详细解答

STEP II 样本试卷，第 10 题

纯数学 • 逻辑谜题

> **STEP II 样本试卷，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q10

关键思路

一切都建基于一个转译：说话者是蟾蜍，当且仅当他所说的话为真。因此，对每个角色我们都问“他可能是蟾蜍吗?”和“他可能是青蛙吗?”，然后剔除任何令其陈述的真值（truth value）出错的选择。尤其要留意那些关于说话者自己的陈述：其中有些是某一种生物根本不可能说出口的，而这通常就是突破口。

解答

在整个解答中，“蟾蜍”指说真话者，“青蛙”指说谎者，所以

$$\text{说话者是蟾蜍} \iff \text{其陈述为真.}$$

在每个场景中，我们找出所有符合这条规则的指派（assignment），并验证恰好只有一个能够成立。

第 (i) 部分

假设 A 是蟾蜍。那么 A 的陈述为真，于是 A 便是青蛙，这是一个矛盾（contradiction）。因此 A 是青蛙。

所以 A 的陈述为假：A 和 B 并非都是青蛙。既然 A 是青蛙，这句话要不成立，唯一的可能就是 B 是蟾蜍。

验算：若 A 是青蛙而 B 是蟾蜍，则“我们两个都是青蛙”为假，正符合青蛙的陈述必须为假的要求。所以 A **是青蛙，** B **是蟾蜍**。

第 (ii) 部分

这是第 (i) 部分的镜像。假设 C 是青蛙。那么“D 和我之中至少有一个是青蛙”便为真（单凭 C 已足够），但青蛙不可能说出真话。因此 C 是蟾蜍。

所以 C 的陈述为真：C、D 之中至少有一个是青蛙。既然 C 是蟾蜍，D 必定就是那只青蛙。

验算：若 C 是蟾蜍而 D 是青蛙，则该陈述为真，正符合蟾蜍的陈述必须为真的要求。所以 **C 是蟾蜍，D 是青蛙**。

第 (iii) 部分

以 S 表示 E 的陈述“G 和 H 都是蟾蜍”。那么 G 断言 S 为真，而 H 断言 S 为假。

> ? **想一想** 我们对任何一个角色都还一无所知。到底可以从哪里入手?

不要先看 E，而是把 G 和 H 放在一起看。他们两个的陈述恰好相反，所以其中恰有一个为真。因此，不论 S 最终是真是假，G、H 之中恰有一个是蟾蜍，另一个是青蛙。

这就确定了 S 的真假：既然 G、H 之中有一个是青蛙，他们便不可能都是蟾蜍，所以 S 为假。于是：

- E 说的话为假，所以 E 是青蛙；
- G 声称 S 为真，而这是假的，所以 G 是青蛙；
- H 声称 S 为假，而这是真的，所以 H 是蟾蜍。

验算：G 是青蛙，所以“G 和 H 都是蟾蜍”确实为假，与每一个结论都吻合。所以 **E 和 G 是青蛙，H 是蟾蜍**。

第 (iv) 部分

这里的“我们”是指 I、J、K 三个。

I 是青蛙。假如 I 是蟾蜍，“我们全部都是青蛙”便为真，于是 I 是青蛙，矛盾。所以 I 是青蛙，而 I 的陈述为假：三个并非全是青蛙，故此

$$\text{在 } J,\ K \text{ 之中至少有一个是蟾蜍.} \qquad (*)$$

J 是蟾蜍。反过来假设 J 是青蛙。那么由 $(*)$ 可知 K 是蟾蜍，三者分别是 I 青蛙、J 青蛙、K 蟾蜍：恰好有一只蟾蜍。这使 J 的陈述为真，而青蛙不可能说出真话。所以 J 是蟾蜍。

K 是青蛙。既然 J 是蟾蜍，J 的陈述便为真：三个之中恰好有一只蟾蜍。那只蟾蜍就是 J，所以 K 是青蛙。

想一想 现在知道 K 是青蛙，$(*)$ 还成立吗?

成立：$(*)$ 只要求 J、K 之中有一个是蟾蜍，而 J 正是。所以完整的验算如下：I 的“我们全部都是青蛙”为假（J 是蟾蜍），而 J 的“我们之中恰好有一个是蟾蜍”为真（只有 J）。两个陈述的真值都正确，所以 **I 和 K 是青蛙，J 是蟾蜍**。

验算

每个场景只有 2^2 或 2^3 种可能的指派，所以完整的验算不过是一张简短的真值表（truth table）：对每一种指派，检验是否每个说话者的陈述都恰好在该说话者是蟾蜍时为真。我们对全部四个场景都做了这样的穷举搜索，每个场景中都恰好只有一种指派能够成立，就是上面找到的那一种。（唯一性很重要：题目要求我们判定，所以我们必须排除其他指派，而不只是找出一个可行的。）

常见错误

- 找到一个没有矛盾的指派就停下来。你还必须证明其他指派都不可行，而这正是那些“假设他是...”的反证所起的作用。
- 在第 (iii) 部分，把 G 的“这是真的”当作关于 G 自己的陈述，而不是关于 E 的说法的陈述。
- 在第 (iv) 部分，忘记了 K 虽然一言不发，却仍然包括在“我们全部”和“我们之中恰好有一个”之内。

STEP 之外

这类谜题其实是命题逻辑（propositional logic）的练习：每只生物是一个布尔变量（Boolean variable）t，每个陈述是一条公式 P，而每个说话者都施加了约束条件 $t \iff P$。判定这样一组约束条件是否有解，就是可满足性（satisfiability）问题，它是理论计算机科学的核心课题；而第 (i) 部分那句自我否定的陈述，则是说谎者悖论（liar paradox）的一位温和的近亲。斯穆里安（Raymond Smullyan）的 *What Is the Name of This Book?*（《这本书叫甚么名字?》）是一本妙趣横生的骑士与无赖（knights and knaves）谜题集，一步步引领读者走向哥德尔（Gödel）的不完备定理（incompleteness theorem）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。