详细解答

STEP II 样本试卷，第 1 题

纯数学 · 部分分式

STEP II 样本试卷，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s2-q1

关键思路

在动用惯常的部分分式（partial fractions）那一套方法之前，先看看分子：它正正就是分母的导数（derivative）。由于分母可以分解为线性因式的乘积，f 是一个对数导数（logarithmic derivative），而乘积的对数导数等于各因式的对数导数之和。至于第二部分，方程变成三个单位分数（unit fractions）之和等于 1，单凭大小的考虑就足以迫使 x 非常小。

解答

部分分式

分母可以因式分解：

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x(x^2 + (a+b)x + ab) = x(x+a)(x+b),$$

求导后得

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

这恰好就是分子。所以 $\mathrm{f}(x) = D'(x)/D(x)$。

一般情况，$a \neq b$。三个因式 x、$x+a$、$x+b$ 互不相同（因为 $a \neq 0$、$b \neq 0$ 及 $a \neq b$），所以我们预期会有三个简单的部分分式。利用积法则（product rule），

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

再逐项除以 $D(x) = x(x+a)(x+b)$，得

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

（等价地，$\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$，而乘积的对数可拆成和。）当然，掩盖法（cover-up rule）也会得出同样的结果：在 $x=0$ 处留数（residue）为 $ab/(ab)=1$，在 $x=-a$ 处则为 $(3a^2-2a^2-2ab+ab)/((-a)(b-a)) = a(a-b)/(a(a-b)) = 1$，在 $x=-b$ 处亦同理。

> ? **想一想** 当 $a=b$ 时，这个形式会出甚么问题？

特殊情况，$a=b$。这时分母是 $x(x+a)^2$，带有一个重复因式（repeated factor），所以标准形式应为 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+a}+\frac{C}{(x+a)^2}$。但分子同样有因式 $x+a$：

$$3x^2+4ax+a^2 = (3x+a)(x+a),$$

所以它可以约去，剩下

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x+a}{x(x+a)} = \boxed{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+a}} \qquad (a=b),$$

其中最后一步用了掩盖法（$x=0$ 给出 $a/a=1$；$x=-a$ 给出 $-2a/(-a)=2$）。式中根本没有 $(x+a)^{-2}$ 项，所以 $C=0$。这与把 b 换成 a 后的一般公式一致，但值得留意的是，重复因式是消失了，而不是产生一个平方项。

由于 a 和 b 均不为零，因式 x 永远不会与 $x+a$ 或 $x+b$ 重合，所以只有以上这些情况。

当 $\mathrm{f}(x)=1$ 时

现在设 x、a、b 为正整数。在上述两种情况中（$a=b$ 的公式不过是一般公式取 $b=a$），

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b},$$

而三项全为正数。因为 $a,b\geq 1$，后两项各自严格小于 $\frac{1}{x}$。

> ? **想一想** 如果三个各不超过 $\frac{1}{x}$ 的分数加起来等于 1，x 最大可以是多少？

- 若 $x=1$，则 $\mathrm{f}(x) = 1+(\text{正数}) > 1$。
- 若 $x\geq 4$，则 $\mathrm{f}(x) < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} < 1$。
- 若 $x=3$，则 $x+a\geq 4$ 及 $x+b\geq 4$，所以 $\mathrm{f}(x) \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$。

所以 $\mathrm{f}(x)=1$ 迫使 $x=2$，这时我们需要

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b} = \frac{1}{2}.$$

两边乘以 $2(2+a)(2+b)$ 得 $2(2+b)+2(2+a) = (2+a)(2+b)$，即 $8+2a+2b = 4+2a+2b+ab$，所以

$$ab = 4.$$

由于 a、b 为正整数，仅有的可能是 $(a,b)=(1,4)$、$(2,2)$、$(4,1)$。因此 $\mathrm{f}(x)=1$ 恰好在以下情况成立：

$$(x,a,b)=(2,1,4),\quad (2,2,2),\quad (2,4,1),$$

这是有限个（三个）值，正如题目所求。注意 $(2,2,2)$ 属于特殊情况 $a=b$：$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$。

验算

这三个解就是我们熟悉的单位分数恒等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$。数值方面，我们以精确的有理数运算，在 2000 个随机有理点上把部分分式形式与原来的 f 作比较（$a\neq b$ 和 $a=b$ 两种情况都有），另外对所有 $1\le x,a,b<200$ 作穷举搜索，结果恰好找到上述三组数，再无其他。

常见错误

- 在 $a=b$ 的情况中带着 $\frac{C}{(x+a)^2}$ 项埋头硬算，却没有留意到可以约分；你应该得出 $C=0$，而看出分子中的因式 $(x+a)$ 就可以省却这番工夫。
- 忘记排除 $x=1$ 和 $x=3$；粗略的上界 $\mathrm{f}<3/x$ 只能处理 $x\ge 4$。
- 停在“$ab=4$”而没有列出各个解，或者只列出 $(1,4)$ 而遗漏 $(4,1)$ 和 $(2,2)$。

STEP 之外

恒等式 $D'/D=\sum 1/(x-r_i)$（其中 r_i 是多项式 D 的根，重根按重数计算）用途极广：它是关于根的幂和的牛顿恒等式（Newton's identities）的基础，在复分析（complex analysis）中又是辐角原理（argument principle）的基础；辐角原理借着沿一条曲线对 f'/f 积分，数出函数在曲线内的零点数目。像 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 这类求正整数解的方程属于埃及分数（Egyptian fraction）问题，是丢番图方程（Diophantine equations）中一个经典的角落，在那里像我们这样的估界论证就足以解决整个问题。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 对辐角原理有优美的几何阐述，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 则是入门丢番图方程的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。