详细解答

STEP I 样本试卷，第 6 题

纯数学 • 弓形的面积

> **STEP I 样本试卷，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

关键思路

这枚硬币是一个正七边形（regular heptagon），每条边外面各凸出一个圆弧形的“帽子”。因此它的面积等于七边形的面积加上七个弓形（circular segment）的面积，而每个弓形就是一个扇形（sector）减去一个三角形。于是整个问题归结为两个角：每段弧在其圆心所对的角（用圆周角定理（inscribed angle theorem）立刻可得），以及七边形的长对角线与其外接圆（circumcircle）半径之间的夹角。

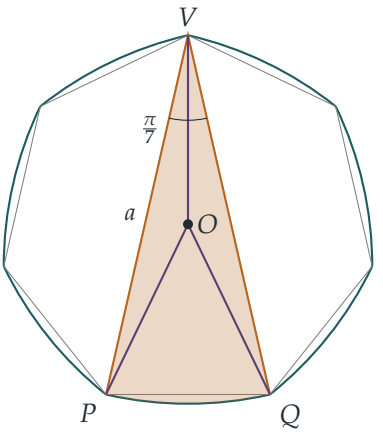
解答

形状

每个顶点（vertex）与它对面那段弧的两个端点的距离都是 a（两个端点都在以该顶点为圆心、半径为 a 的圆上）。所以七条“长”对角线（diagonal），即每条由一个顶点连到沿周界数过去第三个顶点的线段，长度全是 a。半径相等的等弧在各自圆心所对的角相等，所以七条边（即各段弧的弦（chord））也都相等。

把长对角线依次连起来，便得到一个各边长度均为 a 的七角星。它在每个尖角处的角，就是由该顶点出发的两条对角线之间的夹角；而这两条对角线连同对面的那条边，组成一个三角形，三边分别是 a、a 和共同的边长。这样的七个三角形全部全等（congruent），所以这个星形不但等边，而且等角，因而是正星形。由此可知，七个顶点就是一个正七边形的顶点，设其中心为 O，外接圆半径（circumradius）为 R。

把其中一个顶点记为 V，并设 P 和 Q 是以 V 为圆心的那段弧的两个端点；P 和 Q 是七边形的相邻顶点。



每段弧所对的角

边 PQ 在中心 O 所对的角是 $2\pi/7$。由于 V 在外接圆上，并且位于优弧（major arc）PQ 上，由圆周角定理得

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

所以每段弧都是半径为 a 的圆的一部分，在其圆心所对的角为 $\pi/7$，而扇形 VPQ（阴影部分）的面积是

$$\tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

把面积加起来

硬币的币面由七边形和七个弓形组成，每条边上各有一个弓形。七边形可分成七个像 OPQ 那样的三角形，而 PQ 上的弓形就是扇形 VPQ 减去三角形 VPQ。因此

$$\begin{aligned} \text{面积} &= 7\,[OPQ] + 7\big(\text{扇形}VPQ - [VPQ]\big) \\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7\big([VPQ] - [OPQ]\big), \end{aligned}$$

其中 $[\,\cdot\,]$ 表示面积。

想一想 怎样才能不必分别计算两个三角形，就求出 $[VPQ] - [OPQ]$?

中心 O 位于三角形 VPQ 之内，并在它的对称轴上，所以从三角形 VPQ 中除去三角形 OPQ，余下的就是两个全等三角形 OVP 和 OVQ:

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2 \cdot \tfrac{1}{2}\, R\, a \sin \angle OVP.$$

根据对称性，VO 平分 $\angle PVQ$，所以 $\angle OVP = \pi/14$。三角形 OVP 是等腰三角形（isosceles

triangle），其中 $OV = OP = R$，所以两个底角都是 $\pi/14$；由 O 向 VP 作垂线，便得

$$a = VP = 2R\cos\frac{\pi}{14}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

因此

$$[VPQ] - [OPQ] = R\,a\sin\frac{\pi}{14} = \frac{a^2\sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14},$$

而

$$\text{面积} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}\right),$$

这正是所要证明的结果。

验算

- 数值上，$\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$，所以面积约为 $0.772a^2$。在七段弧上密集取点，再用鞋带公式（shoelace formula）计算，结果吻合至小数点后六位；用蒙地卡罗（Monte Carlo）方法估算，结果也一样（一个点在硬币之内，当且仅当它与全部七个顶点的距离都不超过 a）。
- 这枚硬币在每个方向上的宽度都是 a，就像一个直径为 a 的圆盘，而圆盘的面积是 $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$。在所有定宽为 a 的图形之中，以圆盘的面积最大，所以我们预期答案会略小一些，而 $0.772a^2 < 0.785a^2$，正合预期。
- 把同样的论证用于勒洛（Reuleaux）n 边形（n 为奇数），可得 $\frac{a^2}{2}(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n})$；当 $n \to \infty$ 时，$n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$，面积趋向 $\pi a^2/4$，即圆盘的面积。取 $n = 3$ 则得 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$，就是大家熟悉的勒洛三角形（Reuleaux triangle）。

常见错误

- 把弧所对的角当作 $2\pi/7$（在中心 O 所对的角），而不是 $\pi/7$（在对面顶点所对的角，那里才是该段弧真正的圆心）。
- 把 a 与外接圆半径 R 混淆：a 是长对角线，$a = 2R\cos(\pi/14)$。

STEP 之外

50 便士硬币是一条定宽曲线（curve of constant width）：每一对互相平行的切线之间的距离都同样是 a，所以无论硬币怎样转动，投币口都能用同一方法量度它。巴比尔定理（Barbier's theorem）指出，每一条这样的曲线的周界都是 πa（这里是 $7 \cdot a \cdot \pi/7$），而布拉施克–勒贝格定理（Blaschke–Lebesgue theorem）则指出，其中以勒洛三角形的面积

最小。想进一步了解这类几何，可参阅柯朗（Courant）与罗宾斯（Robbins）的 *What Is Mathematics?*，书中有一节谈定宽曲线，写得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。