详细解答

STEP I 样本试卷，第 9 题

纯数学 · 绝对值不等式

> **STEP I 样本试卷，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q9

关键思路

两部分的重点都是去掉绝对值符号（modulus sign），方法是准确找出符号内的式子在哪里变号，或在哪里穿过某个水平。在 (i) 中，设 $u = x + 1$，式子便化为 $u - 2/u$，它在 $u = 0$ 的两侧各自递增，因此不等式（inequality）只是在每一分支上把 u 限制在某个二次方程的两个根之间。在 (ii) 中，把 $\cos x - \sin x$ 写成单一个余弦，便可看出它在哪里变号，然后在该处把积分（integral）分段。

解答

第 (i) 部分

要使式子有定义，必须有 $x \neq -1$。设 $u = x + 1$，则 $u \neq 0$，且

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

把它记作 $f(u)$。不等式即为 $-2 < f(u) < 2$。

> ? **想一想** 为甚么不直接把各项乘以 $x + 1$?

因为 $x + 1$ 可以是负数，而乘以负数会令不等号反向；不小心处理的话，正是丢失一半答案的典型原因。我们改为利用 f 的形状。它的导数（derivative）是 $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$，所以 f 在 $u < 0$ 上严格递增（strictly increasing），在 $u > 0$ 上亦各自严格递增。在每一分支上，它都由 $-\infty$ 升至 $+\infty$：当 $u \to 0^-$ 时，$-2/u \to +\infty$；当 $u \to 0^+$ 时，$-2/u \to -\infty$；而当 $|u| \to \infty$ 时，$f(u) \sim u$。因此在每一分支上，f 取 -2 和 2 这两个值各恰好一次，而 $-2 < f < 2$ 正好在这两点之间成立。

对于 $u \neq 0$，乘以 u 可得两个等价的方程：

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

分支 $u > 0$。正根是 $u = -1 + \sqrt{3}$（此处 $f = -2$）和 $u = 1 + \sqrt{3}$（此处 $f = 2$）。由于 f 递增，$-2 < f(u) < 2$ 恰好在 $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$ 时成立，即 $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$。

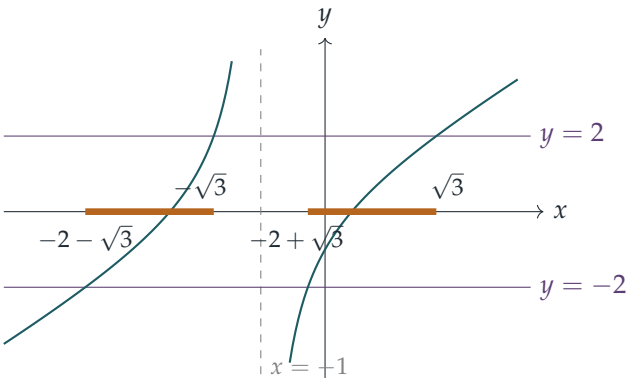
分支 $u < 0$。负根是 $u = -1 - \sqrt{3}$（此处 $f = -2$）和 $u = 1 - \sqrt{3}$（此处 $f = 2$）。同样由单调性（monotonicity）可知，$-2 < f(u) < 2$ 恰好在 $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$ 时成立，即 $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$。

两个区间都不包含 $x = -1$（留意 $-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$），所以解集（solution set）是

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

每个端点都符合题目要求的 $a + b\sqrt{3}$ 形式。端点不包括在内，因为在该处绝对值恰好等于 2。

把 $y = x + (x-1)/(x+1)$ 的图像与直线 $y = \pm 2$ 画在一起，可见曲线位于两条直线之间的两个区间（以琥珀色标示）。



第 (ii) 部分

把两项合并成一个余弦：

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时，有 $\pi/4 \leq x + \pi/4 \leq 5\pi/4$，而余弦在 $[\pi/4, \pi/2)$ 上为正，在 $(\pi/2, 5\pi/4]$ 上为负。因此当 $0 \leq x \leq \pi/4$ 时 $\cos x - \sin x \geq 0$，当 $\pi/4 \leq x \leq \pi$ 时则 ≤ 0。在 $\pi/4$ 处把积分分段，并利用 $\cos x - \sin x$ 的一个原函数（antiderivative）是

$\sin x + \cos x$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\sqrt{2} - 1\right) - \left(-1 - \sqrt{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

验算

- 在 (i) 中抽查数值：当 $x = 0$ 时，式子的值是 -1，在绝对值的界限之内，而 $0 \in (-2+\sqrt{3}, \sqrt{3})$；当 $x = -2$ 时，值是 $-2+3 = 1$，而 $-2 \in (-2-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$；当 $x = -1.5$ 时，值是 $-1.5+5 = 3.5$，在界限之外，而 $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$ 确实不在任何一个区间内。
- 在一个细密的网格上，以及在 $[-50, 50]$ 内的 2×10^5 个随机点上测试不等式，结果处处与这两个区间吻合，而在全部四个端点上，绝对值都等于 2。
- 在 (ii) 中，辛普森法则（Simpson's rule）给出 2.828427…，与 $2\sqrt{2} \approx 2.828427$ 相符；两段的值分别是 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ 和 $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$。作为合理性检查，被积函数（integrand）最大为 $\sqrt{2}$，所以积分最大为 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$。

常见错误

- 把 $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$ 的两边乘以 $x+1$ 而没有考虑其正负，结果丢失了（或错误地包括了）$x = -1$ 左边的区间。
- 只解 $f < 2$，或只解 $f > -2$：绝对值不等式要求两者同时成立。
- 在 (ii) 中，直接在整个 $[0, \pi]$ 上对 $\cos x - \sin x$ 积分，得出 -2（绝对值的积分得出负数，是一个警号）。

STEP 之外

(i) 的窍门，是把一个代数不等式换成关于单调函数（monotonic function）的陈述：若 f 在某区间上严格递增，则 $a < f(u) < b$ 恰好在 $f = a$ 与 $f = b$ 的两点之间成立。要严格证明这一点，需要用到介值定理（intermediate value theorem），它是大学分析课程中最早出现的重要结果之一；而带绝对值的不等式，例如 $|x - a| < \varepsilon$，正是该课程的日常语言。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门书）亲切易读，两者都可以在书

中见到。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。