详细解答

STEP I 样本试卷，第 7 题

纯数学 · 复指数级数

> **STEP I 样本试卷，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q7

关键思路

每当见到 $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就抽出“半角”因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$：余下的是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$，它是实数。至于那个级数，二项式系数（binomial coefficients）$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$ 提示我们使用二项式定理（binomial theorem）。因此我们把每个正弦写成一个指数的虚部（imaginary part），于是该和就变成 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ 的某次幂的虚部，而第一部分已经把它化成极式（polar form）。

解答

模与辐角

抽出因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]\\ &= 2\cos\alpha\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

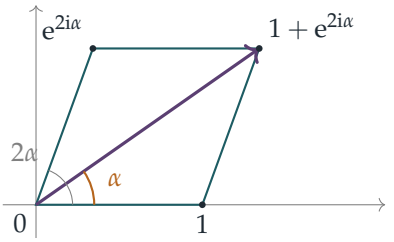
想一想 我们现在可以直接读出“模（modulus）为 $2\cos\alpha$，辐角（argument）为 α”吗？对 α 的限制有甚么用？

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 这个形式，只有在 $r>0$ 时才给出模 r 和辐角 θ。这里 $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos\alpha>0$，而且这个范围也落在主值区间 $(-\pi,\pi]$ 之内。因此

$$|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}|=2\cos\alpha,\qquad \arg(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})=\alpha.$$

（假如 $\cos\alpha$ 是负数，模就会是 $-2\cos\alpha$，而辐角则会相差 π。）

这里还有一个漂亮的几何图像。点 0、1 和 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ 构成一个边长为 1 的菱形，余下的一个顶点是 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$。由 0 出发的对角线平分角 2α，长度为 $2\cos\alpha$。



级数

由于对实数 θ 有 $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，而二项式系数都是实数，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r\Big] = \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n\Big], \end{aligned}$$

其中先用了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r$，再用二项式定理。现在利用第一部分的结果，配合棣美弗定理（de Moivre's theorem）$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

因为 $2^n\cos^n\alpha$ 是实数，取虚部便得

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

因式分解 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 对每一个实数 α 都成立。我们只是在指明模和辐角时才需要 $\cos\alpha > 0$，所以这条求和公式对所有实数 α 都成立，而不限于题目所给的范围。

验算

- $n=0$：两边都是 $\sin\alpha$。$n=1$：根据和化积公式（sum-to-product formula），左边是 $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$，与 $2\cos\alpha\sin 2\alpha$ 吻合。
- $n=3$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$：左边是 $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$，右边是 $8\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$。
- $\alpha=\frac{1}{2}\pi$：每一项 $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2}=(-1)^r$，所以当 $n\geq 1$ 时，和为 $(1-1)^n=0$，与 $\cos\frac{\pi}{2}=0$ 吻合。
- 我们以数值方法验证过，对 $0\leq n\leq 24$ 及随机选取的 α 值，公式都成立。

常见错误

- 把模写成 $2\cos\alpha$，却没有指出 α 的范围保证它是正数。模不可能是负数。
- 过早取虚部。$\operatorname{Im}(zw) \neq \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w$，所以要一直保留复数形式，到最后一步才取虚部。
- 把 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha}$ 写成 $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^r$，漏掉了额外的因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$。这样会令 $\sin(n+1)\alpha$ 变成 $\sin n\alpha$。

STEP 之外

同一个想法，即把 $\sum \binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\theta}$ 求和成闭合形式（closed form），也出现在傅里叶分析（Fourier analysis）之中。在那里，$\cos^n$ 类型的式子会展开成倍角之和，或由倍角之和收拢而成，而二项式权重 $\binom{n}{r}/2^n$ 就成为二项分布（binomial distribution）。抽出半角因子也是求 $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的模的标准方法，你会在等比级数（geometric series）和单位根（roots of unity）中遇到它。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把这些运算的几何观点阐述得十分精彩，当中也包括那幅菱形图。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。