的一瞬间，每个质点都位于自己的最高点，所以都沿水平方向运动：A 的质点速度为 $+\frac{V}{\sqrt{2}}$，B 的质点速度为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}}$。

想一想 哪一个动量守恒？在哪个方向守恒?

在极短的碰撞过程中，唯一的巨大作用力是两个质点之间大小相等、方向相反的力；重力大小有限，而且作用时间可以忽略。因此总动量（momentum）守恒。在水平方向，设质量为 $2m$ 的合并质点的速度为 v，则

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

负号表示合并质点朝 A 的方向往回运动，速率为 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$。在垂直方向，两个质点的垂直速度都是零，所以合并质点起初的垂直速度也是零。

合并质点现在是一个由高度 $h = \frac{V^2}{4g}$ 水平抛出的抛体。它的水平速度维持在 $|v|$。它到达平面时的垂直速率 w 可由 $w^2 = 0 + 2gh$ 求得：

$$w^2 = 2g \cdot \frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

因此，速度与水平方向所成的角 ϕ 满足

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

其中第二行把分母有理化（rationalising the denominator）。至此全题完成。

验算

- *单位。* V^2/g 的单位是 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$，正是距离应有的单位；而 $\tan\phi$ 是两个速率之比，所以没有量纲。留意 $\tan\phi$ 完全不取决于 V 或 g，这是个好兆头。
- *几何上是否合理。* A 的质点到达最高点时，与 A 的水平距离为 $\frac{V^2}{2g}$；B 的质点到达最高点时，与 B 的水平距离为 $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$。以较大速率、较平的 30° 角抛出的质点走得较远，而两段距离之和为 a。
- *数值。* 取 $V = 7.3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 和 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，我们把两条轨迹按时间逐步推算，发现在 $t = T$ 时两者位于同一点 $(2.719, 1.359)$（以米为单位），而且两者的垂直速度都是零。再把合并质点逐步推算至落到平面，得出 $\tan\phi \approx 2.73205$，与 $1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$ 吻合。

常见错误

- 在垂直方向应用动量守恒时，用了非零的垂直速度。在每条轨迹的最高点，垂直速度都是零，这正是这次碰撞如此简单的原因。
- 把水平动量相加而不是相减：两个质点正朝相反方向运动。
- 用了 $\tan\phi = |v|/w$（与垂直方向所成的角），而不是 $w/|v|$。

STEP 之外

质点合而为一，是完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision）最简单的例子：动量守恒，但动能（kinetic energy）并不守恒（这里损失了相当多，因为两个质点原本朝相反方向运动）。到了大学，这会发展成在质心参考系（centre-of-mass frame）中研究碰撞：在这个参考系中总动量为零，而损失的能量就是相对于质心的全部动能。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是以这种方式处理动量和碰撞，并附有许多出色的习题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。