详细解答

STEP I 样本试卷，第 8 题

纯数学 · 积分方程

STEP I 样本试卷，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

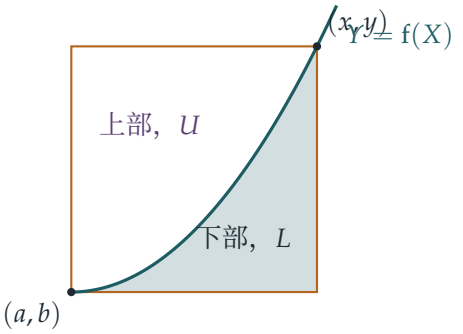
step.maths.org/questions/spec-s1-q8

关键思路

面积条件对 (x,y) 的每一个位置都成立，所以它其实是两个以 x 为自变量的函数之间的等式：一边是 f 的积分，另一边则涉及 $\mathrm{f}(x)$ 本身。对 x 求导便可消去积分，得出一个一阶微分方程（first-order differential equation），这个方程可以分离变量（或者更简洁地，化为“某个商的导数等于零”）。

解答

由于 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，曲线由矩形的一角 (a,b) 上升至对角 (x,y)，所以矩形的阔度为 $x-a$，高度为 $y-b=\mathrm{f}(x)-b\geq 0$。下部是曲线与底边 $Y=b$ 之间的区域（下图阴影部分）；上部则是余下的部分。



以 t 作为积分变量（因为 x 现在是积分上限），

$$L=\int_a^x (\mathrm{f}(t)-b)\,\mathrm{d}t, \qquad L+U=(x-a)(\mathrm{f}(x)-b).$$

条件 $L = \frac{1}{2}U$ 即是 $U = 2L$，所以整个矩形的面积为 $3L$：

$$3\int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t = (x-a)(\mathrm{f}(x) - b) \qquad \text{对所有} x \geq a. \tag{$*$}$$

想一想 怎样由一条含有积分的等式，得出一条可以解出 f 的方程?

由于 $(*)$ 对每一个 $x \geq a$ 都成立，两边是同一个以 x 为自变量的函数，所以它们的导数相等。函数 f 可微（differentiable）（题目提到 f′），因而连续（continuous），所以根据微积分基本定理（fundamental theorem of calculus），左边的导数是 $3(\mathrm{f}(x) - b)$。用积法则（product rule）对右边求导，

$$3(\mathrm{f}(x) - b) = (\mathrm{f}(x) - b) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

即

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2(\mathrm{f}(x) - b).$$

为了整理这条式，设 $g(x) = \mathrm{f}(x) - b$ 及 $u = x - a$，于是 $g' = \mathrm{f}'$，方程变成 $u\,g' = 2g$。我们可以分离变量（separate variables），得 $g'/g = 2/u$，但这样要除以 g，而它有可能等于零。更干净利落的做法是留意到，当 $x > a$（即 $u > 0$）时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

所以 g/u^2 是一个常数，设为 k，在 $x > a$ 上成立，于是

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

而这在 $x = a$ 时同样成立，因为 (a, b) 在曲线上。由于 $\mathrm{f}(x) \geq b$ 对 $x \geq a$ 成立（函数由 $\mathrm{f}(a) = b$ 开始非递减），我们有 $k \geq 0$，而且 $k > 0$，除非曲线是水平直线 $y = b$；在这情况下每个矩形都退化成面积为零，条件变得空洞。

因此曲线是 $y - b = k(x-a)^2$，其中 $x \geq a$：这是以 $x = a$ 为铅垂对称轴、顶点（vertex）位于 (a, b) 的抛物线（parabola）的一半。由于 $x \geq a$，我们只得到右边的一支，所以它是该抛物线的一段弧，正如题目所要求。

反过来，这条曲线确实满足条件：$L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$，而矩形的面积为 $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$，所以 $U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$。

验算

取 $a = b = 0$、$k = 1$ 及 $x = 3$：矩形为 3×9，面积为 27，而 $\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}t = 9$，所以两部分的面积分别为 9 和 18，比为 1 : 2。更一般地，对于 $y - b = k(x-a)^p$，下部与上部之比为 $1/p$（我们用辛普森法则（Simpson's rule）对 $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ 作了数值验算），所以比值 $\frac{1}{2}$ 正好对应 $p = 2$；直线（$p = 1$）把矩形平分，理应如此。

常见错误

- 把 x 同时用作积分上限和积分变量，令求导一步变得混乱。
- 把两部分调转，得出 $U = \frac{1}{2}L$，结果得到 $(x-a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f}-b)$ 及曲线 $y - b = k\sqrt{x-a}$，那是一条对称轴为水平的抛物线，方向不对。
- 不加说明便除以 $\mathrm{f}(x) - b$；上面利用商的论证避开了这个问题。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是一条*积分方程*（integral equation）：未知函数出现在积分之内。通过求导把它化为微分方程，并记住原来的方程同时决定了初始值（initial value），是标准的第一步；而答案的唯一性，则建基于这个事实：在一个区间上导数为零的函数必为常数（这是中值定理（mean value theorem）的推论）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 严谨地证明了微积分基本定理和中值定理；Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 则涵盖了像 $u\,g' = 2g$ 这类方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。